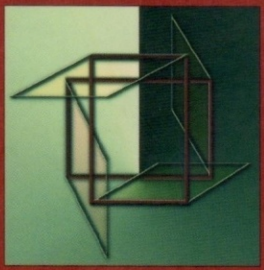
И. Ж. Ибатулин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА



Основная школа

ИЗДАТЕЛЬСТВО БИНОМ

И. Ж. Ибатулин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Основная школа

Учебное пособие

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний

УДК 51(079)
ББК 22.1
И13

Ибатулин И. Ж.

И13 Математические олимпиады: теория и практика. Основная школа. Учебное пособие / И. Ж. Ибатулин. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. — 358 с. : ил.

ISBN 978-5-9963-1503-1

Книга предназначена учителям математики для организации работы на занятиях математического кружка с учащимися основной ступени общего образования. Она содержит подборку задач и методов решения олимпиадных задач по математике по темам. Материалы книги рекомендуется встраивать в работу с олимпиадными задачами по математике в 5–6 классах (разделы «Переливания», «Взвешивания», «Игры», «Введение в комбинаторику»), в 7–9 классах (разделы «Математическая логика», «Введение в теорию множеств», «Элементы теории чисел», «Геометрия», «Комбинаторика»). В рамках работы кружка предполагается подготовка учащихся к участию в олимпиадах разного уровня.

УДК 51(079)
ББК 22.1

Учебное издание

Ибатулин Ибрагим Жоржевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА. ОСНОВНАЯ ШКОЛА. УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*
Ведущий методист *М. В. Кузнецова*. Обложка *И. Е. Марев*
Художественный редактор *Н. А. Новак*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Компьютерная верстка: *Е. А. Голубова*

Подписано в печать 04.06.13. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 22,5. Тираж 300 экз. Заказ 2216.

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272, e-mail: binom@Lbz.ru
http://www.Lbz.ru, http://e-umk.Lbz.ru, http://metodist.Lbz.ru

При участии ООО Агентство печати «Столица»
Отпечатано способом ролевой струйной печати
в ОАО «Первая Образцовая типография» Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1

ISBN 978-5-9963-1503-1

Содержание

Список использованных сокращений

СПО — Санкт-Петербургская математическая олимпиада
МЖО — Международная Жаутыковская олимпиада
ММР — Московская математическая регата
ЕНТ — Единое национальное тестирование Казахстана
МГУ — Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
КФМГУ — Казахстанский филиал МГУ
МГУ, физ. — физический факультет МГУ
МГУ, ВМК — факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ
МГУ, эконом. — экономический факультет МГУ
МГУ, географ. — географический факультет МГУ
МГУ, геолог. – геологический факультет МГУ
МГУ, гос. управл. — факультет государственного управления МГУ
МГУ, мех-мат — механико-математический факультет МГУ
МГУ, ВМК, устн. — устный экзамен ВМК МГУ
МГУ, ВШБ — высшая школа бизнеса МГУ
МГУ, почвовед. — факультет почвоведения МГУ
МГУ, психолог. — психологический факультет МГУ
КФМГУ, олимп. — олимпиада для поступающих в КФМГУ
КФМГУ, фил. — филологический факультет КФМГУ
КФМГУ, менедж. — отделение менеджмента экономического факультета КФМГУ
МК-МГУ — совместная олимпиада газеты «Московский комсомолец» и МГУ
МФТИ — Московский физико-технический институт
МГАП — Московская государственная академия печати
ИСАА — Институт стран Азии и Африки МГУ

Предисловие

Школьные олимпиады — это тоже своего рода спорт. А в спорте чем раньше начинаешь систематически заниматься, тем лучше. Однако, как известно, с учащимися младших классов (1–6 классы) занятия желательно проводить в игровой форме. При этом трудно спрашивать от них изложенный материал, хотя учащиеся третьего класса могут понять даже принцип Дирихле, но зачастую не могут потом полностью изложить свои мысли. В этих классах более эффективно использовать время занятий на развитие навыков изложения письменного решения и привития устойчивого интереса к математике, чем на изучение тонкостей математических теорий. Поэтому начинать серьезную теоретическую подготовку лучше с седьмого класса, причем можно попытаться построить ее так, чтобы *все*, кто приложит усилия для освоения и дойдут до конца, смогли уверенно выступать на олимпиадах, стали определенного рода специалистами. И если даже они не добьются значимых результатов на математических олимпиадах, то, по крайней мере, по стандартной программе физико-математических классов смогут учиться без напряжения. Именно такая попытка была предпринята в данном спецкурсе, который прошел успешную апробацию в Казахско-турецком лицее для мальчиков (г. Астана), средней школе «Келешек—РСФМСШИ» (г. Алматы) и др.

Отметим некоторые **моменты внедрения**

✓ Не требуется, чтобы в начале занятий были учащиеся, которые уже в младших классах показали свои математические способности или прошли предварительный отбор. По этой программе может заниматься любой учащийся. Хотя чем меньше способностей к математике, тем сложнее будет учиться. И тут уже важен характер. Кто-то сдастся, а кто-то пойдет до конца.

- ✓ В течение учебного года планируется 5 коллоквиумов, в конце учебного года — экзамен.
- ✓ Недельная нагрузка составляет 6 уроков. Поскольку в школе «Келешек-РСФМСШИ» школьные уроки — после обеда, занятия олимпийского резерва проводятся до обеда. Один день — 4 урока (с 10:00 до 13:00), другой день — 2 урока (с 12:00 до 13:20). Длительность одного занятия составляет 120 минут (2 урока). Олимпиады (отборочные туры) — по субботам или воскресеньям.
- ✓ Обычно на занятиях мы разбираем 20–30% всех задач. Причем формат проведения и подборка задач предполагают проведение занятий в следующем стиле. На занятиях не разбираются задачи, аналогичные тем, решения которых были показаны. Этому школьники уделяют время, когда дома оформляют блоки (по 20 задач). Главная цель — научить школьников выбирать метод для решения задач. То есть на занятиях мы не практикуем схему «показали — повторили — закрепили». Важно строго изложить теорию, объяснить нюансы. А применять полученные знания школьники учатся почти самостоятельно. Например, после разобранного теоретического материала к доске выходят четыре ученика, которым предлагается решить задачи. Большинство из этих задач решаются с применением разобранного материала, однако есть небольшое количество некорректных задач и задач, решение которых осуществляется совсем другим способом. Конечно, если учащийся не может самостоятельно решить задачу, то классу предлагается ему помочь, и только в крайнем случае учитель подсказывает отдельные идеи решения. Бывали случаи, когда занятие заканчивалось, а задача была не решена. Естественно, если учащиеся и на следующем занятии не могут ее решить, то им показывается решение.
- ✓ На первые занятия приглашаются все желающие. Однако с первых занятий все учащиеся проинформи-

рованы о том, что в группе смогут остаться только те, которые получат оценку за коллоквиум № 1 не ниже «2+». Нет жестких сроков сдачи коллоквиума. Но после того, как будет разобран материал коллоквиума № 1, желательно сдать его в течение первых двух недель.

- ✓ Сначала из списков группы исключаются только те учащиеся, которые в сумме на первых письменных олимпиадах набирают 0 баллов. Далее пороговый балл растет. Если на каком-то этапе учащийся был исключен из группы, то он сможет в нее войти, если на очередной письменной олимпиаде наберет необходимое количество баллов.
- ✓ Учащиеся, прошедшие подобный отбор, обычно уже понимают необходимость написания полного решения задач, лучше излагают свои мысли.
- ✓ Требуется довольно много часов для проверки (за период с декабря 2009 года по май 2010 года было проверено около 2500 решений задач).
- ✓ Если учащийся становится победителем или призером серьезной заочной математической олимпиады, то он получает допуск к любому коллоквиуму, а если становится призером очного тура, то за I место получает оценку «5» за один коллоквиум, за II место — «4», за III место — «3». Такие меры оказались весьма эффективными: резко увеличился интерес учащихся к различным математическим олимпиадам, особенно к заочным.
- ✓ Оценка за коллоквиум влияет на рейтинг и на процент сдачи заданий на следующий коллоквиум.
- ✓ Создана компьютерная программа на *VBA for Excel*, которая облегчает прием заданий и с помощью которой обеспечивается предотвращение попыток сдачи решений одной и той же задачи дважды.
- ✓ Создан электронный журнал, в котором отмечаются посещаемость, результаты олимпиад, коллоквиумов; на основе этой информации формируется индивидуальный рейтинг учащегося.

✓ Создан сайт олимпийского резерва РСФМСШИ им. О.А. Жаутыкова и школы «Келешек—РСФМСШИ» (http://fizmatschool.ucoz.kz).

Если сравнить предлагаемую систему отбора с существующими системами в Москве или Санкт-Петербурге, то данный подход ориентирован в первую очередь на тех, кто имеет некоторый скрытый внутренний потенциал (отчасти тестовая форма экзаменов мешает таким учащимся раскрыться). Однако чем выше начальный уровень учащегося, тем легче ему будет заниматься и тем более высоких результатов он сможет достигнуть.

Довольно легко работать с теми учащимися 7 классов, которые уже в 6 классах (или ранее) имели некоторые награды на математических олимпиадах или хотя бы на письменных олимпиадах решают не меньше 3 задач из 5. Однако что делать, если их нет? Некоторые могут сказать, что такие учащиеся безнадежны. А может, лучше попытаться раскрыть их внутренний потенциал? Однако для этого требуются время и специальная методика. Тогда как отобрать тех, кто сможет в дальнейшем раскрыться? Ответить на этот вопрос можно так: те учащиеся, которые пройдут предлагаемый спецкурс, обязательно проявят себя в дальнейшем. И результаты учащихся седьмых классов школы «Келешек—РСФМСШИ» на городских математических олимпиадах в Алматы в 2009–2010 учебном году являются тому подтверждением:

1 золото, 5 серебряных наград, 5 бронзовых (в 2008–2009 учебном году было 1 серебро, 2 бронзы).

Продолжив обучение по данной методике, эти же учащиеся в следующем учебном году завоевали 50 дипломов различного уровня:

Фамилия, имя	класс	Международные награды			Республиканские награды			Городские награды			всего
		1-е место	2-е место	3-е место	1-е место	2-е место	3-е место	1-е место	2-е место	3-е место	
Аманжолов Музахир	8В	2	1	3		1		2	1	2	12
Иманмалик Ержан	8Г	1		4			1	1	1	3	11
Сатубалдина Малика	8Б						1	1	2	2	6
Әбілдаев Бекжан	8А							1	1	1	3
Зинаддинов Мухамаддин	8Б								1	2	3
Джанкуразова Урия	8Г								2		2
Ержанқызы Адина	8А									2	2
Кенесбеков Темирлан	8Б						1			1	2
всего личных дипломов		3	1	7	0	1	3	5	8	13	41
командные дипломы		1	2	1	1			1	1	2	9
всего дипломов		4	3	*8*	1	1	*3*	6	9	*15*	50
			15			5			30		

Занятия 1–4

Табличный метод решения логических задач

Одной из основных трудностей, которая возникает при решении логических задач, является поиск связей между отдельными фактами из условия задачи. Примером логической задачи может служить известная **загадка Эйнштейна.** В своей самой сложной редакции задача предполагает решение в уме, без использования каких-либо записей или средств сохранения информации. *Без этих ограничений головоломка заметно теряет в сложности*, поскольку может быть решена простым составлением таблицы с исключением заведомо противоречивых вариантов. Существует множество различных вариантов условий задачи. В некоторых из них вопрос загадки звучит как «Кто разводит рыбок?», в других неизвестным животным выступает зебра. Меняются и национальности пяти упоминающихся людей. Первый известный опубликованный вариант головоломки появился в журнале «Life International» в номере от 17 декабря 1962 года. Выпуск от 25 марта 1963 года содержал решение и список из нескольких сотен фамилий читателей, правильно решивших задачу. Приведенный ниже вариант отличается от него переобозначениями действующих лиц, сигарет и животных, а также формулировкой двух посылок, но совпадает по логической структуре и соответствует варианту, получившему большое распространение в Интернете.

Пример 1 (загадка Эйнштейна). На одной стороне улицы подряд стоят пять домов, каждый — своего цвета. В каждом живет человек, все пять — разных национальностей. Каждый человек предпочитает уникальную марку сигарет, напиток и домашнее животное. Кроме того, известно следующее:

1. **Норвежец** живет в **первом** доме.
2. **Англичанин** живет в **красном** доме.

3. **Зеленый** дом находится слева от **белого**, рядом с ним.
4. **Датчанин** пьет **чай**.
5. Тот, кто курит **«Мальборо»**, живет рядом с тем, кто держит **кошек**.
6. Тот, кто живет в **желтом** доме, курит **«Данхилл»**.
7. **Немец** курит **«Ротманс»**.
8. Тот, кто живет **в центре**, пьет **молоко**.
9. Сосед того, кто курит **«Мальборо»**, пьет **воду**.
10. Тот, кто курит **«Палл Малл»**, держит **птиц**.
11. **Швед** держит **собак**.
12. **Норвежец** живет **рядом с синим** домом.
13. Тот, кто держит **лошадей**, живет в **синем** доме.
14. Тот, кто курит **«Винфилд»**, пьет **пиво**.
15. В **зеленом** доме пьют **кофе**.

Вопрос: Кто разводит **рыбок?**

○ *Решение.* По условию, норвежец живет в первом доме (1). Из (12) следует, что второй дом синий. Какого цвета первый дом? Он не может быть ни зеленым, ни белым, поскольку дома этих двух цветов должны располагаться рядом (3). Красным он тоже не может быть, потому что в красном доме живет англичанин (2). Итак, первый дом желтый. Следовательно, в первом доме курят «Данхилл» (6), а во втором доме держат лошадь (13). Что пьет норвежец (который живет в первом, желтом, доме и курит «Данхилл»)? Это не чай, поскольку чай пьет датчанин (4). И не кофе, потому что кофе пьют в зеленом доме (15). И не молоко, которое пьют в третьем доме (8). И не пиво, потому что человек, который пьет пиво, курит «Винфилд» (14). Следовательно, норвежец пьет воду.

дом	1	2	3	4	5
цвет	желтый	синий	?	?	?
национальность	норвежец	?	?	?	?
напиток	вода	?	молоко	?	?
сигареты	«Данхилл»	?	?	?	?
животное	?	лошадь	?	?	?

Из (9) следует, что человек, живущий во втором, синем, доме, курит «Мальборо». Какой национальности человек, живущий во втором, синем, доме, предпочитающий «Мальборо» и держащий лошадь? Это не норвежец — он в первом доме (1). Не англичанин — он в красном доме (2). Не швед — у шведа собака (11). Не немец — немец курит «Ротманс» (7). Значит, во втором доме живет датчанин и, как следует из (4), пьет чай.

дом	1	2	3	4	5
цвет	желтый	синий	?	?	?
национальность	норвежец	датчанин	?	?	?
напиток	вода	чай	молоко	?	?
сигареты	«Данхилл»	«Мальборо»	?	?	?
животное	?	лошадь	?	?	?

Зеленый дом не может быть третьим, поскольку в нем пьют кофе, а не молоко (15). Зеленый дом не может быть пятым, поскольку справа от него есть дом (3). Следовательно, зеленый дом — четвертый. Значит, белый дом — пятый, а красный — третий, и в нем живет англичанин (2). В зеленом доме пьют кофе, и для белого дома остается только пиво. Из (14) следует, что в белом доме курят «Винфилд».

дом	1	2	3	4	5
цвет	желтый	синий	красный	зеленый	белый
националь-ность	норвежец	датчанин	англича-нин	?	?
напиток	вода	чай	молоко	кофе	пиво
сигареты	«Данхилл»	«Мальборо»	?	?	«Вин-филд»
животное	?	лошадь	?	?	?

Где живет немец, который курит «Ротманс» (7)? Он может жить только в четвертом, зеленом доме. А значит, человек, который курит «Палл Малл» и разводит птиц, может жить только в третьем, красном доме — это англичанин.

дом	1	2	3	4	5
цвет	желтый	синий	красный	зеленый	белый
национальность	норвежец	датчанин	англичанин	немец	?
напиток	вода	чай	молоко	кофе	пиво
сигареты	«Данхилл»	«Мальборо»	«Палл Малл»	«Ротманс»	«Винфилд»
животное	?	лошадь	птицы	?	?

Тогда шведу, у которого собака (11), остается пятый дом. По условию (5), кошка живет в первом или в третьем доме, но в третьем доме — птицы, а значит, кошка в первом доме.

дом	1	2	3	4	5
цвет	желтый	синий	красный	зелены й	белый
национальность	норвежец	датчанин	англичанин	немец	швед
напиток	вода	чай	молоко	кофе	пиво
сигареты	«Данхилл»	«Мальборо»	«Палл Малл»	«Ротманс»	«Винфилд»
животное	кошка	лошадь	птицы	?	собака

Следовательно, рыбок держит **немец.**

Ответ:

дом	1	2	3	4	5
цвет	желтый	синий	красный	зеленый	белый
национальность	норвежец	датчанин	англичанин	немец	швед
напиток	вода	чай	молоко	кофе	пиво
сигареты	«Данхилл»	«Мальборо»	«Палл Малл»	«Ротманс»	«Винфилд»
животное	кошка	лошадь	птицы	рыбки	собака

●

Задача из примера 1 была решена нами с помощью таблицы. Однако таблицы в решении подобных задач имеют только иллюстративный характер. То есть это своего рода картинка, которая никогда даже частично не заменит решения. В общем случае таблицы условно можно разделить на три категории, которые соответственно связаны с определенными типами задач.

Самые простые таблицы используются при решении логических задач, в которых фигурируют только два типа информации, а каждое из утверждений в задаче является истинным. Тогда на пересечении строки и столбца в соответствующей таблице ставится некоторый символ, часто «+» («–») или «галочка», который означает, что данной строке соответствует информация из данного столбца.

Проиллюстрируем сказанное с помощью примера 2.

Пример 2. А, Б, В и Г — друзья. Один из них — врач, другой — журналист, третий — тренер спортивной школы и четвертый — строитель. Журналист написал статьи об А и Г. Тренер и журналист вместе с Б ходили в туристический поход. А и Б были на приеме у врача. У кого какая профессия?

○ *Решение.* Из того, что журналист написал статьи об А и Г, следует, что он не является ни А, ни Г. А поскольку еще он вместе с Б ходил в туристический поход, Б тоже не является журналистом. Значит, журналист — В. Тогда В не может быть ни врачом, ни тренером, ни строителем.

Профессии / **Фамилии**	врач	журналист	тренер	строитель
А		—		
Б		—		
В	—	+	—	—
Г		—		

Ясно, что Б не тренер, и не врач, значит, он строитель.

Профессии / Фамилии	врач	журналист	тренер	строитель
А		—		—
Б	—	—	—	+
В	—	+	—	—
Г		—		—

Ну и поскольку А был на приеме у врача, то он не врач. Тогда остается ему быть только тренером. Следовательно, врач – Г.

Ответ:

Профессии / Фамилии	врач	журналист	тренер	строитель
А	—	—	+	—
Б	—	—	—	+
В	—	+	—	—
Г	+	—	—	—

●

Замечание. Хотелось бы еще раз обратить внимание на то, что таблицы в решение примера 2 носили только иллюстративный характер, позволяя не упускать из виду оставшиеся на тот момент фамилии и специальности.

Второй тип таблиц обычно используется при решении задач, в которых есть не меньше трех различных типов информации и все утверждения в задаче являются истинными. Примеры таких таблиц были в решении задачи Эйнштейна. Однако необходимо помнить, что всякая таблица второго типа может быть заменена на две таблицы первого типа, и вообще, дело вкуса, сколько именно таблиц необходимо использовать для решения той или иной задачи. Хотя, конечно, хочется, чтобы решение было компактным и красивым.

И наконец, таблицы третьего типа связаны с задачами, в которых некоторые из утверждений могут быть ложны-ми. Здесь, несомненно, важным является тот факт, что для того чтобы доказать, что некоторое утверждение задачи истинно, необходимо доказать, что противоположное ему утверждение ложно. А это можно сделать, если удастся найти противоречие с условием задачи в предположении, что это противоположное утверждение истинно. Приведем пример.

Пример 3. Написав контрольную работу по математике, три гнома — Дори, Нори и Ори — сообщили своему знакомому хоббиту Бильбо Бэггинсу следующее:

Дори: «Я написал не на 5».

Нори: «На этот раз я написал на 5».

Ори: «Я написал не на 3».

После проверки работ выяснилось, что гномы получили разные положительные оценки и из трех приведенных высказываний только одно верное. Какую оценку получил за контрольную работу каждый из гномов?

○ *Решение.* Решение таких задач лучше начинать с тех мест, про которые есть больше всего информации. В данной задаче это оценка «5».

Рассмотрим несколько случаев.

Пусть оценку «5» получил Нори. Значит, два оставшихся утверждения ложны. То есть Ори написал на «3», Дори написал на «5».

Оценки / **Имена**	«3»	«4»	«5»
Дори	—	—	+
Нори	—	—	+
Ори	+	—	—

Но тогда два гнома написали на «5», что невозможно (по условию гномы получили разные отметки). И теперь мы точно знаем, что утверждение Нори ложно.

Если оценку «5» получил Ори, то его утверждение и утверждение Дори будут истинными, а это противоречит условию задачи, ведь из трех утверждений истинным может быть только одно.

Таким образом, мы теперь точно знаем, что на «5» написал Дори. Тогда утверждения Дори и Нори ложны, а утверждение Ори — истинно. Но Ори не мог написать на «5» и на «3». Значит, Ори написал на «4», а Нори написал на «3».

Ответ:

Оценки / Имена	«3»	«4»	«5»
Дори	—	—	+
Нори	+	—	—
Ори	—	+	—

●

1. В одном дворе живут четыре друга. Вадим и шофер старше Сергея; Николай и слесарь занимаются боксом; электрик — младший из друзей; по вечерам Антон и токарь играют в домино против Сергея и электрика. Определите профессию каждого из друзей.
2. Журавлев, Данилов и Никольский — друзья и владеют каждый двумя из следующих шести иностранных языков: английским, французским, немецким, итальянским, испанским и арабским. Каждым из этих языков владеет только один из них. Знающие французский и испанский языки — любители хоккея. Журавлев — самый младший из друзей. Никольский чаще ходит в гости к знающему немецкий язык, чем к знающему испанский язык. Знающий немецкий язык старше знающего арабский язык. Журавлев и владеющий английским языком часто играют в шахматы, а владеющий арабским языком не умеет играть в шахматы. Какими языками владеет каждый из друзей?
3. На заводе работают три друга: слесарь, токарь и сварщик. Их фамилии — Борисов, Иванов и Семенов. У слесаря нет ни братьев, ни сестер, и он самый младший из друзей. Семенов женат на сестре Борисова, он старше токаря. Назовите фамилии слесаря, токаря и сварщика.

4. Имена трех друзей — Костя, Вася и Коля. Их фамилии Семенов, Буров и Николаев. Дед Семенова — родной брат их соседа Петрова. Костя на год старше Коли, а Коля на год старше Николаева. Сумма их лет больше 49, но меньше 53. Дочь всем известного профессора Коробова — мать Коли. Определите имя, фамилию и возраст каждого из друзей.
5. В течение последних четырех лет сотрудники НИИЧАВО Привалов, Амперян, Корнеев и Выбегалло получают очередные отпуска в мае, июне, июле и августе. Причем один из них отдыхал в мае, другой — в июне, третий — в июле, а четвертый — в августе. Каждый из них получал отпуска в разное время. В первый год Корнеев отдыхал в июле, во второй год Корнеев отдыхал в августе, а Привалов — в мае. На третий год Выбегалло отдыхал в июне, а Амперян на четвертый год — в июле. В каком месяце отдыхал Привалов в первый год?
6. Поездная бригада состоит из бригадира, проводника, машиниста и помощника машиниста. Их зовут Андрей, Петр, Дмитрий и Трофим. Дмитрий старше Андрея. У бригадира нет родственников в бригаде. Машинист и помощник машиниста — братья. Других братьев у них нет. Дмитрий — племянник Петра. Помощник машиниста — не дядя проводника, а проводник — не дядя машиниста. Кто в качестве кого работает и какие родственные отношения существуют между членами бригады?
7. В районном городке живут пятеро друзей: Иванов, Петренко, Сидорчук, Гришин, Капустин. Профессии у них разные: один из них — маляр, другой — мельник, третий — плотник, четвертый — почтальон, пятый — парикмахер. Петренко и Гришин никогда не держали в руках малярной кисти. Иванов и Гришин все собираются посетить мельницу, где работает их товарищ. Петренко и Капустин живут в одном доме с почтальоном. Сидорчук был недавно одним из свидетелей на свадьбе Петренко и дочери парикмахера. Иванов и Петренко каждое воскресенье играют в городки с плотником и маляром. Гришин и Капустин

по субботам обязательно встречаются в парикмахерской, где работает их друг. Почтальон предпочитает бриться сам. Определите профессию каждого из друзей.

8. Кондратьев, Давыдов и Федоров живут на Пушкинской. Один из них — столяр, другой — маляр, третий — водопроводчик. Федоров и Кондратьев — родственники. Недавно маляр попросил столяра починить кое-что у него дома за вполне приличную плату. Столяр обещал зайти, но не пришел в условленный час. Маляр сам пошел к нему домой, но домашние столяра сказали, что тот ушел к внезапно заболевшему водопроводчику. Известно также, что Федоров никогда не слышал о Давыдове. Кто чем занимается?
9. Корнев, Докшин, Мареев и Скобелев — жители нашего города. Их профессии — пекарь, врач, инженер и милиционер. Корнев и Докшин — соседи и всегда на работу ездят вместе. Докшин старше Мареева. Корнев регулярно обыгрывает Скобелева в пинг-понг. Пекарь на работу всегда ходит пешком. Милиционер не живет рядом с врачом. Инженер и милиционер встречались единственный раз, когда милиционер оштрафовал инженера за нарушение правил уличного движения. Милиционер старше врача и инженера. Определите, кто чем занимается.
10. Борисов, Кириллов, Данин и Савин — инженеры. Один из них — автомеханик, другой — химик, третий — строитель, четвертый — радиотехник. Борисов, который обыгрывает в шахматы Данина, но проигрывает Савину, бегает на лыжах лучше того инженера, который моложе его, и ходит в театр вдвое чаще того инженера, который старше Кириллова. Химик, который посещает театр вдвое чаще, чем автомеханик, не является ни самым молодым, ни самым пожилым из этой четверки. Строитель, который на лыжах бегает хуже, чем радиотехник, как правило, проигрывает в шахматных сражениях автомеханику. Самый пожилой из инженеров лучше всех играет в шахматы и чаще всех бывает в театре, а

самый молодой лучше всех ходит на лыжах. Назовите профессии каждого из этой четверки инженеров, если известно, что ни в спорте, ни в приверженности к театру среди них нет двух одинаковых.

11. Дина, Соня, Коля, Рома и Миша учатся в институте. Их фамилии — Бойченко, Карпенко, Лысенко, Санченко и Шевченко. Мать Ромы умерла. Родители Дины никогда не встречались с родителями Коли. Студенты Шевченко и Бойченко играют в одной баскетбольной команде. Услышав, что родители Карпенко собираются поехать за город, мать Шевченко пришла к матери Карпенко и попросила, чтобы та отпустила своего сына к ним на вечер, но оказалось, что отец Коли уже договорился с родителями Карпенко и пригласил их сына к Коле. Отец и мать Лысенко — хорошие друзья родителей Бойченко. Все четверо довольны, что их дети собираются пожениться. Установите имя и фамилию каждого из молодых людей и девушек.

12. В семье Семеновых пять человек: муж, жена, их сын, сестра мужа и отец жены. Все они работают. Один — инженер, другой — юрист, третий — слесарь, четвертый — экономист, пятый — учитель. Вот что еще известно о них. Юрист и учитель — не кровные родственники. Слесарь — хороший спортсмен. Он пошел по стопам экономиста и играет в футбол за сборную завода. Инженер старше жены своего брата, но моложе, чем учитель. Экономист старше, чем слесарь. Назовите профессии каждого члена семьи Семеновых.

Указание. В данной задаче считается, что женщины в футбол не играют.

13. В педагогическом институте Аркадьева, Бабанова, Корсакова, Дашков, Ильин и Флеров преподают экономическую географию, английский язык, французский язык, немецкий язык, историю, математику. Преподаватель немецкого языка и преподаватель математики в студенческие годы занимались художественной гимнастикой. Ильин старше Флерова, но стаж работы у

него меньше, чем у преподавателя экономической географии. Будучи студентками, Аркадьева и Бабанова учились вместе в одном университете. Все остальные окончили педагогический институт. Флеров — отец преподавателя французского языка. Преподаватель английского языка — самый старший из всех по возрасту и по стажу работы. Он работает в этом институте с тех пор, как окончил его. Преподаватели математики и истории — его бывшие студенты. Аркадьева старше преподавателя немецкого языка. Назовите, кто какой предмет преподает.

Указание. В данной задаче считается, что мужчины не занимаются женской гимнастикой.

14. В купе пассажирского поезда «Москва–Одесса» ехали шесть пассажиров, живущих в разных городах: Москве, Санкт-Петербурге, Туле, Киеве, Перми и Одессе. Их фамилии: Агеев, Боков, Власов, Громов, Дубов и Елисеев. Известно, что:

1) Агеев и москвич — врачи;
2) Дубов и петербуржец — учителя;
3) Власов и туляк — инженеры;
4) Боков и Елисеев — участники Отечественной войны, а туляк в армии не служил;
5) пермяк старше Агеева, а одессит старше Власова;
6) Боков и москвич сошли в Киеве, а Власов и пермяк должны сойти в Харькове.

Определите профессию и место жительства каждого из пассажиров.

15. На столе стоят три совершенно одинаковых ящичка. В одном из них лежат два черных шарика, в другом — черный и белый, в третьем — два белых. На крышках ящичков есть надписи: «два черных», «два белых», «черный и белый». Однако известно, что ни одна из этих надписей не соответствует действительности. Сможете ли вы, вынув наугад шарик (не заглядывая в ящички), определить, где какие шарики лежат?

16. На каждой из четырех расположенных в ряд коробок написан цвет двух вложенных в нее мотков пряжи:

БВ, БЗ, БК, ЗК (Б — белый, З — зеленый, К — красный), но каждая надпись соответствует содержимому соседней коробки. Какие мотки вложены в каждую из коробок?

17. Вот какое испытание на сообразительность устроили однажды четырем любителям логических задач. Перед ними поставили четыре одинаковых ящичка. В одном лежали три черных шарика, в другом — два черных и один белый, в третьем — один черный и два белых, а в четвертом — три белых шарика. На каждом из ящичков был наклеен один из следующих ярлыков: «три черных», «два черных, один белый», «один черный, два белых», «три белых». Однако участникам испытания было сказано, что ни один из ярлычков не соответствует содержимому того ящичка, на который он наклеен. Участникам дали по ящичку, причем предварительно всех рассадили так, что каждый мог видеть ярлычок только на своем ящичке. Затем каждый должен был наугад вынуть два шарика из трех и, не заглядывая в ящичек, определить цвет оставшегося там шарика. Первый из участников, вынув два шарика, сразу же сказал: «Я достал два черных шарика и могу сказать, какого цвета оставшийся шарик». Второй тоже не замедлил с ответом: «Я вынул один белый, и один черный шарик и знаю, какой шарик остался в ящике». Третий, вынув два шарика, прочитал еще раз надпись на своем ящике, подумал и сказал: «Я вынул два белых шарика, но определить, какой шарик остался в ящике, невозможно». Четвертый был слепым и даже не видел, что написано на крышке его ящика. Однако, поразмыслив, он сказал: «Мне не нужно вынимать шарики. Я и без того знаю, какие шарики лежат в моем ящичке. Я даже знаю, какого цвета те шарики, которые остались в ящичках у каждого из моих товарищей». Как мог слепой прийти к таким удивительным выводам? Какие шарики оставались в ящичках его друзей, какие были у него самого?

18. Милиционер обернулся на звук бьющегося стекла и увидел четырех подростков, убегающих от окна, разбитого футбольным мячом. Через несколько минут они были в отделении милиции. При расспросах они сказали следующее.

Андрей: «Это не я. Это Григорий предложил играть в футбол. Виктор не виноват».

Виктор: «Это не я. Это не Андрей. Если бы я знал, чем это кончится, не стал бы играть в футбол».

Борис: «Это не я. Это сделал Виктор. Я играю в футбол лучше Григория».

Григорий: «Это не я. Это сделал Виктор. Когда я пришел, игра была в полном разгаре».

Из дальнейшего разговора выяснилось, что каждый два раза сказал правду, а один раз солгал. Кто разбил окно?

Указание. Проще рассмотреть два случая — Виктор не виноват, Виктор виноват.

19. В финале турнира шахматистов Российской Армии встретились представители восьми воинских званий: полковник, майор, капитан, лейтенант, старшина, сержант, ефрейтор и солдат. Все из разных родов войск: один — пехотинец, другой — летчик, затем танкист, артиллерист, десантник, минометчик, сапер и химик. Определите воинскую специальность каждого из восьми шахматистов по следующим данным. В 1-м туре полковник играл с десантником. Летчик приехал только ко второму туру. Во 2-м туре пехотинец играл с ефрейтором и майор со старшиной. После 2-го тура капитан выбыл из турнира по болезни. Из-за этого выходными оказались: в 3-м туре — сержант, в 4-м туре — танкист, в 5-м туре — майор. В 3-м туре лейтенант выиграл у пехотинца, а партия полковника с артиллеристом окончилась вничью. В 4-м туре сапер выиграл у лейтенанта, а старшина — у полковника. Перед последним туром доигрывалась оставшаяся не оконченной в 6-м туре партия десантника с минометчиком.

Указание. В турнире один и тот же шахматист два раза выходным не бывает и с каждым партнером играет только одну партию.

Занятия 5–6

Правдолюбцы и лжецы

Большинство задач типа «правдолюбцы и лжецы» строится по следующему принципу. Имеется три группы людей. Будем называть правдолюбцами тех, кто всегда говорит только правду, лжецами — тех, кто всегда только лжет, и хитрецами — тех, кто иногда говорит правду, а иногда лжет. Имеется ряд высказываний представителей этих групп. По их высказываниям требуется определить, к какой группе людей относится автор каждого высказывания.

20. На острове Логика живут два племени: аборигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, а пришельцы всегда лгут. Путешественник, приехавший на остров, нанял островитянина в проводники. Они пошли и увидели другого островитянина. Путешественник послал проводника узнать, к какому племени принадлежит этот туземец. Проводник вернулся и сказал, что туземец говорит, что он абориген. Кем был проводник: пришельцем или аборигеном?

21. Один человек является правдолюбцем, но когда ему дважды задали один и тот же вопрос, он дал на него разные ответы. Укажите хотя бы один такой вопрос.

22. Один человек является правдолюбцем, другой — лжецом. Найдите хотя бы один вопрос, который нужно задать каждому из них, чтобы они дали на него одинаковые ответы.

23. На острове Логика две деревни — *А* и *Б*. Жители *А* — правдолюбцы, жители *Б* — лжецы. Жители *А* бывают в *Б*, а жители *Б* бывают в *А*. Приезжий встретил человека в одной из этих деревень и хочет выяснить, в какой деревне он находится. Как он может узнать это у встреченного им островитянина: 1) за два вопроса; 2) за один вопрос?

24. На острове Логика местный житель *К* говорит о себе и другом жителе *М* острова: «По меньшей мере один из нас лжец». Кем являются *К* и *М*?

25. Из трех жителей *К*, *М* и *Р* острова Логика двое сказали следующее.
К: «Мы все лжецы».
М: «Один из нас правдолюбец».
Кто из жителей *К*, *М* и *Р* правдолюбец и кто лжец?

26. Из трех жителей *К*, *М* и *Р* некоторого города один является правдолюбцем, другой — лжецом, третий — хитрецом. Они высказали следующие утверждения.
К: «Я хитрец».
М: «Это правда».
Р: «Я не хитрец».
Кем в действительности являются *К*, *М* и *Р*?

27. На острове Трисельск три деревни: Правдино, Чередово и Лгуново. Известно, что жители первой деревни — правдолюбцы, жители третьей деревни — лжецы, а жители второй деревни — хитрецы, но с причудой: одно из любых двух высказанных ими подряд утверждений истинно, а другое ложно. Жители каждой деревни бывают в двух других деревнях. Однажды в пожарной части острова, где дежурный читал увлекательный роман, раздался телефонный звонок.
— Скорее приезжайте к нам! У нас в деревне пожар! — услышал он.
— В какой деревне?
— В Чередово, — был ответ.
Нужно ли посылать пожарную команду и в какую деревню?

28. Однажды в одной комнате находилось несколько жителей острова Логика. Трое из них сказали следующее.
— Нас тут не больше трех человек. Все мы — лжецы.
— Нас тут не больше четырех человек. Не все мы лжецы.
— Нас тут пятеро. Трое из нас лжецы.
Сколько в комнате человек и сколько среди них лжецов?

29. На острове Логика путешественник вышел на развилку дорог, и ему нужно было спросить у проходящего мимо островитянина, какая дорога ведет в деревню. Отличить по внешнему виду лживого от правдивого он не мог. Путешественник задал только один вопрос и по ответу узнал, по какой дороге ему следует идти. Что он спросил?

30. Корреспондент хочет взять интервью у четырех ученых A, B, C и K, о которых он знает, что трое из них правдолюбцы, а один — хитрец. Прежде чем брать интервью, корреспондент хотел бы узнать, кто из ученых хитрец. Как он может выяснить это за три вопроса?

31. На острове Логика однажды собрались четыре местных жителя, и между ними произошел такой разговор:

— По меньшей мере один из нас — лжец.

— По меньшей мере двое из нас — лжецы.

— По меньшей мере трое из нас — лжецы.

— Среди нас нет лжецов.

Кем является каждый из четверых — правдолюбцем или лжецом?

32. Однажды 12 жителей острова Логика встали в круг и каждый из них заявил, что один из его соседей — правдолюбец, а другой — лжец. Сколько правдолюбцев и сколько лжецов могло быть среди этих 12 человек? Укажите все ответы.

33. В комнате находится 10 человек, часть из них правдолюбцы, остальные — лжецы. Один из них сказал: «Здесь нет ни одного правдолюбца». Второй: «Здесь не более одного правдолюбца». Третий: «Здесь не более двух правдолюбцев». И т.д. Десятый: «Здесь не более девяти правдолюбцев». Сколько в действительности в комнате правдолюбцев?

34. В одной давно забытой стране был храм, где в один ряд были расположены статуи трех богов: правды, лжи и дипломатии, которые отвечали на вопросы верующих, причем бог правды всегда говорил правду, бог лжи — всегда ложь, а бог дипломатии — иногда правду, а иногда ложь. Внешне статуи были похожи, и никто не знал, кто же бог правды, кто бог лжи и кто бог дипломатии. Поэтому верующим приходилось обращаться к жрецам, чтобы выяснить, что же в ответах богов является правдой. И вот однажды молодой крестьянин по прозвищу Простак пришел в храм с намерением узнать, какая статуя каким богом является. Он смиренно подошел к статуе, которая была расположена от него справа, и спросил ее: «Какой бог находится рядом с тобой?» Статуя ответила: «Бог правды». Тогда он обратился к статуе крайней слева и задал ей тот же вопрос. Статуя ответила: «Бог лжи». Тогда он обратился к статуе, стоящей в центре, и спросил: «Кто же ты?» — на что та ответила: «Бог дипломатии». «Теперь все ясно», — сказал себе Простак. Каким образом Простак разгадал тайну богов?

35. Как-то раз на острове Трисельск приезжий встретился с пятью островитянами, которым он по характерным чертам дал следующие прозвища: Косоглаз, Борода, Алощек, Курнос и Длинноух. Желая узнать, в каких деревнях эти люди живут, приезжий попросил первых двух рассказать ему по порядку, кто из какой деревни родом.
Косоглаз ответил, что Борода — чередовец, Курнос — правдовец, Алощек также родом из Чередова, а Длинноух — лгуновец.
Борода, однако, утверждал, что Косоглаз — чередовец, Курнос из Лгунова, Алощек — правдовец, а длинноух из Чередова.
Можно ли из полученных ответов сделать верные выводы о родной деревне каждого из пяти островитян?

36. Каждый из четырех гномов — Балин, Двалин, Кили и Фили — либо всегда говорит правду, либо всегда врет. Однажды хоббит Бильбо Бэггинс услышал такой разговор.
Балин (обращаясь к Двалину): «Ты врун!»
Кили (обращаясь к Балину): «Сам ты врун!»
Фили (обращаясь к Кили): «Да оба они вруны, — и подумав, — впрочем, ты тоже».
Кто из этих гномов говорит правду?

37. (СПО, 1989) За круглым столом сидят k физиков и k химиков, причем некоторые из них всегда говорят правду, остальные лгут. Известно, что физиков-лжецов столько же, сколько химиков-лжецов. Все сидящие за столом утверждают, что их сосед справа — химик. Докажите, что k четно.

38. (Всероссийская олимпиада по математике, 1994) На совместной конференции партий лжецов и рыцарей в президиум было избрано 32 человека, которых рассадили в 4 ряда по 8 человек. В перерыве каждый член президиума заявил, что среди его соседей есть представители обеих партий. При каком наименьшем числе лжецов возможна описанная ситуация? (Два члена президиума являются соседями, если один из них сидит слева, справа, спереди или сзади от другого.)

39. (Московская математическая олимпиада, 1998) Некоторое количество аборигенов заявили, что на острове четное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечетное число лжецов. Может ли число аборигенов быть нечетным?

40. (Московская математическая олимпиада, 1998) Аборигены встали в круг, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, рыцарь тот или лжец. На основании этих сообщений путешественник однозначно определил, какую долю от всех жителей селения составляют рыцари. Определите и вы, чему она равна.

41. (Турнир городов, 1998, тренировочный вариант, осень) Двенадцать кандидатов в мэры рассказывали о себе. Через некоторое время один сказал: «До меня соврали один раз». Другой сказал: «А теперь — дважды». «А теперь — трижды», — сказал третий, и так далее до 12-го, который сказал: «А теперь соврали 12 раз». Тут ведущий прервал дискуссию. Оказалось, что по крайне мере один кандидат посчитал правильно. Так сколько же раз соврали кандидаты?

42. (Турнир городов, 2006, тренировочный вариант, осень) Известно, что вруны всегда врут, правдивые всегда говорят правду, а хитрецы могут и врать, и говорить правду. Вы можете задавать вопросы, на которые есть ответ «да» или «нет» (например, верно ли, что этот человек хитрец?).

а) Перед вами трое — врун, правдивый и хитрец, которые знают кто из них кто. Как и вам это узнать?

б) Перед вами четверо — врун, правдивый и два хитреца (все четверо знают, кто из них кто). Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что вы, спрашивая этих четверых, ни про кого из них не узнаете наверняка, кто он.

Занятия 7–14

Турнирные задачи

Решая задачу о шахматном или футбольном турнире, нужно знать основные положения о таких турнирах.

В шахматных турнирах победитель игры в партии получает одно очко, ничейный исход оценивается для каждого игрока в 0,5 очка, а проигравшему записывают нуль очков. Участники, набравшие одинаковое число очков, делят между собой соответствующие места.

В большинстве случаев решению задачи способствует оформление турнирной таблицы по данным, приведенным в условии задачи, а затем по данным, полученным логическим путем. Диагональные клетки такой таблицы или просто заштриховываются, или в них помещается какой-либо характерный значок, так как ни один участник турнира не играет сам с собой, и поэтому в диагональных клетках результаты встреч не отмечаются.

При фиксировании результата встречи, например, между участниками *Б* и *Г* при выигрыше *Б* в клетке на пересечении строки *Б* и столбца *Г* ставится 1, а в клетке на пересечении строки *Г* и столбца *Б* ставится 0. В случае ничейного исхода встречи в указанных клетках записывается по 0,5.

Количество очков в каждой строке таблицы суммируется, и места в итоге турнира распределяются в соответствии с набранным количеством очков.

Предполагается, что в футболе и хоккее победа дает два очка, ничья — одно, а поражение — ноль очков.

43. Шесть шахматистов *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д* и *Е* сыграли в турнире в один круг (каждый сыграл друг с другом по одной партии). *А* все свои партии свел вничью, *Б* не проиграл ни одной партии, *В* выиграл у победителя турнира и сыграл вничью с *Д*, *Г* опередил *Д*, но отстал от *Е*. Кто сколько очков набрал?

44. В финальном турнире играли пять шахматистов, причем *А* окончил все партии вничью, *Б* сыграл вничью с занявшими первое и последнее места, *В* проиграл *Б*, но зато сыграл вничью только одну партию, *Г* выиграл у *Д* и у занявшего четвертое место, *Д* не выиграл ни одной партии. Кто сколько очков набрал и какое место занял?

45. В розыгрыше приза открытия футбольного сезона в один круг участвовало пять команд *А*, *Б*, *В*, *Г* и *Д*, которые заняли места в том же порядке, начиная с первого. Команда *А* не сделала ни одной ничьей, команда *Б* не проиграла ни одной встречи, команда *Г* не выиграла ни одной встречи. Все команды набрали разное количество очков. Как окончилась каждая встреча?

46. В первенстве гимназии по футболу в один круг участвовало шесть команд. Наибольшее число очков в первенстве набрала одна команда. Может ли быть так, что она одержала меньше побед, чем любая другая команда?

47. В лицее проводился традиционный математический бой. В нем участвовали три команды: «Альфа», «Бета» и «Гамма». По условиям каждая из соревнующихся команд должна была составить пять задач и дать их решать своим соперникам. При подведении итогов выяснилось, что команда «Альфа» смогла решить только одну из задач, предложенных командой «Вета», и четыре задачи «Гаммы». Команда «Бета» решила три задачи, предложенные «Гаммой», и две задачи «Альфы». «Гамма» нашла решение всех пяти задач «Альфы», но не смогла решить ни одной задачи «Беты». Общее место присуждалось по итогам двух конкурсов: 1) на сложность (трудность) составленных задач; 2) на умение решать задачи. За первое место в каждом конкурсе присуждалось 2 балла, за второе — 1 балл; третье место не оценивалось. Определить, сколько баллов получила каждая команда в обоих конкурсах и каково итоговое распределение мест.

