Sprawozdanie z listy trzeciej

Karolina Bąk

Listopad 2019

1 Zadanie 1

Celem zadania było zaimplementowanie metody bisekcji do rozwiązywania f(x)=0. Funkcja miała spełniać poniższą specyfikację:

Dane:

- **f** - f(x) jako anonimowa funkcja
- **a**, **b** - końce przedziału początkowego
- **delta**, **epsilon** - dokładności obliczeń

Wyniki:

- **r** - przybliżenie pierwiastka
- **v** - wartość f(r)
- **it** - ilość iteracji
- **err** - błąd
  - **0** - brak
  - **1** - funkcja nie zmienia znaku w [a,b]

Opis algorytmu:

Na początku przypisuję wartości końców odcinka do zmiennych u i w, a długość odcinka do e. Jeśli znaki zmiennych u i w są takie same, zwracam błąd (1), gdyż nie można wtedy zagwarantować, że gdzieś w tym przedziale będzie pierwiastek funkcji. W przeciwnym razie metoda działa dla funkcji ciągłych. Następnie w pętli zmniejszam przeszukiwany odcinek o połowę, sprawdzając środkową wartość w odcinku. Jeśli jest ona poprawna zgodnie z narzuconą dokładnością, zwracam wynik. Jeśli nie, to sprawdzam jej znak ze znakiem wartości funkcji na początku odcinka. Jeśli są różne, to szukam dalej pierwiastka w pierwszej połowie odcinka. Jeśli nie, szukam pierwiastka w drugiej połowie. Powtarzam proces, dopóki nie trafię na poprawny (w granicy błędu) wynik.

Pseudokod:

---

0. M - bezpiecznik przeciwko nieskończonej pętli - typemax(Int32)
1. u = f(a); w = f(b);
2. e = b-a
3. **if** sign(u) == sign(w)
   return(a,u,0,1)
4. **for** it in 1:M

4.1 e = e/2
    c = a+e
    v = f(c)
4.2 **if** |e| < delta **or** |v| < epsilon
    return(c,v,it,0)
4.3 **if** sign(v) != sign(u)
    b = c
    w = v
  else
    a = c
    u = v

---

2 Zadanie 2

Celem zadania było zaimplementowanie metody Newtona do rozwiązywania f(x)=0. Funkcja miała spełniać poniższą specyfikację:

Dane:

- **f** - f(x) jako anonimowa funkcja
- **pf** - f'(x) jako anonimowa funkcja
- **x0** - przybliżenie początkowe
- **delta**, **epsilon** - dokładności obliczeń
- **maxit** - maksymalna liczba iteracji

Wyniki:

- **r** - przybliżenie pierwiastka
- **v** - wartość f(r)
- **it** - ilość iteracji

- **err** - błąd
  - **0** - metoda zbieżna
  - **1** - nie znaleziono wyniku w maxit iteracji
  - **2** - pochodna bliska zeru

Opis algorytmu:

Na początku działania funkcji sprawdzam, czy udało się trafić w pierwiastek przy warunkach początkowych. Jeśli tak, to zwracam tą wartość. Jeśli nie, kontynuuję. Rozpoczynam pętle od 1 do maxit, w której na początku sprawdzam czy pochodna w x0 jest mniejsza niż wymagana dokładność. Jeśli tak, to przyjmuję, że jest bliżej zera niż powinna i zwracam błąd (2). Następnie obliczam następny x, czyli x1 (punkt przecięcia stycznej do funkcji w x0 z osią OX) równy $x0 - \frac{f(x0)}{f'(x0)}$. Potem sprawdzam czy x1 jest dobrym przybliżeniem pierwiastka. Jeśli tak, to zwracam uzyskaną wartość. Jeśli nie, to za x0 podstawiam x1 i kontynuuję poszukiwania. Jeśli po maxit iteracji nie uda mi się uzyskać odpowiedniego wyniku, zwracam błąd (1).