48. Иван и Антон произвели по пять выстрелов в одну мишень, попав в «5» один раз, в «7» два раза, в «8» один раз, в «9» два раза, в «10» два раза, в «11» один раз, в «12» один раз. Четырьмя последними выстрелами Иван выбил в 7 раз больше очков, чем первым. Последним выстрелом Антон выбил в 5 раз меньше очков, чем четырьмя первыми. Известно, что оба попали в круг «10». Кто из них попал в «12»?

49. Семь шахматистов сыграли в турнире в один круг. Победитель набрал вдвое больше очков, чем набрали вместе шахматисты, которые заняли три последних места. Занявший четвертое место набрал 3 очка. Как он сыграл с занявшим пятое место? С занявшим третье место?

50. Три друга сыграли между собой матч-турнир по шахматам в 8 кругов. Потом стали решать, кто является победителем. Первый из них сказал: «У меня больше, чем у каждого из вас, выигрышей». Второй сказал: «У меня меньше, чем у каждого из вас, проигрышей». Но когда подсчитали очки, оказалось, что больше всего очков набрал третий. Постройте пример такого распределения очков в матч-турнире.

51. В шахматном турнире в один круг участвовало 8 человек, и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько вместе набрали шахматисты, занявшие четыре последних места. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

52. Для выявления абсолютного победителя первенства НИИЧАВО по шахматам Амперян, Корнеев и Привалов сыграли матч-турнир (каждый с каждым сыграл одинаковое число партий). Могло ли случиться так, что по числу очков Амперян занял первое место, Привалов — последнее, а по числу побед, наоборот, Амперян занял последнее место, Привалов — первое?

53. В открытом первенстве лицея по шахматам участвовало 6 шахматистов, игравших друг с другом по одной партии. Таблица результатов турнира была испорчена и имела следующий вид:

Игрок	А	Б	В	Г	Д	Е	Очки	Место
Алексеев	⊙						4	I
Баранчук		⊙						II
Володин			⊙					III—IV
Горбачев				⊙		0		III—IV
Давыдов					⊙			V
Ершов						⊙		VI

Известно, что 5 партий турнира закончились «вничью», причем Баранчук сыграл «вничью» только одну партию. Требуется полностью восстановить таблицу турнира.

54. После окончания шахматного турнира в один круг все пять его участников *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д*, перечисленных здесь в порядке занятых мест, обменялись впечатлениями:

— Не думал, что лишь я один не испытаю горечи поражения, — сказал *Б*.

— А вот мне, единственному, не удалось одержать ни одной победы, заметил *Д*.

Попробуйте по этим данным восстановить турнирную таблицу: как каждый сыграл с остальными участниками?

55. Шесть команд участвовали в розыгрыше кубка по хоккею в один круг, причем все набрали разное количество очков. Только одна встреча была сыграна вничью. Каждая команда, кроме первой, выиграла у одной из команд, занявших более высокое место. Восстановите турнирную таблицу.

56. Победителями футбольного турнира оказались четыре команды: «Динамо», «Спартак», «Труд» и «Шахтер», набравшие одинаковое количество очков. Между командами-победительницами был проведен дополнительный турнир, на котором каждая команда сыграла с каждой по одному матчу. Команда «Динамо» набрала 5 очков, «Труд» — 3 очка, «Шахтер» — 1 очко. На дополнительном турнире было забито 11 мячей, из которых 5 забили игроки «Труда». Кстати, эта команда победила «Шахтер» со счетом 2:1. Восстановите исход матчей с указанием счета в каждом матче, если известно, что один из матчей закончился со счетом 3:3.

57. В первенстве города по хоккею с шайбой, где каждая команда сыграла по одному разу с другими командами, участвовали четыре команды: «Север», «Юг», «Восток» и «Запад». Последняя встреча закончилась неожиданно: «Север» проиграл «Востоку», однако это не помешало «Северу» стать чемпионом, а «Восток» не улучшил своего турнирного положения. Как сыграли между собой «Юг» и «Запад»?

58. В розыгрыше первенства по хоккею встретились пять сильнейших команд: «Авангард», «Буревестник», «Динамо», «Спартак» и «Торпедо». Все команды сыграли между собой по одному матчу, причем в каждом туре одна из них оказывалась свободной от игры. В первом туре «Буревестник» проиграл спартаковцам, а во втором туре выиграл у «Авангарда». В третьем туре команда «Торпедо» была свободна от игры, одержав перед этим победу и проиграв другую встречу. В четвертом туре свободным от игры был «Авангард», имевший в своем активе две победы при трех сыгранных турах. Прошлогодние чемпионы — динамовцы — к этому времени сумели выиграть только один матч. Каких результатов добилась каждая из команд в соревнованиях, если встречи четвертого и пятого туров закончились вничью?

59. Три футбольные команды провели между собой турнир, состоящий из двух кругов. Результаты игр:

Команда	Очки	Мячи
«Метеор»	6	9:1
«Комета»	5	5:1
«Ракета»	1	1:13

Определите результаты шести матчей, если один из матчей «Метеор» — «Ракета» закончился со счетом

1:1. Два матча турнира завершились с одинаковым счетом. При этом нужно иметь в виду, что команды в турнирной таблице расположены в соответствии с занятыми местами.

60. Четыре футбольные команды — «Старт», «Комета», «Ракета» и Вымпел» — провели каждая с каждой по одному матчу. Судья изготовил таблицу, содержащую результаты их встреч. Машинистка отпечатала таблицу с образца и отдала ее судье. Но старая печатная машинка ничего не отпечатала.

Команда	С	К	Р	В	Победы	Ничьи	Мячи	Очки
«Старт»	⊗							6
«Комета»		⊗		1:0			2:	
«Ракета»			⊗				:8	
«Вымпел»		0:1		⊗				

Однако судья помнил, что остальные матчи окончились со счетом 2:0, 1:1, 2:2, 3:1, 5:3. Помогите судье восстановить таблицу.

61. (Московская математическая олимпиада, 2000 г.) Будем называть встречу двух игроков неправильной, если выигравший ее набрал меньше очков, чем проигравший. Какую долю от общего числа встреч могут составлять неправильные?

62. В футбольном турнире каждая пара команд должна встретиться между собой один раз. После очередного тура Боря подсчитал, что четное число встреч провели семь команд. После следующего тура Боря обнаружил, что четное число встреч по-прежнему имели семь команд. Возможно ли такое? Если да, то можно ли определить, сколько команд участвовало в турнире? (Расписание турнира составлено так, что в каждом туре свободно не более одной команды.)

63. Два стрелка произвели по пять выстрелов, причем попадания были следующие: 10, 9, 9, 8, 8, 5, 4, 4, 3, 2. Первыми тремя выстрелами они выбили одинаковое количество очков, но тремя последними выстрелами первый стрелок выбил втрое больше очков, чем второй. Определите, сколько очков набрал каждый из них третьим выстрелом.

64. Стрелок десять раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Сколько было попаданий в «7», «8» и «9», если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было?

65. Недавно я нашел прошлогоднюю таблицу футбольного турнира между шестыми классами гимназии. На ней сохранилась лишь небольшая часть записей:

Коласс	6«А»	6«Б»	6«В»	6«Г»	Очки	Мячи	Место
6«А»	⊗	1:1				:3	
6«Б»		⊗			1	:4	
6«В»			⊗			3:1	1
6«Г»	:5		:1	⊗	3	:7	

Восстановите таблицу.

66. На соревнованиях по стрельбе спортсмен после шести выстрелов набрал 96 очков. Проверка мишени показала, что в ней имеется только три отверстия. Судьи установили, что в некоторые отверстия пули попали более одного раза. Определите, какие попадания могли дать в сумме 96 очков, если круги мишени оценены в 1, 2, 3, 5, 10, 20, 25 и 50 очков.

67. Удалов, Грубин, Белосельский и Ложкин решили посоревноваться на звание лучшего рыбака Великого Гусляра. Но ведь рыба рыбе — рознь. Поэтому они договорились каждую рыбу оценивать по-разному: поймал судака — получай 5 очков, за леща — 4, за окуня — 2, а за ерша — 1 очко. Единственного судака поймал Удалов. Было выловлено всего 3 окуня. Все рыбаки вместе набрали 18 очков. Меньше всего очков получил Грубин, хотя он и наловил больше всех. Грубин и Белосельский вместе набрали столько же очков, сколько Удалов и Ложкин вместе. И наконец, у всех оказалось разное количество очков. Какой улов был у каждого из рыбаков?

68. Тренер команды пятиборцев решил устроить для своих воспитанников отборочные соревнования. В программу состязаний он включил плавание, кросс, фехтование, стрельбу и верховую езду. В итоге соревнований по сумме набранных баллов на первое место вышел Ачкасов, за ним шли Боровский, Колоколов, Дикувтин и на последнем месте оказался Емельянов. Система оценки результатов была выбрана такая: занявший первое место в состязании по тому или другому виду спорта получал 5 баллов, следующий за ним получал 4 балла и т. д. Ачкасов закончил соревнования, набрав 24 балла. Колоколов получил по четырем видам спорта одинаковые баллы. Емельянов завоевал первенство в соревнованиях по стрельбе, а по верховой езде вышел на третье место. Какое место на соревнованиях по стрельбе занял Боровский?

69. «Мы с подружками по вечерам занимались разгадкой ребусов», — писала сестре Таня. «Получилось настоящее соревнование. Оно продолжалось столько дней, сколько было участниц. Каждой из нас ежедневно засчитывалось 1 очко за решение первого ребуса, 2 — решение второго, 3 — за решение третьего и т. д. И вот что интересно. Мы решили 100 ребусов. Сумма очков, которую мы вместе набирали каждый вечер, неизменно равнялась 100. Каждая из нас, в конце концов, набрала по 100 очков, причем ни разу не было так, чтобы кто-нибудь из нас не решил за вечер ни одного ребуса. В первый вечер я решила семь ребусов, а Света — шесть. В последний вечер Лена решила только три ребуса». Достаточно ли этих сведений, чтобы выяснить, сколько ребусов решила Лена в первый вечер?

70. Я пришел на трек, когда соревнования уже начались. Поэтому с фамилиями участников заездов мне пришлось ознакомиться по программе, которую мне дал сосед. Крупным шрифтом на фоне силуэта склонившегося над рулем велогонщика было написано: Николаев, Сорокин, Виноградов и Романов. — Вы за кого болеете? — спросил мой сосед, — за Николаева, Виноградова или армейца? Но нам не дали договорить аплодисменты зрителей: в тот момент Николаев обходил на вираже туляка и спартаковца. Когда положение выровнялось, я ответил ему:

— Виноградова и тюменца я вижу впервые, но думаю, что молодежь не уступит опытному динамовцу.

И словно в подтверждение этих слов, на дорожке разыгралась острая спортивная борьба. До финиша остается четыре круга. Виноградов и иркутянин пытаются возглавить гонку. За три круга до финиша спартаковец и Сорокин резким броском уходят вперед. Когда остается два круга, хабаровец опережает спартаковца. На последнем круге зенитовец обходит туляка и первым пересекает линию финиша. Третье место остается за спартаковцем. — Ну, каково? — спросил я сидящего рядом болельщика.

— Победил сильнейший, — ответил он, улыбаясь.

Кто из спортсменов занял первое место и как распределились последующие места? Честь какого города и спортивного общества защищал каждый спортсмен?

71. На соревнованиях по конному спорту наездникам — жокеям Росину, Гордееву, Новикову и Волкову — предстояло в финале провести скачки на четырех конях: Стоике, Менторе, Алмазе и Буяне. За победу в заезде победители (как жокей, так и конь) получали 4 очка, за второе место — 3 очка, за третье — 2 очка, а за четвертое место — 1 очко. В первом заезде победителем оказался Гордеев на коне Стоике, а остальные места распределились в алфавитном порядке лошадиных кличек. Во втором заезде жокеи поделили места в алфавитном порядке своих фамилий. В третьем заезде первым на финише был Новиков на Алмазе, остальные места распределились по тому же принципу, что и в первом заезде. В последнем заезде Волков на Стоике занял третье место, а Гордеев на Буяне — последнее место. Победителем заезда стал Росин. Кто из жокеев стал победителем соревнований, набрав наибольшее количество очков, и какая лошадь была признана лучшей?

72. (Московская математическая олимпиада, 1946) В шахматном турнире участвовали два ученика 7-го класса и некоторое число учеников 8-го класса. Два семиклассника набрали вместе 8 очков, а каждый восьмиклассник набрал одно и то же число очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире? (Каждый участник играет с каждым другим один раз.) Найдите все решения.

73. (Московская математическая олимпиада, 1960) В турнире каждый шахматист половину всех очков набрал во встречах с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек участвовало в турнире?

74. (Московская математическая олимпиада, 1968) В шахматном турнире участвовало 12 человек. После окончания каждый составил 12 списков. В первый список входит он сам, во второй — он и те, у кого он выиграл, в третий все люди из второго списка и те, у кого они выиграли, и т. д. В 12-й список входят все люди из 11-го и те, у кого они выиграли. Известно, что для любого участника турнира в его 12-й список попал человек, которого не было в его 11-м списке. Сколько ничейных партий было сыграно в турнире?

75. (Московская математическая олимпиада, 1971) В футбольном турнире участвовало 25 команд. По окончании оказалось, что ни в одной встрече ни одна команда не забила в ворота противника более четырех мячей. Какое самое низкое место могла занять команда, забившая мячей больше, чем любая другая, и пропустившая меньше любой другой команды?

76. (Московская математическая олимпиада, 1975) В футбольном турнире принимают участие n команд (в один круг). Какой максимальный разрыв в очках может быть между командами, занявшими соседние места?

77. (Московская математическая олимпиада, 1995) В поединке любых двух из девяти борцов разной силы всегда побеждает сильнейший. Можно ли разбить их по трое на три команды так, чтобы во встречах команд по системе «каждый с каждым» по числу побед первая команда одержала верх над второй, вторая — над третьей, а третья — над первой?

78. (СПО, 1998) Футбольный турнир проходит в один круг. За победу давалось 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Могло ли так случиться, что команда, занявшая первое место, при старой системе подсчета очков (победа — 2 очка, ничья — 1 очко, поражение — 0) была бы последней?

79. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1963) В шахматном турнире участвовали 8 шахматистов (каждый сыграл по разу с каждым). Все они набрали различное число очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько набрали вместе шахматисты, занявшие места с 5-го по 8-е. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие 3-е и 5-е места?

80. (Всероссийская олимпиада по математике, 1992) Один круговой футбольный турнир закончился тем, что команды набрали по разному количеству очков, а команда, занявшая последнее место, выиграла у трех призеров. Докажите, что в турнире не могли участвовать 12 команд.

81. (Московская математическая олимпиада, 1997) В круговом турнире не было ничьих, за победу давалось 1 очко, за поражение — 0. Затем был определен коэффициент каждого участника. Он равнялся сумме очков, набранных теми, кого победил данный спортсмен. Оказалось, что у всех участников коэффициенты равны. Число участников турнира больше двух. Докажите, что все спортсмены набрали одинаковое количество очков.

82. (ММР, 2002, 1-й тур, 7-й класс) У трех членов жюри спросили: «Сколько команд будет участвовать в математической регате?» Один сказал: «Меньше семидесяти двух». Другой: «Меньше семидесяти одной», а третий: «Меньше семидесяти трех». Сколько команд участвовало в регате, если правы были в точности двое членов жюри?

83. (ММР, 2002, 4-й тур, 7-й класс) Шахматный турнир проводился по круговой схеме (каждый участник должен был сыграть с каждым из остальных по одной партии). Двое участников, Вася и Петя, сыграв одинаковое количество партий, заболели и выбыли из турнира. Успели ли они сыграть между собой, если всего в турнире было сыграно 23 партии?

84. (ММР, 2003, 2-й тур, 8-й класс) В круговом турнире каждый участник встретился с каждым один раз (победа — 1 очко, ничья — 0,5 очков, поражение — 0 очков). Единоличным победителем турнира стал Иванов. Затем за употребление допинга был дисквалифицирован Петров, результаты всех игр с его участием были аннулированы, и единоличным победителем стал Сидоров. Петров утверждал, что если бы дисквалифицировали не его, а Сидорова, то он (Петров) стал бы единоличным победителем. Может ли это быть правдой?

85. (ММР, 2004, 2-й тур, 8-й класс) В шахматном турнире каждый участник встретился с каждым ровно один раз (победа — 1 очко, поражение — 0, ничья — половина очка). Все шахматисты набрали одинаковое количество очков. Если удалить любого участника и аннулировать результаты встреч с ним, то количество очков у всех остальных участников по-прежнему будет одинаковым. Верно ли, что все партии этого турнира закончились вничью?

Логические задачи на индукцию

Есть широко распространенное высказывание:

> «Сила математика определяется в умении видеть аналогии».

Однако этому не так просто научиться. И первым шагом на пути к такому умению является развитие навыков описания свойств, поведения объектов, которые сами являются частью системы, им подобной, например, фракталы (см. рис. 1).

Оказывается, и в логических рассуждениях может быть что-то подобное. Примеры таких рассуждений можно встретить в решении логических задач на индукцию — там, где необходимо проводить рассуждения, не только

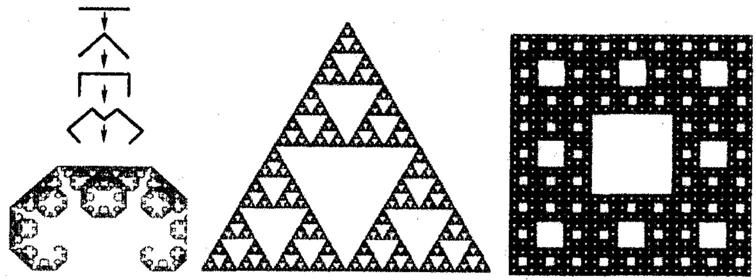


Рис. 1

оперируя имеющейся информацией из условия задачи, но и проводя рассуждения за некоторых участников.

Пример 1. Три мудреца поспорили, кто из них мудрее. Спор помог решить случайный прохожий. «Вы видите у меня, — сказал он, — пять колпаков: три красных и два белых. Закройте глаза». И он надел каждому по красному колпаку, а белые спрятал. «Можете открыть глаза, — сказал прохожий. — Кто угадает, какого цвета колпак украшает его голову, тот вправе считать себя самым мудрым». Долго сидели мудрецы, глядя друг на друга. Наконец один воскликнул: «На мне красный!» Как он догадался?

○ *Решение.* Пусть догадался первый. Попробуем разобраться, как он это сделал. Первый не знает, какого цвета колпак у него на голове. Поэтому он начинает рассуждать: если у меня на голове белый колпак, то второй видит перед собой один белый и один красный колпак. Тогда второй должен был догадаться, что у него на голове красный колпак. Ведь если бы у него был белый колпак, то третий, видя два белых колпака, тут же бы воскликнул, что у него на голове красный колпак. Раз третий молчит, и второй не догадался, то у меня на голове красный колпак. ●

86. В игре участвуют два мудреца. Перед началом игры им предъявили три колпака: два красных и один белый. Определить, кто будет победителем, если на одного участника игры надели красный колпак, а на другого — белый.

87. В игре участвуют пять мудрецов. Перед началом игры им предъявлено десять колпаков: шесть красных, два белых и два синих. Определить, кто будет победителем игры, если на трех участников игры надели красные колпаки, на одного — белый и на одного — синий.

88. Три гнома — Фили, Балин и Двалин — сидели без головных уборов друг за другом. Причем Балину и Двалину было запрещено оглядываться назад, Балин же видел голову сидящего впереди Двалина, а Фили — головы обоих своих приятелей. Из мешка, содержащего два белых и три красных колпака (об этом все трое были осведомлены), каждому был надет колпак неизвестного (для него) цвета, а два колпака неизвестного (для всех) цвета остались в мешке. Фили заявил, что не может определить цвет своего колпака. Балин слышал ответ Фили и сказал, что у него не хватает данных для определения цвета колпака, находящегося у него на голове. Мог ли Двалин на основании ответов своих приятелей определить цвет своего колпака?

89. На окружной математической олимпиаде особенно отличились семь лицеистов. Чтобы определить среди них победителя, провели такой конкурс. Показали им девять марок: семь красных и две зеленых. Затем всем семерым завязали глаза и каждому на лоб наклеили по красной марке, а зеленые убрали. После этого повязки сняли и объявили, что победителем будет тот, кто первым определит цвет своей марки. Никто из соревнующихся не мог видеть цвета своей марки, но видел своих товарищей. После некоторого размышления Алексей воскликнул: «У меня — красная!» Как он догадался?

90. Когда-то в одной стране правил пожилой король. Наследников у него не было. Чувствуя, что жить ему осталось немного, он начал искать достойного преемника. Наконец, четверо самых талантливых юношей королевства предстали перед ним. Король должен был сделать окончательный выбор. Всем четырем завязали глаза и усадили вокруг стола. Король сказал: «Я притронусь ко лбу каждого из вас и оставлю на нем либо черную, либо белую метку. Затем прикажу снять повязку с ваших глаз. Тот, кто увидит больше черных меток, чем белых, пусть встанет и стоит до тех пор, пока кто-нибудь не угадает, какая метка на лбу у него самого. Угадавший будет моим наследником. Когда повязки были сняты и юноши посмотрели друг на друга, все они встали и стали размышлять. Наконец один из юношей воскликнул: «Государь, у меня на лбу черная метка!» И рассказал, как он решил нелегкую задачу. Какие метки сделал король на лбах четырех юношей? Как победитель соревнования доказал, что у него на лбу черная метка?

91. При проходе поезда через туннель угольная пыль проникла в вагон, и часть пассажиров оказалась со следами сажи на лице. Проходивший через вагон кондуктор сказал: «Граждане, среди вас есть запачкавшиеся. Вымыться можно в умывальной, но только во время стоянки поезда». Через четыре остановки все пассажиры были чисты. Сколько в вагоне было запачкавшихся, если известно, что: 1) зеркал в вагоне нет; 2) пассажир идет мыться только тогда, когда он убежден, что запачкан; 3) в умывальной во время одной стоянки может вымыться любое число пассажиров; 4) все пассажиры умеют из наблюдений делать правильные выводы.

92. В игру мудрецов играют пять гномов. Им показали три красных и четыре синих капюшона. В темноте на них надели три красных и два синих капюшона, а остальные спрятали. Кто из гномов может определить цвет надетого на него капюшона?

93. В игру мудрецов играют пять гномов. Им показали три красных и четыре синих капюшона. В темноте на них надели два красных и три синих капюшона, а остальные спрятали. Кто из гномов может определить цвет надетого на него капюшона?

94. В игру мудрецов играют три гнома. Им показали три красных и три синих капюшона. В темноте на них надели два красных и один синий капюшон, а остальные спрятали. Может ли кто-нибудь из гномов определить цвет надетого на него капюшона?

95. В игру мудрецов играют восемь гномов. Им показаны пять красных, четыре синих и два белых капюшона. В темноте на них надели четыре красных, два синих и два белых капюшона, а остальные спрятали. Может ли кто-нибудь из гномов определить цвет надетого на него капюшона?

96. Участников игры мудрецов три, им предъявлены перед началом игры пять колпаков: три красных и два белых. Определите, кто будет победителем, если: 1) на двух участников надеты белые колпаки, а на третьего — красный; 2) на одного участника надет белый колпак, а на двух других участников — красные колпаки.

97. Участников игры мудрецов семь, а перед началом игры им предъявлено восемь красных колпаков и четыре белых. Определите, кто будет победителем, если: 1) на них надеты четыре красных колпака и три белых; 2) на них надеты шесть красных колпаков и один белый.

98. Участников игры мудрецов восемь, а перед началом игры им предъявлено пятнадцать колпаков: пять красных, шесть белых и четыре синих. Определите, кто будет победителем игры, если на них надето три красных, два белых и три синих колпака.

99. Четыре человека сидят друг за другом так, что сидящий сзади видит головы трех впереди сидящих, предпоследний видит головы двух впереди сидящих, второй видит голову впереди сидящего. Оборачиваться им запрещено. Они знают, что есть семь шляп: три белых и четыре черных. Каждому из них на голову надевают шляпу так, что он не видит, какого цвета шляпа ему надета, и не знает, какие шляпы остались. Докажите, что, каким бы образом ни были надеты шляпы, всегда найдется по крайней мере один из них, который может вполне определенно сказать, какого цвета шляпа у него на голове.

Различные логические задачи

100. Когда обезьяна несла три одинаковых кокосовых ореха на вершину многоэтажного дерева, один орех упал с 11-го этажа и разбился. Обезьяна хочет определить самый высокий этаж, при падении с которого кокосовые орехи не разбиваются. Она может уронить орех с любого этажа и подобрать его, если он цел. Докажите, что ей хватит четырех испытаний (с двумя орехами).

101. (Московская математическая олимпиада, 1997) В Мексике экологи добились закона, по которому каждый автомобиль хотя бы один день в неделю не должен ездить (владелец сообщает полиции номер автомобиля и «выходной» день недели этого автомобиля). В некоторой семье все взрослые желают ездить ежедневно (каждый — по своим делам!). Сколько автомобилей должно быть в семье, если взрослых в ней *а*) 5 человек, *б*) 8 человек?

102. Какое наименьшее число жильцов можно вселить в 30-квартирный дом так, чтобы в любых трех наугад взятых квартирах проживало по меньшей мере 7 человек?

103. (Всесоюзная математическая олимпиада, 1988) Книга состоит из 30 рассказов объемом 1,2, ..., 30 страниц. Рассказы печатаются с первой страницы, каждый рассказ начинается с новой страницы. Какое наибольшее количество рассказов может начинаться с нечетной страницы?

104. 10 человек пришли в гости в галошах. Уходили они по одному, и каждый надевал произвольную пару галош, в которую смог влезть (т. е. не меньшего размера, чем его собственная). Какое наибольшее число людей не смогло надеть галоши?

105. В пруд выпустили 40 щук. Щука сыта, если она съела трех других щук (сытых или голодных). Какое максимальное число щук может насытиться? (Съеденная сытая щука считается сытой.)

106. Три рыбака хотят поделить улов, а весов у них нет. Каждый уверен, что он бы поделил улов на равные части, но остальные ему не доверяют. Если бы рыбаков было двое, то выйти из положения было бы легко: один разделил бы улов на две части, а другой взял бы ту часть, которая ему кажется большей. Укажите, как должны действовать три рыбака, чтобы каждый из них был уверен, что его доля составляет не менее одной трети от всего улова.

107. И сказал Кощей Ивану Царевичу: «Жить тебе до завтра. Утром явишься пред мои очи, задумаю я три цифры — x, y, z. Назовешь ты мне три числа — a, b, c. Выслушаю я тебя и скажу, чему равно $ax + by + cz$. Не отгадаешь цифры x, y, z — голову с плеч долой». Запечалился Иван Царевич, пошел думу думать. Как ему помочь?

Занятия 15–16

Кванторы. Правило формулирования противоположного высказывания

Определение 1. *Утверждение* — утвердительное повествовательное предложение, которое формализует некоторое выражение мысли. *Логическое высказывание* (далее *высказывание*) — утверждение, которое является либо истинным, либо ложным.

Пример *истинного высказывания*: «$7 \cdot 142857 = 999999$».

Пример *ложного высказывания*: «$2 \cdot 2 = 5$».

Важные утверждения:

- Хаусдорф Феликс: «*Язык теории множеств – язык чистой математики*»,
- Ермаков В.П.: «*В математике следует помнить не формулы, а процесс мышления*».

Пример утверждения, не являющегося высказыванием (парадокс лжеца): «То, что вы сейчас читаете, — ложь».

В математике часто встречающиеся слова обозначают символами:

«$=$» — равно;

«$\in$» — принадлежит; содержится в; лежит в и т. п.;

«$+$» — плюс; сложить и т. п.;

«$-$» — минус; вычесть и т. п.;

....

$\Rightarrow$ — следует; отсюда и т. п.;

$\Leftrightarrow$ — тогда и только тогда; необходимо и достаточно; и т. п.;

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ — по определению; называется, и т. п.

Определение 2. Следующие два символа называются *кванторами*:

«$\forall$» — квантор всеобщности. Заменяет слова «всякий»; «каждый»; «какой угодно»; «любой» и т.п.;

«$\exists$» — квантор существования. Заменяет слова «существует»; «найдется»; «хотя бы один»; «для некоторого» и т.п.

Определение 3. Высказывание, которое является истинным тогда и только тогда, когда высказывание A ложно, называется *противоположным* к A и обозначается $\overline{A}$.

Пример 1. Сформулируйте высказывание, противоположное следующим:

A: «Все девушки школы-лицея №60 красивые»;

$Б$: «Каждый учащийся седьмых классов может поднять стакан воды»;

$В$: «В любой школе города есть двоечник».

Ответы:

$\overline{A}$: «Найдется хотя бы одна некрасивая девушка из школы-лицея №60».

Пояснение: в утверждении A говорится буквально о каждой девушке школы-лицея №60, поэтому если окажется, что одна девушка некрасивая, или две — некрасивые, или три, ..., то утверждение A уже будет не верно. И обратно, если утверждение A не верно, то кто-то из девушек школы-лицея №60 не является красивой.

$\overline{Б}$: «Найдется хотя бы один учащийся седьмых классов, который не может поднять стакан воды»;

$\overline{В}$: «Существует хотя бы одна школа в городе, в которой каждый учащийся не является двоечником».

Правило формулирования противоположного высказывания: *если высказывание записано с помощью кванторов, то для того, чтобы сформулировать противоположное высказывание, необходимо выполнить следующее*:

1) *двигаясь слева направо,*

а) *если встретили квантор <u>всеобщности</u>, то заменить его квантором <u>существования</u>,* *б) если встретили квантор <u>существования</u>, то заменить его квантором <u>всеобщности</u>;*

2) *<u>заключение</u> заменить на противоположное.*

Пример 2. Сформулируйте высказывания, противоположные следующим:

A: «Сегодня в 12:00 всякая утка находилась на расстоянии не более 20 км от утки, больной птичьим гриппом»;

$Б$: «Если два угла смежные, то сумма их градусных мер равна 180°».

Ответы:

$\overline{A}$: «Сегодня в 12:00 *найдется* такая утка, которая находилась на расстоянии более 20 км от *всякой* утки, больной птичьим гриппом».

Пояснение. Обозначим через U множество всех уток, которые родились сегодня до 12:00 (включительно), множество всех уток, больных птичьим гриппом, — через PG. Если x и y — утки, то пусть $\rho(x, y)$ — расстояние между ними (в километрах). Тогда высказывание A в кванторах запишется следующим образом:

$$A: \forall x \in U \, \exists y \in PG: \rho(x,y) \leq 20.$$

Согласно правилу формулирования противоположного высказывания, имеем

$$\overline{A}: \exists x \in U \, \forall y \in PG \; \rho(x,y) > 20.$$

$\overline{Б}$: «Существуют два смежных угла, сумма градусных мер которых ***не*** равна 180°».

Теорема. Критерий. Различные способы чтения теорем

Определение 4. Пусть даны два высказывания A и B. Доказательный вывод B из A называется *теоремой* и обозначается «$A \Rightarrow B$», при этом данная запись имеет две формы чтения:

1. «A достаточно для B».

Пояснение. Утверждение B может следовать не только из A, но и из других утверждений, например C, D и др.

Пример 3. Вы хотите купить обычную простую ручку. Вы знаете, что через дорогу в канцелярском магазине она продается за 30 тенге. Но эта ручка не является уникальной или ручной работы, выполненной на заказ. Поэтому естественно, что она за такую же цену может продаваться и в других магазинах. Однако, если вас устраивает цена и качество ручки, вам нет необходимости куда-то ехать, вам *достаточно* просто пойти через дорогу и купить ручку.

Пример 4. Если два числа делятся на 2 (A), то и их сумма делится на 2 (B). Но сумма двух чисел может быть кратна двум и когда оба числа нечетны. Однако если известно, что оба числа четны, то нет необходимости проверять еще какие-нибудь утверждения, этого уже *достаточно*, чтобы сказать, что B верно.

2. «B необходимо для A».

Пояснение. Данный способ чтения следует из следующего утверждения:

Теорема *$A \Rightarrow B$ справедлива тогда и только тогда, когда справедлива теорема $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.*

Доказательство. Пусть справедлива теорема $A \Rightarrow B$. Тогда из утверждения $\overline{B}$ может следовать либо только A, либо только $\overline{A}$. Если из утверждения $\overline{B}$ следует A, то, поскольку из A следует B, получается, что из $\overline{B}$ следует B, — а это невозможно. Значит, из $\overline{B}$ следует $\overline{A}$.

Пусть теперь справедлива теорема $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. Тогда из утверждения A может следовать либо только B, либо только $\overline{B}$. Если из утверждения A следует $\overline{B}$, то, поскольку из $\overline{B}$ следует $\overline{A}$, получается, что из A следует $\overline{A}$, — а это невозможно. Значит, из A следует B. ■

Примечание. Согласно доказанному ранее утверждению, все теоремы имеют две формы чтения:

$A \Rightarrow B$	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$
Если два угла смежные, то сумма их градусных мер равна 180°.	Если сумма градусных мер двух углов отлична от 180°, то углы не являются смежными.
Если два числа четные, то их сумма четна.	Если сумма двух чисел нечетна, то хотя бы одно из чисел нечетно.
Если в треугольнике биссектриса является высотой, то треугольник равнобедренный.	Если треугольник не является равнобедренным, то каждая из его биссектрис не является высотой.

Тем самым, *без выполнения утверждения B утверждение A невыполнимо* (но это не означает, что если утверждение B верно, то и утверждение A — верно).

Определение 5. *Критерий* — это теорема, в которой каждое из утверждений является необходимым и достаточным для другого.

Таким образом, всякий критерий является теоремой и для доказательства одного критерия ($A \Leftrightarrow B$) необходимо доказать две теоремы ($A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$). Однако не всякая теорема является критерием (см. пример 4).

108. Верны ли рассуждения: «Имеем числовое равенство 4:4 = 5:5. Вынесем за скобки в каждой части общий множитель. Получим 4(1:1) = 5(1:1). Числа в скобках равны, поэтому 4 = 5, или 2 × 2 = 5»?

109. Верны ли следующие рассуждения: «Пингвины — это птицы, все птицы могут летать. Следовательно, пингвины могут летать»?

110. Верны ли следующие рассуждения: «У жирафа четыре ноги. У коровы четыре ноги. Поэтому жираф выше коровы»?

111. Верны ли следующие рассуждения: «Поскольку $\frac{19}{95} = \frac{1}{5}$, то $\frac{1999}{9995} = \frac{1}{5}$»?

112. Верны ли следующие рассуждения: «Если Даурен выиграет в лотерею, то он сможет позволить себе приобрести новый автомобиль. Даурен не выиграл в лотерею. Поэтому Даурен не сможет позволить себе приобрести новый автомобиль»?

113. Некто утверждает: «Если я приду домой до 20:00, то позвоню своей девушке». В каком случае он врет?

Одним из отличий математики от других наук является аксиоматическое построение всего курса. То есть выбираются первичные понятия, для которых нет определений, но есть некоторые описания, выбираются несколько утверждений, которые принимаются без доказательства. Дальше вводятся определения, и последующие теоремы доказываются через предыдущие. При этом ни одно новое понятие, хотя бы в школьной математике, не вводилось без практической необходимости.

Остановимся сначала более подробно на числах.

Определение 6. *Натуральными числами* называются числа вида 1, 2 ($2 \overset{\text{def}}{=} 1+1$), 3 ($3 \overset{\text{def}}{=} 2+1$), 4 ($4 \overset{\text{def}}{=} 3+1$), ... Множество натуральных чисел обозначается буквой $\mathbb{N}$.

Определение 7. *Целыми числами* называются числа вида 0, 1, –1 (–1: –1 + 1 = 0), 2, –2 ($-2 \overset{\text{def}}{=} -1\cdot 2$), 3, –3 ($-3 \overset{\text{def}}{=} -1\cdot 3$), ... Множество целых чисел обозначается буквой $\mathbb{Z}$.

Определение 8. *Рациональными числами* называются числа вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Множество рациональных чисел обозначается буквой $\mathbb{Q}$.

И если с введением натуральных, целых и рациональных чисел все более или менее понятно, появление таких чисел можно объяснить хотя бы развитием торгово-экономических отношений, то не совсем понятно, как появились иррациональные числа и зачем они вообще были нужны.

Существовало даже такое мнение, что, кроме рациональных чисел, других чисел нет. Это объяснялось тем, что существует способ разбиения любого отрезка на n равных частей, $n = 2, 3, 4, \ldots$ (в дальнейшим мы познакомимся с этим способом, который основывается на теореме Фалеса). То есть считалось, что, имея отрезок, длину которого принимали за 1, мы можем измерить любой другой отрезок. Однако в школе Пифагора было доказано, что диагональ квадрата нельзя измерить через его сторону. Здесь необходимо уточнить, что означает «можно или нет измерить один отрезок через другой».

Определение 9. Два отрезка называются *соизмеримыми*, если существует третий отрезок, который целое число раз укладывается в каждом из них.

Таким образом, если некоторый отрезок укладывается в первом отрезке m раз, а во втором — n раз ($m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$), то, приняв длину первого отрезка за 1, мы получим, что длина второго отрезка равна n/m, т. е. число рациональное.

Другими словами, два отрезка соизмеримы, если отношение их длин есть число рациональное.

Доказательство несоизмеримости стороны квадрата и его диагонали проводится методом от противного. Пусть существует квадрат, длины стороны и диагонали которого больше длины некоторого отрезка в конечное число раз. Пусть этим квадратом будет $ABCD$. Значит, для некоторого положительного числа $t > 0$, некоторых натуральных чисел n, m выполнены равенства $AB = nt$, $AC = mt$. Однако если взять

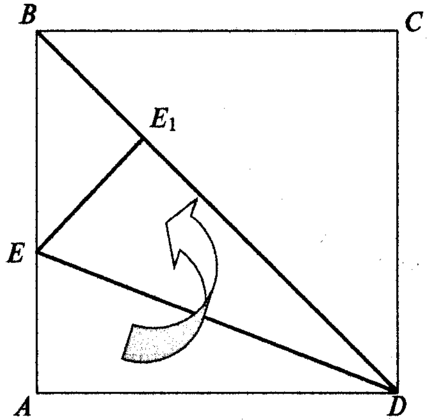


Рис. 2

листок бумаги в форме этого квадрата, то, согнув его так, чтобы сторона AD легла на диагональ (см. рис. 2), получим прямоугольный треугольник BEE_1, удвоив который, можно получить меньший квадрат с длинами стороны $(m - n)t$ и диагонали $(2n - m)t$. То есть каждый из коэффициентов уменьшится хотя бы на 1.

Таким образом, повторяя эти рассуждения, мы получим, что длина стороны некоторого очередного квадрата отрицательна, что невозможно. Пришли к противоречию, следовательно, сторона и диагональ квадрата несоизмеримы.

114. Запишите определения 6–8 в кванторах.

115. Сформулируйте определение иррациональных чисел.

116. Как по-другому можно проинтерпретировать следующую теорему: «Если число x — рациональное, то x^2 — рациональное число»?

117. Используя метод от противного, докажите следующую теорему: «Если число x — рациональное, а y — иррациональное, то их сумма $x + y$ будет иррациональным числом».

118. Докажите следующее утверждение: «Ненулевое действительное число положительно тогда и только тогда, когда положительно обратное к нему».

119. Верно ли следующее утверждение: «Для любого положительного числа выполнено неравенство $x^3 > x^2$»?

В задачах 120–123 укажите, какие из чисел являются рациональными, и объясните почему.

120. 0,1010010001000010000001...;

121. 12,5555555555555555555...;

122. 0,1231231231231231231231...;

123. 0,123456789101112131415...;

Определение 10. Целое число *a кратно b*, если для некоторого целого числа t выполнено равенство $a = bt$. В этом случае также говорят, что число *a делится на b* или число *b делит a*.

Определение 11. Натуральное число, отличное от 1, называется *составным*, если оно имеет хотя бы один натуральный делитель, отличный от 1 и от него самого.

Определение 12. Натуральное число называется *простым*, если оно отлично от 1 и не является составным.

124. Запишите в кванторах определение 12.

Пример 5 (задача Евклида). Доказать, что существует бесконечно много простых чисел.

○ *Решение.* Предположим, что количество простых чисел конечно. Пусть $p_1, p_2, ..., p_n$ — все простые числа. То есть всякое натуральное число, отличное от 1 и от указанных простых чисел, делится хотя бы на одно из них. Однако число $A = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ не делится ни на одно из простых чисел $p_1, p_2, ..., p_n$. Пришли к противоречию, следовательно, простых чисел бесконечно много. ●

125. Верно ли следующее утверждение: «Если положительное натуральное число делится на некоторое простое, то оно является составным»?

126. Верно ли следующее утверждение: «Число $3^n + 2$ является простым при всех натуральных значениях n»?

127. Верно ли следующее утверждение: «Сумма любых пяти последовательных целых чисел делится на 5»?

128. Верно ли следующее утверждение: «Любое шестизначное число вида $\overline{abccba}$ делится на 11»?

129. Верно ли следующее утверждение: «Сумма двух чисел рациональна тогда и только тогда, когда каждое слагаемое рационально»?

Остановимся более подробно на четных и нечетных числах, т.е. на целых числах, кратных и не кратных 2. При решении задач с этими числами полезно помнить два важнейших свойства: четность суммы целых чисел равна четности количества нечетных слагаемых, а произведение целых чисел нечетно, только если каждый из сомножителей нечетен. То есть, например, если сумма трех целых чисел четна, то количество нечетных слагаемых в этой сумме четно. Значит, в этой сумме 0 или 2 нечетных слагаемых. Отсюда всегда можно утверждать, что хотя бы одно из слагаемых четно. Поэтому если эти слагаемые перемножить, то мы всегда будем получать четное число.

Пример 6. Всегда ли четно произведение $(a+b)(a+c)(b+c)$, где a, b, c — целые числа?

○ *Решение.* Поскольку для любых целых чисел a, b, c сумма $(a+b)+(a+c)+(b+c)=2(a+b+c)$ четна, хотя бы одно из слагаемых четно. Значит, произведение $(a+b)(a+c)(b+c)$ всегда четно. ●

При решении задач с целыми числами полезно сначала узнать четность всех чисел, указанных в задаче. И хотя не всегда возможно точно определить четность этих чисел, иногда достаточно и того, что целые числа можно разбить на пары, в которых одно четно, а другое нечетно.

Пример 7. Можно ли по кругу разложить 500 яблок в 10 корзин так, чтобы в любых двух соседних корзинах количество яблок отличалось на 3?

○ *Решение.* Предположим, что 500 яблок можно разложить в 10 корзин так, что в любых двух соседних корзинах количество яблок отличается на 3. Тогда в соседних корзинах количество яблок будет разной четности. Значит, если 10 корзин разбить на 5 соседних пар, то в каждой паре будет нечетное количество яблок, общее количество яблок тоже будет нечетно. А у нас по условию 500 яблок, т.е. четное количество. Пришли к противоречию. Таким образом, как бы мы ни раскладывали 500 яблок в 10 корзин по кругу, всегда найдутся две соседние корзины, в которых количество яблок не отличается на 3. ●

130. Докажите следующее утверждение: «Натуральное число нечетно тогда и только тогда, когда его квадрат — нечетное число».

131. Страницы книги пронумерованы подряд с первой до последней. Хулиган Вася вырвал из разных мест 25 листов и сложил номера всех пятидесяти вырванных страниц. У него получилось число 20010. Когда об этом узнал отличник Коля, то он заявил, что при счете Вася ошибся. Объясните, почему Коля прав.

132. Четно ли произведение $(7a + b - 2c + 1)(3a - 5b + 4c + 10)$, где числа a, b, c — целые?

133. Может ли произведение
$(3a - 9b + c + 5)(2a + 3b - 7c + 1)(a + 6b + 4c - 2)$
быть нечетным при некоторых целых значениях a, b, c?

134. Существуют ли целые числа a, b, c такие, что

$$(3a - b)(3b - c)(3c - a) = 5005?$$

135. Какое наибольшее значение может принимать выражение $(AEK - AFH + BFG - BDK + CDH - CEG)$, если каждое из чисел A, B, C, D, E, F, G, H, K равно 1 или -1?

136. В коробках лежат шарики: в первой — 1, во второй — 2, в третьей — 3, в четвертой — 4, в пятой — 5, в шестой — 6. За один ход разрешается в любые две коробки прибавить по одному шарику. Можно ли за несколько ходов уравнять количество шариков в коробках?

137. Можно ли разменять 25 рублей при помощи десяти купюр достоинством 1, 3 и 5 рублей?

138. Сумма номеров домов одного квартала равна 99, а соседнего квартала той же улицы — 117. Найдите номера всех домов этих кварталов.

139. По кругу стоят 20 корзин. Можно ли разложить в них 99 арбузов так, чтобы количество арбузов в любых двух соседних корзинах отличались ровно на 1?

140. За круглым столом сидят 1991 представитель четырех племен: люди, гномы, эльфы и гоблины. Известно, что люди никогда не сидят рядом с гоблинами, а эльфы никогда не сидят рядом с гномами. Докажите, что какие-то два представителя одного и того же племени сидят рядом.

Занятия 17–24

Введение в теорию множеств

В математике некоторые понятия считаются первичными. Для них нет определений, но есть описание. Например, в геометрии таковыми являются «точка», «прямая», «плоскость». Хотя в истории были попытки дать определения и этим понятиям. Так, Евклид в своем труде «Начала» пишет:

> *«Точка — то, что не имеет длины», «прямая — то, что не имеет ширины», «плоскость — то, что не имеет высоты».*

С современной точки зрения не совсем ясно, что означает не иметь чего-то. Однако человечество всегда пыталось нащупать ту грань между теми понятиями, для которых даются строгие определения через другие понятия, и теми, для которых определения не даются, а есть только описание.

Одним из таких же первичных понятий является «множество». Описанием к слову «множество» служат синонимы: ансамбль, коллекция, сборище, группа, ассамблея, и т.п.

При этом в истории также были попытки дать определение этому понятию:

Георг Кантор: *«Множество есть многое, мыслимое нами как единое целое».*

Очень важны способы обозначения множеств. Первое время этому не уделялось особого внимания, просто писали фигурные скобки и внутри условие, определяющее, когда элемент принадлежит множеству.

Пример 1. $A = \{\text{цифры}\}$, т.е. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Но такая вольность в написании порождала парадоксы.

Пример 2. Множество A={буквы слова «лампа»}={л, а, м, п} содержит четыре элемента, а в слове «лампа» пять букв. Однако эту ситуацию можно разрешить, если ввести два символа $а_1$ и $а_2$, которые, будем считать, обладают всеми свойствами буквы «а». Тогда B= {л, $а_1$, м, п, $а_2$}.

Определение 1. Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A лежит также и во множестве B ($A \subset B \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in A \Rightarrow x \in B$).

Есть ситуации, когда нелегко определить, является ли одно множество подмножеством другого.

Это связано с тем, что если элемент удовлетворяет одному условию, то не всегда ясно, удовлетворяет ли он другому условию.

Пример 3. Справедливо ли утверждение «Всякий летающий крокодил принимал участие в чемпионате мира по футболу 2006 года»?

На первый взгляд такое высказывание кажется дикостью, и некоторые сразу же отвечали, что оно ложно, хотя на самом деле оно истинно. Поскольку летающих крокодилов не существует, то не совсем ясно, как узнать, истинно ли такое высказывание (спросить-то не у кого). Эту ситуацию можно разрешить с помощью метода от противного. Для этого сформулируем противоположное высказывание, с этой целью запишем высказывание с помощью кванторов. Введем следующие обозначения: ЛК — множество всех летающих крокодилов, ЧМ — множество всех участников чемпионата мира по футболу 2006 года. Тогда наше высказывание записывается следующим образом:

$$A\colon \forall x \in \text{ЛК} \Rightarrow x \in \text{ЧМ} \text{ или } \text{ЛК} \subset \text{ЧМ},$$

а значит, согласно правилу формулирования противоположного высказывания, отрицанием к A будет

$$\overline{A}\colon \exists x \in \text{ЛК}\colon x \notin \text{ЧМ} \text{ или } \text{ЛК} \not\subset \text{ЧМ}.$$

Но тут уже ясно, что высказывание $\overline{A}$ ложно: поскольку летающих крокодилов вообще нет, мы не сможем найти такого летающего крокодила, который по каким-то причинам **не** принимал участие в чемпионате мира по футболу 2006. Тем самым, мы в данном примере доказали, что *пустое множество, т.е. множество, не содержащее элементов, является подмножеством всякого множества.*

Иногда вольность в написании приводит к невозможности определить, принадлежит ли некоторый элемент указанному множеству.

Пример 4 (парадокс Брадобрея). В одном полку служил полковой парикмахер по имени Брадобрей. Больше парикмахеров в этом полку не было и, естественно, Брадобрей не справлялся со своей работой. Тогда полководец издал приказ: «Брадобрей обязан брить тех и только тех, кто сам себя не бреет». Вроде бы разумный приказ, но если, как и раньше, попытаться формально записать: A={солдаты, которых бреет Брадобрей}, то возникает дилемма — сам Брадобрей, являясь солдатом, принадлежит или нет множеству A.

Если Брадобрей принадлежит A, то он является солдатом, которого бреет Брадобрей, т.е. он бреет сам себя и не должен ходить к полковому парикмахеру. То есть пришли к противоречию.

Если же Брадобрей не принадлежит A, то он является солдатом, который не ходит к полковому парикмахеру Брадобрею, а значит, он должен бриться сам, но он этого сделать не может, поскольку сам является Брадобреем. То есть опять пришли к противоречию.

Тем самым возникла ситуация, в которой невозможно определить, принадлежит или нет Брадобрей множеству A.

Замечание. Есть и другие парадоксы, отражающие ситуацию в примере 4.

1) Пусть A — множество всех множеств. Но поскольку A — множество, возникает вопрос — A принадлежит или нет множеству A.
2) Прилагательное называется рефлексивным, если оно обладает свойством, которое определяет. Например, «русский» — рефлексивное прилагательное, «казахский» — не рефлексивное. Если формально определить множество A = {все рефлек-

сивные прилагательные}, то невозможно определить, принадлежит или нет множеству A само слово «рефлексивный».

Из-за такого обилия парадоксов (кроме приведенных выше есть, конечно, и другие) были предложены два похода.

1. *Аксиоматический* (система аксиом Цермело—Френкеля, система аксиом фон Неймана—Геделя—Бернайса). Множествами называются некоторые объекты, удовлетворяющие аксиомам, например, следующим:

Акисома 1 (*аксиома объемности*). Множество определяется своими элементами, т.е. если $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ и $\forall x \in \mathrm{B} \Rightarrow x \in A$, то $A = B$.

Акисома 2 (*аксиома объединения*). Объединение всех элементов множества есть множество.

Акисома 3 (*аксиома выделения*). Для каждого множества A и каждого условия φ существует множество $B = \{x\colon x \in A,\ \varphi(x)$ — истинно$\}$ — подмножество элементов множества A, удовлетворяющих условию φ.

Акисома 4 (*аксиома степени*). Множество всех подмножеств данного множества есть множество.

Акисома 5 (*аксиома подстановки*). Пусть X — множество, $\varphi(y, z)$ — высказывание. Тогда если для каждого y существует единственный z, такой что истинно $\varphi(y, z)$, то существует множество всех z, для которых найдется $y \in X$, такой что $\varphi(y, z)$ истинно.

Акисома 6 (*аксиома фундирования*). Не существует бесконечной последовательности вложенных множеств — каждая цепочка множеств $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset$ .... конечна.

Акисома 7 (*аксиома бесконечности*). Существуют бесконечные множества.

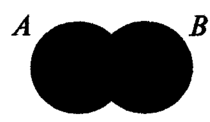
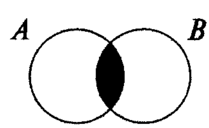
Акисома 8 (*аксиома выбора*). Из каждой системы множеств $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ можно составить множество, выбрав из каждого множества A_a по одному и только по одному элементу.

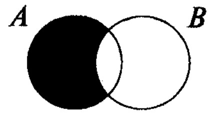
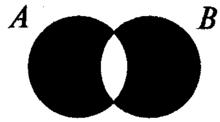
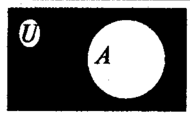
Примечание. Систему аксиом Цермело—Френкеля запоминать не нужно, здесь она приведена только для ознакомления.

2. *Естественный* (подход Кантора). Рассматриваются множества, которые реально существуют в природе и которые можно получить из таких с помощью теоретико-множественных операций. Также вводится понятие *универсального множества, т.е. совокупности всех возможных элементов некоторого типа, определяемых классом решаемых проблем.*

Пример 5. В одном из микрорайонов находятся только две школы — №40 и №41. Пусть A — множество всех деревьев, расположенных у школы №40, B — множество всех деревьев, расположенных у школы №41. Тогда объединением двух множеств A и B будет множество всех деревьев, расположенных в микрорайоне возле школ. В качестве универсального множества в данном примере можно взять множество всех деревьев планеты Земля.

В дальнейшем мы будем придерживаться подхода Кантора, для этого рассмотрим следующие теоретико-множественные операции.

Определение	**Иллюстрация с помощью кругов Эйлера**
Объединением двух множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из двух множеств A или B ($A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$).	
Пересечением двух множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат каждому из двух множеств A и B ($A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$).	

Разностью двух множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B ($A \setminus B \overset{\text{def}}{=} \{x\colon x \in A \text{ и } x \notin B\}$).	
Симметричной разностью двух множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат только одному из двух множеств A или B ($A \Delta B \overset{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$).	
Дополнением к множеству А называется множество, состоящее из тех и только тех элементов универсального множества, которые в A не лежат ($\overline{A} = U \setminus A$).	

Отметим некоторые свойства теоретико-множественных операций.

Теорема 1. *Для любых множеств A, B, C справедливы следующие соотношения:*

1°. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

2°. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

3°. $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$,

4°. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$,

5°. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$,

6°. (первый закон де Моргана) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$,

7°. (второй закон де Моргана) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Доказательство 1°.

$$x \in A \cap (B \cup C) \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in A \text{ и } \{x \in B \text{ или } x \in C\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ и } \{\{x \in A \text{ и } x \in B\} \text{ или } \{x \in A \text{ и } x \in C\}\} \Leftrightarrow$$

$$\{x \in A \text{ и } x \in B\} \text{ или } \{x \in A \text{ и } x \in C\} \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C)).$$

Доказательство свойства 2° аналогично доказательству свойства 1°.

Доказательство 3°. Пусть $A \cup B = A$. Тогда если $x \in B$, то $x \in (A \cup B)$, т.е. $x \in A$. Значит, согласно определению, $B \subset A$.

Пусть $B \subset A$. Тогда

$$x \in (A \cup B) \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in A \text{ или } x \in B \Rightarrow x \in A.$$

То есть если $B \subset A$, то $(A \cup B) \subset A$. Поскольку для любых A и B выполнено $A \subset (A \cup B)$, то $A \cup B = A$.

Доказательство 4° аналогично доказательству 3°.

Доказательство 5° получается из определений разности двух множеств, дополнения множества и пересечения двух множеств.

Доказательство 6°.

$$x \in \overline{(A \cup B)} \overset{def}{\Leftrightarrow} x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ и } x \notin B \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in (\overline{A} \cap \overline{B}).$$

Доказательство 7°.

$$x \in \overline{(A \cup B)} \overset{def}{\Leftrightarrow} x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{(A \cup B)} \text{ или } x \in (A \setminus B) \text{ или } x \in (B \setminus A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{x \in \overline{(A \cup B)} \text{ или } x \in (A \setminus B)\} \text{ или } \{x \in \overline{(A \cup B)} \text{ или } x \in (B \setminus A)\} \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} x \in (\overline{A} \cup \overline{B}).$$

Теорема 2 (о количестве элементов). *Пусть $n(A)$ – количество элементов множества A. Тогда*

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) -$$
$$- n(C \cap B) + n(A \cap B \cap C).$$

Далее рассмотрим бесконечные числа, обозначаемые $+\infty$, $-\infty$, ∞; некоторые их свойства аналогичны свойствам чисел, а некоторые — нет. Пренебрежение этим приводит к появлению различных софизмов. Приведем в качестве примера софизм о том, что сумма степеней двойки равна 0.

Пусть $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots$. Тогда $2A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots$. Отсюда $A = 1 + 2A$. Значит, $0 = 1 + A = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots$ То есть, складывая степени двойки, получаем 0.

Ошибка в этих рассуждениях заключается в том, что если для конечных чисел $2x - x = x$, то для бесконечных чисел это равенство не верно, поскольку разность $+\infty - (+\infty)$ не определена.

Перейдем теперь к изучению бесконечных множеств.

Определение 2. Непустое множество A называется *конечным*, если существует натуральное число n такое, что все элементы множества A можно пронумеровать с помощью первых n натуральных чисел.

Определение 3. Множество A называется *бесконечным*, если для всякого натурального числа n во множестве A найдется $n + 1$ различных элементов.

Замечание. Чтобы подчеркнуть отличие бесконечных множеств от конечных, представим такую фантастическую ситуацию: однажды мы поймали существо с бесконечным числом голов, которое закрыли в клетке, и пусть мы хотим на каждую шею надеть ошейник. Поэтому мы пошли в магазин и купили 1000 белых ошейников. Однако когда мы стали надевать ошейники на наше существо, то обнаружили у него 1001 шею. Тогда мы снова пошли в магазин и купили уже 10 000 синих ошейников, на всякий случай с запасом. Мы сняли с нашего существа белые ошейники и надели синие. Но нам опять не хватило ошейников, поскольку у него оказалось 10 001 шея. И сколько бы мы ни приносили ошейников, у этого существа всегда находилась шея, для которой не хватало ошейника.

Понять отличие бесконечных от конечных множеств можно также на примере «гостиницы»: пусть имеется обычная гостиница, в которой все номера заняты. Поскольку номеров конечное число, мы не сможем в эту гостиницу поселить больше ни одного человека. Пусть имеется фантастическая гостиница с бесконечным числом номеров. Тогда даже если все номера заняты, мы сможем там поселить еще одного человека: постояльца первого номера переселим во второй номер, постояльца второго номера — в третий, третьего — в четвертый, ... Таким образом, мы освободим первый номер.

В задачах 141–155 докажите выписанные соотношения и проиллюстрируйте их кругами Эйлера.

141. $\overline{A\setminus B} \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{A}$.

142. $(A \cap B) \cup A = A$.

143. $(A \cup B) \cap A = A$.

144. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

145. $\overline{(\overline{A} \cap (\overline{B} \cap C))} \cap \overline{(\overline{A} \cap B)} \cap (\overline{A} \cap C) = \varnothing$.

146. $\overline{A\setminus B} = \overline{A} \cup B$.

147. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = A \Delta B$.

148. $A \setminus B \subset C \Leftrightarrow A \subset (B \cup C)$.

149. $(A \Delta B) \subset ((A \Delta C) \cup (B \Delta C))$.

150. $A \Delta B = C \Rightarrow B = A \Delta C$.

151. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

152. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

153. $((A \cup B) \setminus C) \subset (A \cup (B \setminus C))$.

154. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

155. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

В задачах 156–161 установите, в каком отношении ($X \subset Y$, $Y \subset X$ или $X = Y$) находятся множества X и Y. Используйте для иллюстрации круги Эйлера.

156. $X = A \cup (B \setminus C)$, $Y = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

157. $X = (A \cap B) \setminus C$, $Y = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

158. $X = A \cup B \cup C$, $Y = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

159. $X = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$, $Y = A \cap B \cap C$.

160. $X = A \cup B$, $Y = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

161. $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

162. Укажите, какие из представленных ниже соотношений неверны, и объясните почему:
а) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$;
б) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$;
в) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$;
г) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2\}\}$;
д) $3 \in \{1, \{2, 3\}, 4\}$.

163. Укажите, какие из множеств равны между собой:
а) $\{2, 5, 4\}$;
б) $\{1, \{5, 2\}, 6\}$;
в) $\{1, 5, 2, 6\}$;
г) $\{1, \{2, 5\}, 6\}$;
д) $\{5, 4, 2\}$;
е) $\{1, \{2, 5, 6\}\}$.

164. Найдите множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$ и изобразите их на числовой прямой, если $A = (-1,2]$ и $B = [1,4)$.

165. Для каждых двух из следующих множеств укажите, является ли одно из них подмножеством другого:
$\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{\{1\}, 2, 3\}$, $\{\{1,2\}, 3\}$, $\{3, 2, 1\}$, $\{\{2,1\}\}$.

166. Сравните два числа: 2^{10} и количество всевозможных подмножеств множества всех цифр.

167. Докажите, что множество A тогда и только тогда является подмножеством множества B, когда каждый элемент, не принадлежащий B, не принадлежит A.

168. Пусть A — множество четных чисел, а B — множество чисел, делящихся на 3. Опишите множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$.

169. Может ли у множества быть ровно
1) 7,
2) 16,
3) 254
подмножеств?

170. По приведенным ниже описаниям множеств людей подберите для каждой записи высказывания на языке множеств подходящую пословицу или поговорку. Надеемся, что это позволит лишний раз проанализировать смысл народных изречений. Например, если Z — множество людей, которые сами как следует не знают того, о чем говорят, то запись $x \in Z$ можно отнести к пословице «Слышал звон, да не знает, где он», поскольку именно так говорят о человеке, наделенном указанным свойством.

Ω — универсальное множество всех людей,
A — добрые,
B — незаурядные, с большими способностями,
C — глупые,
D — умные,
E — поступающие по-своему, не слушающие советов,
F — связанные корыстными отношениями,
G — много обещающие,
H — не выполняющие своих обещаний,
J — злоупотребляющие своим служебным положением,
K — слишком важничающие, задающиеся,
L — вмешивающиеся не в свое дело,
M — предприимчивые, ловкие, умеющие устраиваться,
P — берущиеся за несколько дел сразу,
Q — плодотворно работающие,
S — ошибающиеся,
T — чувствующие вину и возможность расплаты,
U — не добивающиеся результатов,
V — выдающие себя своим поведением,
W — недальновидные,
X — действующие заодно, не предающие друг друга,
Y — бывалые, опытные люди.

Запись высказываний на языке множеств

$x \in K$; $A \neq \varnothing$; $x \in G \cap H$; $x \in B \cap Q$; $x \in J \cap U$; $x \in J$; $x \in M$; $x \in C \cap E$; $x \in T \cap V$; $x \in P \cap U$; $x \in E$; $x \in F \cap X$; $x \in Y \cap S$; $x \in D \cap W$.

Пословицы и поговорки

— Бодливой корове бог рог не дает.
— Большому кораблю — большое плавание.
— Вольному воля.
— Ворон ворону глаз не выклюет.
— Дуракам закон не писан.
— За двумя зайцами погонишься, ни одного не поймаешь.

— Знает кошка, чье мясо съела.
— Знай сверчок свой шесток.
— И на старуху бывает проруха.
— Курице не тетка, свинье не сестра.
— Кто смел, тот и съел.
— На всякого мудреца довольно простоты.
— Наделала синица славы, а море не зажгла.
— Свет не без добрых людей.

171. Все вареные красные раки мертвы, а все вареные мертвые раки красны. Следует ли отсюда, что все красные мертвые раки вареные?

172. Предположим, что справедливы следующие утверждения:
1) среди людей, имеющих телевизор, есть такие, которые не являются малярами;
2) люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизор.

Следует ли отсюда, что справедливо утверждение: не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

173. За время моей командировки в Великом Гусляре дождливых дней было 10, ветреных — 8, холодных — 6, дождливых и ветреных — 5, дождливых и холодных — 4, ветреных и холодных — 3 и, наконец, дождливых, ветреных и холодных — 1. Сколько за это время в Великом Гусляре было всего дней с плохой погодой?

174. Контрольная работа по математике в пятом классе гимназии состояла из задачи, уравнения и числового примера. Работу писали 36 учеников. Правильно решили только задачу 2 человека, только уравнение — 4, только пример — 7. Не решили только задачу 8 человек, только уравнение — 5, только пример — 3. Остальные ученики выполнили всю работу правильно. Сколько таких учеников?

175. За границу поехала группа туристов из 100 человек. Десять из них не знали ни немецкого, ни французского языков, 75 знали немецкий язык, 83 человека знали французский. Сколько туристов владели обоими иностранными языками?

176. На школьной химической олимпиаде присутствовал 21 человек, на физической — 26 человек, на математической — 29 человек. И в химической, и в математической олимпиадах участвовали 14 человек; и в физической, и в математической — 15 человек; и в физической, и в химической — 13 человек; во всех трех олимпиадах приняли участие 8 человек. Сколько всего школьников участвовали хотя бы в одной из трех олимпиад?

177. В одной семье было много детей. Семеро из них любили капусту, шестеро — морковь, пятеро — горох. Четверо любили капусту и морковь, трое — капусту и горох, двое — морковь и горох. А один ел и капусту, и морковь, и горох. Сколько детей было в семье?

178. На занятии физического кружка присутствовали 10 лицеистов. Руководитель поинтересовался, выписывают ли присутствующие члены кружка журналы «Квант», «Техника молодежи» и «Юный техник». Оказалось, что 6 человек выписывают «Квант», 5 — «Техника молодежи», 5 — «Юный техник», 3 — «Квант» и «Техника молодежи», 3 — «Квант» и «Юный техник», 2 — «Техника молодежи» и «Юный техник», а один человек не выписывает ни одного из трех журналов. Сколько членов кружка выписывают: только один журнал; только два; все три журнала?

179. Инспектор группы по изучению спроса населения представил в трест столовых отчет. Число опрошенных — 100 человек. Из них пьют кофе — 78 человек, пьют чай — 71 человек, пьют кофе и чай — 48 человек. Отчет забраковали. Почему?

180. В норе хоббита Бильбо Беггинса пол гостиной площадью 18 $м^2$ покрыт тремя коврами. Площадь одного ковра — 6 $м^2$, другого — 5 $м^2$, третьего — 4 $м^2$. Каждые два ковра перекрываются на площади 1 $м^2$, причем все три ковра перекрываются на площади 0,5 $м^2$. Какова площадь части пола, не покрытого коврами?

181. В отчете о работе отдела Линейного Счастья НИИЧАВО указывалось, что всего в отделе 17 сотрудников, причем 10 из них знают немецкий язык, 13 — английский и французский, 2 — немецкий, английский и французский языки. Докажите, что в этих данных имеется ошибка.

Занятия 25–28

Математическая абака №1

Правила

Математическая абака — это командная игра-соревнование по решению задач. Все задачи выдаются для решения всем командам одновременно. Основным зачетным показателем в математической абаке является общее количество набранных очков (включая бонусы). В случае равенства очков у нескольких команд более высокое место занимает команда, имеющая бóльшую сумму бонусов. При равенстве и этого показателя команды считаются разделившими места.

Решение задач. Каждой команде предлагается для решения 6 тем по 6 задач в каждой теме. Задачи каждой темы сдаются по порядку, от 1-й до 6-й (например, у команды не примут ответ на 4-ю задачу, пока она не сдала ответы на задачи 1, 2 и 3). На каждую задачу отводится один подход (одна попытка сдать ответ). Если команда предъявила *правильный ответ* на задачу, она получает за это цену задачи, а если неправильный или неполный — 0 очков. В некоторых задачах по усмотрению жюри цена задачи может быть поделена поровну между всеми возможными ответами, в этом случае каждый найденный ответ приносит команде соответствующую часть цены. Для каждой такой задачи это указывается в ее условии.

Цена первой задачи каждой темы — 10 очков, второй — 20, ..., шестой — 60 очков. (Таким образом, не считая бонусов, команда может заработать за решение задач до $6 \times 210 = 1260$ очков.)

Основные бонусы. Каждая команда дополнительно может заработать бонусные очки:

- За правильное решение всех задач одной темы («бонус-горизонталь») — 50 очков

- За правильное решение задач с одним и тем же номером во всех темах («бонус-вертикаль») — цену задачи с этим номером

Бонусы за первое решение. Первые команды, получившие каждый из шести возможных бонус-горизонталей и каждый из шести бонус-вертикалей, получают их в двойном размере.

Окончание игры. На решение задач отводится 100 минут. Игра для команды оканчивается, если у нее кончились задачи или истекло общее время, отведенное для игры.

Призы. Каждая из команд получает блоки[1] в количестве $\left[\dfrac{N}{160}\right]$, где N — количество очков, которые заработала команда.

[1] Для получения допуска к коллоквиуму учащиеся «защищают» задачи, которые они самостоятельно разбивают на блоки по 20 задач. То есть один блок — это 20 задач. Таким образом, сильные учащиеся выигрывают блоки и не теряют время на их оформление, слабые — оформляют.

Задачи

	Шахматная тема	Геометрия	Комбинаторика
10	Каким наименьшим числом слонов можно побить все клетки шахматной доски?	На квадратном листе бумаги начертили две параллельные прямые, согнули лист по одной прямой, затем по другой и прокололи в одном месте (не попадающем на линии сгиба). После этого лист разогнули. Сколько различных проколов могло при этом оказаться на листе?	Какое наибольшее количество месяцев одного года могут иметь по пять пятниц?
20	Какое наибольшее число коней можно поставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?	Два равнобедренных треугольника приложили боковыми сторонами друг к другу так, что образовался новый равнобедренный треугольник. Какими могут быть углы у этого треугольника?	Сколько всего натуральных делителей у числа 10^{1998}?
30	Ноздрев ловким движением спрятал шашку Чичикова за обшлаг рукава. В результате черных шашек оказалось в 4 раза больше, чем за несколько ходов до этого. Сколько всего шашек осталось на доске после похищения, если непосредственно перед ним черных шашек было в 5 раз больше, чем белых?	Вершины выпуклого $2n$-угольника пронумеровали, начиная с 1. Оказалось, что общее число его диагоналей кратно числу диагоналей, соединяющих вершины с четными номерами. Сколько вершин имеет этот многоугольник? Укажите все варианты.	Сколькими способами можно выбрать черную и белую клетки шахматной доски 8×8, не имеющие общей стороны?

40	Сколько существует способов поставить шахматного коня на доску 4×4 без всех угловых клеток и обойти ее, если конь должен побывать на каждой клетке ровно 1 раз и вернуться на исходную? (Порядок обхода клеток тоже важен.)	В треугольнике ABC стороны AB и BC равны 2, а высота, опущенная из вершины A, равна 1. Какими могут быть углы треугольника?	Все натуральные числа от 1 по 1000 разбиты на две группы: четные и нечетные числа. Определите, для какой из групп сумма всех цифр, используемых для записи чисел, больше, и на сколько?
50	На шахматной доске стоят 10 шахматных фигур (слоны и ладьи), не бьющих друг друга. Какое наименьшее количество слонов может быть среди них?	В треугольнике ABC средняя по величине сторона отличается от каждой из остальных сторон на 1 *см*. Найдите эти стороны, если известно, что биссектриса угла C пересекается с медианой угла B под прямым углом.	В одной из вершин клетчатого квадрата 4×4 клеток сидит таракан. По команде он начинает движение по ребрам квадрата, поворачивая в каждой вершине на $90°$. Какое наибольшее число вершин квадрата (включая стартовую) он может посетить, если при движении таракана они не должны повторяться?
60	На шахматной доске 8×8 стоят ладьи так, что каждая из них бьет N ладей. При каких N это возможно? (*Ладья бьет в каждом направлении только ближайшую ладью.*)	В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне BC взяли точки K и M (K ближе к B, чем M) такие, что $KM = AM$ и углы MAC и KAB равны. Чему равен угол BAM?	Какое наибольшее число элементов содержит множество A, если оно имеет больше 19-элементных подмножеств, чем 98-элементных?

Ответ считается правильным, если приведены все правильные варианты и нет ни одного неверного!

	Текстовые задачи и логика	Алгебра	Числа
10	В ящике лежат 1996 белых шаров, 1997 красных шаров и 1998 синих шаров. Какое наименьшее число шаров нужно взять из ящика, не заглядывая внутрь, чтобы среди взятых шаров наверняка были шары всех цветов?	Расставьте в записи $4 \times 12 + 18:6 + 3$ скобки так, чтобы получился наименьший возможный результат.	Найдите наименьшее натуральное число, которое оканчивается на 13, делится на 13 и имеет сумму цифр, равную 13.
20	В трех ящиках лежат орехи. В первом на 99 орехов меньше, чем в двух других вместе, во втором — на 19 меньше, чем в первом и третьем вместе. Сколько орехов лежит в третьем ящике?	Сколько существует пар натуральных чисел x и y, для которых $200x + 4y = 2004$?	При умножении пятизначного натурального числа на девять получилось число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите все такие числа.
30	Из пункта A в пункт $Б$ и из пункта $Б$ в пункт A одновременно выбежали два спортсмена. Когда первоначальное расстояние между ними сократилось на 15 *км*, первому из спортсменов осталось бежать до пункта $Б$ в три раза большее расстояние, чем между ними в это время, а второму — в полтора раза больше, чем он пробежал. Каково расстояние между пунктами?	Найдите значение выражения $1999^2 - 1998^2 + 1997^2 - ... - 2^2 + 1^2$.	Найдите наибольший общий делитель всех девятизначных чисел, состоящих из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (без повторений).

40	В первом сосуде находилось 100 *г* 10%-го раствора сиропа, во втором сосуде – 200 *г* 20%-го раствора этого же сиропа и так далее, в 10-м сосуде находилось 1000 *г* 100%-го раствора сиропа. Все сосуды с сиропом слили в один самый большой сосуд. Каково процентное содержание полученного таким образом раствора?	Расставьте числа $a = 2^{45}$, $b = 3^{36}$, $c = 4^{27}$, $d = 5^{18}$ в порядке убывания.	Найдите все трехзначные числа, которые уменьшаются в 13 раз при вычеркивании средней цифры.
50	Четверо бизнесменов участвовали в соревновании на звание самого лучшего. Первый, четвертый и третий бизнесмены вместе заработали в четыре раза больше второго. Второй, третий и четвертый бизнесмены вместе заработали в три раза больше первого. И наконец, первый, второй и третий бизнесмены вместе заработали в два раза больше четвертого. Кто на каком месте оказался в этом соревновании?	Найдите значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$, если $x + y + z = 1$, а $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.	Найдите все натуральные числа, которые при удвоении записываются теми же цифрами, что и квадраты этих чисел, только в обратном порядке.
60	Поезд проехал переезд автотрассы шириной 5 метров за 5 секунд, а мимо перрона длиной 200 метров за 15 секунд, двигаясь вдвое медленнее. Какова длина состава?	Решить в натуральных числах систему: $\begin{cases} 2x+3y+7z=131, \\ 2x+3y+8z=140. \end{cases}$ Сколько всего решений у этой системы?	Если первую цифру трехзначного числа увеличить на n, а вторую и третью цифры уменьшить на n, то полученное число будет в n раз больше исходного. Найдите число n и исходное число.
Ответ считается правильным, если приведены все правильные варианты и нет ни одного неверного!			

Ответы

	Шахматная тема	Геометрия	Комбинаторика	Текстовые задачи и логика	Алгебра	Числа
10	8	от 1 до 4 проколов	5	3996	$[(4 \times 12 + 18) : :(6 + 3)] = 66/9$.	11713
20	32	90, 45, 45 и 36, 72, 72 градусов	1999×1999	59	10 решений	10989
30	5	4 и 6	912	18, 75	1999000	9
40	48 маршрутов	(30°,75°,75°) и (150°,15°,15°)	для нечетных, на 499 больше	70	$b > c > a > d$	130, 260, 390, 195
50	4 слона	2, 3, 4	19	4; 1; 3; 2	1	2 и 9
60	0, 1, 2	60 градусов	116	385	12 решений	178 и 2

Занятия 29–34

Многоточие как форма записи суммы нескольких слагаемых. Применение формул сокращенного умножения в задачах на делимость

Одна из отличительных особенностей человека от животного — наличие абстрактного мышления.

Например, чтобы цирковая собачка считала, необходимо, чтобы перед ней либо была соответствующая картинка, либо она услышала то, что уже до этого было много раз отрепетировано.

Человек же может свободно оперировать с тем, чего не видит или даже никогда не видел. Но этому, конечно, еще нужно постепенно научиться. И главным здесь является опыт. Например, в младших классах вы учились складывать числа. И сначала вам необходимо было, чтобы эти числа были написаны. Но постепенно вы учились складывать устно, делая это благодаря своей памяти. Теперь же необходимо научиться виртуозно обращаться с суммами, в которых десятки, сотни и больше слагаемых, и многие из них не написаны, но подразумеваются. Однако некоторые осваивают это раньше. Однажды учитель дал задачу Карлу Гауссу (когда тот учился в первом классе): найти сумму всех целых чисел от единицы до ста. По заведенному порядку аспидные доски с решением задач складывались на середине стола стопкой, а потом стопка переворачивалась, и учитель проверял задания. Едва только учитель кончил диктовать, как послышался голос Гаусса: — А я уже решил! При этом свою доску с решением он положил на середину стола. Долго решали ученики задачу. Каково же было изумление учителя, когда при проверке оказалось, что Гаусс решил задачу совершенно правильно, причем само решение отличалось чрезвычайной простотой и остроумием:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + \ldots + 99 + 100 \\ + \\ 100 + 99 + \ldots + 2 + 1 \\ \hline 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 = 101 \times 100 \end{array}$$

Тогда

$$1 + 2 + \ldots + 99 + 100 = 101 \times 100/2 = 5050.$$

Ясно, что подобное можно проделать с любой суммой, у которой разность между двумя последовательными слагаемыми постоянна. Однако необходимо еще научиться определять количество слагаемых.

Пример 1. Вычислите сумму $13 + 17 + 21 + \ldots + 81$.

○ *Решение.* Ввиду того что в сумме $13 + 17 + \ldots + 81$ не так уж много слагаемых, можно просто все их выписать:

$$13 + 17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 + 41 + 45 + 49 + 53 + \\ + 57 + 61 + 65 + 69 + 73 + 77 + 81.$$

Сделав выкладки, аналогичные тем, которые делал К. Гаусс, получим:

$$\begin{array}{l} 13+17+21+25+29+33+37+41+45+49+53+57+61+65+69+73+77+81 \\ + \\ 81+77+73+69+65+61+57+53+49+45+41+37+33+29+25+21+17+13 \\ \hline 94+94+94+94+94+94+94+94+94+94+94+94+94+94+94+94+94+94=94\times18 \end{array}$$

Тогда

$$13 + 17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 + 41 + 45 + 49 + 53 + \\ + 57 + 61 + 65 + 69 + 73 + 77 + 81 = 94 \times 18/2 = 846.$$

Однако желательно определять количество слагаемых, не выписывая их все. Это можно сделать, например, следующим образом. Промежуток $[13;81)$ разобьем на несколько подобных промежутков (рис. 3):

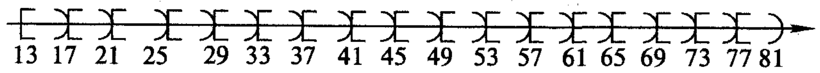


Рис. 3

Таким образом, в каждом промежутке длиною 4 нас интересует только одно число. Поэтому если сумму длин всех указанных промежутков (81–13) разделить на 4, то мы узнаем количество слагаемых в записи

$$13 + 17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 + 41 + 45 + 49 + 53 + \\ + 57 + 61 + 65 + 69 + 73 + 77.$$

А чтобы узнать полностью количество слагаемых в исходной сумме, необходимо к этому числу прибавить 1 (ведь числа 81 в указанных промежутках не было). Значит, получим, что количество слагаемых равно

$$\frac{81-13}{4}+1=18. \quad \bullet$$

Аналогично можно находить количество слагаемых в подобных суммах.

Теорема 3 (о формулах сокращенного умножения). *Пусть даны числа a и b.*

1) *Если n – целое положительное число, отличное от единицы, то справедливо равенство*
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}). \qquad (1)$$

2) *Если n – целое положительное <u>четное</u> число, то справедливо равенство*
$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - b^{n-1}). \qquad (2)$$

3) *Если n – целое положительное <u>нечетное</u> число, отличное от единицы, то справедливо равенство*
$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1}). \qquad (3)$$

Наверное, читатель без особого труда сможет вывести вторую и третью формулы из первой, мы же остановимся на доказательстве первой формулы. Раскроем скобки в правой части равенства и приведем подобные:

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}) =$$
$$= (a^n - a^{n-1}b) + (a^{n-1}b - a^{n-2}b^2) + \ldots + (ab^{n-1} - b^n) = a^n - b^n. \blacksquare$$

Есть и другие суммы, в которых возникает ситуация, схожая с вышеприведенной.

Пример 2. Вычислите $\frac{1}{13\cdot 17}+\frac{1}{17\cdot 21}+\ldots+\frac{1}{77\cdot 81}$.

○ *Решение.* Поскольку для всякого натурального числа n справедливо равенство $\frac{1}{n(n+4)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}\right)$, имеем:

$$\frac{1}{13\cdot 17}+\frac{1}{17\cdot 21}+\ldots+\frac{1}{77\cdot 81}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{17}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{21}\right)+\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{77}-\frac{1}{81}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{17}-\frac{1}{21}+\ldots-\frac{1}{77}+\frac{1}{77}-\frac{1}{81}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{81}\right)=\frac{17}{13\cdot 81}=\frac{17}{1053}.$$ ●

Пример 3. Вычислите $1 + 2 + 2^2 +\ldots+ 2^{2010}$.

○ *Решение.* Пусть $A = 1 + 2 + 2^2 +\ldots+ 2^{2010}$. Тогда

$$2A = 2 + 2^2 + 2^3 +\ldots+ 2^{2011}.$$

Следовательно,

$$A = 2A - A = 2 + 2^2 + 2^3 +\ldots+ 2^{2011} - 1 - 2 - 2^2 -\ldots- 2^{2010} =$$

$$= 2^{2011} - 1.$$ ●

Остановимся на применении формул сокращенного умножения в задачах на делимость. И здесь, конечно, есть совсем простые задачи, в которых эти формулы используются не больше трех раз. А есть задачи, где это применение многократно, и мы будем использовать многоточие уже не для сокращения записи одной формулы, а для сокращения записи многократного применения этих формул.

Пример 4. Докажите, что число $(67^{24}-1)$ делится на 17.

○ *Решение.* Согласно формуле сокращенного умножения (2) имеем

$$67^{24} - 1 = (67 + 1)(67^{23} - 67^{22} + ... - 1) =$$
$$= 4 \cdot 17 \cdot (67^{23} - 67^{22} + ... - 1).$$

Значит, число $(67^{24}-1)$ делится на 17. ●

Пример 5. Докажите, что разность $2^{35} - 3^{20}$ делится на 47.

○ *Решение.* Согласно формуле сокращенного умножения (1) имеем

$$2^{35} - 3^{20} = (2^7)^5 - (3^4)^5 = 128^5 - 81^5 =$$
$$= (128 - 81)(128^4 + 128^3 \cdot 81 + 128^2 \cdot 81^2 + 128 \cdot 81^3 + 81^4) =$$
$$= 47(128^4 + 128^3 \cdot 81 + 128^2 \cdot 81^2 + 128 \cdot 81^3 + 81^4).$$

То есть разность $2^{35} - 3^{20}$ делится на 47. ●

Пример 6. Существует ли натуральное n, для которого число $2^{3n} - 7n - 1$ не делится на 49?

○ *Решение.* Применяя многократно формулу (1), получим

$$2^{3n} - 7n - 1 = 8^n - 1 - 7n = (8 - 1)(8^{n-1} + 8^{n-2} + ... + 1) - 7n =$$
$$= 7(8^{n-1} + 8^{n-2} + ... + 1 - n) =$$
$$= 7((8^{n-1} - 1) + (8^{n-2} - 1) + ... + (8 - 1) + (1 - 1)) =$$
$$= 7(7(8^{n-2} + 8^{n-3} + ... + 1) + 7(8^{n-3} + 8^{n-4} + ... + 1) + ... + 7) =$$
$$= 49(8^{n-2} + 2 \cdot 8^{n-3} + 3 \cdot 8^{n-3} + ... + (n - 2) \cdot 8 + n - 1).$$

Отсюда ясно, что для всякого натурального n число $2^{3n} - 7n - 1$ делится на 49. ●

Ответ: нет.

182. Вычислите $21 + 22 + 23 + ... + 90$.

183. (ЕНТ) Вычислите сумму всех двузначных чисел.

184. Вычислите $2 + 5 + 8 + ... + 92$.

185. Вычислите $3 + 5 + 7 + ... + 47$.

186. Вычислите $5 + 9 + 13 + ... + 89$.

187. (ММР, 6 кл., 1998) Вычислите сумму
$1 + 4 + 7 + ... + 97 + 100$.

В задачах 188–199 выполните действия без калькулятора.

188. $987 \cdot 1013$.

189. 999983^2.

190. 997^3.

191. 2002^3.

192. 1001001^2.

193. 100908^2.

194. $\left(\dfrac{30\cdot 31\cdot 38\cdot 44+49}{36^2-49}+49\right):\left(5^3+3\cdot 5^2+3\cdot 5+1\right)$.

195. $\left(\dfrac{514\cdot(527^2+527\cdot 13+13^2)+13^3}{(24^2-49)^2}+13\right):36$.

196. $\dfrac{((560^2+179^2)^2-280^2\cdot 358^2)(560^2-179^2)+179^6}{61^3+27\cdot 61^2+243\cdot 61+9^3}$.

197. $\left(\dfrac{(19\cdot 21\cdot 65\cdot 73+121)^2}{43\cdot 25-51}-1\right):88$.

198. $\dfrac{((411^2+114^2)^2-137^2\cdot 342^2)(411^2-114^2)+114^6}{137^6}$.

199. $\dfrac{493\cdot(451^2-451\cdot 42+42^2)-42^3}{(26^2-225)^2}:41$.

200. Найдите последнюю цифру десятичной записи числа $0^2-1^2+2^2-3^2+\ldots+2008^2-2009^2+2010^2$.

201. (ММР, 8 кл., 1999) Найдите значения выражения

$$\frac{(2+3)\cdot(2^2+3^2)\cdot\ldots\cdot(2^{512}+3^{512})+2^{1024}}{3^{1024}}.$$

202. Вычислите $\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{42}+\dfrac{1}{56}+\dfrac{1}{72}+\dfrac{1}{90}+\dfrac{1}{110}+\dfrac{1}{132}$.

203. Верно ли, что

$$\frac{2\cdot 1999}{1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\ldots+\dfrac{1}{1+2+3+\ldots+1999}}=2000?$$

204. Вычислите

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{225}\right).$$

205. Для каждого натурального числа n докажите тождество

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

206. Докажите, что разность $26^n - 7^n$ при любом натуральном n делится на 19.

207. Докажите, что $146^{15} - 61^{15}$ делится на 17.

208. Докажите, что разность $5^{22} - 18^{11}$ делится на 7.

209. Верно ли, что при любом натуральном n число $18^n + 15^n - 5^n - 2^n$ делится на 13?

210. Почему сумма $8^n + 6$ при любом натуральном n делится на 7?

211. Число $2^{155} + 1$ делится на 11. Докажите или опровергните.

212. Докажите, что число $5^{2n} + 48^n - 2^{n+1}$ делится на 23 (n — натуральное число).

213. Докажите, что число $1^{2009} + 2^{2009} +...+ 30^{2009}$ делится на 31.

214. Верно ли, что разность $47^{100} - 14^{100}$ делится на 61?

215. Докажите, что $2^{48} - 1$ делится на 105.

216. Докажите, что $3^{60} - 2^{60}$ делится на 11.

217. Найдите все натуральные n, при которых сумма $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на 323.

218. Найдите все натуральные n, при которых $13^n + 6$ делится на 7.

219. Делится ли разность $17^{15} - 3^{15}$ на 4?

220. Докажите, что сумма $6^{2(n+1)} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36$ при любом натуральном n делится на 900.

221. Найдите все натуральные n, при которых сумма $25^n + 5^n + 6$ делится на 12.

222. Существуют ли натуральные n, при которых сумма $6^{2n} + 3^n + 3^{n+2}$ делится на 11?

223. Найдите все натуральные n, при которых сумма $3^{3n} + 3^{2n} + 3^n + 1$ делится на 8.

224. Докажите, что сумма $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ при любом натуральном n делится на 25.

225. Верно ли, что сумма $4^n + 6n - 1$ при любом натуральном n делится на 9?

226. Докажите, что число $4^{2n+2} - 15n - 6$ при любом натуральном n делится на 225.

227. Докажите, что сумма $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ при любом натуральном n делится на 133.

228. Делится ли $22^{55} - 55^{22}$ на 7?

229. Докажите, что число $23^{43}+43^{23}$ делится на 66.
230. Делится ли сумма $19^{69}+69^{19}$ на 44?
231. Сумма $5^{2n+1}+3^{n+2}\cdot 2^{n+1}$ при любом натуральном n делится 19. Докажите или опровергните это утверждение.
232. Делится ли сумма $2222^{5555}+5555^{2222}$ на 7?
233. Может ли число 5^n-1 делиться на число 4^n-1 при некотором натуральном n?
234. Докажите, что при любом нечетном n число $1^n+2^n+...+n^n$ делится на $1+2+...+n$.
235. Докажите, что $\underbrace{99...9}_{1986}7$ делится на 7.
236. Докажите, что число $\underbrace{22...2}_{1990}1$ составное.
237. Докажите, что $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{2004^2-1}<\frac{3}{4}$.
238. Докажите, что $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}<\frac{99}{100}$.
239. Решите уравнение:
$1-(2-(3-(...(1998-(1999-(2000-x)))...)))=1000$.
240. Найдите значение выражения:

$$\frac{8+222\cdot 444\cdot 888+444\cdot 888\cdot 1776}{2\cdot 4\cdot 8+444\cdot 888\cdot 1776+888\cdot 1776\cdot 3552}.$$

Занятия 35–38

Математическая абака №2*

Призы: каждая из команд получает блоки в количестве $\left[\frac{N}{160}\right]$, где N — количество очков, которые заработала команда.

Задачи

	Шахматная тема	Геометрия	Комбинаторика
10	Сколькими способами на доске 5 × 5 можно расположить 5 ферзей, чтобы они не били друг друга? Способы, отличающиеся поворотами и симметрией, считаются различными.	Треугольник разрезали по всем его трем биссектрисам так, что получилось 6 треугольников. Сколько среди них может оказаться равносторонних? Укажите все варианты.	Сколько решений имеет ребус К × И × (Р + О + В) = 33, если разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым — одинаковые.

* Источник задач — XXXIII Уральский (XVII Кировский) турнир юных математиков.

	Шахматная тема	Геометрия	Комбинаторика
20	Шахматную доску по границам клеток разрезали на различные прямоугольники. Какое наибольшее число прямоугольников могло получиться? Прямоугольники считаются одинаковыми, если их можно наложить друг на друга так, чтобы совпали цвета накладываемых клеток.	В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании равна основанию. Найдите углы треугольника (в градусах).	Какое наибольшее число очков могла набрать команда в игре «Математическая абака», не получившая ни одной премии? (Командам выдано 6 тем по 6 задач.)
30	Какое наибольшее количество доминошек, занимающих две клетки, можно положить на шахматную доску, чтобы для любых двух доминошек конь мог сделать ход с какой-то клетки первой на какую-то клетку второй?	На клетчатой бумаге отмечены четыре узла сетки, образующие квадрат 4×4. Вася отметил еще два узла и соединил их замкнутой ломаной так, чтобы получился шестиугольник (не обязательно выпуклый) наименьшей возможной площади. Чему равна эта площадь?	Иван Ильич купил четыре игрушки: самолет, корабль, грузовик и подъемный кран, чтобы подарить их трем своим внукам: Пете, Мише и Коле. Он хочет раздать все четыре игрушки и не хочет, чтобы кто-то из внуков остался без игрушки. Каким числом способов он может раздать игрушки?

	Шахматная тема	Геометрия	Комбинаторика
40	Какое наибольшее число фигур — коней и королей, не бьющих друг друга, можно поставить на шахматную доску?	В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка K так, что $\angle BAK = 24°$. На отрезке AK выбрана точка M так, что $\angle ABM = 90°$, $AM = 2BK$. Найдите величину угла B.	Очень умные Петя и Вася выписывают четырехзначные числа. Петя выписывает такие числа, у которых первая цифра равна сумме трех других, а Вася — такие, у которых последняя цифра равна сумме трех других. Кто выпишет больше чисел и на сколько?
50	Сколько ладей может стоять на шахматной доске, если каждая бьет одинаковое число ладей? Укажите все варианты.	Веревку согнули в три раза, потом снова в три раза, после чего сделали разрез (не совпадающий с линиями сгибов). Веревка распалась на куски, длины двух из которых оказались равны 2 см и 6 см. Найдите возможную длину веревки.	На столе в нескольких кучках лежит 15 спичек. Каждую минуту из каждой кучки берется по одной спичке, из которых образуется новая кучка. Какие кучки могут быть на столе после 2009-го хода?
60	Шахматную доску удалось по границам клеток разрезать на $3n$ квадратов. Укажите все возможные значения n.	В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 40°$. На сторонах AB и BC выбраны такие точки D и E соответственно, что $\angle EAD = 5°$ и $\angle ECD = 10°$. Найдите $\angle EDC$.	На доске 100×100 расставлены числа 1, 2 и 3 так, что в каждом прямоугольнике 1 × 3 встречаются все три числа, а в углах стоят единицы. Если эту доску раскрасить в шахматном порядке, то сколько белых клеток будут единицами?
Ответ считается правильным, если приведены все правильные варианты и нет ни одного неверного!			