Pseudokod:

1\. v = f(x0);
2\. **if** |v| < epsilon
    return(x0,v,0,0)
3\. **for** it in 1:maxit
3.1 fprim = pf(x0)
3.2 **if** |fprim| < delta
    return(x0,v,it,2)
3.3 x1 = x0-v/fprim
    v = f(x1)
3.4 **if** |x1-x0| < delta **or** |v| < epsilon
    return(x1,v,it,0)
3.5 x0 = x1
4\. **return**(x1,v,maxit,1)

3 Zadanie 3

Celem zadania było zaimplementowanie metody siecznych do rozwiązywania f(x)=0. Funkcja miała spełniać poniższą specyfikację:

Dane:

- **f** - f(x) jako anonimowa funkcja

- **x0**, **x1** - przybliżenia początkowe
- **delta**, **epsilon** - dokładności obliczeń
- **maxit** - maksymalna liczba iteracji

Wyniki:

- **r** - przybliżenie pierwiastka
- **v** - wartość f(r)
- **it** - ilość iteracji
- **err** - błąd
  - **0** - metoda zbieżna
  - **1** - nie znaleziono rozwiązania w maxit iteracji

Opis algorytmu:

Zaczynam od ustalenia wartości funkcji dla punktów przybliżających. Potem zaczynam pętle od 1 do maxit. Jeśli |f(x0)| jest większe od |f(x1)| to zamieniam miejscami wartości zmiennych x0 oraz x1. Następnie wyliczam s równe $\frac{x1-x0}{f(x1)-f(x0)}$, które jest przybliżeniem pochodnej f(x), co pozwoli mi obliczyć następne x0 równe $x0-f(x0)*s$, które jest miejscem gdzie sieczna przechodząca przez x0 i x1 przecina oś OX. Następne x1 to stare x0. W kolejnym kroku sprawdzam, czy udało mi się przybliżyć pierwiastek. Jeśli tak, to zwracam uzyskany wynik. W przeciwnym razie kontynuuję obliczenia. Jeśli nie uda się znaleźć rozwiązania w maxit iteracji, zwracam błąd (1).

Pseudokod:

```
1. fx0 = f(x0); fx1 = f(x1)
2. for it in 1:maxit
2.1 if |fx0| > |fx1|
    swap(x0,x1)
    swap(fx0,fx1)
2.2 s = (x1-x0)/(fx1-fx0)
    x1 = 0; fx1 = fx0
    x0 = x0-fx0*s; fx0 = f(x0)
2.3 if |x1-x0| < delta or |fx0| < epsilon
    return(x0,fx0,it,0)
3. return(x0,fx0,maxit,1)
```

4 Zadanie 4

Celem zadania było zastosowanie zaimplementowanych wcześniej metod do znalezienia pierwiastka równania $\sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$. Deltę i epsilon w każdej metodzie ustawiłam na $\frac{1}{2}10^{-5}$.

1. Metoda bisekcji dla przedziału [1.5, 2] zwraca:

$$(r = 1.9337539672851562, v = -2.7027680138402843 * 10^{-7}, it = 16, err = 0)$$

2. Metoda Newtona z x0 = 1.5 zwraca:

$$(r = 1.933753779789742, v = -2.2423316314856834 * 10^{-8}, it = 4, err = 0)$$

3. Metoda siecznych z x0 = 1 i x1 = 2 zwraca:

$$(r = 1.933753644474301, v = 1.564525129449379 * 10^{-7}, it = 4, err = 0)$$

Wszystkie metody zwróciły ten sam pierwiastek z dokładnością do 10^{-6},więc każda z nich uzyskała poprawny wynik dla podanych dokładności. Najszybsza i najbardziej dokładna była metoda Newtona, a najwolniejsza i najmniej dokładna metoda bisekcji. Dzieje się tak, ponieważ metoda bisekcji zawsze zgaduje, że pierwiastkiem jest środek zawężanego przedziału, w przeciwieństwie do innych metod, które przybliżają pierwiastek, upraszczając wykres funkcji. Metoda bisekcji jest jednak bezpieczniejsza od innych metod z tego zadania, ponieważ nie może być rozbieżna.

5 Zadanie 5

Celem zadania było użycie metody bisekcji do znalezienia wartości x, dla której przecinają się wykresy funkcji e^xoraz 3x. Delta i epsilon wynosiły w każdej próbie 10^{-4}. Testowałam zadanie na dwóch funkcjach (dla pewności) $f_1(x) = e - 3x$ oraz $f_2(x) = 3x - e^x$. Otrzymałam poniższe wyniki:

$f_1(x)$:

przedział	r	v	it	err
[-1,1]	**0.619140625**	-9.066320343276146*10^{-5}	10	0
[-20,0]	-20	60.00000000206116	0	1
[-40,-20]	-40	120.0	0	1
[0,20]	0	1	0	1
[1,20]	**1.5121383666992188**	5.861476527257992*10^{-6}	17	0
[2,20]	2	1.3890560989306504	0	1
[20,40]	20	4.851651354097903*10^{8}	0	1