	Текстовые задачи и логика	Алгебра	Числа
10	В ряд стоят три бога — Бог Правды, Бог Лжи и Бог Дипломатии. Бог правды говорит только правду, Бог лжи всегда лжет, а Бог Дипломатии может как солгать, так и сказать правду. Первого спрашивают: «Кто стоит рядом с тобой?» Он отвечает: «Бог Правды». Второго спрашивают: «Кто ты?» — «Бог Дипломатии». Третьему задают вопрос: «Кто рядом с тобой?» — «Бог Лжи». Кто стоит посередине?	Найдите все такие x, что x^2+2x — точный квадрат.	Если от трехзначного числа отнять 7, оно разделится на 7; если отнять 8 — оно разделится на 8; если отнять 9 — оно разделится на 9. Найдите это число.
20	Сережа отпил 1/4 стакана черного кофе, долил молоком, хорошенько размешал, выпил 1/5 стакана, снова долил молоком и размешал, затем отпивал 1/6 и 1/7 стакана, каждый раз доливая молоком и размешивая. В другой раз он сначала отпил 1/7 стакана кофе, долил молоком и размешал, затем отпил 1/6 стакана и т.д. до 1/4 стакана. В какой раз Сережа выпил больше кофе и на сколько? Объем стакана 250 мл.	Известно, что $\frac{a+b}{a-b}=3$. Найдите, чему может быть равно $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.	Найти четное число, равное 1/50 суммы всех предшествующих ему нечетных натуральных чисел.

	Текстовые задачи и логика	Алгебра	Числа
30	Фермер посадил 233 индейки в 6 клеток, расположенных вдоль аллеи. Известно, что в одной из крайних клеток больше всего птиц, в другой — меньше всего, причем разница составляет 13 птиц. В клетке 3 на 6 птиц больше, чем в клетке 2. В клетке 5 на 2 птицы меньше, чем в клетке 1. В клетке 4 тридцать пять птиц, на три больше, чем в той клетке, где их меньше всего. Сколько птиц во второй клетке?	Пусть $(a+b)(a+b-1)=ab$ и $a^2-b^2=3$. Найдите значение a^3-b^3.	Известно, что остаток от деления некоторого простого числа на 60 равен составному числу. Какому?
40	На острове, где живут только всегда правдивые рыцари и всегда лгущие лжецы, в теледебатах участвовали 9 кандидатов с номерами от 1 до 9. Каждый кандидат заявил: «Кандидат, чей номер равен последней цифре квадрата моего номера, — рыцарь». Впоследствии выяснилось, что не все кандидаты были лжецами, но и рыцарей среди них было не более трех. Кто из них лжец, а кто — рыцарь?	На месте звездочек Вася расставил различные числа так, что равенство $(x+*)(*x+3)=$ $=(2x+*)\cdot(x+*)$ выполняется при всех x. Какое число написано на месте последней звездочки?	Найти три различных натуральных числа, не больших 16, сумма обратных величин которых равна 1/2.

	Текстовые задачи и логика	Алгебра	Числа
50	В пяти коробках лежат финики. Известно, что в C лежит треть фиников коробки E, а в B — вдвое больше, чем в C и E вместе взятых. В коробке A вдвое меньше фиников, чем в E, и на 10 меньше, чем в D. В коробке B вчетверо больше фиников, чем в D. Сколько всего фиников во всех коробках?	Найдите все решения системы $\begin{cases}\lvert x\rvert+\lvert y\rvert=5\\ \lvert\lvert x\rvert-y\rvert=1.\end{cases}$	В выражении МАТЕМ + АТИКА каждая буква обозначает цифру, причем разные буквы обозначают разные цифры. Найдите максимально возможное значение этой суммы.
60	На вопрос «Сколько вам лет?» марсианки переглянулись. Одна из них улыбнулась и сказала: «Ми недавно исполнилось 22 месяца, а вот Ме постарше, ей 21 миллион лет». Вторая тоже улыбнулась: «На самом деле Ми — 21 миллион лет, а вот Мо всего 19 тысяч лет». И здесь рассмеялась третья: «Мо в действительности всего 18 недель, 21 миллион лет на самом деле Ма». А четвертая честно сообщила, что ровесниц среди них нет и в каждом ответе одно высказывание верно, а другое — нет. Определите возраст каждой.	Положительные числа x, y, z удовлетворяют условиям $xyz = 1$, $x + 1/z = 5$, $y + 1/x = 29$. Найдите $z + 1/y$.	Найдите все натуральные числа, которые в 33 раза больше суммы своих цифр.
Ответ считается правильным, если приведены все правильные варианты и нет ни одного неверного!			

Ответы

	Шахматная тема	Геометрия	Комбинаторика	Текстовые задачи и логика	Алгебра	Числа
10	10	0	12	Бог Лжи	0, –2	504
20	12	72°,72°,36	1050	поровну	5/3	200
30	6	6	36	36	3	49
40	32	108°	Петя на 54 больше	5	1,5	4, 6, 12
50	От 0 до 8, 10, 12, 14, 16	36, 45, 63, 72	1, 2, 3, 4, 5, 6	310	(2, 3), (–2, 3), (3, 2), (–3, 2)	187407
60	От 4 до 16	85°	1666 или 1667	Ми — 22, Мо — 19, Ма — 21, Ме — 18	0,25	594

Занятия 39–42

Математическая дуэль №1

Правила

1. Математическая дуэль является крайней формой отбора учащихся. Среди всех математических соревнований в психологическом плане она является наиболее жестокой. Поэтому математическая дуэль проводится только в случае, когда большинство учащихся не может получить допуск к первому коллоквиуму.
2. Каждый учащийся получает 10 задач из общего списка. Задачи распределяются случайно и у некоторых могут совпадать несколько задач.
3. В первый час учащиеся решают свои задачи.
4. В течение 10 минут после окончания первого часа учащимся предлагается добровольно найти себе соперника.
5. Пара считается сформированной, только если каждый из учащихся дал согласие.
6. Те, кто не смогут найти себе соперника, будут распределены случайным образом (согласие не требуется).
7. В следующий за этим час учащиеся решают задачи соперника.
8. После этого учащиеся в порядке записи (могут быть исключения, если есть желающие участвовать раньше) парами вызываются к доске. Учащийся записывает на доске только ответы к задачам соперника. Учащийся может отказаться писать ответы к некоторым задачам.
9. Соперник имеет право либо согласиться с приведенными ответами, либо указать неправильные, либо привести свои, в случае если ответ не указан, или, по

мнению соперника, приведенный ответ не верен. Соперник имеет право отказаться от любого упомянутого в этом пункте действия.

10. За каждое правильное действие учащийся получает 1 очко, за каждое неправильное действие отнимается 1 очко.
11. По итогам математической дуэли победитель получает столько блоков, какова разница в счете. В случае ничьи оба участника получают штраф в размере 10 баллов. Побежденный теряет соответствующее количество баллов из рейтинга.

Задачи

1. Решите уравнение $|\ldots||x|+5|+5|\ldots+5| = x+50$ (модуль используется 10 раз).
2. Правильный треугольник и квадрат имеют две общие вершины. Расстояние от третьей вершины до точки пересечения диагоналей равно 1. Найдите, чему может быть равна сторона квадрата.
3. Какое наименьшее число надо прибавить к числу $\overline{ОМСК}$, чтобы получить число $\overline{ШТЕРН}$ (разные буквы соответствуют разным цифрам, а одинаковые — одинаковым)?
4. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетчатую доску 200×8 так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета?
5. Назовем два слова (слово — любая последовательность букв русского алфавита) *похожими*, если они состоят из одних и тех же букв, и любые две буквы, стоящие рядом в одном слове, встречаются стоящими рядом в другом слове в том же порядке. Сколько существует слов, похожих на слово КОЛМОГОРОВ?
6. Чему равно минимальное значение выражения $a+b\cdot c+d\cdot e\cdot f+g\cdot h\cdot i\cdot j$, где вместо букв должны стоять цифры от 0 до 9 по одному разу каждая?
7. AL и BM — биссектрисы треугольника ABC. Окружности, описанные около треугольников ALC и BMC,

вторично пересекаются в точке K, лежащей на стороне AB. Найдите величину угла ACB.

8. Назовем натуральное число *интересным*, если оно является произведением двух (различных или равных) простых чисел. Каково наибольшее количество последовательных чисел, все из которых — интересные?
9. По кругу записаны 100 различных чисел, любые два соседних отличаются на 10 или на 7. Найдите наибольшее возможное значение разности между самым большим и самым маленьким числами.
10. Найти все целые числа n, для которых число $\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$ — целое.
11. Витя изготовил много квадратов и правильных пятиугольников со стороной 1 и начал прикладывать их друг к другу по очереди (квадрат–пятиугольник–квадрат–пятиугольник) без наложений, складывая в кольцо. Какое наименьшее число фигурок он использовал, когда кольцо замкнулось?
12. Найти все простые числа, которые можно получить приписыванием друг к другу двух простых чисел, различающихся на 2.
13. В ящике лежат 100 носков четырех разных цветов. Известно, что если, не заглядывая в ящик, вытащить 90 носков, то среди них обязательно найдутся 4 носка различных цветов. Какое наименьшее число носков нужно вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них наверняка нашлись 3 носка различных цветов?
14. Найдите хотя бы одно решение в рациональных числах уравнения $\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt{x\sqrt{3}}-\sqrt{y\sqrt{3}}$.
15. Пусть l — биссектриса внешнего угла C треугольника ABC. Прямая, параллельная l и проходящая через середину K стороны AB, пересекает AC в точке E. Найти CE, если $AC = 7$ и $CB = 4$.
16. Обозначим через $k(N)$ наибольший нечетный делитель числа N. Найдите сумму
$$k(m + 1) + k(m + 2) + \ldots + k(2m).$$

17. Куб с ребром длины 10 разбит на 1000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 10 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 5 (рассматриваются столбики всех трех направлений). В некотором кубике записано число 7. Через этот кубик проходят три слоя $1 \times 10 \times 10$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел, не входящих в эти слои.

18. Решите в целых числах уравнение

$$3x^2 - 2xy - y - x - 1 = 0.$$

19. Приведите пример треугольника, у которого три стороны и одна высота — четыре последовательных натуральных числа.

20. Какое наименьшее количество квадратиков 1×1 надо нарисовать, чтобы получилось изображение квадрата 12×12, разделенного на 144 квадратика 1×1? (Можно некоторые отрезки нарисовать несколько раз.)

21. Существует такое число α, что для любого треугольника ABC выполняется неравенство: $\max(h_a, h_b, h_c) \le \le \alpha \cdot \min(m_a, m_b, m_c)$, где h_a, h_b, h_c — длины высот, а m_a, m_b, m_c — длины медиан. Найдите наименьшее возможное значение α.

22. Маша заменила в примере на умножение двузначных чисел цифры буквами: одинаковые — одинаковыми, разные — разными. У нее получилось $\overline{АБ} \cdot \overline{ВГ} = \overline{БББ}$. Каким мог быть исходный пример? Найдите все возможные варианты.

23. Сколько чисел от 1 до 1000 можно представить в виде суммы натурального числа, кратного 7, и натурального числа, кратного 4?

24. Все четырехзначные числа, цифры которых различны и стоят в порядке возрастания, выписали друг за другом — снова в порядке возрастания. Какое число стоит на 16-м месте?

25. На карточке у каждого из 11 школьников написано какое-то натуральное число. Известно, что все эти числа различны, а их сумма равна 71. Чему может быть равно среднее по величине из написанных чисел?

26. От города до горного приюта целое число километров. Однажды утром три группы альпинистов отправились из города в приют. В первый день группа A прошла шестую часть пути, группа B — половину пути, а группа C — четверть пути. На следующий день группа A прошла 100 км, группа B — 10 км, а группа C — 78 км. За два дня группа B прошла большее расстояние, чем группа A, но меньшее, чем группа C. Каково расстояние от города до приюта?

27. За круглым столом сидят 2009 человек. Каждый из них — рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжет. Оказалось, что рядом с каждым лжецом сидит ровно один лжец. Каждого из сидящих за столом спросили, сколько лжецов сидит рядом с ним. Несколько человек ответили, что один, а все остальные — что два. Какое наименьшее количество лжецов может сидеть за столом?

28. Сколько существует пятизначных чисел, десятичная запись которых начинается с 1 и содержит ровно две одинаковые цифры?

29. Найдите 2009-й член последовательности 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, ...

30. Найдите наименьшее натуральное n, такое что все 73 дроби $19/(n+21)$, $20/(n+22)$, $21/(n+23)$, ..., $91/(n+93)$ несократимы.

31. Сколько существует трехзначных чисел, у которых сумма цифр больше произведения цифр?

32. На плоскости провели 6 прямых и отметили несколько точек так, что на каждой прямой оказалось ровно по три отмеченных точки. Какое наименьшее число точек могло быть отмечено?

33. В каждой клетке квадрата 3×3 лежит монета орлом вверх. Какое наименьшее количество монет нужно перевернуть, чтобы в результате не оказалось трех монет, расположенных в одной вертикали, одной горизонтали или одной диагонали и лежащих одинаково (то есть все три орлом вверх или все три решкой вверх)?

34. Города Верходырье, Среднедырье и Нижнедырье соединены дорогами. Между каждыми двумя городами есть не менее трех, но не более десяти прямых (то есть не проходящих через третий город) дорог. Географическое общество подсчитало, что добраться из Верходырья в Нижнедырье (напрямик или через Среднедырье) можно 33 способами. А путей из Среднедырья в Верходырье (прямых или через Нижнедырье) всего 23. Сколькими способами можно проехать из Нижнедырья в Среднедырье (возможно, посетив по дороге Верходырье)?

35. Граничные клетки прямоугольника 3×5 закрыты шестью разными костями домино, приложенными друг к другу по правилам. Какое наименьшее количество точек может быть на всех шести костях вместе? (Напомним, что кость домино состоит из двух клеток, в каждой из которых от 0 до 6 точек; если у клеток двух разных костей есть общая сторона, в этих клетках должно быть поровну точек.)

36. Все четырехзначные числа, цифры которых различны и стоят в порядке возрастания, выписали — снова в порядке возрастания. Какое число стоит на 97-м месте?

37. Сколькими способами можно расставить числа 1 и –1 во всех клетках таблицы 4×4 так, чтобы сумма всех чисел в каждой строке и в каждом столбце была равна 0?

38. На карточке у каждого из 2009 школьников написано какое-то натуральное число. Известно, что все эти числа различны, а их сумма равна 2 020 049. Чему может быть равно среднее по величине из написанных чисел?

39. Пусть A — двузначное число, не кратное 10. B — трехзначное число. Известно, что $A\%$ от B равны 400. Найдите, чему могут быть равны A и B.

40. Грузчики Коля и Петя носят ящики. Переноска маленького ящика занимает у Пети 1 минуту, а у Коли — 3 минуты. Зато большой ящик Коля переносит за 5 минут, а Петя — за 6. Всего им нужно перенести 10 больших и 10 маленьких ящиков. За какое наименьшее время они могут это сделать?

41. В советские времена у школьника было несколько монет по 15 коп. и по 20 коп., причем 20-копеечных больше. Пятую часть всех денег он истратил, заплатив двумя монетами за билет в кино. Половину оставшихся денег он потратил на обед, заплатив за него тремя монетами. Сколько монет каждого достоинства было у школьника изначально?

42. Медведь, Волк и Лиса разговаривали на полянке. Медведь: «Лиса не самая хитрая». Лиса: «Я хитрее медведя». Волк: «Лиса хитрее меня». Солгал самый хитрый зверь, остальные сказали правду. Кто самый хитрый?

43. У четырехзначного числа каждая его цифра, кроме цифры в разряде единиц, на 1 меньше цифры в предыдущем разряде (например, число сотен на 1 меньше числа десятков). На сколько может измениться это число, если его цифры записать в обратном порядке? Укажите все возможности.

44. Площадь фигуры, нарисованной на клетчатой бумаге (рис. 4), равна 40,5 см^2. Чему равна сторона клеточки?

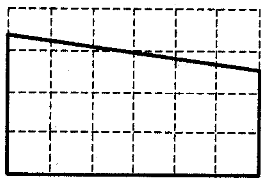


Рис. 4

45. Отмечена точка пересечения двух прямых и кроме нее 5 точек на одной прямой и 7 точек на другой. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

46. Два кафе испекли по одинаковому количеству тортов. Первое кафе продало 7 тортов целиком, а все остальные разрезали каждый на семь кусков и продавали кусочками. Второе кафе продало 11 тортов, а каждый из оставшихся разрезали на 11 кусочков и продали по кусочкам. Оказалось, что каждое кафе продало одинаковое число кусочков. Сколько тортов первоначально было испечено в каждом кафе?

47. Про целое положительное число A сделаны четыре утверждения: «A делится на 5», «A делится на 11», «A делится на 55», «A меньше 15». Известно, что два из этих утверждений истинны, а два — ложны. Чему может быть равно число A?

48. Найдите 9 таких последовательных целых чисел, что сумма трех первых равна сумме шести последних.

49. К углам прямоугольного бассейна периметром 200 м подошли 4 ученика. Тренер подплыл куда-то к краю бассейна и пригласил учеников подойти. Все пошли кратчайшими путями. Ваня прошел 30 м, Максим — 60 м, Маша — 40 м. Сколько метров пришлось пройти четвертому ученику?

50. Сколько есть трехзначных чисел, у которых сумма двух крайних цифр вдвое больше средней цифры?

51. Двое лыжников шли с постоянной скоростью 6 км/ч на расстоянии 200 метров друг от друга. Потом они стали подниматься в большую горку, и скорость упала до 4 км/ч. Затем оба лыжника съехали с горки со скоростью 7 км/ч и попали в глубокий снег, где их скорость стала всего 3 км/ч. Каким стало расстояние между ними?

52. Петя задумал натуральное число, не большее 20. Вася может назвать Пете произвольное натуральное число, и Петя скажет, делится ли на него задуманное число. Сколько, самое меньшее, чисел должен назвать Вася, чтобы наверняка узнать, какое число задумал Петя?

53. Найдите все решения ребуса ОГО × ГЫГЫ = ХАХАХА, где одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры.

54. Из одной точки на плоскости провели 20 лучей. Какое наибольшее число углов, равных 25 градусам, могло при этом образоваться?

55. Три ковбоя зашли в салун. Один купил 4 сандвича, чашку кофе и 10 пончиков — всего на 1 доллар 69 центов. Второй купил 3 сандвича, чашку кофе и 7 пончиков за 1 доллар 26 центов. Сколько заплатил третий ковбой за сандвич, чашку кофе и пончик?

56. Каждый из 12 человек — рыцарь, всегда говорящий правду, или всегда лгущий лжец. Один из них сказал: «Число лжецов среди нас делится на 1», второй: «Число лжецов среди нас делится на 2», ..., 12-й: «Число лжецов среди нас делится на 12». Сколько среди них может быть рыцарей?

57. Найдите все натуральные числа, которые на 14 больше произведения своих цифр.

58. На прямой отмечены 5 точек. Попарные расстояния между ними, выписанные в порядке возрастания, равны 2, 4, 5, 7, 8, k, 13, 15, 17, 19. Чему может быть равно k? Укажите все варианты.

59. В коробке лежат 40 синих перчаток, 30 красных и 20 желтых. Среди перчаток поровну левых и правых. Какое наименьшее число перчаток надо, не глядя, вынуть из коробки, чтобы среди вынутых наверняка оказалась пара одноцветных перчаток на разные руки?

60. Аня рассказывает: «В нашем классе N человек, из них 15 человек имеют карие глаза, у 16 — темные волосы, 17 человек весят более 40 кг и 18 ростом выше 160 см». Таня ответила: «Тогда я точно скажу, что как минимум четверо школьников из вашего класса имеют все четыре признака». Чему может быть равно наибольшее возможное значение N?

61. Аня написала на бумажке числа 1 и a; Боря — a, b и 3; Саша написал 2, 4 и c, Дима — a, b и 4, Егор написал четыре числа a, b, c, e. Все, что написала Аня, написал и Дима, а все, что написано у Бори, Саши и Димы, можно найти и у Егора. Найдите, чему равны числа a, b, c, e.

62. Некоторое четырехзначное число является квадратом числа x. Если же четырехзначное число записать в обратном порядке, то мы получим квадрат числа y, причем y кратно x. Найдите, чему равно x.

63. Сколькими различными способами можно разбить числа от 1 до 9 на три группы так, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковыми?

64. Урожай на поле убирали несколько одинаковых комбайнов, которые, начни они вместе, справились бы с работой за 24 часа. К сожалению, по техническим причинам, они начинали работать только через равные промежутки времени, но уже каждый работал до самого конца. Первый работал в пять раз дольше последнего. Сколько часов работал первый комбайн?

65. В гандбольном турнире, где за победу давали 2 очка, за ничью — 1 очко, а за поражение — 0 очков, участвовали 10 команд. Команда «Долбило» одержала в нем больше побед, забила больше и пропустила меньше мячей, чем любая другая команда. Какое самое низкое место она могла занять?
66. При каком наименьшем k, большем 1, число 2008 можно представить в виде суммы k подряд идущих натуральных чисел?
67. Квадрат разбит на 16 равных квадратиков. Получилось множество из 25 вершин. Какое наименьшее число вершин можно удалить из этого множества так, чтобы никакие четыре точки в оставшемся множестве не были вершинами квадрата со сторонами, параллельными сторонам исходного квадрата?
68. Сколькими различными способами можно из клетчатой доски 6×6 вырезать два непересекающихся трехклеточных «уголка», у каждого из которых средняя клетка левее одной из крайних и ниже другой?
69. Можно ли соединить 77 телефонов так, чтобы из каждого можно было позвонить ровно в 17 других?
70. В стране Лапландии все города, кроме столицы и города Дальнего, соединены с 20 другими городами. Столица же соединена с 51 городом, а город Дальний с одним городом. Можно ли из города Дальнего добраться самолетом до столицы (быть может, с пересадками)?
71. Можно ли расположить на плоскости 7 прямых так, чтобы каждая пересекала ровно пять других?
72. На доске написаны числа 1, 2, 3, 4, 5. За один ход разрешается стереть два числа, а вместо них записать их сумму или разность. Через 4 хода останется одно число. Может ли оно равняться нулю?

73. Пятнадцать пятаков лежат гербом вверх. Разрешается за один раз перевернуть любые четырнадцать из них. Можно ли за несколько раз перевернуть все пятаки гербом вниз?

74. В таблице 3×3 расставлены числа:

0	3	2
6	7	0
4	9	5

За один ход разрешается к любым двум числам в соседних (т.е. имеющих общую границу) клетках прибавить по одинаковому целому числу. Можно ли получить таблицу из восьми нулей и одной единицы?

75. Десять фишек поставлены в ряд. Разрешено менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли поставить все фишки в обратном порядке?

76. На доске были написаны несколько плюсов и 1991 минус. Разрешается стирать любые два знака и вместо них писать плюс, если они одинаковы, и минус, если они различны. После многократного выполнения этой операции на доске остался один знак. Какой?

77. Карлсон написал дробь $10/97$. Малыш может 1) прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, 2) умножить числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь, а) равную $1/2$, б) равную 1?

78. Три ежика делили три кусочка сыра массами 5 г, 8 г и 11 г. Лиса стала им помогать. Она может от любых двух кусочков одновременно отрезать и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить ежикам равные кусочки сыра?

79. Резидент одной иностранной разведки сообщил в центр о готовящемся подписании ряда двусторонних соглашений между пятнадцатью бывшими республиками СССР. Согласно его донесению каждая из них заключит договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?

80. На столе стоят 7 стаканов дном вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли дном вниз?

81. С набором из пяти чисел, каждое из которых равно 1 или -1, разрешено производить следующую операцию: менять знаки у каких-нибудь двух чисел. Можно ли с помощью нескольких таких операций из набора $\{1, -1, -1, 1, 1\}$ получить набор $\{-1, 1, 1, 1, 1\}$?

82. Найдите цифру, обозначенную звездочкой, в числе 41875*, если это число делится на 18.

83. Существует ли цифра, которую необходимо приписать справа и слева к числу 97, чтобы полученное четырехзначное число делилось на 27?

84. Найдите все значения цифр x и y, при которых число $\overline{124xy}$ делится на 75.

85. Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 0 и делится на 225.

86. Найдите все значения цифр x и y, при которых число $\overline{53xy213}$ делится на 99.

87. У трехзначного числа, делящегося на 45, разность между второй и первой цифрами равна разности между третьей и второй. Найдите все такие трехзначные числа.

88. Найдите все трехзначные числа, делящиеся на 11, у которых сумма цифр делится на 11.

89. Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается одинаковыми цифрами и делится на 693.

90. Найдите такое трехзначное число, делящееся на 27, что при любой перестановке его цифр получается число, также делящиееся на 27. Укажите все такие числа.

Ответы

1. $x = -2{,}5$.
2. $\sqrt{3} \pm 1$, $\sqrt{6}/3$.
3. 358.
4. 400.
5. 6.
6. 28.

7. 60.
8. Три.
9. 497.
10. 0 и 144.
11. 12.
12. 53.
13. 79.
14. $x = 3/2$, $y = 1/2$.
15. 5,5.
16. m^2.
17. 358.
18. (0, –1) и (–1, –3).
19. Стороны 13, 14, 15. h=12.
20. 94.
21. 2.
22. $37 \times 21 = 777$ или $15 \times 37 = 555$.
23. 981.
24. 1267.
25. 6.
26. 271 км.
27. 1006.
28. 5040.
29. 29.
30. 95.
31. 199.
32. 7.
33. 4.
34. 21.
35. 10.
36. 3468.
37. 90.
38. 1005.
39. $A = 64$, $B = 625$.
40. 33 минуты.
41. 2 по 15 коп. и 6 по 20 коп.
42. Волк.
43. 3087.
44. 1,5 см.
45. 210.
46. 18.
47. 5, 10, 11.
48. –10, ..., –2.
49. 70.

50. 45.
51. 100 м.
52. 8.
53. Нет решений.
54. 19.
55. 40 центов.
56. 3, 4, 12.
57. 26, 38, 59.
58. 12.
59. 86.
60. 20.
61. $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$, $e = 4$.
62. 33.
63. 7.
64. 40 часов.
65. 10-е (последнее).
66. 16.
67. 8.
68. 253.
69. Нет.
70. Да.
71. Нет.
72. Нет.
73. Да.
74. Нет.
75. Нет.
76. Минус.
77. Да. Нет.
78. Да.
79. Нет.
80. Нет.
81. Нет.
82. 2.
83. Да. 1.
84. $x = 5$, $y = 0$.
85. 1111111100.
86. $x = 9$, $y = 4$.
87. 135, 630, 765.
88. 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902.
89. 333333.
90. 999.

Коллоквиум №1

Форма проведения коллоквиума: устно-индивидуальная (2 вопроса и одна задача, из выданных на факультативных занятиях).

Для получения допуска к сдаче коллоквиума необходимо показать решение не менее 75% от общего количества задач, т.е. $180 = 0{,}75 \times 240$ задач.

Форма защиты задач: учащиеся самостоятельно разбивают задачи на блоки по 20 задач, для каждой из которых имеется *решение*, а не просто ответ или картинка. После беглой проверки блока задач необходимо ответить только на один вопрос по решению задач. Если на вопрос ответили правильно, то весь блок засчитывается, иначе все задачи блока в этот день не принимаются, но могут быть сданы на следующий день.

В дальнейшем процент задач для сдачи определяется следующим образом: 100% — (оценка за предыдущий коллоквиум) × 10%. Тем самым, чем выше оценка за первый коллоквиум, тем меньше необходимо будет показывать задач для допуска ко второму коллоквиуму.

Критерии оценок:

«0» — если учащийся либо не явился, либо явился и молчит, не отвечая на задаваемые вопросы;

«1» — если учащийся после указания *не понимает* своей ошибки;

«2» — если учащийся после указания *понял* свою ошибку;

«3» — если учащийся знает формально большинство определений, теорем и может решать некоторые задачи;

«4» — если учащийся знает все определения и теоремы, умеет их комментировать, приводить контрпримеры, может решать большинство задач;

«5» — если учащийся свободно владеет теорией и практикой.

Отказ от показа доказательства соответствующих теорем означает получение оценки за коллоквиум не выше 3.

Список вопросов

1. Парадокс лжеца. Табличный метод решения логических задач: преимущества и недостатки, различные формы использования.
2. Турнирные задачи.
3. Логические задачи на индукцию.
4. Кванторы. Правило формулирования противоположного высказывания. Доказательство от противного.
5. Теорема. Критерий. Различные способы чтения теорем.
6. Множество. Парадоксы теории множеств. Парадокс Брадобрея.
7. Теоретико-множественные операции над множествами и их свойства.
8. Законы де Моргана и их применения для доказательства равенства множеств.
9. Круги Эйлера. Применения теории множеств для решения задач.
10. Числа: натуральные, целые, рациональные, действительные, иррациональные. Десятичная запись числа.
11. Соизмеримые отрезки. Недостаточность рациональных чисел для измерения длин отрезков.
12. Делимость чисел: что означает «целое число a кратно b»? Четные и нечетные числа.
13. Конечные и бесконечные множества. Парадоксы теории множеств, связанные с бесконечными множествами. Пример «Гостиница». Теорема Евклида о бесконечности простых чисел.
14. Многоточие как форма записи суммы нескольких слагаемых. Определение количества слагаемых. Вычисление некоторых типов сумм.
15. Формулы сокращенного умножения и их применение в задачах на делимость.

Занятия 43–48

Графы.
Четность числа нечетных вершин

Определение 1. Пусть V — непустое множество, $V^{(2)}$ — множество всех его двухэлементных подмножеств. Пара (V, E), где E — произвольное подмножество $V^{(2)}$, называется *графом* (*неориентированным графом*).

Элементы множества V называются *вершинами графа*, а элементы множества E — *ребрами*.

Определение 2. Пусть дан граф $G = (V, E)$. Две вершины x_0 и y_0 называются *смежными*, если $\{x_0, y_0\}$ является ребром, иначе такие вершины называются не смежными.

Определение 3. Два ребра называются *смежными*, если они имеют общую вершину.

Определение 4. Пусть дан граф $G = (V, E)$. Множество всех вершин графа G, смежных с некоторой вершиной v, называется *окружением* вершины v и обозначается $N_G(v) = N(v)$.

Определение 5. Число ребер, выходящих из вершины v, называется *степенью* вершины v и обозначается $d(v)$. Вершина степени 0 называется *изолированной*, степени 1 — *висячей*.

Теорема 4. *Во всяком графе количество нечетных вершин четно.*

241. Можно ли соединить 77 телефонов так, чтобы из каждого можно было позвонить ровно в 17 других?

242. В стране Лапландии все города, кроме столицы и города Дальнего, соединены с 20 другими городами. Столица же соединена с 51 городом, а город Дальний — с одним городом. Можно ли из города Дальнего добраться самолетом до столицы (быть может, с пересадками)?

243. Можно ли расположить на плоскости 7 прямых так, чтобы каждая пересекала ровно пять других?

244. Из Москвы выходит 101 авиалиния, из Ижевска — 17 авиалиний, а из всех остальных городов страны — либо по две, либо по десять, либо по двадцать. Докажите, что из Ижевска можно долететь до Москвы (может быть, с пересадками).

245. Шахматный турнир проводится по круговой системе. В турнире участвуют семь школьников. Известно, что Ваня сыграл шесть партий, Толя — пять, Леша и Дима — по три, Семен и Илья — по две, Женя — одну. С кем сыграл Леша?

246. В шахматном турнире по круговой системе, в котором участвуют 5 школьников, сыграно 6 партий. Больше всех встреч провели Ваня и Миша — по 3. Какое число партий сыграл участник, проведший наименьшее число встреч?

247. Одиннадцать школьников, уезжая на каникулы, договорились, что каждый из них пошлет открытки трем из остальных. Может ли так оказаться, что каждый получит открытки именно от тех, кому сам напишет?

248. В Диснейленде на озере семь островов, из каждого из них выходит один, три или пять мостов. Докажите, что хотя бы один из мостов ведет на берег.

249. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно три дороги, быть ровно 1000 дорог между городами?

250. В шахматном турнире по круговой системе с пятью участниками только Ваня и Леша провели одинаковое число встреч, а все остальные — разное. Сколько встреч сыграли Ваня и Леша?

251. В парке 9 озер. Каждое озеро соединено с другими озерами не менее чем 3 каналами. Какое наименьшее количество каналов может быть в парке?

252. Докажите, что в любой компании, состоящей из четного числа людей, найдутся два таких человека, которые будут иметь четное число общих знакомых.

253. В стране из каждого города выходит 12 дорог, по которым из любого города можно добраться в любой другой. Для ремонта закрыли одну дорогу. Докажите, что и теперь из любого города можно добраться в любой другой.

254. В шахматном турнире участвуют 11 человек. В настоящее время среди любых трех участников по крайне мере двое не сыграли друг с другом. Докажите, что сыграно не более 30 партий.

255. В розыгрыше первенства страны по футболу участвуют 20 команд. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

256. Среди девяти мушкетеров некоторые поссорились и вызвали друг друга на дуэль. Оказалось, что нет ни одной такой тройки мушкетеров, в которой все должны драться между собой. Докажите, что найдется четверка мушкетеров, в которой нет ни одной пары поссорившихся.

257. У каждого из депутатов парламента не более трех противников (если депутат A — противник депутату B, то депутат B — противник депутату A). Докажите, что депутатов можно разбить на две палаты так, что каждый депутат будет иметь не более одного противника в своей палате.

Инварианты, связанные с четностью

Олимпиадные задачи на инвариант можно условно разбить на два вида: те, в которых требуется доказать некий инвариант, т.е. он явно определен, и те, в которых инвариант используется при решении и сразу не очевиден. Принцип решения задач основан на поиске характеристики объекта, которая не меняется при выполнении действий, указанных в задаче (*инвариант* объекта). Стандартным является следующее рассуждение. Пусть на некотором шаге получился объект A. Применим к нему указанное действие и получим объект B. Что у них общего? Что изменилось?

Определение 1. *Инвариант* в математике — это свойство некоторого класса (множества) математических объектов, которое остается неизменным при преобразованиях определенного типа.

Пусть в задаче задан некоторый объект и описаны преобразования, которые разрешено производить над этим объектом. При этом требуется доказать, что в результате этих преобразований объект нельзя привести к некоторому определенному виду. Это можно сделать, подобрав такую характеристику объекта, которая не меняется при указанных преобразованиях.

258. Даны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешено к любым двум из них прибавить 1. Можно ли уравнять числа, проделав эту операцию несколько раз?

259. На доске написаны числа 1, 2, 3, 4, 5. За один ход разрешается стереть два числа, а вместо них записать их сумму или разность. Через 4 хода останется одно число. Может ли оно равняться нулю?

260. В таблице 3×3 расставлены числа:

0	3	2
6	7	0
4	9	5

За один ход разрешается к любым двум числам в соседних (т.е. имеющих общую границу) клетках прибавить по одинаковому целому числу. Можно ли получить таблицу из восьми нулей и одной единицы?

261. В таблицы 4×4 расставлены 15 знаков «+» и один «–»:

+	+	+	–
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

За один ход разрешено поменять знаки клеток одной строки, одного столбца или прямой, параллельной одной из главных диагоналей (в частности, знак угловой клетки). Докажите, что таким образом таблицу из одних «+» не получить.

262. Пятнадцать пятаков лежат гербом вверх. Разрешается за один раз перевернуть любые четырнадцать из них. Можно ли за несколько раз перевернуть все пятаки гербом вниз?

263. Круг разбит на 10 секторов, в каждом из которых стоит фишка. Одним ходом разрешается любые 2 фишки передвинуть в соседние секторы: одну по часовой стрелке, другую — против. Можно ли собрать все фишки в одном секторе?

264. Десять фишек поставлены в ряд. Разрешено менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли поставить все фишки в обратном порядке?

265. На доске выписаны целые числа от 1 до 1974. Разрешается стереть любые два числа, записав вместо них их сумму или разность. После многократного повторения такой операции на доске останется лишь одно число. Доказать, что нельзя добиться, чтобы на доске остался один нуль.

266. На доске написано 10 плюсов и 15 минусов. Разрешается стереть любые два знака и поставить вместо них плюс, если знаки одинаковы, и минус в противоположном случае. Какой знак останется после выполнения двадцати четырех операций? Докажите, что оставшийся знак не зависит от порядка сокращения.

267. На доске были написаны несколько плюсов и 1991 минус. Разрешается стирать любые два знака и вместо них писать плюс, если они одинаковы, и минус, если они различны. После многократного выполнения этой операции на доске остался один знак. Какой?

268. На столе лежат 12 монет. Арман закрывает глаза, а Даурен переворачивает монеты (по одной), говоря при каждом переворачивании «Хоп!» (он может переворачивать одну монету несколько раз, не забывая всякий раз сказать «Хоп!»). После этого Даурен накрывает одну из монет рукой, а Арман открывает глаза и отгадывает, как лежит невидимая монета — гербом вверх или вниз. Как Арман это делает?

269. Карлсон написал дробь 10/97. Малыш может 1) прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, 2) умножить числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь, *а*) равную 1/2, *б*) равную 1?

270. Три ежика делили три кусочка сыра массами 5 г, 8 г и 11 г. Лиса стала им помогать. Она может от любых двух кусочков одновременно отрезать и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить ежикам равные кусочки сыра?

271. Резидент одной иностранной разведки сообщил в центр о готовящемся подписании ряда двусторонних соглашений между пятнадцатью бывшими республиками СССР. Согласно его донесению, каждая из них заключит договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?

272. На столе стоят 7 стаканов дном вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли дном вниз?

273. С набором из пяти чисел, каждое из которых равно 1 или -1, разрешено производить следующую операцию: менять знаки у каких-нибудь двух чисел. Можно ли с помощью нескольких таких операций из набора $\{1,-1,-1, 1,1\}$ получить набор $\{-1, 1, 1, 1, 1\}$?

Занятия 49–52

Признаки делимости. Текстовые задачи с целыми числами

Теорема 5 (признаки делимости).

1. Натуральное число *делится на 2* тогда и только тогда, когда последняя его цифра четна.
2. Натуральное число *делится на 3* тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.
3. Натуральное число *делится на 4* тогда и только тогда, когда число, образованное последними двумя цифрами, взятыми в том же порядке, делится на 4.
4. Натуральное число *делится на 5* тогда и только тогда, когда последняя его цифра 0 или 5.
5. Натуральное число *делится на 8* тогда и только тогда, когда число, образованное последними тремя цифрами, взятыми в том же порядке, делится на 8.
6. Натуральное число *делится на 9* тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.
7. Натуральное число *делится на 11* тогда и только тогда, когда разность между суммой его цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах, делится на 11.

274. Найдите цифру, обозначенную звездочкой, в числе 41875*, если это число делится на 18.

275. Существует ли цифра, которую необходимо приписать справа и слева к числу 97, чтобы полученное четырехзначное число делилось на 27?

276. Найдите все значения цифр x и y, при которых число $124xy$ делится на 75.

277. Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 0 и делится на 225.

278. Докажите, что ребус АПЕЛЬСИН–СПАНИЕЛЬ = 1999 не имеет решения.

279. Докажите, что число 111...1 (27 единиц) делится на 27.

280. Докажите, что разность между любым натуральным числом и суммой его цифр делится на 9.

281. Докажите, что если в трехзначном числе средняя цифра равна сумме крайних, то число делится на 11.

282. Найдите все значения цифр x и y, при которых число $\overline{53xy213}$ делится на 99.

283. Напишите какое либо многозначное число. Найдите сумму его цифр. Затем вычислите сумму цифр получившегося числа и продолжайте те же операции до тех пор, пока не получится однозначное число. Докажите, что оно равно остатку от деления первоначального числа на 9.

284. У трехзначного числа, делящегося на 45, разность между второй и первой цифрами равна разности между третьей и второй. Найдите все такие трехзначные числа.

285. Найдите все трехзначные числа, делящиеся на 11, у которых сумма цифр делится на 11.

286. Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается одинаковыми цифрами и делится на 693.

287. Пятизначное число делится на 72, причем три его цифры — единицы. Найдите все такие числа.

288. Найдите такое трехзначное число, делящееся на 27, что при любой перестановке его цифр получается число, также делящееся на 27. Укажите все такие числа.

289. (МГУ, 1964, физ.) Найдите все пятизначные числа вида $\overline{34x5y}$ (x и y — цифры), которые делятся на 36.

290. (МГУ, 2005, ВМК, устный) Известно, что натуральное трехзначное число $p = \overline{abc}$ делится нацело на 37. Могут ли числа $q = \overline{bca}$ и $r = \overline{cab}$ также делиться на 37?

291. (МГУ, 1993, эконом.) За время хранения вклада в банке проценты по вкладу начислялись ежемесячно в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}\%$ и, наконец, 12,5% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}\%$. Определите срок хранения вклада.

292. (МГУ, 2002, эконом.) Интервалы движения морских катеров по трем маршрутам на общей пристани составляют 30, 36, 45 минут соответственно. Сколько раз с 7^{40} до 17^{35} того же дня на этой пристани одновременно встречаются катера всех трех маршрутов, если одна из таких встреч происходит в 11^{15}?

293. (МГУ, КФМГУ, 2005, географ.) В цехе имелось N одинаковых станков, которые, работая вместе, вытачивали в день 5850 готовых деталей. После модернизации число производимых в день каждым станком деталей возросло на 20%. Это позволило по крайне мере без сокращения объемов производства уменьшить число станков максимум на 4. Найдите N.

294. (КФМГУ, 2005, географ.) Птицеферма имела M куриц одинаковой породы, которые могли снести в сумме 8232 яйца в год. После выведения новой яйценосной породы число яиц, приносимых одной курицей в год, возросло на 25%. Это позволило по крайне мере без сокращения объема продукции птицефермы уменьшить число куриц максимум на 4. Найдите M.

295. (КФМГУ, 2006, олимп.) После установки на фабрике нового оборудования рабочий день сократился с 8 часов до 7 часов, а количество ежедневно изготавливаемой продукции возросло на 5%. На сколько процентов повысилась производительность оборудования?

296. (КФМГУ, 2001, фил.) Писатель-западник (*З*) и писатель-славянофил (*С*) опубликовали по одной книге. *З* употреблял букву «ф» в среднем на страницу текста на 30% чаще, чем *С*. Тираж книги писателя *С* на 4% больше, чем тираж книги писателя *З*. Количество страниц в книге у *З* на 4% меньше, чем количество книг у *С*. На сколько процентов в опубликованных текстах *З* букв «ф» больше или меньше, чем в текстах *С*?

297. (КФМГУ, 2001, фил.) Писатель-западник (*З*) и писатель-славянофил (*С*) опубликовали по одной книге. *З* употреблял букву «ф» в среднем на страницу текста на 75% чаще, чем *С*. Тираж книги писателя *С* на 5% больше, чем тираж книги писателя *З*. Количество страниц в книге у З на 10% меньше, чем количество книг у *С*. На сколько процентов в опубликованных текстах *З* букв «ф» больше или меньше, чем в текстах *С*?

298. (КФМГУ, 2001, эконом.) Брокерская фирма приобрела два пакета акций, а затем их продала на общую сумму 7 миллионов 680 тысяч рублей, получив при этом 28% прибыли. За какую сумму фирма приобрела каждый из пакетов акций, если при продаже первого пакета прибыль составила 40%, а при продаже второго — 20%?

299. (КФМГУ, 2001, менедж.) Вследствие неблагоприятных погодных условий план сбора свеклы на первом поле был недовыполнен на 20%, а на втором — на 15%. При этом общий урожай с двух полей составил 328 тонн свеклы, что составляет 82% общего плана. Определите план сбора свеклы с каждого поля.

300. (МГУ, 2005, эконом.) В целях рекламы новой модели автомобиля автосалон установил скидку 10% на каждый седьмой продаваемый автомобиль и 20% на каждый одиннадцатый продаваемый автомобиль новой модели. В случае если на автомобиль выпадают обе скидки, то применяется большая из них. Всего было продано 516 автомобилей этой модели. Определите выручку автосалона от продажи автомобилей новой модели, если ее базовая цена составляет 20 000 у.е.

301. (КФМГУ, 2003, олимп.) Годовой доход α-банка составляет 35%, а β-банка — 25%. В этих банках размещена некоторая сумма, которая через год увеличилась на 25,5%. В каком отношении были размещены денежные суммы в эти банки?

302. (КФМГУ, 2003, олим.) Годовой доход α-банка на 10% выше, чем в β-банке. Положив в α-банк некоторую сумму, втрое больше, чем в β-банке, через год получили общее увеличение капитала на 27,5%. Каков процент годового дохода, предлагаемый в каждом из банков?

303. (МГУ, 1979, географ.) При подведении итогов соревнования вычислено, что процент числа членов бригады, перевыполнивших план, заключен в пределах от 92,5% до 93,5%. Определите минимально возможное число членов такой бригады.

304. (МГУ, 1979, географ.) В школьной газете сообщается, что процент учащихся некоторого класса, повысивших во втором полугодии свою успеваемость, заключен в пределах от 2,9% до 3,1%. Определите минимально возможное число учеников в таком классе.

305. (МГАП) Курс доллара по отношению к рублю ежемесячно растет на 25%, а курс рубля по отношению к немецкой марке падает на 20%. Как изменяется курс доллара по отношению к немецкой марке? Выгодно ли вкладчику сделать рублевый вклад в банке с ежеквартальным начислением 94% от суммы вклада (по сравнению с конвертацией в доллары)?

306. (МГАП) За наблюдаемый период на 90% всех дней приходилась ясная погода. Гидрометцентр в тот же период предсказал верную погоду в 74 случаях из 100, причем в 80% всех случаев, когда на день приходилась ясная погода, предсказания Гидрометцентра сбывались. Какую долю среди пасмурных дней составляют те, в которых Гидрометцентр предсказывал правильную погоду?

307. (МГАП) К 22 часам 20% не проголосовавших к 18 часам человек проголосовало, после чего процент непроголосовавших людей составил 32%. На сколько процентов увеличилось количество проголосовавших к 22 часам по сравнению с проголосовавшими к 18 часам?

308. (МГУ, ВШБ, 2003) После того как 1500 новых вкладчиков открыли в банке счета на общую сумму в 7 млн 800 тыс. руб., средний размер вклада, составлявший 6 тыс. руб., уменьшился на 10%. Определите число старых вкладчиков банка.

309. (МГУ, 1995, эконом.) В банк помещен вклад в размере 3900 тыс. руб. под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 72,5%. Какую сумму вкладчик ежемесячно добавлял к вкладу?

310. (КФМГУ, 2006, олимп.) Сумма двух натуральных чисел равна 85, а их наименьшее общее кратное равно 102. Найдите эти числа.

311. (КФМГУ, 2006, олимп.) Сумма двух натуральных чисел равна 91, а их наименьшее общее кратное равно 130. Найдите эти числа.

312. (МГУ, 2003, почвовед.) Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 6, а в остатке 8. Если же число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, разделить на разность между цифрами десятков и единиц исходного числа, то в частном получится 15, а в остатке 2. Найдите это число.

313. (МГУ, 1983, физ.) При делении некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7 и в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найдите это двузначное число.

314. (МГУ, 2003, ВМК, устн.) Найдите все четырехзначные числа, являющиеся квадратом целого числа, у которых первая цифра совпадает со второй, а третья цифра совпадает с четвертой.

315. (МГУ, 2001, мех-мат, устн., КФМГУ, 2001, мех-мат) Найдите все трехзначные числа, каждое из которых больше суммы квадратов своих цифр ровно на 517.

316. (КФМГУ, 2001, мех-мат) Найдите все трехзначные числа, каждое из которых больше суммы квадратов своих цифр ровно на 667.

317. (МГУ, 2005, ВМК, устн.) Сумма обратных величин трех натуральных чисел равна 1. Найдите эти числа.

318. (МГУ, 2005, ВМК, устн.) Можно ли представить единицу в виде суммы 2005 попарно различных чисел, обратных натуральным?

Занятия 53–54

Наибольший и наименьший элементы множества

В жизни иногда приходится сталкиваться с необходимостью принятия наилучшего возможного решения (задача оптимизации). Например, нужно создать маршрут, по которому машина будет развозить товар с наименьшими затратами бензина, если известно, какое количество бензина необходимо от любой из точек доставки до другой. Слова «наибольший», «наименьший», «наилучший», «наихудший», наверное, известны всем — как имеющим, так и не имеющим математическое образование. Но только немногие из них действительно понимают — и это становится ясно, когда возникает вопрос проверки, является ли данный план наилучшим из возможных. Здесь мы не будем рассматривать задачу оптимизации, остановимся лишь на том, как проверять, является ли некоторое число α наибольшим (наименьшим) из некоторого множества чисел, и вообще, что означает «множество имеет наибольший (наименьший) элемент».

На практике полезно рассматривать два определения наибольшего (наименьшего) элемента множества. Хотя они между собой и эквивалентны, но зачастую в одних случаях легче проверять одно, в других — другое.

Определение 1. Число α называется *наибольшим* (*наименьшим*) элементом множества $A \subset R$, если

1. $\alpha \in A$,
2. $\forall x \in A \Rightarrow x \leq \alpha$ ($\forall x \in A \Rightarrow x \geq \alpha$) — всякий элемент множества A *не превосходит* α (всякий элемент множества A *не меньше* α).

Определение 1'. Число α называется *наибольшим* (*наименьшим*) элементом множества $A \subset R$, если

1. $\alpha \in A$,
2. $\forall x>\alpha \Rightarrow x \notin A$ ($\forall x<\alpha \Rightarrow x \notin A$) — всякое число, превосходящее α, *не принадлежит множеству* A (всякое число, меньшее α, *не принадлежит множеству* A).

Пример 1. Докажите, что число 3 является наибольшим целым числом, квадрат которого не превосходит 10.

○ *Решение.* Данную задачу можно решить тремя способами (естественно, во всех способах показывается, что число 3 является целым числом, которое в квадрате не превосходит 10).

1. Согласно определению 1, необходимо убедиться, что всякое другое целое число, квадрат которого не превосходит 10, не больше 3.
   1) Для этого, например, можно выписать все целые числа, квадрат которых не больше 10: –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3. И необходимо отметить, что если число $a \leqslant -4$, то $a^2 > 10$, и если число $a \geqslant 4$, то $a^2 > 10$. Тогда ясно, что число 3 будет наибольшим среди таких чисел.
   2) Можно поступить и по-другому: допустим противоположное, т.е. существует целое число, большее чем 3, квадрат которого не превосходит 10. Если целое число больше 3, то оно не меньше 4, а значит, в квадрате не меньше 16, тем самым, больше 10. Таким образом, мы приходим к противоречию, значит, наше предположение неверно, а верно ему противоположное, т.е. всякое целое число, квадрат которого не превосходит 10, не больше 3.
2. Согласно определению 1', необходимо убедиться, что если целое число больше 3, то в квадрате оно уже не меньше 10. Но это действительно так, поскольку, если целое число больше 3, то оно не меньше 4, а значит, в квадрате будет не меньше 16, т.е. больше 10. ●

Примечание. Если не вдаваться в подробности, то на первый взгляд может показаться, что решения 1.2 и 2 примера 1 идентичны, но все-таки между ними есть как формальная разница, так и принципиальная. В решении 1.2 для доказательства утверждения мы формулировали ему противоположное, а затем убеждались, что оно неверно. В решении же 2 мы действовали только согласно определению 1'. Также можно отметить, что в решении 1.2 мы предполагали, что среди элементов множества A (т.е. тех целых чисел, квадрат которых не превосходит 10) существует целое число, большее 3, и приходили к противоречию, т.е. такого числа нет. А в решении 2 мы показывали, что всякое целое число, большее 3, не является элементом множества A. Все это может показаться не существенным, и хотя в примере 1 эта разница мало заметна, важным является не само решение, а насколько полно учащийся разобрался в ходе рассуждений. Ведь подобные мелочи могут привести к неверным представлениям как о математике, так и об отдельных ее частях.

Одними из важных понятий, в определении которых упоминается слово «наибольший», являются *целая часть числа* и *наибольший общий делитель двух чисел*. С данными терминами многие из учащихся встречаются уже в 5–6 классах, однако в основном на примерах. Поэтому у большинства возникает мнение, что, может быть, они и не знают каких-то сложных понятий, но эти термины они точно знают. «Кто знает, что такое целая часть числа или наибольший общий делитель двух чисел?» На основании проведенных опросов в 7–8 классах можно утверждать, что на вопрос руку поднимают почти все, но если все же поднять любого и спросить, оказывается, что никто толком не знает. Большинство пытаются формулировать определения типа «целая часть числа — это часть числа без дробной», «целая часть числа — это то, что до запятой», «наибольший общий делитель чисел a и b — это наибольший из делителей чисел a и b» (что не верно), или «наибольший общий делитель чисел a и b — это наибольший из общих делителей чисел a и b». Это то же самое, что на вопрос «опишите свойство яблока» первым ответом будет «яблоко является яблочным». И несмотря на указанные ошибки, многие считают, что они все равно знают эти термины, и если после того, как учитель приведет определение целой части числа, спросить, «чему равны целые части чисел 3,7 и (–3,7)?», почти все неправильно называют целую часть числа (–3,7). Данное упрямство можно объяснить тем, что существует распространенное мнение «покажи на примере и все будет понятно». А это далеко не всегда так, и наоборот, в некоторых случаях приводит к неверным представлениям.

Поэтому приведем сначала определение целой части числа a и попытаемся разобраться, какой смысл в нем несет слово «наибольший».

Определение 2. *Целой частью* числа a называется наибольшее целое число, не превосходящее a.

То есть целая часть числа a — наибольший элемент множества целых чисел, не превосходящих a. Чтобы записать определение в символьной форме, воспользуемся определением 1':

$b=[a] \overset{def}{\Leftrightarrow}$ 1) $b \in \mathbb{Z}$ — *целая часть числа является целым числом,*

2) $b \leq a < b+1$ — *целая часть числа а не превосходит а, но любое целое число, которое больше этой целой части, уже больше а.*

Приведем пример, подчеркивающий смысл слова «наибольший» в приведенном выше определении.

Пример 2. Однажды Арман, вернувшись из школы, сказал своему младшему брату Айдосу, что он считает Айнуру самой красивой девушкой во всем мире. Айдос не понял Армана и попросил объяснить, что означает фраза «Айнура — самая красивая девушка во всем мире». Арман пробовал объяснить разными способами.

Арман: Любая девушка в мире не красивее, чем Айнура.

Айдос: То есть во всем мире девушки ужасные или все одинаково красивые?

Арман: Нет, во всем мире нет девушки красивее Айнуры.

Айдос: А раньше такая девушка была, но потом куда-то уехала?

Арман: Нет, такой девушки вообще нет!

Айдос: Ты что-то с ней сделал?

……………………………………

Как ни старался Арман, Айдос так и не понял. На следующий день Айдос сам подошел к брату и сказал: «Я понял, что означает эта фраза», в этот момент самому Арману уже стало интересно, как понимает эту фразу его брат.

Айдос: «Айнура — самая красивая девушка в мире» означает, *что если есть что-то или кто-то красивее Айнуры, то это может быть чем угодно или кем угодно, но только не девушкой*. Например, мне нравятся игрушечные самолеты.

Такой ответ сильно удивил Армана, и единственное, что он смог ответить, что у каждого свои вкусы.

Отметим некоторые свойства целой части.

Теорема 6. *Пусть даны целое положительное число n, целое число a, действительные числа x, y. Положим $\{x\} = x - [x]$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1°. $x = [x] \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$,

2°. $[x + a] = [x] + a$,

3°. $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$,

4°. $\left[\dfrac{[x]}{n}\right] = \left[\dfrac{x}{n}\right]$,

5°. $[x] + [x + 0{,}5] = [2x]$,

6°. (задача Эрмита) $[x] + \left[x + \dfrac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \dfrac{n-1}{n}\right] = [nx]$,

7°. $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$,

8°. $\{x + a\} = \{x\}$,

9°. $\{x\} + \{y\} - 1 \leq \{x + y\} \leq \{x\} + \{y\}$.

Доказательство 1°. Если число x — целое, то в качестве целого числа, не превосходящего x, можно взять x и, естественно, такое целое число будет наибольшим целым, не превосходящим x, поскольку оно само равно x. Если же наибольшее <u>целое</u> число, не превосходящее x, совпадает с x, то ясно, что x будет целым.

Доказательство 2°. Пусть даны числа $a \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$. Положим $b = [x]$, тогда, согласно определению 2, число $b \in \mathbb{Z}$ и

$$b \leq x < b + 1. \qquad (1)$$

Покажем, что целое число $a + b$ является целой частью числа $a + x$. Действительно, если в (1) прибавим к каждой части число a, то

$$b + a \leq x + a < b + a + 1.$$

Значит, согласно определению, $a + b = [x + a]$.

Доказательство 3°. Пусть даны числа $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Обозначим $a = [x]$ и $b = [y]$, тогда, согласно определению 2, справедливы неравенства

$$a \leq x < a + 1, \qquad (2)$$

$$b \leq y < b + 1. \qquad (3)$$

Складывая неравенства (2) и (3), получим

$$a + b \leq x + y < a + b + 2.$$

Отсюда

$$[x] + [y] \leq x + y < [x] + [y] + 2.$$

Поскольку $[x + y]$ – <u>наибольшее</u> целое число, не превосходящее $x + y$, а $[x] + [y]$ — целое число, не превосходящее $x + y$,

$$[x] + [y] \leq [x + y] \leq x + y < [x] + [y] + 2.$$

Значит, $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$.

Доказательство 4°. Поскольку для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $0 \le \{x\} < 1$, для всякого натурального n выполнены соотношения $0 \le \frac{\{x\}}{n} < \frac{1}{n}$, $\left\{\frac{[x]}{n}\right\} \le \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$.

Отсюда

$$0 \le \frac{\{x\}}{n} + \left\{\frac{[x]}{n}\right\} < 1.$$

Тогда, согласно 2°, имеем

$$\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{[x]}{n} + \frac{\{x\}}{n}\right] = \left[\left[\frac{[x]}{n}\right] + \left\{\frac{[x]}{n}\right\} + \frac{\{x\}}{n}\right] =$$

$$= \left[\frac{[x]}{n}\right] + \left[\left\{\frac{[x]}{n}\right\} + \frac{\{x\}}{n}\right] = \left[\frac{[x]}{n}\right].$$

Доказательство 5°. Рассмотрим два случая.

1) $0 \le \{x\} < 0{,}5$. Тогда $0{,}5 \le \{x\} + 0{,}5 < 1$ и $0 \le 2\{x\} < 1$. Значит, согласно 2° имеем

$$[x + 0{,}5] = [[x] + \{x\} + 0{,}5] = [x] + [\{x\} + 0{,}5] = [x],$$

$$[2x] = [2[x] + 2\{x\}] = 2[x] + [2\{x\}] = 2[x].$$

Тем самым $[x] + [x + 0{,}5] = 2[x] = [2x]$.

2) $0{,}5 \le \{x\} < 1$. Тогда $1 \le \{x\} + 0{,}5 < 1{,}5$ и $1 \le 2\{x\} < 2$. Значит, согласно 2° имеем

$$[x + 0{,}5] = [[x] + \{x\} + 0{,}5] = [x] + [\{x\} + 0{,}5] = [x] + 1,$$

$$[2x] = [2[x] + 2\{x\}] = 2[x] + [2\{x\}] = 2[x] + 1.$$

Таким образом, $[x] + [x + 0{,}5] = 2[x] + 1 = [2x]$. Свойство 5° доказано полностью.

Доказательство 6°. Рассмотрим n случаев: $\frac{k}{n} \le \{x\} < \frac{k+1}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда:

✓ если $m = 0, 1, \ldots, n - k - 1$, то $\frac{k+m}{n} \le \{x\} + \frac{m}{n} < \frac{k+m+1}{n} \le 1$ и

$$\left[x + \frac{m}{n}\right] = \left[[x] + \{x\} + \frac{m}{n}\right] = [x] + \left[\{x\} + \frac{m}{n}\right] = [x],$$

✓ если $m = n - k, n - k + 1, ..., n - 1$, то

$1 \le \frac{k+m}{n} \le \{x\} + \frac{m}{n} < \frac{k+m+1}{n} < 2$ и

$\left[x + \frac{m}{n}\right] = \left[[x] + \{x\} + \frac{m}{n}\right] = [x] + \left[\{x\} + \frac{m}{n}\right] = [x] + 1.$

Отсюда имеем $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = n[x] + k.$

Из того, что $\frac{k}{n} \le \{x\} < \frac{k+1}{n}$, следует $k \le n\{x\} < k + 1$, значит, $[nx] = [n[x]] + [n\{x\}] = n[x] + k$. Таким образом,

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = n[x] + k = [nx].$$

Свойство 6° доказано полностью.

Доказательства свойств 7°–9° следуют из 1°–3°, если в них произвести подстановку $[x] = x - \{x\}$.

Определение 2. Числовое множество A *имеет наибольший* (*наименьший*) *элемент*, если найдется хотя бы один элемент A, не меньший (не больший) любого элемента множества A.

Пример 3. Всякий отрезок (сегмент) имеет и наибольший, и наименьший элементы.

Пример 4. Интервал (0, 1) не имеет наибольшего элемента.

Доказательство. Допустим противоположное: интервал (0, 1) имеет наибольший элемент, который мы обозначим x_0. Тогда, согласно определению 1,

1) $0 < x_0 < 1$,

2) $\forall x \in (0,1) \Rightarrow x \le x_0$.

Однако существует число x_1 из интервала (0,1), которое больше x_0:

$$1 = \frac{1+1}{2} > x_1 = \frac{x_0+1}{2} > \frac{x_0+x_0}{2} = x_0 > 0.$$

Тем самым пришли к противоречию, значит, наше предположение не верно, и (0,1) не имеет наибольшего элемента.

319. (МГУ, 1996, ВМК, устный) Решить уравнение $x + [10x] = 10x$.

320. (МГУ, 2001, ВМК, устный) Решите уравнение $\{2\{2x\}\} = x$.

321. (МГУ, 2003, ВМК, устный) Решите уравнение $\left[\dfrac{6x+5}{8}\right] = \dfrac{15x-7}{5}$.

322. В мешке 70 шаров, отличающихся только цветом: 20 красных, 20 синих, 20 желтых, остальные — черные и белые. Какое наименьшее число шаров необходимо вынуть из мешка, не видя их, чтобы среди них было не менее 10 шаров одного цвета?

323. В ящике лежат 105 яблок четырех сортов. Докажите, что среди них найдутся по меньшей мере 27 яблок какого-либо одного сорта.

324. Докажите, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 100.

Занятия 55–62

Принцип Дирихле

Теорема 7 (дискретный принцип Дирихле, частный случай). *Если количество предметов больше количества мест и все предметы разложены по местам, то найдется место, на котором будет не менее двух предметов.*

Пример 1. Если 10 кроликов посадить в 9 клеток, то найдется клетка, в которой будет не менее двух кроликов. Комментарии излишни.

Теорема 8 (дискретный принцип Дирихле, общий случай). *Пусть даны целые положительные числа n и m. И пусть имеется n мест и m предметов, все предметы разложены по местам. Обозначим через x_j количество предметов на j-м месте ($j=1,2,\ldots,n$). Тогда*

1) *если $\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}$, то существует номер j_0 такой, что* $x_{j_0} \geq \frac{m}{n} = \left[\frac{m}{n}\right]$,

2) *если $\frac{m}{n} \notin \mathbb{Z}$, то существует номер j_0 такой, что* $x_{j_0} \geq \left[\frac{m}{n}\right] + 1.$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}$. Допустим противоположное, т.е. для любого номера $j = 1, 2, \ldots, n$ выполнено неравенство $x_j < \frac{m}{n}$, или $x_j \leq \frac{m}{n} - 1$. Тогда сумма $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq \left(\frac{m}{n} - 1\right)n = m - n < m,$

однако по условию все предметы разложены по местам, т.е. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$. Тем самым пришли к противоречию, значит, наше предположение не верно, а верно ему противоположное: существует номер j_0 такой, что $x_{j_0} \geq \frac{m}{n} = \left[\frac{m}{n}\right]$.

2) Пусть $\frac{m}{n} \notin \mathbb{Z}$. Допустим противоположное, т.е. для любого номера $j = 1,2,\ldots,n$ выполнено неравенство $x_j < \left[\frac{m}{n}\right] + 1$, или $x_j \leq \left[\frac{m}{n}\right]$. Тогда сумма $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq \left[\frac{m}{n}\right] n$, однако по условию все предметы разложены по местам, т.е. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$. Следовательно, $\frac{m}{n} \leq \left[\frac{m}{n}\right]$. Поскольку $\frac{m}{n} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{m}{n} \neq \left[\frac{m}{n}\right]$ и $\frac{m}{n} < \left[\frac{m}{n}\right]$, т.е. число меньше своей целой части, что невозможно согласно определению целой части числа. Тем самым пришли к противоречию, значит, наше предположение не верно, а верно ему противоположное: существует номер j_0 такой, что $x_{j_0} \geq \left[\frac{m}{n}\right] + 1$.

Замечание 1. Дискретный принцип Дирихле не дает способа, например, найти номер j_0 такой, что $x_{j_0} \geq \left[\frac{m}{n}\right] + 1$, и вроде бы не может быть применен на практике. Однако это совершенно не так. В некоторых задачах существование такого x_{j_0} может оказаться решающим, особенно в задачах, где необходимо доказать невозможность совершения некоторого действия при достаточно общих условиях.

Пример 2. Можно ли увезти 50 камней весом 370, 372, ..., 468 кг на 7 трехтонках (камень раскалывать на части нельзя)?

○ *Решение.* Обычно первое, что начинают делать, — вычислять общий вес всех камней. Как не сложно убедиться, он равен 20 950 кг, и вроде бы все замечательно, ведь 7 трехтонок могут увезти груз весом $7 \times 3000 = 21\,000$ кг. Однако в задаче указано, что камень раскалывать на части нельзя. То есть каждый грузовик может забрать камни только целиком. Тогда согласно (дискретному) принципу Дирихле, поскольку всего 50 камней и 7 грузовиков, обязательно должен быть хотя бы один грузовик, который повезет не менее $\left[\frac{50}{7}\right]+1=8$ камней. Дадим такому грузовику самые легкие камни: 370, 372, ..., 384 кг. Но общий вес даже этих самых легких 8 камней равен 3016 кг. Значит, одна трехтонка увезти этот груз не сможет. Следовательно, 50 камней весом 370, 372, ..., 468 кг на 7 трехтонках, не раскалывая камни на части, увезти нельзя. ●

Замечание 2. Естественно, что дискретный принцип Дирихле имеет широкое применение в задачах, где необходимо доказать существование чисел или расположения фигур или точек с некоторыми свойствами.

Пример 3. Верно ли, что среди любых семи натуральных чисел найдутся три, сумма которых делится на 3?

○ *Решение.* Поскольку при делении на 3 есть три остатка: 0, 1, 2, то, согласно принципу Дирихле, среди 7 чисел существует не менее $\left[\frac{7}{3}\right]+1=3$ чисел, имеющих при делении на 3 одинаковые остатки. Тогда искомыми числами будут эти три числа. ●

Замечание 3. Доказательство обобщенного дискретного принципа Дирихле проводится с помощью метода от противного. Но в некоторых задачах не обязательно все подводить под принцип Дирихле, может быть полезно и использование метода от противного или определения целой части числа.

Пример 4. 25 покупателей купили 73 арбуза. Среди них были купившие по одному и по два арбуза. Верно ли, что среди них имеется покупатель (хотя бы один), который купил не менее 4 арбузов?

○ *Решение.* Допустим противоположное, т.е. каждый покупатель купил не более 3 арбузов. Тогда, поскольку был хотя бы один покупатель, который купил 1 арбуз, и хотя бы один, купивший 2 арбуза, оставшиеся 23 покупателя могли купить не более 69 арбузов, т.е. 25 покупателей могли купить не более 72 арбузов. Пришли к противоречию, значит, наше предположение не верно, а верно, что существует хотя бы один покупатель, который купил не менее 4 арбузов. ●

Пример 5. (СПО, 1985). На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причем среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

○ *Решение.* В каждом размере каких-то сапог меньше: правых или левых. Выпишем эти типы сапог по размерам. Какой-то тип, например левый, повторится по крайне мере дважды, например в 41-м и 42-м размерах. Но так как количество левых сапог этих размеров суммарно не меньше 100 (ведь левых сапог 43-го размера не больше 200, а всего левых сапог 300), мы имеем не менее 100 годных пар обуви. ●

Теорема 9 (непрерывный принцип Дирихле для отрезков). *Пусть даны положительные числа a и b такие, что $b > a$, и отрезок I, длина которого равна a. И пусть даны несколько отрезков $I_1, I_2, \ldots, I_k$, каждый из которых является подмножеством отрезка I, а сумма длин всех отрезков равна b. Тогда*

1) *если $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$, то существует точка ξ, которая лежит не менее чем в $\frac{b}{a} = \left[\frac{b}{a}\right]$ отрезках из $I_1, I_2, \ldots, I_k$;*

2) *если* $\frac{b}{a} \notin \mathbb{Z}$*, то существует точка* ξ*, которая лежит не менее чем в* $\left[\frac{b}{a}\right]+1$ *отрезках из* $I_1, I_2, ..., I_k$.

Доказательство. Пусть для определенности $I = [0, a]$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$. Допустим противоположное: каждая точка $\xi \in I$ лежит не более чем в $n = \frac{b}{a} - 1$ отрезках из $I_1, I_2, ..., I_k$. Для каждой точки x из промежутка $(0;a)$, принадлежащей хотя бы одному из отрезков $I_1, I_2, ..., I_k$, отметим белым цветом точки

$$x, x + a, ..., x + (m_x - 1)a,$$

где m_x — количество отрезков из $I_1, I_2, ..., I_k$, которым принадлежит точка x. Если точка x не принадлежит ни одному из отрезков $I_1, I_2, ..., I_k$, то точку x отметим черным цветом. Каждую из точек 0, a, $2a$, ..., na отметим белым цветом. Поскольку каждая точка $x \in I$ лежит не более чем в $n = \frac{b}{a}$ отрезках из $I_1, I_2, ..., I_k$, то для каждого $x \in I$ имеем $m_x \le n$. Значит, множество всех белых точек будет подмножеством $[0, na]$. Следовательно, сумма длин всех отрезков не превосходит na, т.е. $b \le \left(\frac{b}{a} - 1\right)a = b - a$. Тем самым, пришли к противоречию, и наше предположение не верно, а верно, что существует точка ξ, которая лежит не менее чем в $\frac{b}{a} = \left[\frac{b}{a}\right]$ отрезках из $I_1, I_2, ..., I_k$.

2) Пусть $\frac{b}{a} \notin \mathbb{Z}$. Допустим противоположное: каждая точка $\xi \in I$ лежит не более чем в $n = \left[\frac{b}{a}\right]$ отрезках из $I_1, I_2, ..., I_k$. Для каждой точки x из промежутка $(0, a)$, принадлежащей хотя бы одному из отрезков $I_1, I_2, ..., I_k$, отметим белым цветом точки

$$x,\ x+a, \ldots,\ x+(m_x-1)a,$$

где m_x — количество отрезков из $I_1, I_2, \ldots, I_k$, которым принадлежит точка x. Если точка x не принадлежит ни одному из отрезков $I_1, I_2, \ldots, I_k$, то отметим ее черным цветом. Каждую из точек $0, a, 2a, \ldots, na$ отметим белым цветом. Поскольку каждая точка $x \in I$ лежит не более чем в $n = \left[\frac{b}{a}\right]$ отрезках из $I_1, I_2, \ldots, I_k$, для каждого $x \in I$ имеем $m_x \le n$. Значит, множество всех белых точек будет подмножеством $[0, na]$. Следовательно, сумма длин всех отрезков не превосходит na, т.е. $b \le \left[\frac{b}{a}\right]a$, а учитывая, что $\frac{b}{a} \notin \mathbb{Z}$, имеем $\frac{b}{a} < \left[\frac{b}{a}\right]$. Тем самым пришли к противоречию, ведь, согласно определению целой части числа, $\frac{b}{a} \ge \left[\frac{b}{a}\right]$. Таким образом, наше предположение не верно, а верно, что существует точка ξ, которая лежит не менее чем в $\left[\frac{b}{a}\right]+1$ отрезках из $I_1, I_2, \ldots, I_k$.

Пример 6 (II этап Республиканской олимпиады школьников, 2009; Горбачев, с. 49). **Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Доказать, что найдется прямая, пересекающая по крайне мере четыре из этих окружностей.**

○ *Решение*. Пусть дан квадрат $ABCD$ и несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Тогда сумма длин диаметров этих окружностей равна $\frac{10}{\pi}$, а значит, и сумма длин проекций окружностей на сторону квадрата AB равна $\frac{10}{\pi}$ (длина проекции окружности на прямую равна длине ее диаметра) больше 3. Согласно непрерывному принципу Дирихле для отрезков, существует точка M, принадлежащая как минимум четырем из этих проекций окружностей. Через точку M проведем прямую, перпендикулярную AB. Данная прямая будет искомой, т.е. она пересекает не менее 4 окружностей. ●

Замечание 4. Было бы неверным считать, что непрерывный принцип Дирихле применяется только в геометрических, а дискретный — только в алгебраических задачах. Приведем соответствующие примеры.

Пример 7. На газоне в форме правильного треугольника со стороной 3 м растут 10 гвоздик. Докажите, что найдутся две гвоздики, которые находятся друг от друга на расстоянии, не большем 1 м.

○ *Решение.* Разделим газон прямыми, параллельными сторонам, на 9 равных треугольников со стороной 1 м. Тогда, согласно дискретному принципу Дирихле, найдутся хотя бы $\left[\frac{10}{9}\right]+1=2$ гвоздики, лежащие в одном из этих 9 правильных треугольников со стороной 1 м, значит, расстояние между этими гвоздиками будет не больше 1 м.

Пример 8. Даны 2010 пар чисел (a_k, b_k) такие, что $b_k=a_k+\frac{1}{3}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$, $0 < a_k < 0{,}5$ и $a_k \neq b_m$, $m \neq k$, m, $k = 1, 2, ..., 2010$. Докажите, что всегда можно выбрать 671 пару из них так, что $b_m > a_k$ для любых чисел m и k.

○ *Решение.* Рассмотрим отрезки $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, ..., 2010$. Ясно, что для каждого $k = 1,2,...,2010$ выполнено $[a_k, b_k]\subset[0,1]$. А сумма длин всех отрезков равна

$$(b_1-a_1)+(b_2-a_2)+\ldots+(b_{2010}-a_{2010})=$$
$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2011\cdot 2012}\right)=$$
$$=\frac{2010}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2012}\right)=670+\frac{1}{2}-\frac{1}{2012}>670.$$

Значит, согласно непрерывному принципу Дирихле, существует точка ζ, которая лежит не менее чем в 671 отрезке. В качестве искомых пар возьмем те пары, соответствующие отрезки которых содержат точку ζ.

И хотя точка ζ может совпадать с некоторыми из чисел a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_{2010}, b_{2010}, для выбранных пар чисел выполнено $b_m > a_k$, где m и k — произвольные номера, соответствующие выбранным парам. ●

325. Некоторые точки из данного конечного множества соединены отрезками. Докажите, что найдутся две точки, из которых выходят поровну отрезков.

326. В районе 7 средних школ. На район выделили 20 компьютеров. Докажите, что при любом их распределении между школами найдутся две школы, которые получат одинаковое число компьютеров (может быть, ни одного).

327. Какому минимальному числу школьников можно раздать 2008 конфет так, чтобы среди них при любом распределении конфет нашлись двое, которым конфет достанется поровну (возможно, ни одной)?

328. Имеется $2k + 1$ карточек, занумерованных числами от 1 до $2k + 1$. Какое наибольшее число карточек можно выбрать так, чтобы ни один из извлеченных номеров не был равен сумме двух других извлеченных номеров?

329. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

330. Сто человек сидят за круглым столом, причем более половины из них — мужчины. Докажите, что какие-то двое из мужчин сидят друг напротив друга.

331. Докажите: среди любых $n + 1$ натуральных чисел найдутся два числа таких, что их разность делится на n.

332. В волейбольном турнире команды играют друг с другом по одному матчу. За победу дается одно очко, за поражение — ноль. Известно, что в один из моментов турнира все команды имели разное количество очков. Сколько очков набрала в конце турнира предпоследняя команда и как она сыграла с победителем?

333. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

334. Первоклассник Петя знает только цифру 1. Докажите, что он может написать число, делящееся на 1989.

335. Докажите, что существует натуральное число, последние четыре цифры которого 1996 и которое делится на 1997.

336. (Англия, 1970) Имеются n целых чисел. Доказать, что среди них всегда найдутся несколько (или, быть может, одно), сумма которых делится на n.

337. (Московская математическая олимпиада, 1974) Сумма 100 натуральных чисел, каждое из которых не больше 100, равна 200. Доказать, что из них можно выбрать несколько чисел, сумма которых равна 100.

338. В бригаде 7 человек и их суммарный возраст — 332 года. Докажите, что из них можно выбрать 3 человека, сумма возрастов которых не меньше 142.

339. (Московская математическая олимпиада, 1993) У Пети 28 одноклассников. У них разное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?

340. Кот Базилио пообещал Буратино открыть Великую тайну, если он составит чудесный квадрат 6×6 из чисел $+1$, -1 и 0 так, чтобы все суммы по строкам, по столбцам и по большим диагоналям были различны. Помогите Буратино.

341. В квадратном ковре со стороной 10 м моль проела 80 дырок. Доказать, что из него можно вырезать квадратный коврик со стороной 1 м, не содержащий внутри себя дырок (дырки можно считать точечными). Дырки а) могут; б) не могут находится на границе вырезаемого коврика.

342. В квадрате со стороной 5 см размещено 126 точек. Докажите, что среди них существует 6 точек, которые лежат в круге радиуса 1 см.

343. На плоскости дано 400 точек. Докажите, что различных расстояний между ними не менее 15.

344. (Московская математическая олимпиада, 1970) В парке растет 10 000 деревьев (100 рядов по 100 деревьев). Какое наибольшее число деревьев можно срубить, чтобы выполнялось условие: если встать на любой пень, то не будет видно ни одного другого пня? (Деревья можно считать достаточно тонкими.)

345. Дано 7 отрезков, длины которых заключены между 0,1 м и 1 м. Докажите, что среди них найдутся три таких, что из них можно составить треугольник.

346. Прямоугольник размером 20×30 разбит на клетки 1×10. Можно ли провести прямую, пересекающую по внутренним точкам 50 клеток прямоугольника?

347. Даны 7 отрезков, длины которых заключены между 0,1 м и 1 м. Докажите, что среди этих отрезков найдутся три таких, что из них можно составить треугольник.

348. (Московская математическая олимпиада, 1975) На шахматной доске 8×8 отмечены центры всех полей. Можно ли тринадцатью прямыми разбить доску на части так, чтобы внутри каждой из них лежало не более одной отмеченной точки?

349. Есть 13 гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что любые 12 из них можно разложить на 2 чаши весов, по 6 гирь на каждой, так, что наступит равновесие. Докажите, что все гири одного веса.

350. Из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 199, 200 произвольно выбрали 101 число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

351. Можно ли разрезать какой-нибудь прямоугольник на равнобедренные треугольники с углом $40°$ при основании?

352. Журнал «Юный хакер» выходит нерегулярно — всего два или три номера в год. На обложке стоит номер журнала и год выпуска: № 1 — 2005, № 2 — 2005, № 3 — 2006, ... Докажите, что если редакцию не закроют, то рано или поздно выйдет номер, где два числа на обложке совпадут.

353. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся точки разного цвета на расстоянии 1.

354. Найдутся ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?

355. Докажите, что 11 коней не могут побить все оставшиеся поля шахматной доски.

356. Какое наименьшее число коней может побить все поля шахматной доски? (Считаем, что поле под собою конь тоже бьет.)

357. 20 детей разбили на пары мальчик–девочка так, что в каждой паре мальчик оказался выше девочки. После этого их разбили на пары мальчик–девочка по-другому. Может ли теперь оказаться, что в 9 парах из 10 девочка выше мальчика?

358. В строке записано 13 чисел. Известно, что сумма любых трех подряд записанных чисел положительна. Может ли сумма всех быть отрицательна?

359. Какое наименьшее число слонов может побить все поля шахматной доски? (Считаем, что поле под собою слон тоже бьет.)

360. Компания зрителей купила все билеты в один ряд, но села туда наугад, каждый не на своем месте. Билетер может попросить поменяться местами любых двух соседей, и так много раз. Однако любой зритель, попав на свое место, затем пересаживаться отказывается. Докажите, что билетер всегда может рассадить всех по своим местам.

361. На Луне имеют хождение монеты достоинством в 1, 15 и 50 фертингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил на сдачу на одну монету больше. Какую наименьшую сумму могла стоить покупка?

Занятия 63–70

Метод математической индукции

Если есть несколько высказываний, то, чтобы понять, какие из них верны, а какие нет, нужно проверять каждое высказывание, и возникает необходимость как-то в них ориентироваться. Это можно сравнить с необходимостью нумеровать страницы книги для удобства. Некоторые сборники высказываний (например, великих) делают следующим образом: каждому номеру n (не большего какого-то фиксированного числа — количества высказываний) ставят в соответствие высказывание, то есть нумеруют высказывания. Получается некоторый упорядоченный конечный набор высказываний.

Определение. *Последовательностью высказываний* называется всякая последовательность, значения которой — высказывания.

Пример 1. $n \to T_n$: для номера n справедливо равенство

$$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + ... + x^n).$$

Если высказываний конечное число, то, сколько бы это ни заняло времени, каждое из них можно проверить. Для последовательности высказываний возникает проблема: как определять, какие высказывания истинны, а какие ложны. Ведь проверить все высказывания физически невозможно.

Напоминание: последовательность — функция, *областью определения которой является множество натуральных чисел.*

Рассмотрим некоторые определения натуральных чисел, которые были в истории математики.

Определение 1. *Множеством натуральных чисел* называется множество всех чисел, используемых при счете предметов.

Определение 2. ***(Пеано)*** *Множеством натуральных чисел* называется множество чисел вида **1, 2, 3, 4, ...**

Определение 3. ***(Фреге—Рассела)*** *Множеством натуральных чисел* называется множество чисел вида **0, 1, 2, 3, 4, ...**

Определение 4. *Множеством натуральных чисел* называется наименьшее из множеств A, являющихся подмножествами множества действительных чисел $\mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1) число 1 является наименьшим элементом множества A,
2) из того, что $x \in A$, следует, что $(x+1) \in A$.

Множество натуральных чисел обозначается буквой $\mathbb{N}$ (*natural* — натуральный).

Замечание 1. Множество $\mathbb{N}$ является наименьшим из множеств A, удовлетворяющих условиям (1) и (2), в том смысле, что множество $\mathbb{N}$ является подмножеством всякого множества A, удовлетворяющего (1)–(2).

Замечание 2. Определения 1, 2, 4 эквивалентны, то есть если выполнено одно, то выполнено и другое, и обратно. Первое определение иногда дают в младших классах, в старших классах придерживаются определения Пеано. Множество из определения Фреге—Рассела называют множеством целых неотрицательных чисел и обозначают $\mathbb{N}_0$. И именно на четвертом определении основывается метод математической индукции, позволяющий показать, что все утверждения верны, начиная с некоторого номера.

Метод математической индукции: пусть дана последовательность утверждений $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$.

1-й шаг. Проверяется, верно ли первое утверждение — T_1. Если T_1 верно, то первый шаг закончен и можно переходить ко второму. Если нет, то путем проверки утверждений, начиная с первого, ищется ***первое верное*** утверждение, пусть для определенности это будет некоторое T_k.

2-й шаг. Делается предположение, что верно T_m (m — произвольное фиксированное натуральное число, не меньше k). Доказывается, что тогда будет верно и T_{m+1}.

Если удается пройти и второй шаг, то делается **вывод:** *для каждого* $n \geq k$ *верны утверждения* T_n. *В частности, если* $k = 1$, то говорят, что утверждения T_n верны для всех натуральных чисел.

Обоснование. Покажем, что сделанный вывод, в случае когда сделаны оба шага, верен. Рассмотрим сначала случай $k = 1$. Обозначим через A множество **всех номеров** n, при которых верны утверждения T_n. Тогда на первом шаге показывается, что $1 \in A$. На втором шаге показывается, что из того, что $m \in \mathbb{N}$, следует, что $(m + 1) \in \mathbb{N}$. Но тогда, поскольку само множество A является подмножеством $\mathbb{N}$, по определению 4 $A \equiv \mathbb{N}$, а это и означает, что утверждения T_n верны для всех натуральных чисел. Случай $k > 1$ доказывается аналогично.

Рекомендации по применению метода математической индукции для некоторых типов задач (рекомендации даны для случая k=1)

I. *Доказательство тождеств.*

Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — числовые последовательности. Чтобы доказать справедливость равенства $a_n = b_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, *достаточно* проверить, что $a_1 = b_1$, и для каждого натурального k доказать справедливость равенства

$$a_{k+1} - a_k = b_{k+1} - b_k.$$

II. *Доказательство неравенств.*

1) Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — числовые последовательности. Чтобы доказать справедливость неравенства $a_n > b_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, *достаточно* проверить, что $a_1 > b_1$, и для каждого k доказать справедливость неравенства

$$a_{k+1} - a_k > b_{k+1} - b_k.$$

2) Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — числовые последовательности *положительных чисел.* Чтобы доказать справедливость неравенства $a_n > b_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, достаточно проверить, что

$a_1 > b_1$, и для каждого k доказать справедливость неравенства $\frac{a_{k+1}}{a_k} > \frac{b_{k+1}}{b_k}$.

III. Иногда при помощи метода математической индукции легче доказать более сильное утверждение, чем то, которое предложено в задаче.

Например, для доказательства неравенства $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1$ легче доказать более сильное неравенство $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$, из которого и будет следовать исходное.

Для иллюстрации применения метода математической индукции рассмотрим следующий пример.

Пример 2 (формула бинома Ньютона). Для любого $n = 1, 2, \ldots$, для любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n b^n}, \tag{1}$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биноминальные коэффициенты, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$; $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$, $0! = 1$.

Доказательство. Для последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ символом $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ при $m<n$ обозначается сумма всех членов последовательности с номерами m, $m + 1, \ldots, n$; при $m = n$ полагают $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = a_m$.

Обозначим через T_n следующее утверждение: «Для номера n при любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k».$$

1-й шаг. Проверим, верно ли первое утверждение. Так как $C_1^0 = C_1^1 = 1$,

$$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b,$$

тем самым T_1 верно.

2-й шаг. Предположим, что при $n = m$ утверждение T_m верно ($m \ge 1$), *т. е. для любых* $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k.$$

Докажем, что тогда верно утверждение T_{m+1}: «для любых $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k \text{»}.$$

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Согласно предположению, имеем

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)^m \cdot (a+b) = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{k_1=0}^{m} C_m^{k_1} a^{m-k_1} b^{k_1+1} =$$

$$= C_m^0 a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + C_m^m b^{m+1} + \sum_{k_1=0}^{m-1} C_m^{k_1} a^{m-k_1} b^{k_1+1} =$$

$$= \begin{bmatrix} k_1 + 1 = l, \\ k_1 = l - 1, \\ 1 \le l \le m \end{bmatrix} = C_m^0 a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + C_m^m b^{m+1} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{m} C_m^{l-1} a^{m+1-l} b^l = C_m^0 a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} (C_m^k + C_m^{k-1}) a^{m+1-k} b^k + C_m^m b^{m+1}.$$

Очевидно, что $C_m^0 = 1 = C_{m+1}^0 = C_m^m = C_{m+1}^{m+1}$. Поэтому для завершения доказательства нам осталось показать, что

$$C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k,\ k = 1, 2, \ldots, m. \tag{2}$$

Покажем это непосредственно по определению биномиальных коэффициентов:

$$C_m^k + C_m^{k-1} = \frac{m!}{k!(m-k)!} + \frac{m!}{(k-1)!(m-k+1)!} =.$$

$$\frac{m!}{k!(m-k+1)!}(m-k+1+k) = \frac{m!(m+1)}{k!(m-k+1)!} = \frac{(m+1)!}{k!(m+1-k)!} = C_{m+1}^k.$$

Тем самым, согласно методу математической индукции для любого $n = 1, 2, \ldots$, для любых a, $b \in \mathbb{R}$ справедливо равенство (1).

Некоторые задачи, связанные с натуральными числами, можно решать не только методом математической индукции.

Пример 3. Доказать, что для всех $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\sum_{l=0}^{p} C_{q+l-1}^{l} = C_{q+p}^{p}. \qquad (3)$$

Доказательство. Используя равенство (2), получим:

$$C_{q-1}^0 = 1 = C_q^0,$$

$$C_{q-1}^0 + C_q^1 = C_q^0 + C_q^1 = C_{q+1}^1,$$

$$C_{q+1}^1 + C_{q+1}^2 = C_{q+2}^2,$$

$$C_{q+2}^2 + C_{q+2}^3 = C_{q+3}^3,$$

продолжая и так далее, в конце получим:

$$C_{q+p-1}^{p-1} + C_{q+p-1}^{p} = C_{q+p}^{p}.$$ ■

362. Введите формулу суммы

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}.$$

363. Рассмотрим таблицу

$$\begin{array}{lcl}
1 & = & 1, \\
1-4 & = & -(1+2), \\
1-4+9 & = & 1+2+3, \\
1-4+9-16 & = & -(1+2+3+4).
\end{array}$$

Установите общий закон, заложенный в этом примере, выразите его математически и докажите.

364. Рассмотрим таблицу

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1, \\ 2+3+4 & = & 1+8, \\ 5+6+7+8+9 & = & 8+27, \\ 10+11+12+13+14+15+16 & = & 27+64. \end{array}$$

Установите общий закон, заложенный в этом примере, выразите его математически и докажите.

365. У Боба 10 карманов и 44 серебряных доллара. Он хочет распределить доллары по своим карманам так, чтобы в каждом кармане содержалось различное количество долларов.

(А) Сможет ли он это сделать?

(В) Обобщите проблему, полагая количество карманов равным m и количество долларов равным n.

366. Является ли число вида $991n^2 + 1$ ($n = 1,2,...$) полным квадратом?(12 055 735 790 331 359 447 442 538 767 — это самое маленькое число, при котором $991n^2 + 1$ является полным квадратом.)

367. (Задача Архимеда) Найдите сумму квадратов n первых чисел натурального ряда: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$.

368. (Задача Апастамбы) *(областная олимпиада 2005 г., 10 кл.)*. Найти сумму кубов n первых чисел натурального ряда: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$.

369. С помощью метода математической индукции докажите тождество

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

($n = 1,2,3,...$).

370. С помощью метода математической индукции докажите справедливость равенства

$$n!+\frac{(n+1)!}{1!}+\frac{(n+2)!}{2!}+\ldots+\frac{(n+m)!}{m!}=\frac{(n+m+1)!}{m!(n+1)}$$

($n = 1, 2,..., m = 1, 2,...$).

371. (Задача ал-Караджи) Для каких натуральных чисел n верно равенство $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$?

372. (Задача Ибн ал-Хайсама) Найдите сумму четвертых степеней n первых натуральных чисел:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4.$$

373. (Задача Иоганна Фаульхабера) Для каждого натурального числа n докажите равенство

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + n^5 = (2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2)/12.$$

374. (Задача Никомаха из Герасы) Найти формулу для n-го ($n = 1, 2, 3, ...$) пирамидального числа:

$$1+3+6+...+\frac{n(n+1)}{2}.$$

375. Докажите, что $2 + 6 + 10 + ... + 2(2n - 1) = 2n^2$, где $n = 1,2,...$.

376. Докажите, что $2 + 10 + 24 + ... + (3n^2 - n) = n^2(n + 1)$, где $n = 1,2,...$.