$f_2(x)$:

przedział	r	v	it	err
[-1,1]	**0.619140625**	9.066320343276146*10^{-5}	10	0
[-20,0]	-20	-60.00000000206116	0	1
[-40,-20]	-40	-120.0	0	1
[0,20]	0	-1	0	1
[1,20]	**1.5121383666992188**	-5.861476527257992*10^{-6}	17	0
[2,20]	2	-1.3890560989306504	0	1
[20,40]	20	-4.851651354097903*10^{8}	0	1

Dla obu testów uzyskałam takie same pierwiastki (wyróżnione pogrubioną czcionką) w wymaganej dokładności. Pierwszy przedział był szczęśliwym strzałem. Następne pozwoliły mi określić zachowanie funkcji poniżej 0. Przedział [0,20] pozwolił mi określić, że znajduje się tam jeszcze jeden pierwiastek, gdyż metoda zwróciła błąd, gdy w przedziale był na pewno pierwiastek, czyli funkcja musiała znowu zmienić znak. Kolejne przedziały pozwoliły na wyznaczenie drugiego pierwiastka oraz określiły, że funkcja prawdopodobnie nie ma już kolejnych pierwiastków (szybki wzrost wartości funkcji). Moim głównym wnioskiem z tego zadania jest to, że dobór przedziałów w tej metodzie jest niezwykle ważny i może wiele powiedzieć o funkcji.

6 Zadanie 6

Celem zadania było znalezienie miejsca zerowego dla funkcji $f_1 = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2 = xe^{-x}$za pomocą metod z zadań 1-3. Wymagane dokładności wynosiły 10^{-5}. Dla funkcji f_1 uzyskałam następujące wyniki:

1. Metoda bisekcji dla przedziału [-1, 1] zwraca:

$$(r = 0.9999923706054688, v = 7.629423635080457 * 10^{-6}, it = 18, err = 0)$$

2. Metoda Newtona z x0 = 0 zwraca:

$$(r = 0.9999984358892101, v = 1.5641120130194253 * 10^{-6}, it = 4, err = 0)$$

Dla x0 = 1 zwraca:

$$(r = 1.0, v = 0.0, it = 0, err = 0)$$

3. Metoda siecznych z x0 = -1 i x1 = 1 zwraca:

$$(r = 1.0, v = 0.0, it = 1, err = 0)$$

Dla funkcji f2 uzyskałam:

1. Metoda bisekcji dla przedziału [-1, 1] zwraca:

$$(r = 0.0, v = 0.0, it = 1, err = 0)$$

2. Metoda Newtona z x0 = 0 zwraca:

$$(r = 0.0, v = 0.0, it = 0, err = 0)$$

Dla x0 = 0.5 zwraca:

$$(r = -3.0642493416461764{*}10^{-7}, v = -3.0642502806087233{*}10^{-7}, it = 5, err = 0)$$

3. Metoda siecznych z x0 = -1 i x1 = 1 zwraca:

$$(r = 1.744165849924562{*}10^{-8}, v = 1.7441658195034172{*}10^{-8}, it = 18, err = 0)$$

Uzyskane wyniki mieszczą się w określonej dokładności i są zgodne z rzeczywistością (sprawdzone w WolframAlpha). Teraz sprawdzę, co by się stało, gdybym wybrała w metodzie Newtona trochę inne przybliżenia. Dla f_1 i x0 $\in$ (1, ∞], w teście równe 100:

$$(r = 100.0, v = -1.0, it = 1, err = 2)$$

Dzieje się tak, ponieważ pochodna funkcji w tym miejscu jest bardzo bliska zeru i przybliżenie stycznej wynosi y = 0, co jest błędne i nie pozwala metodzie dalej działać, gdyż opiera się ona na szukaniu miejsc, gdzie styczna przecina oś OX, a tu jest tych punktów nieskończenie wiele. Dlatego kiedy wykryję takie wartości pochodnej zwracam błąd.

Dla f_2 i x0 równego 1:

$$(r = 1.0, v = 0.36787944117144233, it = 1, err = 2)$$

Dzieje się tak, ponieważ pochodna dla f_2 zeruje się w x = 1, co sprawia, że metoda zwraca błąd. Trzeba też uważać na wartości większe od 1, gdyż pochodna nie będzie znajdować się wystarczająco blisko zera, ale będzie na tyle mała, żeby obliczone x1 oddaliło się od poprawnego wyniku i przy funkcji, która idzie do nieskończoności wartościami bardzo bliskimi zeru można uzyskać niepoprawne wyniki przy mało precyzyjnych dokładnościach. Na przykład dla x0 = 1.01:

$$(r = 102.00999999999992, v = 5.0846685549318855 * 10^{-43}, it = 1, err = 0)$$