377. Докажите, что
$1 + 8 + 21 + ... + (3n^2 - 2n) = n(n + 1)(2n - 1)/2$,
где $n = 1,2,...$.

В задачах 385–391 докажите, что для любого натурального числа n справедливы выписанные утверждения.

378. $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ – целое число.

379. $2^{2n-1} + 3n + 4$ делится на 9.

380. $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

381. $3^{2^n} - 1$ делится на 2^{n+2} и не делится на 2^{n+3}.

382. $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 2^{2n+1} \cdot 3^{n+2}$ делится на 19.

383. $10^n + 18n - 1$ делится на 27.

384. $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится на 16.

385. (Областная олимпиада 2005г., 10 кл.) Найти сумму:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3 + ... + n \cdot n! \ (n = 1,2,...).$$

386. Найдите наименьшее число c такое, что неравенство $n^3 \le c \cdot 2^n$ справедливо при всех натуральных n.

387. Докажите, что $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$,

где $n = 2,3,...$.

388. Докажите, что
$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!},$$
где $n = 2, 3, \ldots$.

389. Докажите тождество
$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}\ (n=1,2,\ldots).$$

390. Докажите, что при любом натуральном $n > 3$ справедливо неравенство $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}<\frac{2n-1}{n}$.

391. Доказать тождество
$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}},$$
где $n = 1, 2, \ldots$.

392. Докажите, что любое число рублей, большее 7, можно уплатить без сдачи денежными билетами достоинством в 3 и 5 рублей.

393. Из $2n$ чисел $1, 2, \ldots, 2n$ произвольно выбрали $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся хотя бы два числа, из которых одно делится на другое.

394. На кольцевой автомобильной дороге стоит несколько одинаковых автомобилей. Известно, что если весь бензин, находящийся в автомобилях, слить в один из них, то этот автомобиль сможет проехать по всей кольцевой дороге и вернуться на прежнее место. Докажите, что хотя бы один из этих автомобилей сможет проехать по всей кольцевой дороге в заданном направлении, забирая по пути бензин у остальных автомобилей.

395. (Московская математическая олимпиада, 1993, 8 кл.) Существует ли конечное слово из букв русского алфавита, в котором нет двух соседних одинаковых подслов, но таковые появляются при приписывании (как справа, так и слева) любой буквы русского алфавита?

396. (Московская математическая олимпиада, 1993, 9 кл.) У Пети всего 28 одноклассников. У каждых двух из 28 различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?

397. (Ленинград, 1981) Существует ли натуральная степень числа 5, в ста младших разрядах которой встречается по крайне мере 30 нулей подряд?

398. (Московская математическая олимпиада, 1994, 11 кл.) Докажите, что для любого $k > 1$ найдется степень 2 такая, что среди k последних ее цифр не менее половины составляют девятки.

399. (Московская математическая олимпиада, 1995, 8 кл.) Докажите, что все числа 10017, 100117, 1001117, ... делятся на 53.

400. (Московская математическая олимпиада, 1995, 9 кл.) Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19.

401. (Московская математическая олимпиада, 1995, 11 кл.) Докажите, что существует бесконечно много таких составных n, что $3^{n-1} - 2^{n-1}$ кратно n.

402. (Всероссийская олимпиада по математике, 1999, 10 кл.) Некоторые натуральные числа отмечены. Известно, что на каждом отрезке числовой прямой длины 1999 есть отмеченное число. Докажите, что найдется пара отмеченных чисел, одно из которых делится на другое.

403. (Всероссийская олимпиада по математике, 1998, закл. этап) Существуют ли 1998 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится нацело на квадрат их разности?

Занятия 71–74

Системы аксиом в геометрии

При первом знакомстве с геометрией может показаться странным то, что доказываются очевидные утверждения. Однако здесь необходимо понимать, что в математике, как ранее уже было сказано, принято аксиоматическое построение курсов. Поэтому, например, готовясь к экзамену по геометрии, нельзя брать доказательства из различных книг по принципу «чем короче, тем лучше». Теорема может иметь короткое доказательство, потому что ранее в книге был доказан ряд утверждений, которые в другой книге могут быть позже. Без четкого понимания строения курса геометрии зачастую возникают трудности с решением геометрических задач. Нередко можно услышать от школьников после олимпиады, что задачи были легкими, но они почему-то не догадались. Это можно сравнить с тем, что если мы очень хорошо знаем своих близких, то даже в толпе моментально их узнаем. А если нам известны какие-то хаотические описания человека, то, стоя лицом к лицу с ним, можем и не узнать. Но если кто-то другой обратит наше внимание на него, то легко узнаем. Ниже для ознакомления приведены несколько различных систем аксиом.

А.В. Погорелов

Аксиомы:

1) какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей;
2) через любые две точки можно провести прямую, и только одну;
3) из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими;
4) прямая разбивает плоскость на две полуплоскости;

5) каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой;
6) каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами;
7) на любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один;
8) от любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один;
9) через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, С.А. Шестаков, И.И. Юдина

Аксиомы:

1) каждой прямой принадлежат по крайне мере две точки;
2) имеются по крайне мере три точки, не принадлежащие одной прямой;
3) через любые две точки проходит прямая и притом только одна;
4) из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими;
5) каждая точка O прямой разделяет ее на две части (два луча) так, что любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от точки O, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки O;
6) каждая прямая a разделяет плоскость на две части (полуплоскости) так, что любые две точки A и B одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой a (т.е. отрезок AB не пересекается с прямой a), а любые две точки C и D разных полуплос-

костей лежат по разные стороны от прямой a (т.е. отрезок CD пересекается с прямой a);

7) любая фигура равна сама себе;
8) если фигура Φ равна фигуре Φ_1, то и фигура Φ_1 равна фигуре Φ;
9) если фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2, а фигура Φ_2 равна фигуре Φ_3, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_3;
10) если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки;
11) на любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один;
12) от любого луча в заданную сторону можно отложить угол, равный данному, и притом только один;
13) любой угол hk можно совместить наложением с равным ему углом h_1k_1 двумя способами 1) так, что луч h совместится с лучом h_1, а луч k — с лучом k_1; 2) так, что луч h совместится с лучом k_1, а луч k — с лучом h_1;
14) для любого ограниченного множества точек, лежащих на одной прямой, существует наименьший отрезок, содержащий все эти точки;
15) (аксиома Архимеда) для любых двух отрезков AB и CD существует такое натуральное число n, что $n \cdot AB > CD$;
16) через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

И.Ф. Шарыгин

Аксиомы:

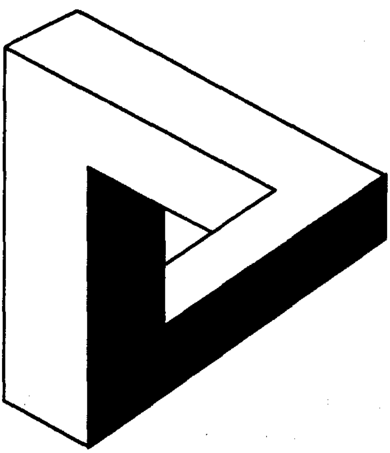
1) любая точка, лежащая на прямой, делит эту прямую на две полупрямые;
2) длина отрезка выражается положительным числом;
3) отношение длин любых двух отрезков не зависит от выбора единицы длины;
4) если точка B лежит между двумя точками A и C, то длина отрезка AC равна сумме длин отрезков AB и BC;
5) через любые две точки плоскости можно провести прямую линию и притом только одну;

6) любая прямая плоскости делит эту плоскость на две части — две полуплоскости;
7) любая прямая плоскости является осью симметрии плоскости;
8) через любую точку плоскости, расположенную вне данной прямой этой же плоскости, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

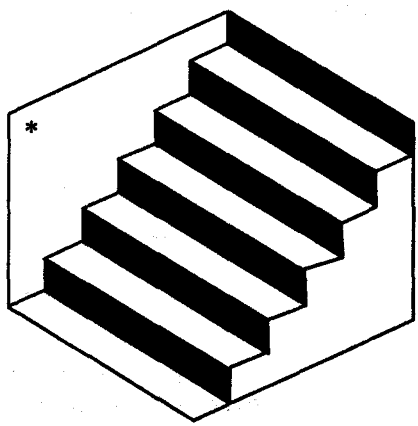
В данном пособии мы будем придерживаться систем аксиом И.Ф. Шарыгина.

Как и многие науки, развитие геометрии было тесно связано с развитием человечества. Необходимость в строгом доказательстве росла вместе с повышением точности вычислений.

Возникало множество парадоксов, здесь (см. рис. 5) мы привели только два из таких парадоксов.



Такая пространственная фигура невозможна. А на рисунке она есть. Этот рисунок придумал ученый Р. Пенроуз



Лестница Схоутена (по имени ученого, придумавшего этот рисунок). Звездочкой отмечена стена, в которую упирается лестница. Поверните рисунок на 180° и посмотрите, во что превратится стена, отмеченная звездочкой

Рис. 5

Немалую роль в развитии культуры доказательства сыграли и софизмы, т.е. некоторые цепочки утверждений, большинство из которых верны, но из-за одного или двух неверных утверждений получались ложные заключения. Потребность в умении строить софизмы была продиктована тем, что правящей элите необходимо было уметь убеждать толпу в том, что было нужно им, а не в том, что правильно.

Общеизвестно, что для человечества серьезным шагом было осознание того, что все состоит из молекул. Однако не менее значимо было развитие навыков работы с бесконечными объектами. Неслучайно множество софизмов было связано именно с бесконечным числом объектов.

Приведем пример одного из них: попытаемся доказать, что все прямые параллельны.

Предположим, что существуют две не параллельные прямые l_1 и l_2. Пусть A и B — произвольные точки на прямых l_1 и l_2 соответственно (рис. 6).

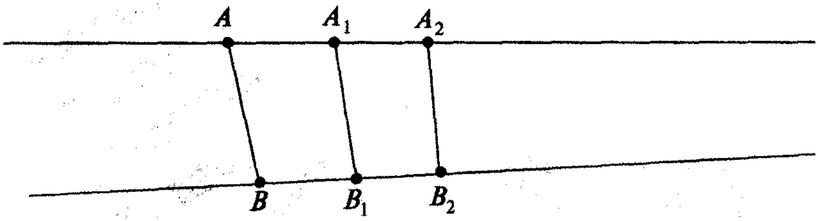


Рис. 6

На прямых l_1 и l_2 отложим по одну сторону от прямой AB соответственно точки A_1 и B_1 так, что точка пересечения прямых l_1 и l_2 и точка A_1 лежат по одну строну и $AA_1 = BB_1 = AB/2$. Предположим, что отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются, тогда существут точка C на плоскости такая, что $BA \geq BC + CA$, что невозможно, иначе кратчайшим расстоянием между точками A и B была бы не длина отрезка AB.

Далее отложим точки A_2 и B_2 так, что точка пересечения прямых l_1 и l_2 и точка A_2 лежат по одну строну и $A_1A_2 = B_1B_2 = A_1B_1/2$. Аналогично отрезки A_1A_2 и B_1B_2

не пересекаются. Продолжая и так далее мы получим, что при некотором натуральном n отрезки A_nA_{n+1} и B_nB_{n+1} пересекаются. Однако это также невозможно, поскольку кратчайшим расстоянием между точками A_n и B_n будет A_nB_n. Таким образом, все прямые параллельны.

Ясно, что такого быть не может, однако не каждый сможет найти ошибку в этих рассуждениях. Другой тип ошибки заключается в том, что при доказательстве утверждения некоторые случаи либо не рассматриваются, либо считается, что их доказательство аналогично рассмотренным. Примером подобной ошибки может служить софизм «все треугольники — равнобедренные», в котором рассматриваются 6 случаев расположения точки пересечения биссектрисы угла треугольника и серединного перпендикуляра противоположной стороны. И ошибка заключается в том, что на самом деле из этих шести случаев возможен только один, который соответствует равнобедренным треугольникам, и при этом не рассмотрен всего один случай: одно из оснований высоты, опущенной из указанной точки на прямую, содержащую сторону, лежит на этой стороне треугольника, а другое — на продолжении. Оказывается, все неравнобедренные треугольники содержатся именно в нерассмотренном случае. То есть не рассмотрели один случай из семи — и получилось, что все треугольники равнобедренные.

Задачи

404. Приведите пример треугольника и укажите, как необходимо провести прямую через его вершину, чтобы на получившемся чертеже присутствовали все виды треугольников: прямоугольный, тупоугольный, остроугольный, разносторонний, равносторонний, равнобедренный, не являющийся равносторонним.

405. Сколько треугольников может образоваться при пересечении пяти прямых?

406. Длина ветки равна 2 м. В начале ветки сидит червяк. За первую минуту он проползает 1 м, за следующую — $\frac{1}{2}$ м, в течение следующей — $\frac{1}{4}$ м и так далее, т.е. за каждую следующую минуту он проползает в два раза меньше, чем за предыдущую. Доберётся ли он когда-нибудь до конца ветки?

407. Две точки движутся по прямой в одном направлении. На какую величину переместится середина отрезка, определяемая этими точками, если одна точка переместится на 1 см, а другая — на 3 см? Каков будет ответ, если точки движутся в разных направлениях?

408. Кузнечик делает прыжки по дороге, причем длина каждого прыжка, начиная со второго, в два раза больше предыдущего, а направления прыжков произвольны. Докажите, что кузнечик не сможет вернуться в исходную точку.

409. Три дома A, B и C расположены на прямой в указанном порядке. На этой прямой необходимо вырыть колодец. Каждая семья, проживающая в этих домах, будет один раз в день брать из колодца воду. Где необходимо расположить колодец, чтобы общий (суммарный) путь был как можно меньше, если в каждом из домов проживает одна семья? Как изменится ответ, если в доме A живет одна семья, в доме B — две семьи, а в доме C — три семьи?

410. Какое наименьшее число сторон может иметь многоугольник, если хотя бы две не соседние его стороны лежат на одной прямой?

Занятия 75–84

Три важнейшие теоремы в теории чисел или три взгляда на целые числа

Теорема 10 (основная теорема арифметики). *Всякое натуральное число, отличное от* 1, *представимо в виде произведение простых чисел единственным образом с точностью до их расстановки.*

411. Докажите, что число 9991 составное.
412. Докажите, что число $2^{3^{2009}}+1$ составное.
413. Найдите все простые числа, отличающиеся на 17.

В задачах 421–426 представьте числа в виде произведения простых чисел.
414. 1001.
415. 1003.
416. 1763.
417. 2009.
418. 2010.
419. 1547.

420. (Всероссийская олимпиада по математике, 1996, 8 кл.) Числа от 1 до 37 записаны в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте написано число 37, а на втором — 1?

Теорема 11. *Пусть* $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s}$, *где* $p_1, p_2, \ldots, p_s$ *– простые, и* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ *– целые неотрицательные числа. Тогда*

1) $\text{НОД}(a,b) = (a,b) = p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot p_2^{\min\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdot \ldots \cdot p_s^{\min\{\alpha_s,\beta_s\}}$;

2) $\text{НОК}(a,b) = [a,b] = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot p_2^{\max\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdot \ldots \cdot p_s^{\max\{\alpha_s,\beta_s\}}$;

3) $(a,b) \cdot [a,b] = a \cdot b$.

421. Докажите, что существуют 1000 подряд идущих составных чисел.

422. (Всероссийская олимпиада по математике, 1994, 10 кл.) Натуральные числа m и n таковы, что НОК(m, n) + НОД(m, n) = $m + n$. Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое.

423. (Всероссийская олимпиада по математике, 1995, 9 кл.) Пусть a, b, c — попарно взаимно простые натуральные числа. Найдите все возможные значения $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$, если известно, что это число целое.

Теорема 12 (Лежандра). *Пусть дано простое число p и целое неотрицательное число a такое, что $n!$ делится на p^a, но $n!$ не делится на p^{a+1}. Тогда*

$$a = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right],$$

где $\left[\frac{n}{p^k}\right] \neq 0$ *и* $\left[\frac{n}{p^{k+1}}\right] = 0$, $[x]$ – *целая часть числа x.*

В задачах 431–434 представьте числа в виде произведения простых чисел.

424. 10!.

425. 100!.

426. 140!.

427. 2010!.

428. Каково наименьшее натуральное число n, при котором $n!$ делится на 990?

429. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого 1999! не делится на 34^n.

Теорема 13 (о количестве и сумме натуральных делителей). *Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — простые, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — целые положительные числа. Тогда*

1) $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_s + 1)$ — *количество натуральных делителей числа n,*

2) $\sigma(n) = \prod_{k=1}^{s} \left(\sum_{j=0}^{\alpha_k} (p_k)^j \right)$ — *сумма натуральных делителей числа n.*

430. (ЕНТ) Найдите количество натуральных делителей числа 120.

431. (ЕНТ) Найдите сумму всех натуральных делителей числа 120.

432. (МГУ, 2004, ВМК, устный) Сколько различных делителей имеет число 210^{37}?

433. Сколько различных натуральных делителей имеет число $2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^5 \cdot 7^7 \cdot 11^{11}$?

434. Найдите натуральное число n, зная, что оно имеет два простых делителя и удовлетворяет условиям $\tau(n) = 6$, $\sigma(n) = 28$.

435. (Всероссийская олимпиада по математике, 1994, 9 кл.) Можно ли расставить по кругу 1995 различных натуральных чисел, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

Теорема 14 (о делении с остатком). *Для любых целых чисел a и b ($b \neq 0$) существуют целые числа q и r такие, что $0 \le r < |b|$ и $a = bq + r$.*

Доказательство (*геометрический смысл неполного частного и остатка при делении*). Пусть даны целые числа a и b ($b \neq 0$). Рассмотрим два случая.

1) Пусть $b > 0$. Разобьем множество всех целых чисел на промежутки вида $[bk; bk + b)$, $k \in \mathbb{Z}$ (рис. 7):

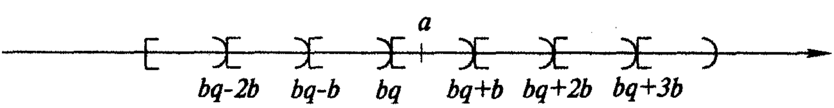


Рис. 7

Тогда целое число a будет принадлежать одному из этих промежутков. Пусть при некотором целом k число a принадлежит промежутку $[bk; bk + b)$, т.е. $bk \le a < bk + b$. Положим $q = k$, $r = a - bq$. Тогда $0 \le r < b$. Таким образом, неполное частное (q) является номером промежутка, которому принадлежит a, а r — расстояние до левого конца этого промежутка.

2) Пусть $b < 0$. Тогда $-b > 0$, значит, существуют целые числа q, r такие, что $0 \le r < -b$, $a = -bq + r = b(-q) + r$. Тем самым, теорема 14 доказана.

Замечание. На практике геометрический смысл остатка при делении может быть полезен для быстрого его вычисления: для того чтобы найти остаток от деления числа a на b, необходимо прибавлять или вычитать от числа a числа, кратные b, до тех пор пока не получим неотрицательное число, меньшее b.

Пример 1. Найдите остаток от деления 2012 на 19.

○ *Решение.* От 2012 отнимем $1900 = 19 \cdot 100$, получим 112, затем от результата отнимем $190 = 19 \cdot 10$. Тогда у нас будет -78. Прибавив к последнему числу $95 = 19 \cdot 5$, имеем 17. То есть остаток от деления 2012 на 19 равен 17. ●

Описанный способ нахождения остатка от деления можно сравнить с тем, что если бы некто купил билет в поезд, то, многократно переставляя его вагон, мы бы не изменили положение этого пассажира внутри вагона.

436. Какое наибольшее число воскресений может быть в году?

437. Сегодня 17 августа — пятница. Не используя календаря, устно определите, каким днем недели будет 16 декабря.

438. Какое самое большое число месяцев с пятью воскресеньями может быть в году?

439. В некотором месяце три четверга пришлись на четные числа. Какой день недели был 26-го числа этого месяца?

440. Если сегодня 2 ноября 2004 года — вторник, то какой день недели: 13 декабря 2004 года, 1 февраля 2004 года, 7 марта 2005 года, 1 января 2030 года? (Определить без использования календарей.)

441. Целое число кратно 7 и при делении на 4 дает в остатке 3. Найдите остаток от деления этого числа на 28.

442. Известно, что числа 1020 и 1127 дают при делении на натуральное число a одинаковые остатки. Найдите число a.

443. Двузначные числа от 19 до 80 выписаны подряд. Делится ли получающееся число 192021...7980 на 1980?

444. Найдите наибольшее целое число, дающее при делении с остатком на 13 частное 17.

445. (МК-МГУ, 2005, I тур, № 6; мех-мат, олимпиада, 8 кл., №3). В каждом подъезде нового дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. На восьмом этаже третьего подъезда первая квартира имеет номер 106. Какой номер имеет вторая квартира на третьем этаже шестого подъезда?

446. (СПО, 2005, 1 тур, 7 кл.) Поезд Москва–Нью-Йорк имеет сплошную нумерацию мест в вагонах (нумерация начинается с 1). Во всех вагонах одно и то же число мест. Известно, что места 2014 и 2045 находятся в одном и том же вагоне, а места 2508 и 2542 — в разных, причем не соседних вагонах. Сколько мест в одном вагоне?

447. (Всероссийская олимпиада по математике, 1997, 8 кл.) У нескольких крестьян есть 128 овец. Если у кого-то из них оказывается не менее половины всех овец, остальные сговариваются и раскулачивают его: каждый берет себе столько овец, сколько у него уже есть. Если у двоих по 64 овцы, то раскулачивают кого-то одного из них. Произошло 7 раскулачиваний. Докажите, что все овцы собрались у одного крестьянина.

448. (Кубок им. А.Н. Колмогорова, 1997, карт.) Найдите наименьшее натуральное число, которое оканчивается на 56, делится на 56 и имеет сумму цифр 56.

449. (СПО, 1966, 7 кл.) Докажите, что при любом натуральном n число $n(2n + 1)(3n + 1) \cdot ... \cdot (1966n + 1)$ делится на каждое простое число, меньшее 1966.

В школьной теории чисел можно выделить три основные теоремы: основная теорема арифметики, теорема о делении с остатком и теорема о системах счисления. Каждая из этих теорем представляет целые числа в некотором виде, который эффективен в своих случаях:

- если необходимо, например, вычислить количество или сумму натуральных делителей целого числа, то согласно теореме 13 выгодно целые числа представлять в виде произведения простых чисел и возможно -1 (основная теорема арифметики);
- если необходимо доказать, что некоторое утверждение не верно для целых чисел, то, например, при решении уравнений, это легче сделать, разбив целые числа на группы по остатку при делении на некоторое число (теорема о делении с остатком);
- если необходимо записать целые числа, например, с различным количеством используемого места, то это можно сделать, выбрав некоторую систему счисления (теорема о системах счисления).

Естественно поставить вопрос, в какой системе счисления запись целых чисел занимает наименьшее место? Ответ на этот вопрос содержится в решении задачи о взятке.

Пример 2 (задача о взятке). Пусть необходимо дать взятку — целое положительное число рублей, не превосходящее 1 000 000. Однако заранее неизвестно, какую сумму необходимо будет дать. Поэтому деньги предварительно раскладываются по конвертам так, чтобы можно было заплатить любую сумму от 1 до 1 000 000. Какое наименьшее возможное количество конвертов необходимо подготовить?

○ *Решение.* На первый взгляд, необходимо подготовить 9 конвертов по 1 рублю, 9 конвертов по 10 рублей, ..., 9 конвертов по 100 000 рублей и 1 конверт с 1 000 000 рублей. Однако тогда нам понадобится 55 конвертов. Оказывается, что наименьшее число конвертов получится, если мы будем действовать следующим образом: в 1-й конверт положим 1 рубль, во второй конверт — 2 рубля, в третий — 4 рубля, в четвертый — 8 рублей, ..., в 20-й конверт — 2^{19} рублей. То есть нам понадобится всего лишь 20 конвертов. Поскольку $2^{20} = 1024^2 > 1\ 000\ 000$, любое натуральное число, не превосходящее 1 000 000, мы можем представить в виде суммы указанных степеней двоек, например, следующим образом: пусть дано натуральное число $A \le 1\,000\,000$, берем наибольшую степень двойки, не превосходящую A. Уменьшим число A на эту степень двойки, получим число A_1. Затем опять выберем наибольшую степень двойки, не превосходящую A_1. Продолжим этот процесс до тех пор, пока не получим 0. В силу максимальности выбора степеней двоек, все степени двоек будут различны. Таким образом, число A представим в виде суммы различных степеней двоек.

Если число A представлять в виде суммы степеней 3, то нам понадобится два конверта по 1 рублю, два конверта — по 3 рубля, два конверта – по 9 рублей, ..., два конверта — по 3^{12}, т.е. нам понадобится 26 конвертов. ●

Теорема 15 (о системах счисления). *Пусть даны натуральные числа a и p ($p > 1$). Тогда существует целое неотрицательное число k такое, что $p^k \le a < p^{k+1}$, и существует набор целых неотрицательных чисел a_0, a_1, ..., a_k таких, что $a = a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \ldots + a_1 p + a_0$, $0 \le a_j < p$, $j = 0, 1, 2, \ldots, k$, $a_k \ne 0$.*

450. (КФМГУ, 2008, олимп.) Найдите все натуральные числа, которые в 5 раз больше суммы цифр в их десятичной записи.

451. Имеются весы с двумя чашами и по одной гире в 1 грамм, 3 грамма, 9 граммов, 27 граммов и 81 грамм. Как уравновесить груз в 61 грамм, положенный на чашу весов?

452. Дан мешок сахарного песка, чашечные весы и гирька в 1 г. Можно ли за 10 взвешиваний отмерить 1 кг сахара?

453. Летела стая гусей. На каждом озере садилась половина гусей и еще полгуся. Остальные летели дальше. Все гуси сели на 2006 озерах. Сколько всего гусей было в стае?

454. Имеются 4 гири и двухчашечные весы без стрелки. Сколько всего различных по весу грузов можно точно взвесить этими гирями, если

а) гири можно класть только на одну чашу весов;
б) гири можно класть на обе чаши весов?

455. Вы имеете право сделать 4 гири любого веса. Какие это должны быть гири, чтобы на весах из предыдущей задачи можно было взвесить грузы от 1 до 40 кг?

456. Имеются две веревки. Если любую из них поджечь с одного конца, то она сгорит за час. Веревки горят неравномерно. Например, нельзя гарантировать, что половина веревки сгорает за 30 минут. Как, имея две такие веревки, отмерить промежуток времени в 15 минут?

457. С числом разрешается производить две операции: «увеличить в два раза» и «увеличить на 1». За какое наименьшее число операций можно из числа 0 получить число 100?

458. Карточный фокус. Берется колода из 27 карт (без одной масти). Ваш друг загадывает одну из карт. После чего вы раскладываете все карты в три равные кучки, кладя каждый раз по одной карте (в первую кучку, затем во вторую, затем в третью, потом снова в первую и т. д.). Ваш друг указывает на ту кучку, в которой лежит его карта. Далее вы складываете все три кучки вместе, вставляя при этом указанную кучку между двумя другими. Эта процедура повторяется еще два раза. На каком месте в колоде окажется загаданная карта после того, как вы сложите вместе три кучки в третий раз?

459. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1982) Разложите $2^{1982} + 1$ на два натуральных множителя, каждый из которых не меньше 1000.

Теорема 16 (признак делимости Паскаля). *Пусть даны натуральные числа* b, p, $n = a_kp^k + a_{k-1}p^{k-1} + \ldots + a_1p + a_0$, *где* a_k, a_{k-1}, ..., a_1, a_0 *– целые неотрицательные числа, не превосходящие* $p - 1$, r_k, r_{k-1}, ..., r_1 *– целые числа такие, что* $r_j \equiv p^j \pmod{b}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. *Тогда число* n *кратно* b *тогда и только тогда, когда* $a_kr_k + a_{k-1}r_{k-1} + \ldots + a_1r_1 + a_0 \equiv 0 \pmod{b}$.

460. Докажите признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 25.

Теорема 17 (эстафетные признаки делимости). *Для простого числа p выбираются целые числа k и d такие, что $k \ge 1$ и $(d, p) = 1$, $d \cdot 10^k \equiv 1 \pmod p$. Число N делится на p тогда и только тогда, когда на p делится число M, полученное из N зачеркиванием последних k цифр и прибавлением к полученному числу зачеркнутого k-значного числа, умноженного на d.*

461. Выведите признаки делимости на 7, 17 и 19, положив в эстафетном признаке делимости k и d согласно следующей таблице:

p	19	7	17	17	17
k	1	1	1	2	5
d	2	−2	−5	8	3

462. (Московская математическая олимпиада, 1997) Докажите, что существует натуральное число, которое при замене любой тройки соседних его цифр на произвольную тройку цифр остается составным. Существует ли такое 1997-значное число?

463. (Московская математическая олимпиада, 1975) Натуральные числа a, b, c таковы, что числа $p = b^c + a$, $q = a^b + c$, $r = c^a + b$ простые. Доказать, что хотя бы два из чисел p, q, r равны между собой.

464. (СПО, 1995) Найдите все n, для которых $3^n + 5^n$ делится на $3^{n-1} + 5^{n-1}$.

465. (США, 1978) Докажите, что любое простое число вида $2^{2^t}+1$ не представимо в виде разности пятых степеней двух натуральных чисел.

466. (Чехословакия, 1971) Пусть $\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1972}$, $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Докажите, что m делится на 1973.

467. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1986) Найдите все натуральные числа, каждое из которых равно квадрату числа всех своих делителей.

468. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1989) Натуральное число N имеет ровно 12 делителей (включая 1 и N). Занумеруем их в порядке возрастания $d_1 < d_2 < ... < d_{12}$. Известно, что делитель с номером $d_4 - 1$ равен произведению $(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) \cdot d_8$. Найдите N.

469. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1994) Найдите все натуральные числа n, каждое из которых является произведением двух простых, а сумма всех делителей числа n, считая 1, но не считая n, равна 1000.

470. (Всероссийская олимпиада по математике, 1995) Найдите все простые p такие, что число $p^2 + 11$ имеет ровно 6 различных делителей (включая 1 и само число).

471. (Московская математическая олимпиада, 1998, 8 кл.) Можно ли найти восемь таких натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

472. (Московская математическая олимпиада, 1993, 8 кл.) Обозначим через $S(x)$ сумму цифр натурального числа x. Решите уравнение $x + S(x) + S(S(x)) = 1993$.

473. Какой точный квадрат равен произведению четырех последовательных нечетных чисел?

474. Докажите, что всякое рациональное число можно представить в виде суммы кубов четырех рациональных чисел.

475. Найдите все натуральные k, при которых число $2^k + 8k + 5$ есть точный квадрат.

476. (МЖО, 2005, 1 день, юниоры) Даны целые числа m, n такие, что $0 \le m \le 2n$. Докажите, что число $2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1$ является полным квадратом тогда и только тогда, когда $m = n$.

477. Докажите, что число $2(6^n + 1)$ ни при каком натуральном n нельзя представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.

478. Можно ли число $n^2 + 7n + 8$ при каком-либо натуральном n представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел?

479. Всякое ли рациональное число можно представить в виде суммы кубов трех рациональных чисел?

Занятия 85–86

Математические фокусы

480. Алексей говорит Борису: «Задумай двузначное число. Умножь его на 2, к полученному прибавь 5. Результат умножь на 5. Сколько у тебя получилось? 715? Ты задумал 69». Как он угадал?

481. Фокусник предлагает человеку из публики: «Задумайте однозначное или двузначное число. Прибавьте к нему 1, результат умножьте на 4, от произведения отнимите задуманное число и отнимите 3. Полученное число умножьте на 2. Что у вас получилось? 140? Вы задумали число 23». Как он это узнал?

482. Вася написал на листке бумаги какое-то число, вложил листок в конверт и конверт отдал Грише. А потом сказал: «Задумай такое трехзначное число, чтобы первая его цифра отличалась от последней больше чем на 1. Переставь его цифры в обратном порядке и из большего вычти меньшее. В полученной разности также переставь цифры в обратном порядке и сложи разность с последним числом. А теперь загляни в конверт». Гриша с изумлением увидел, что на листке из конверта написано то самое число 1089, которое у него получилось после всех операций. Каким образом Вася его узнал?

483. Арман, обращаясь к Даурену, сказал: «Задумай трехзначное число, чтобы первая цифра была больше третьей. Переставь цифры в обратном порядке и из первого числа вычти второе. Найди сумму цифр последнего числа. Она равна 18». Как Арман узнал это?

484. Возьмите двузначное число. Умножьте это число на 20 и произведение сложите с исходным числом, получим число. Это число умножим на 481, получим число, в записи которого трижды повторяется исходное число. Почему?

Занятия 87–90

Математическая регата

Правила проведения математической регаты

1. В составе каждой команды — 4 человека.
2. Соревнование проводится в четыре тура.
3. Каждый тур представляет собой коллективное письменное решение трех задач. Любая задача оформляется и сдается в жюри на отдельном листе. Эти листы раздаются командам перед началом каждого тура. На каждом таком листе указаны: номер тура, «ценность» задач этого тура в баллах, время, отведенное командам для решения, двойной индекс задачи и ее условие.
4. Получив листы с заданиями, команда вписывает на каждый из листов свое название, а затем приступает к решению задач. Каждая команда имеет право сдать только по одному варианту решения каждой из задач, не подписанные работы не проверяются.
5. Использование какой-либо математической литературы или калькуляторов запрещено. Мобильные телефоны должны быть отключены.

Призы: I место — 3 блока, II место — 2 блока, III место — 1 блок, при условии если участники наберут больше 25 баллов.

Регата
I тур
<u>10 минут</u>

1. (4б) Для детского садика купили 20 пирамидок: больших и маленьких — по 7 и по 5 колец. У всех пирамидок 128 колец. Сколько купили больших пирамидок?
2. (4б) Из множества чистых цветков лотоса были принесены в жертву: Шиве — третья доля этого мно-

жества, Вишну — пятая и Солнцу — шестая; четвертую долю получил Бхавани, а остальные шесть цветков получил уважаемый учитель. Сколько было цветков (задача Бхаскары, Индия, XII в)?

3. (5б) Некто, желая раздать деньги нищим, рассчитал, что если каждому дать по 15 коп, то у него не хватит 10 коп, а если каждому дать по 12 коп, то у него останется 14 коп. Сколько было нищих и сколько у него было денег?

Регата
II тур
15 минут

1. (4б) Купец купил 110 фунтов табака. 50 фунтов оказались подмоченными, и купец продал их на 2 руб. дешевле за 1 фунт, чем заплатил сам. Остальной табак он продал на 3 руб. дороже за 1 фунт, чем уплатил сам. Посчитайте прибыль купца.
2. (5б) На вопрос ученика о дне его рождения учитель ответил загадкой: «Если сложить день и номер месяца моего рождения, то получится 20; разница между месяцем и днем рождения равна 14; если к произведению дня и номера моего месяца прибавить 1900, то получится год моего рождения». Когда родился учитель математики?
3. (3б) На плохо отрегулированных весах бабушка взвесила 2 пакета сахарного песка — получилось 500 и 300 грамм. Когда же она взвесила на тех же весах оба пакета вместе, то получилось 900 грамм. Определите по этим данным вес каждого из пакетов.

Регата
III тур
20 минут

1. (3б) На лугу паслись несколько коров. У них ног на 24 больше, чем голов. Сколько коров паслись на лугу?

2. (4б) Железнодорожный состав длиной 1 км проходит мимо километрового столба за 1 мин, а через туннель при той же скорости — за 3 мин. Какова длина туннеля?
3. (5б) Сулико подошла к роднику с двумя кувшинами. Вода из родника текла двумя струями — одна давала в 3 раза больше воды, чем другая. Сулико подставила под струи одновременно два кувшина, и, когда набралась половина меньшего кувшина, она поменяла кувшины местами. Как ни удивительно, но кувшины наполнились одновременно. Определите объем каждого кувшина, если вместе они вмещают 8 л.

Регата
IV тур
25 минут

1. (5б) Три соседки готовили обед на общей плите в коммунальной квартире. Первая принесла 5 поленьев, вторая — 4 полена, а у третьей дров не было, и она угостила своих соседок, дав им 9 яблок. Как соседки должны поделить яблоки по справедливости?
2. (4б) Некто купил 4 книги. Все книги без первой стоят 84 руб., без второй — 80 руб., без третьей — 76 руб., без четвертой — 72 руб. Сколько стоит каждая книга?
3. (5б) Трое господ при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Сколько существует вариантов, при которых каждый из них получит чужую шляпу?

Коллоквиум №2

Для получения допуска к сдаче коллоквиума необходимо показать решение не менее 100% — (оценка за предыдущий коллоквиум) $\times\, 10\%$ от общего количества задач, т.е. от 120 до 200 задач (всего 251 задача).

Критерии оценок и пр. см. в материале к Коллоквиуму №1.

Список вопросов

1. Графы: определение, примеры. Теорема о количестве нечетных вершин в графе.
2. Инвариант: определение. Примеры инвариантов, связанных с четностью.
3. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11.
4. Наибольший и наименьший элементы множества. Примеры множеств, у которых есть наибольший элемент, и у которых нет ни наибольшего, ни наименьшего элемента.
5. Целая часть числа. Свойства целой части. Задача Эрмита.
6. Задача о кроликах. Обобщенный дискретный принцип Дирихле.
7. Непрерывный принцип Дирихле для отрезков.
8. Метод математической индукции. Рекомендации: применение метода математической индукции в задачах на делимость, при доказательстве тождеств, неравенств.
9. Формула бинома Ньютона.
10. Системы аксиом в геометрии.
11. Простые числа. Наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК): определение, свойства.

12. Основная теорема арифметики. Алгоритм разложения на простые множители. Следствия: НОД и НОК. Теорема о произведении НОД и НОК двух чисел.
13. Теорема Лежандра (о разложении $n!$ на простые множители).
14. Количество делителей и сумма делителей натурального числа.
15. Теорема о делении с остатком. Геометрический смысл неполного частного и остатка при делении.
16. Задача о взятке. Системы счисления. Арифметические операции. Применения.
17. Признак делимости Паскаля.
18. Эстафетные признаки делимости.

Часть 3

Занятия 91–98

Признаки равенства треугольников

Теорема 18 (первый признак равенства треугольников). *Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то эти треугольники равны.*

Теорема 19 (второй признак равенства треугольников). *Если сторона и два прилежащих угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим углам другого треугольника, то эти треугольники равны.*

Теорема 20 (третий признак равенства треугольников). *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники равны.*

Применение признаков равенства треугольников обширно, мы пока остановимся на следующем.

Теорема 21 (теорема о внешнем угле треугольника). *Внешний угол треугольника больше любого внутреннего, с ним не смежного.*

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC. Для определенности, не теряя общности, докажем, что внешний угол при вершине C больше угла ABC.

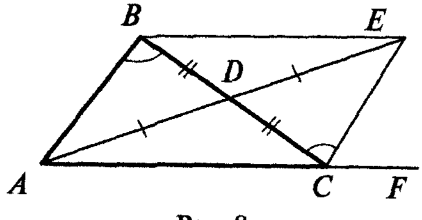


Рис. 8

Пусть точка D — середина стороны BC, продолжим медиану AD, за точкой D возьмем точку E так, что $DE = DA$ (рис. 8).

Рассматривая треугольники ABD и ECD согласно первому признаку равенства треугольников (ведь $\angle ADB = \angle EDC$ как вертикальные, $BD = DC$, D — середина BC, $AD = DE$ по построению), убеждаемся, что эти треугольники равны. Следовательно, $\angle ABD = \angle ECD$ (как углы в равных треугольников против соответственно равных сторон), однако $\angle ECD < \angle DCF$, поскольку является его частью. Значит, $\angle ABD$ меньше $\angle DCF = \angle BCF$. Тем самым, теорема 21 полностью доказана. ■

Приведенное доказательство теоремы 21 является не только коротким, но и красивым. Однако небезынтересным является сам подход: используя признаки *равенства*, мы доказали, что один угол *больше* другого. Поэтому доказательства теорем (даже полезно доказывать одну и ту же теорему разными способами) необходимо знать не только для того, чтобы получить хорошую оценку, но и потому, что при доказательстве теорем зачастую разрабатываются различные методы, которые могут быть с успехом применены для решения задач.

Признаки равенства треугольников	Признаки равенства прямоугольных треугольников
I: по двум сторонам и углу между ними,	1) по двум катетам,
	2) по катету и прилежащему острому углу,
II: по стороне и двум прилежащим углам,	3) по гипотенузе и острому углу,
	4) по катету и противолежащему острому углу,
III: по трем сторонам.	5) по гипотенузе и катету.

Остановимся вкратце на доказательстве третьего признака равенства прямоугольных треугольников (1-й и 2-й признаки являются, по сути, частными случаями I и II признаков равенства треугольников).

Доказательство *3-го признака равенства прямоугольных треугольников*. Пусть даны два прямоугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ такие, что $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1 = 90°$, $\angle CBA = \angle C_1B_1A_1$, $AB = A_1B_1$ (рис. 9).

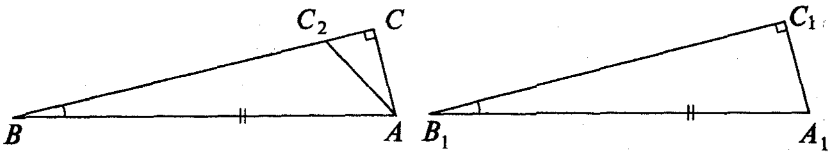


Рис. 9

Предположим, что $BC \neq B_1C_1$. Для определенности, не теряя общности, положим, $B_1C_1 < BC$. Отложим на луче BC точку C_2 так, что $BC_2 = B_1C_1$. Тогда треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку ($AB = A_1B_1$, $\angle C_2BA = \angle C_1B_1A_1$, по условию, $BC_2 = B_1C_1$ по построению). Следовательно, $\angle BC_2A = 90°$. Однако $\angle BC_2A$ является внешним углом для треугольника ACC_2, в котором $\angle C_2CA = 90°$. То есть внешний угол треугольника ACC_2 совпадает с внутренним не смежным углом данного треугольника, что в силу теоремы 21 быть не может. Значит, мы пришли к противоречию и наше предположение не верно и на самом деле $BC = B_1C_1$. Ну а тогда треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников. Тем самым, третий признак равенства прямоугольных треугольников доказан. ■

Доказательство 4-го и 5-го *признаков равенства прямоугольных треугольников* оставляем читателю.

Теорема 22 (признаки равнобедренного треугольника). *Пусть в треугольнике ABC выполняется одно из следующих условий:*

1) *углы при вершинах A и C равны;*
2) *биссектриса и высота, выходящие из вершины B, совпадают;*
3) *высота и медиана, выходящие из вершины B, совпадают;*

4) *медиана и биссектриса, выходящие из вершины B, совпадают.*

Тогда этот треугольник равнобедренный, причем $AB = BC$.

Доказательство. Если выполнено первое, второе или третье условие, то доказательство равнобедренности треугольника ABC сводится к применению соответствующих признаков равенства треугольников. ■

Теорема 23 (неравенство между сторонами и углами треугольника). *В любом треугольнике против большей стороны лежит больший угол. И против большего угла лежит бóльшая сторона.*

Теорема 24. *Во всяком прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна* 90°.

Теорема 25 (о медиане и противолежащей стороне треугольника). *Угол треугольника является прямым тогда и только тогда, когда медиана, проведенная из вершины этого угла, равна половине противолежащей стороны.*

Теорема 26. *Кратчайшим расстоянием от точки до прямой является перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную прямую.*

485. На рис. 10 $BA = AM$, $AC = AK$, $\angle BAC = \angle KAM$. Перечислите все пары равных треугольников с вершинами в точках A, B, C, K и M.

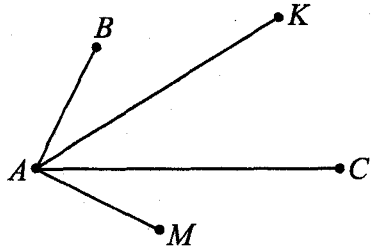


Рис. 10

486. На боковых сторонах равнобедренного треугольника во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины равносторонних треугольников (отличных от вершин равнобедренного) с серединой основания равнобедренного треугольника, равны между собой.

487. Три черепахи находятся в точках A, B и C, являющихся вершинами равностороннего треугольника. Они одновременно с одинаковой скоростью начинают ползти. Черепаха, находящаяся в A, ползет по прямой AB в направлении к B. Черепаха из B ползет в C, черепаха из C ползет в A. Докажите, что во все моменты времени черепахи располагаются в вершинах равностороннего треугольника.

488. Может ли в треугольнике один угол быть острым, другой прямым, а третий — тупым? Ответ обоснуйте.

489. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и углом при вершине B, равным 36°, проведена биссектриса AD. Докажите, что треугольники CDA и ADB — равнобедренные.

490. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC, равным 37, внешний угол при вершине B равен 60°. Найдите расстояние от вершины C до прямой AB.

491. Внешние углы треугольника ABC при вершинах A и C равны 115°. Прямая, параллельная прямой AC, пересекает стороны AB и AC в точках M и N. Найдите углы треугольника BMN.

492. Найдите углы треугольника, если известно, что его стороны лежат на прямых, углы между которыми равны 20°, 30° и 50°.

493. Докажите равенство треугольников по стороне и высотам, опущенным на две другие стороны.

494. Докажите, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую.

495. Докажите, что в тупоугольном треугольнике основание высоты, проведенной из вершины тупого угла, лежит на стороне треугольника, а основания высот, проведенных из вершин острых углов, — на продолжениях сторон.

496. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.

497. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°. Докажите, что высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла, делят прямой угол на три равные части.

498. Точка D — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. Точка E – основание перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону BC. Отрезки AE и BD пересекаются в точке F. Установите, какой из отрезков BF и BE длиннее.

499. Сторона AD прямоугольника $ABCD$ в три раза больше стороны AB. Точки M и N делят AD на три равные части. Найдите $\angle AMB + \angle ANB + \angle ADB$.

500. На стороне AC треугольника ABC нашлись точки K и L такие, что L — середина AK и BK — биссектриса угла $\angle LBC$. Оказалось, что $BC = 2BL$. Докажите, что $KC = AB$

501. Внутри треугольника ABC отмечена точка M, так что при этом $\angle BAM = \angle ABC$, $\angle AMB = 100°$, $\angle ACB = 70°$. Докажите, что $BM < AC$.

502. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка B так, что $BC = CD$. На катете BC взята точка E так, что $DE = CE$. Докажите равенство $AD + BE = DE$.

503. В остроугольном треугольнике ABC высота AH пересекается с медианой BM в точке L, а с биссектрисой CK — в точке N. Медиана BM и биссектриса CK пересекаются в точке P (точки L, N, P различны). Докажите, что треугольник LNP не может быть равносторонним.

504. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота CH и медиана BK, причем $BK = CH$, а также равны углы KBC и HCB. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

505. Высота AK, биссектриса BL и медиана CM треугольника ABC пересекаются в одной точке O, причем $AO = BO$. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

506. На сторонах AB и AC треугольника ABC построены равнобедренные треугольники ADB ($AD = AB$) и ACE ($AC = AE$), причем угол DAE равен сумме углов ABC и ACB (точки D и E расположены вне треугольника ABC). Докажите, что отрезок DE в два раза длиннее медианы AM треугольника ABC.

507. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Периметры треугольников ABC и ABD равны. Равны и периметры треугольников ACD и BCD. Докажите, что $AO = BO$.

508. В пятиугольной звезде $ABCDE$ угол A равен углу D, угол B равен углу C, отрезок AB равен CD. Докажите, что отрезки AE и DE равны.

509. Дан прямоугольный треугольник, один из углов которого равен 30°. Из середины его гипотенузы *восстановлен* перпендикуляр к ней. Докажите, что длина отрезка этого перпендикуляра, лежащего внутри треугольника, равна трети большего катета.

510. Найдите угол B треугольника ABC, если высота CH равна половине стороны AB, а угол A равен 75°.

511. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Известно, что $BL = AB$. На продолжении BL за точку L выбрана точка K так, что $\angle BAK + \angle BAL = 180°$. Докажите, что $BK = BC$.

512. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что $AB = CE$, $BE = AD$, $\angle AED = \angle BAD$. Докажите, что $BC > AD$.

513. В четырехугольнике $ABCD$ $AB=BC$, $CD=DA$. Точки K и L расположены на отрезках AB и BC таким образом, что $BK = 2AK$, $BL = 2CL$. Точки M и N — середины отрезков CD и DA соответственно. Докажите, что отрезки KM и LN равны.

514. Будут ли два четырехугольника равны, если у них все стороны соответственно равны?

515. Докажите равенство треугольников по стороне и высотам, опущенным на две другие стороны.

516. Докажите, что высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, вдвое меньше гипотенузы.

517. Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный (сумму углов треугольника использовать нельзя).

518. На каждой стороне правильного треугольника взято по точке. Стороны треугольника с вершинами в этих точках перпендикулярны сторонам исходного треугольника. В каком отношении каждая из взятых точек делит сторону исходного треугольника?

Занятия 99–110

Основная теорема арифметики: решение уравнений в целых числах

У некоторых учащихся встречается заблуждение, что решить уравнение в целых числах означает решить уравнение, а затем среди корней отобрать только целые. Но такой подход в принципе ошибочен, хотя в некоторых относительно простых задачах может помочь решить уравнение в целых числах.

Перечислим некоторые отличия. Во-первых, различаются основные теоремы. Ни у кого не вызовет сомнения, что основная теорема арифметики является основной теоремой в теме «решение уравнений в целых числах». Но если спросить, какая теорема является основной в теме «решение уравнений» (за исключением задач на применение метода мажорант, которые составляют относительно небольшую часть от всех задач), то у большинства опрошенных учеников возникнет только недоумение типа «А такая теорема вообще есть?». Конечно же, есть и всем знакома, но из-за частого применения многими уже воспринимается не как теорема, а как нечто само собой разумеющееся.

Теорема 27. *Если произведение нескольких множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю.*

Несмотря на кажущуюся очевидность, стоит задуматься. Более любопытному читателю предлагается подумать над вопросом «Почему произведение всякого числа на нуль всегда равно нулю?». И тогда уже все станет понятно.

Во-вторых, различие основных теорем ведет к различию целей в применяемых методах. Так если мы решаем уравнение, то одной из основных целей является получить путем эквивалентных преобразований уравнение вида: $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 0$, где x_k — действительные числа, не обязательно целые, $k = 1,2,...,n$. Если же мы решаем уравнение в целых числах, то здесь важным является уравнение вида: $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = A$, где x_k — обязательно целые, $k = 1,2,...,n$ и число A тоже является целым. То есть где-то выигрываем, где-то проигрываем.

Теорема 28. *Пусть даны целые числа a, b, c, отличные от* 0. *Уравнение $ax + by = c$ имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда число c кратно* НОД(a; b).

Замечание. Интересно отметить, что если уравнение $ax + by = c$ имеет хотя бы одно решение (x_0, y_0), то оно имеет бесконечно много решений, и все решения данного уравнения можно записать в виде $x = x_0 + b_1 \cdot t$, $y = y_0 - a_1 \cdot t$, $t \in \mathbb{Z}$, $a = a_1 \cdot$ НОД(a,b), $b = b_1 \cdot$ НОД(a,b). То есть зная одно решение уравнения $ax + by = c$, мы знаем все его решения.

519. (МГУ, 1998, мех-мат, устный) Сколько различных целочисленных пар (x, y) удовлетворяет уравнению $x^2 = 4y^2 + 2025$?

520. (МГУ, 2004, мех-мат, заочный тест) Сколько различных чисел $x \le y$ удовлетворяют уравнению $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2004}$?

521. (МГУ, 1999, ВМК, устный) Решить в натуральных числах уравнение $3^{x^2+y-1} - 3^{x^2+1} = 486$.

522. (МГУ, 1999, ВМК, устный) Решить в целых числах уравнение $9^x = 4y + 1$.

523. (МГУ, 1999, ВМК, устный) Решить в натуральных числах уравнение $2^x + 1 = y^2$.

524. (МГУ, 1995, ВМК) Найдите все целые числа n и m, для которых $2nm + n = 14$ и $mn \ge 9$.

Метод неопределенных коэффициентов

Применения метода неопределенных коэффициентов обширны. Дадим общее описание применения этого метода для решений уравнений в целых числах.

I. Разложение на множители многочленов второго порядка.

1) Для функций вида $F(x, y) = axy + bx + cy$ разложение следует искать в виде $(\alpha x + \beta)(\gamma y + \theta)$, где $\alpha\gamma = a, \alpha\theta = b, \beta\gamma = c$.

Пример 1 (МГУ, 2005, геолог., устный). Решите уравнение в целых числах: $xy = 2x + 2y$.

Решение. Далеко не всегда необходимо выписывать систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha\gamma = 1, \\ \alpha\theta = -2, \\ \beta\gamma = -2. \end{cases}$$

(Тем более нас интересуют только целые решения подобных систем, о которых в большинстве случаев легко догадаться и не записывая саму систему уравнений, главное помнить, в каком виде мы хотим получить разложение.)

Ясно, что $xy - 2x - 2y = (x - 2)(y - 2) - 4$. То есть исходное уравнение эквивалентно уравнению $(x - 2)(y - 2) = 4$, которое в свою очередь в силу основной теоремы арифметики (единственность разложения) эквивалентно совокупности систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2=1, \\ y-2=4, \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=-1, \\ y-2=-4, \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=2, \\ y-2=2, \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=-2, \\ y-2=-2, \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=4, \\ y-2=1, \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=-4, \\ y-2=-1, \end{cases} \end{array}\right.$$

решив которую, получим (3, 6), (1, –2), (4,4), (0,0), (6, 3), (–2, 1).

Ответ: (3, 6), (1, –2), (4,4), (0,0), (6, 3), (–2, 1).

Пример 2 (МФТИ, 2004, в.2). Найдите все пары целых чисел, при которых является верным равенство $-3xy - 10x + 13y + 35 = 0$.

Решение. Иногда встречаются функции, например,

$$F(x,y) = -3xy - 10x + 13y + 35,$$

которые нельзя представить в виде $(\alpha x + \beta)(\gamma y + \theta)$ так, чтобы $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ были целыми, но возможно представление в виде произведения, соответствующие коэффициенты которого были бы рациональны. В таких ситуациях целесообразно исходное уравнение умножить на некоторое целое число. Так, например, если умножить левую и правую части уравнения $-3xy - 10x + 13y + 35 = 0$ на (-3), то получим уравнение $9xy + 30x - 39y - 105 = 0$. И теперь уже не сложно догадаться, что

$$9xy + 30x - 39y - 105 = (3x - 13)(3y + 10) + 25.$$

Тогда исходное уравнение эквивалентно совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-13=1, \\ 3y+10=-25, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-13=-1, \\ 3y+10=25, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-13=5, \\ 3y+10=-5, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-13=-5, \\ 3y+10=5, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-13=25, \\ 3y+10=-1, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-13=-25, \\ 3y+10=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (4, 5), (6, –5), (–4,–3).

2) (I уровень) Для функций вида $F(x) = x^2 + bx + c$, где $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$, разложение следует искать в виде $(x + \beta)(x + \theta)$, где $\beta + \theta = b$, $\beta\theta = c$. То есть если число <u>**c>0**</u>, то необходимо число **c** представить в виде произведения двух целых чисел, <u>**сумма**</u> которых равна $|b|$. Если число <u>**c<0**</u>, то необходимо

число $|c|$ представить в виде произведения двух целых чисел, **разность** которых равна $|b|$.

Пример 3. Решите уравнение $x^2 + 8x + 15 = 0$.

Решение. Поскольку $15 = 15 \cdot 1 = 5 \cdot 3$ и $5 + 3 = 8$, то $x^2 + 8x + 15 = (x + 5) \cdot (x + 3)$. Значит, корнями уравнения $x^2 + 8x + 15 = 0$ являются числа -5 и -3.

Ответ: -5; -3.

Пример 4. Решите уравнение $x^2 - 14x - 15 = 0$.

Решение. Поскольку $15 = 15 \cdot 1 = 5 \cdot 3$ и $15 - 1 = 14$, $x^2 - 14x - 15 = (x - 15) \cdot (x + 1)$. Значит, корнями уравнения $x^2 - 14x - 15 = 0$ являются числа 15 и -1.

Ответ: -1; 15.

3) (II уровень) Для функций вида $F(x) = ax^2 + bx + c$, где $|c| = 1$, $b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$, и $a > 0$, разложение следует искать в виде $(\alpha x \pm 1)(\gamma x + 1)$, где $\alpha \pm \gamma = b$, $\alpha\gamma = a$. То есть если число **$c = 1 > 0$**, то необходимо число **c** представить в виде произведения двух целых чисел, **сумма** которых равна $|b|$. Если число **$c = -1 < 0$**, то необходимо число $|c|$ представить в виде произведения двух целых чисел, **разность** которых равна $|b|$.

Пример 5. Решите уравнение $15x^2 + 8x + 1 = 0$.

Решение. Поскольку $15 = 15 \cdot 1 = 5 \cdot 3$ и $5 + 3 = 8$, $15x^2 + 8x + 1 = (5x + 1) \cdot (3x + 1)$. Значит, корнями уравнения $15x^2 + 8x + 1 = 0$ являются числа $-1/5$ и $-1/3$.

Ответ: $-1/3$; $-1/5$.

Пример 6. Решите уравнение $15x^2 - 14x - 1 = 0$.

Решение. Поскольку $15 = 15 \cdot 1 = 5 \cdot 3$ и $15 - 1 = 14$, $15x^2 - 14x - 1 = (15x + 1) \cdot (x - 1)$. Значит, корнями уравнения $15x^2 - 14x - 1 = 0$ являются числа $-1/15$ и 1.

Ответ: $-1/15$; 1.

4) (III уровень) Для функций вида $F(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$ и $a > 0$, разложение следует искать в виде $(\alpha x + \beta)(\gamma x + \theta)$, где $\alpha\gamma = a$, $\beta\gamma + \alpha\theta = b, \beta\theta = c$.

II. Поиск частного или общего решения, если известно, что оно представимо в некотором виде.

III. Разложение на множители многочленов четвертой степени.

525. (МГУ, 2001, почвовед.) Решить уравнение в целых числах: $3x^2 + 5xy + 2y^2 = 7$.

526. (МГУ, 1969, фил.) Указать хотя бы одну пару целых положительных чисел k_1 и k_2 таких, что $36k_1 - 25k_2 = 1$.

527. (ИСАА, 1997) Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $3xy + 14x + 17y + 71 = 0$.

528. (МГУ, 2001, геолог., устный) Решите уравнение в целых числах: $xy = 2x + y$.

529. (МГУ, 2004, геолог., устный) Решите уравнение $xy = 2003(x + y)$ в целых числах.

530. (МФТИ, 2004, в.1) Найдите все пары целых чисел, при которых является верным равенство

$$3xy + 16x + 13y + 61 = 0.$$

531. (МФТИ, 2004, в.3) Найдите все пары целых чисел, при которых является верным равенство

$$3xy + 19x + 10y + 55 = 0.$$

532. (МФТИ, 2004, в.4) Найдите все пары целых чисел, при которых является верным равенство

$$-3xy + 10x - 16y + 45 = 0.$$

533. (МГУ, 1997, ВМК, устный) Найдите все пары (x, y) натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 - xy - 2x + 3y = 11.$$

534. (МГУ, 1975, психолог.) Найдите все целые положительные решения уравнения $2x^2 + 2xy - x + y = 112$.

535. (ВШБ, 2004) Найдите все пары целых неотрицательных чисел $(k; m)$, являющихся решением уравнения

$$2k^2 + 7k = 2mk + 3m + 36.$$

536. (МГУ, 2005, соц.) Группа школьников решила купить музыкальный центр, при этом каждый внес одинаковую сумму. Однако в последний момент двое из них отказались, и каждому школьнику из оставшихся пришлось добавить 100 рублей. Сколько школьников первоначально участвовало в покупке и какова цена музыкального центра, если известно, что она заключена в пределах от 17 000 до 19 500 рублей?

537. (МГУ, 1992, мех-мат.) Мастер делает за 1 час целое число деталей, большее 5, а ученик — на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика — на один час быстрее. Из какого количества деталей состоит заказ?

538. (МГУ, 2004, гос. управл.) На плоскости Oxy найдите наибольшее расстояние между точками с координатами (x, y) такими, что x и y являются целыми числами и удовлетворяют уравнению $4\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{15}{xy}$.

539. (МГУ, 2004, гос. управл.) Компания предложила 350 своим служащим выполнить сверхурочную работу, причем каждому мужчине предлагалось в виде вознаграждения 20 долларов, а каждой женщине — 16 долларов 30 центов. Все женщины согласились с этим предложением, а часть мужчин отказалось. Общая сумма выплаченного вознаграждения составила 5705 долларов. Какова сумма вознаграждения, выплаченного всем женщинам?

540. (МГУ, 2000, заочный тур, № 2). Решить уравнение

$$(x^2 + 3x - 2)^2 + 3(x^2 + 3x - 2) - 2 = x.$$

541. Укажите наиболее близкий к нулю корень уравнения

$$2x^2 - 3x - 14 = 0.$$

542. (МГУ, 1996, ВМК, устный) Найдите все пары чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$2x^2 + 13y^2 - 10xy - 2x + 4y + 1 = 0.$$

543. (МГУ, 1996, ВМК, устный) Найдите все пары чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$5x^2 + 5y^2 + 8xy - 12x - 6y + 9 = 0.$$

544. (МГУ, 2004, ВМК, устный) Найдите все пары чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$5x^2 + 5y^2 + 8xy - 2x + 2y + 2 = 0.$$

545. Решите уравнение $\frac{6x+12}{x^2+x-2} - x = 0.$

546. Решите уравнение $\frac{24}{x^2+2x-8} - \frac{15}{x^2+2x-3} = 2.$

547. Решите уравнение $\dfrac{1}{x(x+2)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{12}$.

548. Решите уравнение $\dfrac{7}{x}-2x^2+7x-\dfrac{2}{x^2}=9$.

549. Решите уравнение $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}+4=0$.

550. Решите уравнение $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{10}{9}$.

551. Решите уравнение $\dfrac{3x-4}{3}+\dfrac{(x+2)(x-1)}{4}=\dfrac{x(x+1)}{4}$.

552. Решите уравнение $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$.
553. Решите уравнение $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=35$.
554. Решите уравнение $(x^2+2x+3)(2x^4-4x^2+3)=2$.
555. Решите уравнение $x^4-x^3-10x^2+x+1=0$.
556. Решите уравнение $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$.
557. Решите уравнение $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$.
558. Решите уравнение $(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2$.
559. Решите уравнение
$$(x^2-x+1)^4-6x^2(x^2-x+1)^2+5x^4=0.$$
560. Решите уравнение $x^2(x-1)^2-8(x-1)^2+x^2=0$.
561. Решите уравнение
$$\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}.$$

562. Решите уравнение $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=10\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right)$.

В задачах 570–577 решите уравнения в целых числах.
563. $29x+59y=102$.
564. $2x+3y+5z=12$.
565. $4x+13y-23z=-72$.
566. $13x+35y-47z+23t=54$.
567. $11x-17y-37z-45t=234$.
568. $-25x+33y+47z-53t+29u=12$.
569. $17x-29y+23u-33t+39u-45k=51$.
570. $55x+89y=13$.

571. Изготовитель должен переслать заказчику 1000 одинаковых деталей. Известно, что их пересылка в ящике, вмещающем 70 деталей, стоит 50 рублей, в ящике, вмещающем 90 деталей, стоит 70 рублей, а в ящике, вмещающем 120 деталей, — 90 рублей. Найдите наименьшую возможную стоимость пересылки, если каждый используемый ящик должен быть загружен полностью.

572. Зоопарк собирается купить львов, леопардов и лисиц. Известно, что к одному льву в день приходит 50 посетителей, но для кормления одного льва в день необходимо 15 кг мяса. К одному леопарду в день приходят 20 посетителей, а необходимо мяса — 5 кг. И к одной лисице в день приходят 3 посетителя, а необходимо — 0,5 кг мяса. Бюджет зоопарка позволяет купить только 100 кг мяса. Определите, сколько необходимо купить львов, леопардов и лисиц, чтобы число посетителей было наибольшим.

Теорема о делении с остатком: решение уравнений в целых числах

Определение 1. Пусть a и m — целые числа ($m \geq 2$). *Классом вычетов* числа a по модулю m называется множество всех целых чисел, имеющих с числом a одинаковые остатки при делении на m.

Пример 1. Классом вычетов числа 2012 по модулю 5 является множество всех чисел вида $5k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Определение 2. *Полной системой вычетов* по некоторому модулю называется система чисел, взятых по одному из каждого класса по этому модулю.

Замечание. Хотя, согласно определению, например, система чисел 100, 21, 32, 38, 49 является полной системой вычетов по модулю 5, на практике обычно в представителей классов вычетов берут неотрицательные числа, меньшие рассматриваемого модуля. То есть в качестве полной системы вычетов по модулю 5 берут 0, 1, 2, 3, 4.

Теорема 29. *Пусть даны целые взаимно простые числа a и m, отличные от нуля. И пусть дано некоторое целое число b. Тогда если $\{x_1, x_2,..., x_m\}$ — полная система вычетов по модулю m, то и $\{ax_1 + b, ax_2 + b,..., ax_m + b\}$ также является полной системой вычетов по модулю m.*

Определение 3. *Приведенной системой вычетов* по некоторому модулю называется система чисел, взятых по одному из каждого класса по этому модулю, взаимно простых с ним.

Пример 2. Система чисел 1, 5, 7, 11 является приведенной системой вычетов по модулю 12.

Теорема 30. *Пусть даны целые взаимно простые числа a и m, отличные от нуля. Тогда если $\{x_1, x_2,..., x_m\}$ — приведенная система вычетов по модулю m, то и $\{ax_1, ax_2, ..., ax_m\}$ также является приведенной системой вычетов по модулю m.*

Пример 3. Решите уравнение $19x + 7y = 15$ в целых числах.

○ *Решение.* Все целые числа разобьем на группы по остаткам при делении на 7, поскольку 7 — наименьший из коэффициентов уравнения. Число 19 при делении на 7 имеет остаток 5, число 15 — остаток 1. Поэтому будем 5 прибавлять к 5 до тех пор, пока не получим число, имеющие остаток 1:

$$5,\ 10 = 7 + 3,\ 15 = 2 \cdot 7 + 1.$$

Тогда если положить $x_0 = 3$, то, решив уравнение $19 \cdot 3 + 7y_0 = 15$, найдем $y_0 = -6$. Следовательно, $19x_0 + 7y_0 = 15$. Пусть целые числа x, y удовлетворяют равенству $19x + 7y = 15$. Отсюда $19x_0 + 7y_0 = 19x + 7y$ или $19(x - 3) = 7(-6 - y)$. Поскольку наибольший общий делитель чисел 19 и 7 равен 1, $x - x_0$ кратно 7, т.е. $x = 3 + 7t$, где $t \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $y = -6 - 19t$.

Ответ: $x = 3 + 7t$, $y = -6 - 19t$, $t \in \mathbb{Z}$. ●

Пример 4. Решите уравнение $2012x + 1999y = 29$ в целых числах.

○ *Решение.* Число 2012 при делении на 1999 имеет остаток 13. Поскольку $13 \cdot 77 \cdot 2 + 13 \cdot 2 = 2002 + 26 = 1999 + 29$, $x_0 = 156$, $y_0 = -157$. Тогда решением исходного уравнения будет $x = 156 - 1999t$, $y = -157 + 2012t$, $t \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = 156 - 1999t$, $y = -157 + 2012t$, $t \in \mathbb{Z}$. ●

В задачах 580–589 решите уравнения в целых числах.

573. $15x + 29y = 10$.
574. $13x - 17y = 123$.
575. $-7x + 11y = 14$.
576. $3x + 5y = -73$.
577. $4x + 8y = 100$.
578. $13x - 91y = 117$.
579. $-3x + 92y = -152$.
580. $6x + 13y = 3$.
581. $2x + 19y = -145$.
582. $-5x - 23y = 523$.

Пример 5. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = 2013$ не имеет решений в целых числах.

○ *Решение.* Найдем, какие остатки при делении на 5 имеют квадраты целых чисел.

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1

Тогда сумма двух квадратов целых чисел при делении на 5 может иметь только остатки 0, 1, 2, 4. Однако 2013 при делении на 5 имеет остаток 3, т.е. 2013 не представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел. ●

Пример 6. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = 2010$ не имеет решений в целых числах.

○ *Решение.* Пусть x и y – целые числа такие, что $x^2 + y^2 = 2010$. Поскольку квадрат всякого целого числа либо кратен 3, либо при делении на 3 имеет остаток 1, то из того, что 2010 кратно 3, следует, что x и y кратны 3. Отсюда сумма $x^2 + y^2$ кратна 9, однако 2010 не кратно 9. Следовательно, 2010 непредставимо в виде суммы квадратов двух целых чисел. ●

В задачах 590–610 докажите, что указанные уравнения не имеют решений в целых числах.

583. $x^2 + 3y = 23$.

584. $3x^2 + 1 = 5y$.

585. $x^2 - 8x + 12y = 51$.

586. $y^2 + 4y - 11 = 12x$.

587. $y^2 + 9 = 7x$.

588. $x^2 + 4y^2 = 2010$.

589. $12x + 5 = y^2$.

590. $-x^2 + 7y^3 + 6 = 0$.

591. $x^2 + y^2 + z^2 = 1999$.

592. $15x^2 - 7y^2 = 9$.

593. $x^2 - 5y + 3 = 0$.

594. $x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{14}^4 = 1999$.

595. $8x^3 - 13y^3 = 17$.

596. $3x^2 = 16y^2 + 8y + 5$.

597. $x^2 - 1 = 2(4y^2 - 1)$.

598. $2x^2 - 5y^2 = 7$.

599. $y^2 = 3x^2 + 8$.

600. $6x^2 + 3x + 1 = 2y^2$.

601. $2x^2 - 4x - 5y^2 - 10y - 10 = 0$.

602. $5y^2 = x^2 + 7x + 9$.

603. $y^3 = x^2 + x$.

604. (МЖО, 2005, 2-й день, старшеклассники) Докажите, что уравнение $x^5 + 31 = y^2$ не имеет решения в целых числах.

605. (МЖО, 2009, 1-й день) Найдите все пары целых чисел (x, y) таких, что $x^2 - 2009y + 2y^2 = 0$.

606. (МЖО, 2008, 2-й день) Для всякого натурального n обозначим через $S(n)$ сумму цифр в десятичной записи числа n. Найдите все натуральные n такие, что $n = 2S(n)^3 + 8$.

607. Решите уравнение $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$ в целых числах.

608. Решите уравнение $x^3 = 3y^3 + 9z^3$ в целых неотрицательных числах.

609. Имеет ли уравнение $x^4 = 2y^4 + 4z^4 + 8t^4$ решение в натуральных числах x, y, z и t?

610. Имеет ли уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ решение в целых неотрицательных числах?

Занятия 111–116

Признаки и свойства параллельности прямых. Сумма углов треугольника

Теорема 31 (признаки параллельности прямых). *Пусть для двух данных прямых выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) *накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух прямых третьей (секущей), равны;*
2) *соответственные углы, образованные при пересечении двух прямых третьей (секущей), равны;*
3) *сумма внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух прямых третьей (секущей), равна* 180°;
4) *сумма внешних односторонних углов, образованных при пересечении двух прямых третьей (секущей), равна* 180°.

Тогда эти прямые параллельны.

Теорема 32 (свойство параллельности прямых). *Если две прямые параллельны, то*

1) *накрест лежащие углы, образованные при пересечении этих прямых третьей (секущей), равны;*
2) *соответственные углы, образованные при пересечении этих прямых третьей (секущей), равны;*
3) *сумма внутренних односторонних углов, образованных при пересечении этих прямых третьей (секущей), равна* 180°;
4) *сумма внешних односторонних углов, образованных при пересечении этих прямых третьей (секущей), равна* 180°.

Теорема 33 (о сумме углов треугольника). *Сумма углов в любом треугольнике равна* 180°.

611. При пересечении двух параллельных прямых секущей образовалось восемь углов. Сумма семи из них равна 700°. Чему равны эти углы?

612. Две параллельные прямые пересечены третьей. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов.

613. Докажите, что если в треугольнике один угол равен 120°, то треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.

614. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, $AB = BC$. Лучи BA и CD пересекаются в точке E, а лучи AD и BC — в точке F. Известно, что $BE = BF$ и $\angle DEF = 25°$. Найдите угол $\angle EFD$.

615. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, вдвое меньше другой биссектрисы. Найдите углы треугольника.

616. В треугольнике ABC угол B равен 20°, угол C равен 40°. Биссектриса AD равна 2. Найдите разность сторон BC и AB.

617. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, $\angle CBD = \angle CAB$, $\angle ACD = \angle BDA$. Докажите, что $\angle ABC = \angle ADC$.

618. Сколько сторон имеет многоугольник, если известно, что все его углы острые?

Теорема 34. *Пусть дан треугольник ABC и AM — его медиана.*

1) *Если AM равна половине BC, то* $\angle BAC = 90°$.
2) *Если AM больше половины BC, то* $\angle BAC < 90°$.
3) *Если AM меньше половины BC, то* $\angle BAC > 90°$.

619. Докажите, что у выпуклого многоугольника не может быть более трех острых углов.

620. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

621. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах AC и AB отметили такие точки K и L соответственно, что прямая KL параллельна BC и при этом $KL = KC$. На стороне BC выбрана точка M так, что $\angle KMB = \angle BAC$. Докажите, что $KM = AL$.

622. На сторонах AB и BC треугольника ABC с углом $\angle C = 40°$ выбраны точки D и E такие, что $\angle BED = 20°$. Докажите, что $AC + EC > AD$.

623. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Серединные перпендикуляры к диагоналям BD и AC пересекают сторону AD в точках X и Y, причем X лежит между A и Y. Оказалось, что прямые BX и CY параллельны. Докажите, что прямые BD и AC перпендикулярны.

624. В треугольнике ABC угол A в 2 раза больше угла B, AL — биссектриса угла A (точка L лежит на стороне BC). На луче AL отложен отрезок AK, равный CL. Докажите, что $AK = CK$.

625. Дан равносторонний треугольник ABC. На сторонах AB, AC и BC выбраны точки X, Y и Z соответственно так, что $BZ = 2AY$ и $\angle XYZ = 90°$. Докажите, что $AX + CZ = XZ$.

626. AL — биссектриса угла A треугольника ABC (точка L лежит на стороне BC). Оказалось, что $AL = LB$. На луче AL отложен отрезок AK, равный CL. Докажите, что $AK = CK$.

627. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит противолежащую сторону так, что отрезок, прилежащий к вершине треугольника, равен его основанию. Докажите, что эта биссектриса также равна основанию треугольника.

628. Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AB в точке D, а продолжение за точку A стороны AC — в точке E. Докажите, что $AD < AE$.

629. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и BD пересекают диагональ AC в точках K и M соответственно. Докажите, что если $AE = EK = KB$ и $AK = MC$, то $EM = BC$.

630. Прямая пересекает боковую сторону AC, основание BC и продолжение боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC за точку B в точках K, L и M

соответственно. При этом треугольники CKL и BML получаются также равнобедренными. Найдите их углы.

631. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ треугольники ABC, ABF, FEA, FED, CDB, CDE равны. Докажите, что равны диагонали AD, BE, CF.

632. Высоты остроугольного треугольника ABC, проведенные из вершин A и B, пересекаются в точке H, причем $\angle AHB = 120°$, а биссектрисы, проведенные из вершин B и C, — в точке K, причем $\angle BKC = 130°$. Найдите угол ABC.

633. В четырехугольнике $ABCD$ стороны $BC = AD$, M — середина AD, N — середина BC. Серединные перпендикуляры к AB и CD пересекаются в точке P. Докажите, что P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MN.

634. AF — медиана треугольника ABC. Точка D — середина отрезка AF, E — точка пересечения прямой CD со стороной AB. Оказалось, что $BD = BF = CF$. Докажите, что $AE = DE$.

635. Стороны треугольника ABC продолжены за вершины треугольника так, что $BC_1 = AC$, $AB_1 = AB$, $CA_1 = AB$. Известно, что треугольник $A_1B_1C_1$ — равносторонний. Докажите, что исходный треугольник ABC — равносторонний.

636. Пусть BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC с углом A, равным 30°; B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Докажите, что отрезки B_1C_2 и B_2C_1 перпендикулярны.

637. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°. Докажите, что высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла, делят прямой угол на три равные части.

638. Точка D — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. Точка E — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону BC. Отрезки AE и BD пересекаются в точке F. Установите, какой из отрезков BF и BE длиннее.

Занятия 117–122

Переливания

Теорема 35 (о переливании). *Пусть даны n сосудов объемами* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *где* $a_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. *И пусть* $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ *— целые числа, являющиеся решением уравнения*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{1}$$

где b — целое число такое, что $0 \le b \le a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. *Тогда для того чтобы в указанных сосудах вместе оказалось ровно b литров, достаточно выполнить следующие действия.*

1. *В те сосуды, для которых* $x_k^{(0)} > 0$, *наливать* $x_k^{(0)}$ *раз дополна жидкость, но только в том случае, если они пусты.*
2. *Из сосудов, для которых* $x_k^{(0)} < 0$, *выливать* $\left|x_k^{(0)}\right|$ *раз полностью, но только в том случае, если они наполнены.*
3. *Сосуды, для которых* $x_k^{(0)} = 0$, *не использовать.*
4. *Порядок использования сосудов не важен.*

Замечание 1. В принципе, в данной теореме не важно, чтобы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ были натуральными числами, естественно, они должны быть неотрицательными, однако $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ обязательно должны быть целыми. То есть, в принципе, данная теорема применима и в случаях, когда имеются сосуды, объемы которых не обязательно выражаются целым числом литров.

Замечание 2. Есть утверждение, которое пока не является ни доказанным, ни опровергнутым: наименьшее число переливаний будет при наименьшем из возможных $\left|x_1^{(0)}\right| + \left|x_2^{(0)}\right| + \ldots + \left|x_n^{(0)}\right|$, где $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ — целые решения уравнения (1).

Замечание 3. Теорема 35 применима также в задачах, где с помощью имеющихся сосудов требуется отделить из резервуара (ограниченного) жидкость заданного объема.

639. Как, имея два сосуда вместимостью 5л и 7л, налить из водопроводного крана 6л?

640. Разместите на трех грузовиках 7 полных бочек, 7 бочек, наполненных наполовину, и 7 пустых бочек так, чтобы на всех грузовиках был одинаковый по массе груз.

641. Как с помощью семилитрового ведра и трехлитровой банки налить в кастрюлю ровно 5 литров воды?

642. Как, пользуясь сосудами в 7 л и 12 л, получить 1 л воды?

643. (Задача Пуассона) Некто имеет 12 пинт вина (пинта — старинная мера жидкости, равная примерно 0,568 л) и хочет подарить его половину. Однако у него нет сосуда емкостью 6 пинт, а есть два сосуда: 8-пинтовый и 5-пинтовый. Спрашивается, каким образом отлить 6 пинт вина в 8-пинтовый сосуд?

644. Можно ли, пользуясь девятилитровым и двенадцатилитровым сосудами, отмерить 4 л воды?

645. В первый сосуд входит 9 л, во второй — 5 л, а в третий — 3 л. Первый сосуд наполнен водой, а остальные два пусты. Как с помощью этих сосудов отмерить 1 л воды? А как отмерить 4 л воды?

646. В бочке находится не менее 13 ведер бензина. Как отлить из нее 8 ведер в помощью 9-ведерной и 5-ведерной бочек?

647. В бочке 18 л бензина. Имеются два ведра по 7 л, в которые нужно налить по 6 л бензина, и черпак объемом 4 л. Как можно осуществить розлив?

648. Имеются три бочонка вместимостью 6 ведер, 3 ведра и 7 ведер. В первом и третьем содержится соответственно 4 и 6 ведер кваса. Требуется, пользуясь только этими тремя бочонками, разделить квас поровну на две части.

649. В трех кучках 11, 7, 6 спичек соответственно. Разрешается перекладывать из одной кучки в другую столько спичек, сколько там уже есть. Как за три операции сравнять число спичек во всех кучках?

650. От полного стакана кофе я отпил половину и долил столько же молока. Затем я отпил третью часть получившегося кофе с молоком и долил столько же молока. Наконец, я отпил шестую часть получившегося кофе с молоком и долил столько же молока. Только после этого я выпил все до конца. Чего в итоге я больше выпил: молока или кофе?

651. В кастрюлю налито 10 л сиропа. Из нее отливают 1 л сиропа и добавляют 1 л воды. Затем отливают 1 л смеси и снова доливают 1 л воды. Может ли сироп в результате нескольких таких операций оказаться разбавленным ровно в два раза?

652. (Московская математическая олимпиада, 1959) Даны две бочки бесконечной емкости. Можно ли, пользуясь ковшами емкости $(2-\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2})$ л, перелить из одной в другую ровно 1 л?

653. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1986) Молоко разлито по 30 стаканам. Мальчик пытается добиться, чтобы во всех стаканах стало поровну. Для этого он берет какие-нибудь два стакана и отливает молоко из одного в другой до тех пор, пока количество молока в них не уравняется. Можно ли разлить молоко по стаканам так, чтобы мальчик не смог добиться своей цели, сколь бы долго он ни занимался переливанием?

654. (МГУ, 1999, почвовед.) Какое количество воды надо добавить в один литр 10%-го раствора спирта, чтобы получить 6%-ый раствор?

655. (МГУ, 2000, фил.) Имеется 40 литров 0,5%-го раствора и 50 литров 2%-го раствора уксусной кислоты. Сколько нужно взять первого и сколько второго раствора, чтобы получить 30 литров 1,5%-го раствора уксусной кислоты?

656. (МГУ, 1979, эконом.) Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 литра глицерина, а к оставшемуся глицерину долили 2 литра воды. После перемешивания снова отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. Наконец опять перемешали, отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 литра больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

Занятия 123–126

Математическая абака № 3

Призы: каждая из команд получает блоки в количестве $\left[\frac{N}{160}\right]$, где N — количество очков, которые заработала команда.

Задачи

	Принцип Дирихле	Геометрия (признаки равенства треугольников)	Геометрия (параллельные прямые)
10	Несколько ящиков вместе весят 10 тонн, причем каждый из них весит не более одной тонны. Сколько трехтонок заведомо достаточно, чтобы увезти этот груз?	Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD, если отрезок $AC = 10$?	Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = BC$). Отрезок AM делит его на два равнобедренных треугольника с основаниями AB и MC. Найдите угол B.
20	Какое наименьшее количество клеток нужно отметить на шахматной доске, чтобы 1) среди отмеченных клеток не было соседних (имеющих общую сторону или общую вершину), 2) добавление к этим клеткам любой одной клетки нарушало пункт 1?	В треугольнике ABC угол A равен $120°$, точка D лежит на биссектрисе угла A и $AD = AB + AC$. Найдите угол DBC.	Наибольший угол остроугольного треугольника в пять раз больше наименьшего. Найдите углы этого треугольника, если известно, что все они выражаются целым числом градусов.

	Принцип Дирихле	Геометрия (признаки равенства треугольников)	Геометрия (параллельные прямые)
30	Даны 1985 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причем объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех этих 1985 множеств?	В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ углы при вершинах B и D — прямые, $\angle BCA = \angle DCE$, а точка M — середина стороны AE. Найдите отношение MB/MD.	В равнобедренном треугольнике с основанием AC проведена биссектриса угла C, которая пересекает боковую сторону AB в точке D. Точка E лежит на основании AC так, что $DE \perp DC$. Найдите AD, если $CE = 2$.
40	В коридоре длиной 100 метров постелено 20 ковровых дорожек общей длины 1000 метров. Каково может быть наибольшее число незастеленных кусков (ширина дорожки равна ширине коридора)?	В треугольнике ABC на сторонах AC и BC взяты точки X и Y такие, что $\angle ABX = \angle YAC$, $\angle AYB = \angle BXC$, $XC = YB$. Найдите углы треугольника ABC.	В треугольнике ABC угол C – прямой. На стороне AC нашлась точка D, а на отрезке BD – точка K такие, что $\angle ABC = \angle KAD = \angle AKD$. Найдите BK/DC.
50	На прямоугольном листе клетчатой бумаги размером $m \times n$ клеток расположено несколько квадратов, стороны которых идут по вертикальным и горизонтальным линиям бумаги. Известно, что никакие два квадрата не совпадают и никакой квадрат не содержит внутри себя другой квадрат. Каково наибольшее число таких квадратов?	Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ — равнобедренные прямоугольные (стороны AB и A_1B_1 — гипотенузы). Известно, что C_1 лежит на BC, B_1 лежит на AB, а A_1 лежит на AC. Найдите отношение CC_1/AA_1.	В треугольнике ABC длина медианы BM равна длине стороны AC. На продолжениях сторон BA и AC выбраны точки D и E соответственно так, что выполняются равенства $AD = AB$ и $CE = CM$. Найдите угол между прямыми DM и BE.

	Принцип Дирихле	Геометрия (признаки равенства треугольников)	Геометрия (параллельные прямые)
60	На окружности радиуса 1 отмечена точка O и из нее циркулем делается засечка вправо радиусом 1. Из полученной точки O_1 в ту же сторону тем же радиусом делается вторая засечка, и так делается 1968 раз. После этого окружность разрезается во всех 1968 засечках, и получается 1968 дуг. Сколько различных длин дуг может при этом получиться?	Дана окружность с диаметром AB. Другая окружность с центром в A пересекает отрезок AB в точке C, причем $AC < (1/2)AB$. Общая касательная двух окружностей касается первой окружности в точке D. Найдите угол между прямыми CD и AB.	В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C равны. Биссектриса угла B пересекает прямую AD в точке P. Перпендикуляр к BP, проходящий через точку A, пересекает прямую BC в точке Q. Являются ли прямые PQ и CD параллельными?
Ответ считается правильным, если приведены все правильные варианты и нет ни одного неверного!			

	Текстовые задачи и логика	Алгебра	Числа
10	Из утверждений «число a делится на 2», «число a делится на 4», «число a делится на 12» и «число a делится на 24» три верных, а одно неверное. Какое?	$a_1, a_2, \ldots, a_n$ — такие числа, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$. Является ли сумма $S = a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n$ положительной?	Сравнив дроби 111110/111111, 222221/222223, 333331/333334, расположите их в порядке возрастания.

	Текстовые задачи и логика	Алгебра	Числа
20	Один из пяти братьев испек маме пирог. Андрей сказал: «Это Витя или Толя». Витя сказал: «Это сделал не я и не Юра». Толя сказал: «Вы оба шутите». Дима сказал: «Нет, один из них сказал правду, а другой — нет». Юра сказал: «Нет, Дима, ты не прав». Мама знает, что трое из ее сыновей всегда говорят правду. Кто испек пирог?	Вычислить $\frac{1987}{198719871987^2 - 198719871986 \cdot 198719871988}$	Произведение пяти чисел не равно нулю. Каждое из этих чисел уменьшили на единицу, при этом их произведение не изменилось. Приведите пример таких чисел.
30	На доске было написано несколько натуральных чисел, причем разность любых двух соседних чисел равна одному и тому же числу. Коля заменил в этой записи разные цифры разными буквами, а одинаковые цифры — одинаковыми буквами. Восстановите исходные числа, если на доске написано **Т, ЕЛ, ЕК, ЛА, СС**.	Найти все значения x и y, удовлетворяющие равенству $xy + 1 = x + y.$	Может ли квадрат какого-либо натурального числа начинаться с 1983 девяток? Если да, то приведите хотя бы один пример.
40	Путешественник посетил селение, в котором каждый человек либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Жители селения стали в круг, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив тот или лжив. На основании этих сообщений путешественник однозначно определил,	В олимпиаде участвовали 2006 школьников. Оказалось, что школьник Вася из всех шести задач решил только одну, а число участников, решивших хотя бы 1 задачу, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 2;	Сколько цифр имеет число 2^{100}?

	Текстовые задачи и логика	Алгебра	Числа
	какую долю от всех жителей селения составляют правдивые. Определите и вы, чему она равна.	решивших хотя бы 2 задачи в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 3; решивших хотя бы 3 задачи в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 4; решивших хотя бы 4 задачи в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 5; решивших хотя бы 5 задач в 4 раза больше, чем решивших все 6. Сколько школьников не решили ни одной задачи?	Сколько цифр имеет число 2^{100}?
50	На центральном телеграфе стоят разменные автоматы, которые меняют 20 коп. на 15, 2, 2 и 1; 15 коп. на 10, 2, 2 и 1; 10 коп. на 3, 3, 2 и 2. Петя разменял 1 руб. 25 коп. серебром на медь. Вася, посмотрев на результат, сказал: «Я точно знаю, какие у тебя были монеты» и назвал их. Назовите и вы.	Задано правило, которое каждой паре чисел x, y ставит в соответствие некоторое число $x * y$, причем для любых x, y, z выполняются тождества: 1) $x * x = 0$, 2) $x * (y * z) = (x * y) + z$. Найдите 1993 * 1932.	Найти две обыкновенные дроби — одну со знаменателем 8, другую со знаменателем 13 такие, чтобы они не были равны, но разность между большей и меньшей из них была как можно меньше.

	Текстовые задачи и логика	Алгебра	Числа
60	В выборах в 100-местный парламент участвовали 12 партий. В парламент проходят партии, за которые проголосовало строго больше 5% избирателей. Между прошедшими в парламент партиями места распределяются пропорционально числу набранных ими голосов (т. е. если одна из партий набрала в x раз больше голосов, чем другая, то и мест в парламенте она получит в x раз больше). После выборов оказалось, что каждый избиратель проголосовал ровно за одну из партий (недействительных бюллетеней, голосов «против всех» и т. п. не было) и каждая партия получила целое число мест. При этом Партия любителей математики набрала 25% голосов. Какое наибольшее число мест в парламенте она могла получить? (Ответ объясните.)	Петя хочет изготовить необычную игральную кость — как обычно, она должна иметь форму куба, на гранях которого нарисованы точки (на разных гранях разное число точек), но при этом на любых двух соседних гранях число точек должно различаться по крайней мере на два (при этом разрешается, чтобы на некоторых гранях оказалось больше шести точек). Сколько всего точек необходимо для этого нарисовать? (Укажите минимальное количество.)	Мудрецу С. сообщили сумму трех натуральных чисел, а мудрецу П. — их произведение. — Если бы я знал, — сказал С., — что твое число больше, чем мое, я бы сразу назвал три искомых числа. — Мое число меньше, чем твое,— ответил П., — а искомые числа ..., ... и ... . Какие числа назвал П.?
Ответ считается правильным, если приведены все правильные варианты и нет ни одного неверного!			

ОТВЕТЫ

	Принцип Дирихле	Геометрия (признаки равенства)	Геометрия (параллельные прямые)	Текстовые задачи и логика	Алгебра	Числа
10	Не меньше пяти	10	36°	Четвертое утверждение	Нет	111110/111111, 333331/333334, 222221/222223.
20	9 клеток	60°	17°, 78°, 85°	Толя	1987	5, 6, 7, 8, –1
30	$44 \cdot 1985 + 1$	1	1	5, 12, 19, 26, 33	одно из чисел равно 1, а другое произвольно	Может. Одним из таких чисел является N= 99...900...025 (1983 девятки и 1983 нуля)
40	11 кусков	треугольник равносторонний, все углы по 60°	$\frac{1}{2}$	1/2	982 школьника	31 цифру
50	mn	2	90°	15 коп. – 1 монета, 10 коп. – 11 монет	61	3/8 и 5/13 или 5/8 и 8/13
60	не более трех	90°	Да	50	27	1, 1 и 4

Коллоквиум №3

Список вопросов

1. Признаки равенства треугольников: формулировки. Доказательство признаков равенства прямоугольных треугольников.
2. Теорема о сумме острых углов прямоугольного треугольника. Свойство медианы прямоугольного треугольника.
3. Признаки равнобедренного треугольника.
4. Применение признаков равенства треугольников: доказательство теоремы о сравнении внешнего угла и внутреннего угла треугольника, не смежного с ним.
5. Теорема о сравнении углов треугольника через длины противолежащих сторон треугольника.
6. Дополнительные построения на основе признаков равенства треугольников. Метод удвоения медианы.
7. Следствия теоремы о сравнении внешнего угла и внутреннего угла треугольника, не смежного с ним: теоремы о количестве прямых и тупых углов в треугольнике.
8. Признаки и свойства параллельности прямых. Сумма углов треугольника.
9. Определение типа угла треугольника (острый, прямой, тупой) через сравнение медианы и половины длины противолежащей стороны.
10. Уравнение первой степени с двумя неизвестными: частное решение, общий вид решения. Теорема о существовании решений.
11. Постановка задачи: отличие тем «решение уравнений» и «решение уравнений в целых числах». Уравнение второй степени с двумя неизвестными: метод неопределенных коэффициентов (I–IV уровни).
12. Теорема о делении с остатком: решение уравнений в целых числах. Полная и приведенная системы вычетов по модулю m.
13. Задача Пуассона. Переливания и уравнения в целых числах первой степени.

Часть 4

Занятия 127–134
Взвешивания

Теорема 36. *Для того чтобы определить сильнейшего участника из n команд по кубковой схеме, необходимо провести $n - 1$ матчей. Причем это количество матчей является наименьшим из возможных для определения сильнейшего участника из n команд.*

Теорема 37. *Для того чтобы определить двух сильнейших участников из n команд по кубковой схеме, необходимо провести $n - 1 + k$ матчей, где*

$$2^k \le n-1 < 2^{k+1}.$$

Причем это количество матчей является наименьшим из возможных для определения двух сильнейших участников из n команд.

Теорема 38. *Для того чтобы упорядочить n предметов, необходимо не меньше чем $1 + kn - 2^k$ взвешиваний, где*

$$2^{k-1} < n \le 2^k.$$

Теорема 39. *Пусть имеется k монет, удовлетворяющих неравенству*

$$3^{n-1} < k \le 3^n,\ n \in \mathbb{N},$$

и среди них имеется одна фальшивая, о которой известно, легче она или тяжелее, чем настоящие. Тогда наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь, необходимых для нахождения фальшивой монеты, равно n.

Теорема 40. *Пусть имеется k монет, удовлетворяющих неравенству*

$$\frac{3^{n-1}-3}{2} < k < \frac{3^n-3}{2},\ n \in \mathbb{N},$$

и среди них имеется одна фальшивая, о которой известно только, что она отличается от остальных. Тогда наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь, с помощью которых можно найти фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее, чем настоящие, равно n.

Ранее (см. задачу о взятке) было показано, что в двоичной записи натуральные числа занимают наименьшее место. Однако если поставить вопрос, какие гири необходимо взять, чтобы их количество было наименьшим возможным и с их помощью можно было измерить груз, масса которого является натуральным числом, не превосходящим n, то, оказывается, наиболее выгодно брать гири, масса которых является степенью тройки. Преимущество троичной системы в этих задачах объясняется тем, что гири можно положить как на левую, так и на правую чашу весов, и всякое натуральное целое число представимо в виде суммы степеней троек с коэффициентами 0, 1 и –1.

Приведем алгоритм представления натуральных чисел в указанном виде. Согласно теореме о системе счисления, всякое натуральное число можно представить в виде суммы степеней 3 с коэффициентами 0, 1, 2. Двигаясь справа налево, заменяем 2 на –1, увеличивая предыдущий разряд на 1, до тех пор, пока все коэффициенты не будут равны 0, 1 или –1. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Запишите число

$$A = 12021212_3 = 3^7 + 2 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^4 + 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 3^1 + 2$$

в виде суммы степеней троек с коэффициентами 0, 1 и –1.

○ *Решение.* Выполним преобразования:

$$A = 12021212_3 = 1202122(-1)_3 = 120220(-1)(-1)_3 =$$
$$= 1210(-1)0(-1)(-1)_3 = 2(-1)10(-1)0(-1)(-1)_3 =$$
$$= 1(-1)(-1)10(-1)0(-1)(-1)_3 = 3^8 - 3^7 - 3^6 + 3^5 - 3^3 - 3 - 1.$$

Пример 2. Пусть имеются гири массой 1, 3, 9, 27, 81 грамм. Отмерьте на чашечных весах 100 грамм песка.

○ *Решение.* Запишем 100 в виде степеней троек:

$$100 = 3^4 + 2 \cdot 3^2 + 1. \text{ Тогда}$$

$$100 = 3^4 + 3^3 - 3^2 + 1.$$

Положим на левую чашу весов гири массой 81, 27, 1 грамм, а на правую чашу весов — 9 грамм и далее будем сыпать песок на правую чашу до тех пор, пока весы не окажутся в равновесии. Таким образом, на правой чаше весов мы получим сахарный песок массой 100 грамм.

657. Из девяти монет одна фальшивая, она легче остальных. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить, какая монета фальшивая?

658. Среди 79 монет имеется 1 фальшивая (более легкая) монета. Как ее найти, используя не более 4 взвешиваний?

659. В ящике 24 кг гвоздей. Как на чашечных весах без гирь и без стрелки отмерить 9 кг?

660. Как от куска материи длиной 2/3 метра отрезать полметра, не имея под руками метра?

661. Три одинаковых арбуза надо разделить между четырьмя детьми. Как это сделать, выполнив наименьшее число разрезаний?

662. Есть n одинаковых монет, из которых одна — фальшивая (более легкая). Как с помощью чашечных весов без гирь выделить фальшивую монету за наименьшее число взвешиваний, если а) $n = 13$, б) $n = 2007$, в) n — произвольное натуральное число?

663. Среди четырех монет имеется одна фальшивая, отличающаяся от всех остальных по весу. Как выделить ее с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь? Можно ли при этом выяснить, легче ли она, чем остальные монеты?

664. Среди 12 монет имеется одна фальшивая, отличная по весу от настоящих, причем неизвестно, легче она или тяжелее. Выделить тремя взвешиваниями на чашечных весах без гирь фальшивую монету и выяснить, легче она или тяжелее настоящей. Пусть теперь дано n монет. При тех же условиях найдите наименьшее число взвешиваний, необходимое для определения фальшивой монеты.

665. Дано 13 монет, среди которых одна фальшивая, причем неизвестно, легче она или тяжелее. Докажите, что трех взвешиваний недостаточно для того, чтобы выделить фальшивую. Однако если дополнительно дана одна монета, про которую известно, что она настоящая, то трех взвешиваний уже будет достаточно для того, чтобы выделить фальшивую.

666. Среди 7 монет имеются 2 фальшивые (более легкие) монеты. Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь понадобится, чтобы выделить обе фальшивые монеты?

667. Имеется 6 одинаковых по виду монет, четыре из них настоящие, а две — фальшивые; обе легче настоящих, но их масса различна. За три взвешивания на чашечных весах без гирь найдите обе фальшивые монеты.

668. Имеется 6 одинаковых по виду монет, четыре из них настоящие, по 4 г каждая, а две — фальшивые: массой 5 г и 3 г. За четыре взвешивания на чашечных весах без гирь найдите обе фальшивые монеты.

669. Есть 6 монет, из которых три фальшивые, имеющие вес меньший, чем настоящие. Монеты разложены в три столбика одинакового веса. Двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь выделить все три фальшивые монеты.

670. Перед вами лежат шесть монет, две из которых фальшивые (фальшивая монета тяжелее настоящей на 0,1 г). Кроме того, у вас есть чашечные весы без гирь. Весы эти, правда, не очень чувствительные и реагируют на разность грузов не менее 0,2 г. Попробуйте за четыре взвешивания найти обе фальшивые монеты.

671. а) Среди 18 монет одна фальшивая, причем фальшивая монета отличается по массе от настоящих. За какое наименьшее число взвешиваний на правильных чашечных весах без гирь можно определить, легче или тяжелее настоящей фальшивая монета? (Находить фальшивую монету не нужно.)

б) Пусть монет n ($n > 2$). Найти наименьшее число взвешиваний.

672. (Московская математическая олимпиада, 1972) Имеется 1000 монет, среди них не более двух фальшивых (быть может, ни одной), причем фальшивые имеют одинаковую массу, отличную от массы настоящих. Можно ли за три взвешивания на весах без гирь определить, есть ли фальшивые и легче они или тяжелее настоящих? (Число фальшивых монет определять не надо.)

673. Есть четыре камня разной массы. За какое наименьшее число взвешиваний на весах без гирь можно найти самый тяжелый и легкий камни? Решить задачу для 6 камней. Решить задачу для $2n$ камней.

674. Есть 64 камня разной массы. За 68 взвешиваний найти два самых тяжелых камня.

675. Имеется три пакета разной массы и чашечные весы без гирь. Всегда ли можно двумя взвешиваниями расположить пакеты в порядке возрастания?

676. Имеется 4 пакета разной массы и правильные чашечные весы без гирь. Как за 5 взвешиваний расположить пакеты в порядке возрастания массы?

677. Имеется 5 пакетов разной массы и весы без гирь. Как за 7 взвешиваний расположить пакеты в порядке возрастания?

678. (Московская математическая олимпиада, 1966) Из 10 шаров два радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар или нет (но нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке). За наименьшее число проверок выделить оба радиоактивных шара.

679. (Московская математическая олимпиада, 1995) Из 9 внешне неразличимых монет одна фальшивая — легче остальных. Имеются два экземпляра внешне неразличимых чашечных весов, из которых одни заедают (они чувствуют разницу лишь в том случае, если на одну чашку положить больше монет, чем на другую). За сколько взвешиваний можно наверняка выделить фальшивую монету?

680. (Московская математическая олимпиада, 1997) Банкир узнал, что среди одинаковых на вид монет одна фальшивая (более легкая). Он попросил эксперта определить эту монету с помощью чашечных весов без гирь, причем потребовал, чтобы каждая монета участвовала во взвешиваниях не более двух раз. Какое наибольшее число монет может быть у банкира, чтобы эксперт заведомо смог выделить фальшивую за n взвешиваний?

681. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1987) Среди 99 внешне одинаковых монет имеется несколько фальшивых. Каждая фальшивая монета отличается по весу от настоящей на нечетное число граммов. Суммарный вес 99 данных монет равен суммарному весу 99 настоящих монет. Имеются двухчашечные весы со стрелкой, показывающей разницу в граммах весов грузов, положенных на чаши. Докажите, что, осуществив только одно взвешивание на таких весах, про любую заданную монету можно узнать, является она фальшивой или нет.

682. Найти массы четырех гирь так, чтобы ими можно было отмерить на чашечных весах любое целое число килограммов от 1 до 40, если гири можно класть на обе чашки.

683. Имеется некоторое количество гирь. Вес любой гири не превосходит 500 г. Известно, что гири нельзя разбить на две группы так, чтобы вес каждой группы превосходил 500 г. Найти наибольший возможный общий вес гирь.

684. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1987) Известно, что с помощью набора из шести гирь можно уравновесить 63 груза, веса которых являются последовательными натуральными числами. Найдите все такие наборы.

685. Из набора гирь массой 1 г, 2 г, ..., 101 г удалили гирю 19 г. Можно ли остальные разложить по 50 штук на весы так, чтобы весы уравновесились?

686. Имеется 201 гиря, веса которых (в граммах) — последовательные натуральные числа от 1 до 201. Назовем гирю хорошей, если после ее удаления оставшиеся 200 гирь можно разделить на две группы, равные по весу и по количеству гирь. Докажите, что а) гиря 101 г хорошая; б) гиря 199 г хорошая.

687. Из набора гирь массой 1 г, ..., 30 г убрали 10 гирь с общей массой, равной трети общей массы всех гирь. Можно ли оставшиеся гири разложить на двух чашках весов по 10 штук на каждой так, чтобы весы оказались в равновесии?

688. Набор состоит из гирь с целочисленными массами. Известно, что если из набора убрать любую из гирь, то остальные можно разложить по двум чашкам весов так, что весы будут в равновесии. Доказать, что в наборе нечетное число гирь.

689. (Московская математическая олимпиада, 1947) Из 20 металлических кубиков, одинаковых по внешнему виду, часть — алюминиевые, а остальные — дюралевые (более тяжелые). Как при помощи не более чем 11 взвешиваний на чашечных весах без гирь определить число дюралевых кубиков?

690. (СПО, 1994, 2-й тур, 6 кл.) Есть пять монет достоинством 1, 2, 3, 5 и 10 пиастров. Одна из них фальшивая, то есть вес ее в граммах не равен ее достоинству. Как при помощи чашечных весов без гирь определить фальшивую монету?

691. (СПО, 1994, 2-й тур, 7 кл.) Есть сто монет достоинством 1, 2, 3, ..., 100 пиастров. Среди них не более 20 фальшивых, то есть таких, что их вес в граммах не равен их достоинству. Как при помощи чашечных весов без гирь определить, фальшивая ли монета достоинством в 10 пиастров?

692. (СПО, 1994, 2-й тур, 8 кл.) Есть сто монет достоинством 1, 2, 3, ..., 100 пиастров. Среди них не более 16 фальшивых, то есть таких, что их вес в граммах не равен их достоинству. Как при помощи чашечных весов без гирь найти все фальшивые монеты?

693. Дан ящик сахарного песка, чашечные весы и гирька в 1 г. Как быстрее отвесить 1 кг сахара? (Указать систему уравновешивания.)

Взвешивание на чашечных весах со стрелкой

694. У короля 30 рыцарей. Ежегодно каждый из его рыцарей платит дань королю в размере 30 монет. Король знает, что один из его рыцарей обманывает его: вместо монет по 10 грамм он дает монеты по 9 грамм. Чтобы не обидеть других рыцарей своими подозрениями, король может сделать только одно взвешивание. Как с помощью одного взвешивания на чашах с гирями королю определить обманщика?

695. Школьники Петя и Вася взвесили свои портфели на весах. Весы показали 3 кг и 2 кг. Когда же они поставили на весы оба портфеля, весы показали 6 кг. «Как же так? — удивился Петя. — Ведь 2+3 не равняется 6». На что Вася ответил: «Разве не видишь, что у весов сдвинута стрелка?». Сколько же весят портфели на самом деле?

696. Десять человек сидят вокруг стола. Сумма в десять долларов должна быть распределена среди них по правилу, согласно которому каждый получает одну половину от суммы, которую его два соседа получают вместе. Есть ли только один путь, чтобы распределить деньги таким образом? Докажите ваш ответ.

697. (Турнир городов, 2005, осенний тур 8–9 классы, тренировочный вариант) Есть 6 монет, одна из которых фальшивая (она отличается по весу от настоящей, но ее вес, как и вес настоящей монеты, неизвестен). Как за 3 взвешивания с помощью весов, показывающих общий вес взвешиваемых монет, найти фальшивую монету?

698. Имеется 10 мешков монет. В 9 мешках монеты настоящие (весят по 10 г), а в одном мешке все монеты фальшивые (весят по 11 г). Как одним взвешиванием на весах со стрелкой определить, в каком мешке лежат фальшивые монеты?

699. Есть 10 мешков монет. В некоторых мешках монеты настоящие (весом 10 г), а в остальных — фальшивые (весом 11 г). Можете ли вы лишь одним взвешиванием определить, в каких мешках фальшивые монеты?

700. Из 21 монеты 10 настоящих и 11 фальшивых, причем каждая фальшивая на 1 г легче каждой настоящей. Взяли одну из монет. Как за одно взвешивание на весах со стрелкой определить фальшивая ли монета?

701. (Московская математическая олимпиада, 1965) В 10 мешках лежат настоящие монеты, а в 11-м — фальшивые. Все фальшивые монеты весят одинаково и отличаются по массе от настоящих. Имеются точные весы с чашками и стрелкой, но без гирь, позволяющие узнать, на какой чашке груз имеет большую массу и насколько. С помощью двух взвешиваний определите, в каком мешке фальшивые монеты.

702. Как взвесить груз на чашечных весах с гирями, если гири правильные, а весы неправильные?

703. (Московская математическая олимпиада, 1976) Даны четыре шара массами 101 г, 102 г, 103 г и 105 г, а также весы со стрелкой, на которых можно взвесить любой груз. Сделав два взвешивания, определить массу каждого шара.

704. (Московская математическая олимпиада, 1981) Имеется 5 гирь массой 1000 г, 1001 г, 1002 г, 1004 г и 1007 г без надписей. Имеются весы со стрелкой, показывающие массу в граммах. Как с помощью трех взвешиваний определить гирю массой 1000 г?

705. (СПО, 2005, 2-й тур, 8 кл.) Фальшивомонетчик изготовил 90 фальшивых монет, весящих по 9 грамм, и по неосторожности добавил к ним 10 настоящих монет по 10 грамм. Монеты перемешались, и он не может отличить одни от других. У него есть весы, которые позволяют взвесить любое количество монет, но выдают либо точный вес, либо вес, на 1 грамм больший истинного. Может ли он с помощью этих весов гарантированно найти хотя бы одну фальшивую монету?

706. (Московская математическая олимпиада, 1985) Есть три одинаковые фляги, две из которых пусты, а в третьей налито 1 л молока, цистерна молока и весы без гирь, на которые можно ставить фляги. Как отлить в одну флягу 85 л молока, сделав не более

8 взвешиваний? (Во флягу вмещается больше 85 л. При взвешивании на одну чашку весов ставится фляга с молоком, на другую — пустая и в пустую доливается молоко до равновесия.)

707. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1985) Можно ли разделить 1985 гирь массами 1 г, 2 г, ..., 1985 г на пять групп так, чтобы и число гирь, и их суммарная масса были бы одинаковы во всех группах?

708. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1986) Имеются гири массой 12 г, 22 г, ..., 10002 г. Докажите, что их можно разделить на две группы одинаковой массы, по 500 гирь в каждой группе.

709. (Всероссийская олимпиада по математике, 1992) Рассматриваются наборы из n различных гирек. Масса каждой гирьки — целое число граммов, не превосходящее 21. При каком наименьшем n в любом наборе найдутся две пары гирек, уравновешивающие друг друга?

710. (Всероссийская олимпиада по математике, 1997) Есть 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более чем в 1,5 раза.

711. (Московская математическая олимпиада, 1949) Есть 13 гирь, масса каждой из которых равна целому числу граммов. Любые 12 из них можно так разложить на две чаши весов, по 6 на каждую, что будет равновесие. Докажите, что все гири имеют одну и ту же массу.

712. (Московская математическая олимпиада, 1950) Имеется n гирь с весами 1 г, 2 г, ..., n г. Их надо разложить на три равные по весу кучки. При каких n это удастся сделать?

713. (Московская математическая олимпиада, 1966) Из набора гирь массами 1 г, 2 г, ..., 26 г выбрать 6 гирь так, чтобы из них нельзя было составить два набора равных масс. Доказать, что нельзя выбрать 7 гирь, обладающих тем же свойством.

714. (Московская математическая олимпиада, 1970) Каждые две гири набора из 100 гирь отличаются по массе не более чем на 20 г. Доказать, что эти гири можно разложить на две чашки весов, по 50 на каждую, так, чтобы одна чаша весов была легче другой не более, чем на 20 г.

715. (Московская математическая олимпиада, 1951, 1-й тур) Имеется кусок цепи из 60 звеньев, каждое из которых весит 1 г. Какое наименьшее число звеньев надо расковать, чтобы из образовавшихся частей можно было составить все веса в 1г, 2 г, 3г, ..., 60 г (раскованное звено весит тоже 1г)?

716. (Московская математическая олимпиада, 1974) Имеется несколько гирь, масса каждой из которых равна целому числу. Известно, что их можно разбить на k равных по массе групп. Докажите, что не менее чем k способами можно убрать одну гирю так, чтобы оставшиеся гири нельзя было разбить на k равных по массе групп.

717. (Московская математическая олимпиада, 1996) По кругу расставлены 10 железных гирь. Между каждыми гирями находится бронзовый шарик, масса которого равна разности масс соседних с ним гирь. Докажите, что шарики можно разложить на две чашки весов так, чтобы весы уравновесились.

718. (Московская математическая олимпиада, 1997) На тарелке лежат 9 разных кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?

719. (Турнир городов, 1998) Имеется 19 гирек весом 1 г, 2 г, ..., 19 г. Девять из них — железные, девять — бронзовые и одна — золотая. Известно, что общий вес всех железных гирек на 90 г больше, чем общий вес бронзовых. Найдите вес золотой гирьки.

720. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1984) Есть $n + 1$ гиря общим весом $2n$ и весы с двумя чашками, находящиеся в равновесии. Вес каждой из гирь выражается натуральным числом. Гири по очереди кладут на чашки весов: сначала самую тяжелую (или одну из самых тяжелых), затем самую тяжелую из оставшихся и т. д. При этом каждую следующую гирю кладут на ту чашку весов, которая в данный момент легче, а если весы находятся в равновесии, то на любую из чашек. Докажите, что после того, как на весах окажутся все гири, весы будут находиться в равновесии.

721. (СПО, 2003, 1-й тур, 6 кл.) Голодные Малыш и Карлсон съели торт и стали сытыми. Известно, что голодный Карлсон легче сытого Малыша, а сытый Карлсон весит столько же, сколько два голодных Малыша. Что весит больше: торт или голодный Малыш? Не забудьте обосновать свой ответ.

722. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1973) На суде в качестве вещественного доказательства предъявлено 14 монет. Эксперт обнаружил, что монеты №№ 1–7 фальшивые, а №№ 8–14 — настоящие. Суд же знает только то, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково, и что фальшивые монеты легче настоящих. У эксперта есть только чашечные весы без гирь.

а) Эксперт хочет доказать суду, что монеты №№ 1–7 — фальшивые. Как он может это сделать, используя только три взвешивания?

б) Покажите, что с помощью трех взвешиваний он может даже доказать, что монеты №№ 1–7 — фальшивые, а №№ 8–14 — настоящие.

Занятия 135–140

Неравенство треугольника. Пересечение двух окружностей

Теорема 41 (неравенство треугольника). *В любом треугольнике сумма двух сторон больше третьей стороны.*

Теорема 42. *Две окружности не могут иметь более двух общих точек пресечения.*

Теорема 43 (о пересечении двух окружностей).

1) *Две окружности касаются внешним образом тогда и только тогда, когда расстояние между их центрами равно сумме их радиусов.*
2) *Две окружности касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда расстояние между их центрами равно разности их радиусов.*
3) *Две окружности не имеют общих точек тогда и только тогда, когда расстояние между их центрами больше суммы их радиусов или меньше разности радиусов.*

723. Две окружности касаются в точке A. Через точку A проведена прямая, касающаяся одной из окружностей. Докажите, что эта прямая касается также и другой окружности.

724. На плоскости расположены точки A, B, C, D. Известно, что $AB = 1{,}3$, $BC = 2{,}4$, $CD = 1{,}8$, $AD = 5{,}5$. Найдите AC.

725. Чему равна длина стороны AB треугольника ABC, если $BC = 1$, $CA = 7$ и длина стороны AB также выражается целым числом?

726. Найдите периметр равнобедренного треугольника, две стороны которого равны 3,9 и 7,9.

727. Имеются два отрезка, длины которых a и b. Известно, что существует треугольник со сторонами $a + 5b$, $5a + b$ и $3a + 2b$. Что больше: a или b?

728. Дома Винни-Пуха и Пятачка находятся на расстоянии 1 км друг от друга. Однажды они одновременно вышли из своих домов и каждый пошел по какой-то прямой. Винни-Пух проходил 3 км в час, а Пятачок — 4 км в час. Через некоторое время они встретились. Сколько времени могло продолжаться их путешествие? Укажите наибольшее и наименьшее возможное время.

729. Докажите, что во всяком треугольнике медиана меньше полусуммы двух сторон, между которыми она проходит.

730. Докажите, что во всяком выпуклом четырехугольнике сумма диагоналей меньше периметра, но больше его половины.

731. Однажды странник возвращался домой после длительного путешествия. Подходя к дому, он увидел реку. Помогите страннику определить, к какому месту около реки необходимо подвести лошадь (для того, чтобы она попила воды), чтобы путь до реки и от реки до дома был наименьшим из возможных.

732. Четыре дома расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. Где нужно вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до четырех домов была наименьшей?

733. Жители трех деревень, расположенных в вершинах треугольника, решили вырыть общий колодец. При этом они хотят расположить колодец в таком месте, чтобы общий путь всех семей за водой был как можно меньше. Каждая семья должна ходить за водой один раз в день. Где следует выбрать колодец, если в деревне A живет 100 семей, в деревне B — 200 семей, а в деревне C — 300 семей?

734. Сколько различных треугольников можно составить из отрезков, длины которых 1, 2, 3, 4 и 5?

735. Ученик измерил стороны и диагональ некоторого четырехугольника и получившиеся числа расположил в порядке возрастания: 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Чему равна диагональ четырехугольника?

736. Может ли периметр треугольника быть равным 19, если одна из его сторон на 1 короче другой и на 3 длиннее третьей?

737. Может ли в треугольнике сторона быть вдвое больше другой стороны и вдвое меньше третьей?

738. Докажите, что сумма высот треугольника меньше его периметра.

739. Докажите, что диаметр есть наибольшая хорда окружности.

740. Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 3 равно 8. Найдите наименьшее и наибольшее из расстояний между точками, одна из которых лежит на первой окружности, а другая — на второй.

741. Внутри треугольника ABC взята точка M. Докажите, что угол BMC больше угла BAC.

742. В некотором царстве, в некотором государстве есть несколько городов, причем расстояния между ними все попарно различны. В одно прекрасное утро из каждого города вылетает по одному самолету, который приземляется в ближайшем городе. Может ли в одном городе приземлиться более пяти самолетов?

743. (Задача о разрезании треугольника) Докажите, что всякий треугольник можно разрезать на четыре равных треугольника.

Средняя линия и медианы треугольника

Теорема 44 (о средней линии треугольника). *Во всяком треугольнике средняя линия параллельна одной из его сторон и равна ее половине.*

Теорема 45 (о медианах треугольника). *Во всяком треугольнике медианы пересекаются и точкой пересечения делятся в отношении* 2:1, *считая от вершины.*

744. Дан треугольник с периметром 24. Найдите периметр треугольника с вершинами в серединах сторон данного.

745. Дан выпуклый четырехугольник, сумма диагоналей которого равна 18. Найдите периметр четырехугольника с вершинами в серединах сторон данного.

746. Постройте треугольник по серединам трех его сторон.

Занятия 141–148

Введение в комбинаторику (элементарная часть)

Теорема 46 (основное комбинаторное правило). *Пусть необходимо выполнить последовательно* s *действий* ($s = 1, 2, 3, \ldots$). *И известно, что первое действие можно осуществить* n_1 *способами, второе —* n_2 *способами, ...,* s*-е действие —* n_s *способами. Тогда общее количество способов совершить последовательно* s *действий равно* $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_s$.

Доказательство осуществляется с помощью метода математической индукции.

В книге А.В. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др. «Теория вероятностей» (с. 51–52) приводится упоминание о применении формул для числа размещений и сочетаний «при решении задач комбинаторики, описываемых в несколько отличных, от приведенных выше, постановках».

Имеется в виду, что в комбинаторике существуют два подхода, связанных с формированием математической модели по тексту задачи ($n \geqslant k$):

Первый (классический) подход. Производится выборка из n элементов, которые раскладываются на k мест. Все места должны быть использованы, на одном месте может быть только один элемент (естественно возникает из понятия выборки). Задача заключается в подсчете количества всевозможных выборок определенного типа (упорядоченных, неупорядоченных, с повторениями, без повторений) из n элементов по k.

Второй подход. Производится выборка из k частиц, которые раскладываются в n ячеек (ящиков). В каждой ячейке может находиться 0, 1, 2, ... частиц. Задача заключается в подсчете количества всевозможных способов разложения k частиц (различимых и неразличимых) в n ячеек (с ограничениями и без ограничений на число попавших в каждую ячейку частиц).

Несмотря на то что все задачи по комбинаторике можно решать только в рамках первого подхода, на практике у учащихся зачастую возникает путаница с применением формул. Отчасти это можно объяснить тем, что задачи на применение одних и тех же формул, естественно, формулируются по-разному, причем сама формулировка иногда наталкивает на постановку математической задачи, отличной от той, в рамках которой применима формула. В связи с этим при постановке задачи целесообразно уделить внимание переходу от второго упомянутого подхода к первому. Продемонстрируем сказанное на следующих примерах (см. с. 235–243).

I. Количество упорядоченных выборок (размещений) из n элементов по k с повторениями

I подход	II подход
Количество упорядоченных выборок (размещений) из n элементов по k с повторениями $\tilde{A}_n^k = n^k$ Доказательство. Имеется урна, в которой ровно n разных шаров. В силу возобновляемости содержания содержания урны, объем выборки k ничем не ограничен. Поэтому в качестве k берется натуральное число, без каких-либо ограничений. Спрашивается, сколько будет всевозможных выборок объема k? Чтобы получить ответ на поставленный вопрос, применим основное комбинаторное правило. Выборку с возвращением объема k можем представить как процесс последовательного, одно за другим, в k действий, извлечения шаров из урны возобновляемого содержания из n шаров. В силу возобновляемости урны, каждое из k действий выполнимо n способами – по числу шаров в урне, и потому $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n$. Тем самым, процесс извлечения шара выборки с номером a_1 осуществляется n способами.	*Количество способов, с помощью которых можно заполнить n разных ячеек k различимыми частицами <u>без ограничений на число попавших</u> в каждую ячейку частиц, равно* $\tilde{A}_n^k = n^k$ **Пример 1'**. Найдите количество различных способов покупки 3 билетов Бинго у 10 агентов. *Решение*. Переформулируем данную задачу в рамках первого подхода. На каждом купленном билете агент, продающий билеты Бинго, как известно, ставит свой номер, для простоты будем считать, что у первого агента номер – 1, у второго – 2 и т.д. Спрашивается количество способов записи на трех билетах номеров десяти агентов, продающих билеты Бинго. Поскольку на всех трех билетах может быть записан один и тот же номер и естественно важен порядок (счастливым может оказаться один из трех и весьма важно, какой и у какого агента), мы будем рассматривать упорядоченные выборки с повторениями. Значит, общее количество способов равно числу *размещений с повторениями* из 10 элементов по 3, т.е.

Процесс извлечения шара той же выборки с номером a_2 осуществляется, в силу возобновляемости содержания урны, также n способами. И наконец, процесс извлечения последнего шара выборки с номером a_k осуществляется n способами. Тем самым, согласно основному комбинаторному правилу, всего выборок $(a_1, a_2, ..., a_k)$ будет $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k = n^k$. **Пример 1.** Найдите количество трехбуквенных «слов», которые могут быть составлены из 10 букв казахского алфавита. *Решение.* Поскольку порядок важен и в «слове» буквы могут повторяться, общее количество слов равно числу *размещений с повторениями* из 10 элементов по 3, т.е. $N = \tilde{A}_{10}^3 = 10^3 = 1000.$ **Ответ:** 1000. *Замечание.* Общее количество слов определяется согласно основному комбинаторному правилу: на первом месте может быть любой из 10 элементов, на втором — любой из 10 элементов (выборка с повторениями), на третьем месте может быть любой из 10 элементов.	$N = \tilde{A}_{10}^3 = 10^3 = 1000.$ *Замечание.* Прямой подсчет количества весьма затруднителен: необходимо учесть все способы расставления трех элементов на 10 местах, то есть на первом месте могут быть все три или на первом месте – первые два элемента и на пятом – третий и т.д. Это не вписывается в основное комбинаторное правило, в связи с этим естественно в данной ситуации предпочтителен второй подход.

II. Количество упорядоченных выборок (размещений) из n элементов по k без повторений ($n \geq k$)

I подход	II подход
Количество упорядоченных выборок (размещений) из n элементов по k без повторений ($n \geq k$) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$ Доказательство. Имеется урна, в которой ровно n разных шаров. Поскольку из невозобновляемой урны нельзя извлечь больше шаров, чем в ней содержится, число k извлекаемых шаров не больше n. В составляемой комбинации $(a_1, a_2, ..., a_k)$ шар a_1 можно выбрать n способами, после чего в урне осталось $(n-1)$ шаров, поэтому второй шар a_2 можно выбрать $(n-1)$ способами. Продолжая этот процесс, получаем, что на последнем k-м шаге в урне останется $n-(k-1) = n-k+1$ шаров, поэтому, в силу основного комбинаторного правила, число всевозможных комбинаций будет $(n-0)(n-1)...(n-(k-1)) = n(n-1)...(n-k+1).$	*Количество способов, с помощью которых можно заполнить n разных ячеек k различимыми частицами, причем в каждой ячейке может находиться* <u>*не более одной*</u> *частицы* ($n \geq k$) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$ **Пример 2'.** Сколькими способами 5 студентов могут рассесться в 33 вагонах поезда Астана—Алматы, так, чтобы <u>никакие два студента не сидели в одном вагоне?</u> *Решение.* Переформулируем данную задачу в рамках первого подхода: имеется пять студентов, которым случайным образом раздаются билеты (первому — первый билет, второму — второй, и т.д.) в различные вагоны поезда. Требуется определить количество способов раздачи 5 билетов студентам так, чтобы ни в одном из 33 вагонов не было двух студентов. Поскольку в один вагон два студента билеты не получат и порядок существенен, то общее число способов равно *числу размещений без повторений* из 33 элементов по 5 элементов:

Другими словами, отвлекаясь от вспомогательной урновой схемы, в общем случае получаем, что в выборке $(a_1, a_2, ..., a_k)$ элемент a_1 выбирается $n - 0 = n$ способами, a_2 выбирается $(n-1)$ способами, и, отсюда замечая, что при всех элемент a_m выбирается $n-(m-1)$ способами, в частности, заключаем, что последний элемент выборки a_k — выбирается $n-(k-1) = n-k+1$ способами, поэтому всего способов будет $n\cdot(n-1)\cdot...\cdot(n-k+1)$. **Пример 2.** Найдите количество различных способов извлечения 5 карточек (извлеченные карточки располагаются слева направо в порядке извлечения) из 33 карточек с написанными буквами казахского алфавита. *Решение.* Поскольку карточки обратно не возвращаются и порядок существенен, общее число способов равно *числу размещений без повторений* из 33 элементов по 5 элементов: $N = A_{33}^5 = 28480320.$ *Замечание.* Таким образом, общее количество исходов определяется согласно основному комбинаторному правилу: на первое место может быть взята любая из 33 букв, на второе – любая из оставшихся 32 букв (одна уже взята), ..., на пятое место – любая из оставшихся 29 букв.	$N = A_{33}^5 = 28480320.$ *Замечание.* На подсчет общего количества исходов для использования основного комбинаторного правила можно смотреть и со следующей точки зрения: первый студент может сесть в любой из 33 вагонов, второй – в любой из оставшихся 32 (один уже занят), ..., пятый студент – в любой из оставшихся 29. Но такие рассуждения тоже соответствуют второму подходу, поскольку количество мест больше количества предметов.

III. Количество неупорядоченных выборок (сочетаний) из n элементов по k без повторений ($n \geq k$)

I подход	II подход
Количество неупорядоченных выборок (сочетаний) из n элементов по k без повторений ($n \geq k$) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}.$ Доказательство. Если обозначить искомое число через x, то имеет место равенство $A_n^k = x\cdot P_k = x\cdot k!$, поскольку все выборки объема k, отличающиеся друг от друга только порядком, принимаются за одну, а их число равно числу перестановок из k элементов, т.е. $P_k = k!$. Стало быть, $x = \dfrac{A_n^k}{P_k}$, и потому: *Число неупорядоченных выборок из n элементов по k равно* $\dfrac{A_n^k}{P_k} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot...\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot...\cdot k}.$ Неупорядоченные выборки из n элементов по k называют *сочетаниями* из n по k, а их число, которое мы обозначили буквой x, обозначают C_n^k или $\binom{n}{k}$. Таким образом,	*Количество способов, с помощью которых можно заполнить n различных ячеек k неразличимыми частицами, причем в каждой ячейке может находиться не более одной частицы, равно числу сочетаний из n элементов по k элементов* $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}.$ **Пример 3'.** На склад привезли три одинаковых телевизора. Зав. складом провел инвентаризацию и определил, что в секции «бытовая техника» имеется 52 свободных места (на одном месте может находиться только один телевизор), однако все поступившие предметы зав. складом записывает только по секциям без указания места. Определите количество способов расположения телевизоров на свободные места. *Решение.* Переформулируем данную задачу в рамках первого подхода: имеются три телевизора, за каждым закрепляется место из 52 свободных без учета порядка. На каждый телевизор повесим бирку с номером места, на котором он стоит. Требуется найти количество способов записать три номера из 52 на этих телевизорах. Поскольку два телевизора

$C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}.$

Пример 3. Найдите количество способов вытащить 3 теннисных мячика из набора, в котором 52 мяча.

Решение. Поскольку порядок выбора в данном случае не существен и мячики обратно не возвращаются, общее число способов равно числу *сочетаний без повторений* из 52 элементов по три элемента, т.е.

$$N = C_{52}^3 = 22100.$$

не могут стоять на одном месте и порядок не важен, то общее способов исходов равно числу *сочетаний без повторений* из 52 элементов при три элемента, т.е.

$$N = C_{52}^3 = 22100.$$

IV. Количество неупорядоченных выборок (сочетаний) из n элементов по k с повторениям.

Количество неупорядоченных выборок (сочетаний) из n элементов по k с повторениями

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Доказательство. Применим метод математической индукции. Для этого обозначим через T_k следующее утверждение: для любого натурального числа n при данном номере k справедливо равенство $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

1 шаг. Проверим верно ли первое утверждение. При $k=1$ получается, что у нас есть n предметов и лишь одно место, тогда мы можем произвести ровно n неупорядоченных выборок из n элементов по одному, т.е. $\tilde{C}_n^1 = n = C_{n+1-1}^1$, значит, первое утверждение T_1 верно.

2 шаг. Предположим, что утверждение T_k верно. Покажем, что тогда и утверждение T_{k+1} верно. Пусть дано n элементов: $x_1, x_2, ..., x_n$. Мы производим выборку объема $k+1$. Разобьем все такие выборки на следующие группы.

1 группа. Все выборки, в которых хотя бы один раз встречается элемент x_1 в таких выборках свободными тогда будут k, на которых может стоять любой из $x_1, x_2, ..., x_n$, т.е. их количество будет равно количеству неупорядоченных выборок из n элементов по k с повторениями — $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$ (согласно нашему предположению).

2 группа. Все выборки, в которых хотя бы один раз встречается элемент x_2, но отсутствует элемент x_1 — в таких свободными тогда будут k, на которых может стоять любой из $x_2, x_3, ..., x_n$, т.е. их количество будет равно количеству неупорядоченных выборок из $n-1$ элементов по k с повторениями — $\tilde{C}_{n-1}^k = C_{n+k-2}^k$ (согласно нашему предположению).

3 группа. Все выборки, в которых хотя бы один раз встречается элемент x_3, но отсутствуют элементы

Количество способов, с помощью которых можно заполнить n различных ячеек k неразличимыми частицами без ограничения на число попавших в каждую ячейку частиц

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Доказательство. Пусть мы заполнили n различных ячеек k неразличимыми частицами. Теперь выложим по порядку все k неразличимых частиц в ряд (так, чтобы между любыми двумя частицами, лежавшими раньше в одной ячейке,будут находиться только частицы из той же ячейки). Двигаясь слева направо, будем ставить перегородки вида «|» между элементами, лежавшими в разных ячейках. Если в какой-то ячейке не было частиц, то поставим две подряд перегородки «‖». Поскольку всего было n ячеек, то нам понадобится ровно $n-1$ перегородка. Значит, количество способов, с помощью которых можно заполнить n различных ячеек k неразличимыми частицами без ограничения на число попавших в каждую ячейку частиц, равно количеству способов расставить $n-1$ перегородку на $n-1+k$ мест, которое в свою очередь равно $C_{n+k}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

(если сформулировать в рамках первого подхода, то повесим на каждую перегородку номер места, на котором она стоит, тогда количество способов расставления таких перегородок равно количеству сочетаний из $n-1+k$ номеров по k).

Пример 4'. В 33 ящика случайным образом кладут 5 одинаковых теннисных мячиков. Определите количество способов расположения данных мячей в ящиках.

Решение. Все 5 теннисных мячиков могут лежать в одном ящике (т.е. нет ограничения на число попавших в один ящик) и порядок не существенен.

x_1 и x_2 — в таких свободными тогда будут k, на которых может стоять любой из x_3, x_4, ..., x_n, т.е. их количество будет равно количеству неупорядоченных выборок из $n-2$ элементов по k с повторениями — $\tilde{C}^k_{n-2} = C^k_{n+k-3}$ (согласно нашему предположению).

...

(n-1)-я группа. Все выборки, в которых хотя бы один раз встречается элемент x_{n-1}, но отсутствуют элементы x_1, x_2, ..., x_{n-2} — в таких свободными тогда будут k, на которых может стоять любой из x_{n-1}, x_n, т.е. их количество будет равно количеству неупорядоченных выборок из 2 элементов по k с повторениями — $\tilde{C}^k_2 = C^k_{k+1}$ (согласно нашему предположению).

***n*-я группа.** Все выборки, в которых хотя бы один раз встречается элемент x_n, но отсутствует элементы x_1, x_2, ..., x_{n-1} — в таких свободными тогда будут k, на которых может стоять только элемент x_n, т.е. их количество будет равно количеству неупорядоченных выборок из 1 элемента по k с повторениями — $\tilde{C}^k_1 = C^k_k = 1$ (согласно нашему предположению).

Таким образом, общее количество неупорядоченных выборок из n элементов по $k+1$ с повторениями равно

$$\tilde{C}^{k+1}_n = C^k_k + C^k_{k+1} + \ldots + C^k_{n+k-2} + C^k_{n+k-1}.$$

Переформулируем задачу в рамках первого подхода: 5 теннисных мячиков случайным образом кладут в 33 ящика, на каждом мячике мы подписываем номер ящика, в котором он лежит. Тогда общее число способов расположения мячей в ящиках равно числу *сочетаний с повторениями* из 33 элементов по 5 элементов, т.е.

$$N = \tilde{C}^5_{33} = C^5_{33+5-1} = 435897.$$

Замечание. Количество способов представить число k в виде суммы n неотрицательных слагаемых также равно C^k_{n+k-1}.

Используя соотношение

$$C^l_m + C^{l+1}_m = C^{l+1}_{m+1},$$

и учитывая, что $C^k_k = 1 = C^{k+1}_{k+1}$, получаем

$$\begin{aligned} C^k_k + C^k_{k+1} + \ldots + C^k_{n+k-2} + C^k_{n+k-1} &= \\ = C^{k+1}_{k+1} + C^k_{k+1} + \ldots + C^k_{n+k-2} + C^k_{n+k-1} &= \\ = C^{k+1}_{k+2} + C^k_{k+2} + \ldots + C^k_{n+k-2} + C^k_{n+k-1} &= \\ = C^{k+1}_{k+3} + C^k_{k+3} + \ldots + C^k_{n+k-2} + C^k_{n+k-1} &= \ldots = \\ = C^{k+1}_{n+k-1} + C^k_{n+k-1} &= C^{k+1}_{n+k}. \end{aligned}$$

Тем самым, $\tilde{C}^{k+1}_n = C^{k+1}_{n+k}$, т.е. утверждение T_{k+1} верно.

Значит для любых натуральных n, k имеем $\tilde{C}^k_n = C^k_{n+k-1}$.

Пример 4. Билеты на поезд, состоящий из 33 вагонов, были выставлены на продажу. Известно, что в течение первых 15 минут были проданы 5 билетов. Кассир в отчете записывает только номера вагонов. Определите количество возможных различных записей кассира.

Решение. Поскольку порядок выбора не существенен и несколько билетов могут быть проданы в один вагон, общее число способов равно числу *сочетаний с повторениями* из 33 элементов по 5 элементов, т.е.

$$N = \tilde{C}^5_{33} = C^5_{33+5-1} = 435897.$$

Теорема 47 (о перестановках с повторениями). *Пусть имеется n элементов k различных типов: n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа, ... , n_k элементов k-го типа, $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ (предметы одного типа неразличимы). Тогда количество способов составить различные перестановки из этих элементов равно* $P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$.

Теорема 48 (о перестановках с ограничениями). *Пусть имеется n_1 предметов первого типа, n_2 предметов второго типа, ..., n_k предметов k-го типа, где предметы одного типа различимы друг от друга. Тогда количество способов перестановок этих предметов, в которых все предметы одного и того же типа стоят рядом, равно* $k!n_1!n_2!\ldots n_k!$.

747. Сколько существует треугольников, у которых длина каждой стороны принимает одно из значений 4, 5, 6, 7?

748. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова а) «математика»; б) «парабола»; в) «ингредиент»?

749. Необходимо составить команду космического корабля из трех человек: командира, инженера и врача. На место командира имеется четыре кандидата: a_1, a_2, a_3, a_4; на место инженера — три кандидата: b_1, b_2, b_3 и на место врача — тоже три кандидата: c_1, c_2, c_3. Проведенная проверка показала, что командир a_1 психологически совместим с инженерами b_1 и b_3 и врачами c_2, c_3; командир a_2 — с инженерами b_1 и b_2 и всеми врачами; командир a_3 — с инженерами b_1 и b_2 и врачами c_1, c_3; командир a_4 — со всеми инженерами и врачом c_2. Кроме того, инженер b_1 психологически совместим с врачом c_3, инженер b_2 — с врачом c_1 и инженер b_3 — с врачом c_2. Сколькими способами при этих условиях может быть составлена команда корабля?

750. Сколько слов, содержащих 6 букв, можно составить из 33 букв русского алфавита при условии, что любые две стоящие рядом буквы различны (например, слово «корова» допускается, а слово «колосс» нет)?

751. Из Лондона в Брайтон ведут 2 шоссе, соединенные 10 проселочными дорогами. Сколькими способами можно проехать из Лондона в Брайтон так, чтобы дорога не пересекала себя?

752. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт, содержащей 52 карты, по одной карте каждой масти? А если среди вынутых карт нет ни одной пары одинаковых, т.е. двух королей, двух десяток и т.д.?

753. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт, содержащей 52 карты, по одной карте каждой масти так, чтобы карты красных мастей и черных мастей образовывали пары (например, девятки пик и треф и валеты бубен и червей)? А так, чтобы из выбранных карт можно было составить две пары, состоящие из черной и красной карт одного и того же названия (например, валеты пик и червей и дамы треф и бубен)?

754. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу?

755. Через каждую точку из трех данных точек на плоскости проведено m прямых так, чтобы среди них не было двух, параллельных между собой, и трех, пересекающихся в одной точке (за исключением трех прямых одного пучка). Найдите количество точек пересечения этих прямых (не считая трех данных).

756. Сколько шестизначных чисел содержат ровно три различные цифры?

757. Квадрат разделен на 16 равных квадратов. Сколькими способами можно покрасить их в белый, черный, красный и синий цвета так, чтобы в каждом горизонтальном и вертикальном ряду были все четыре цвета?

758. На шахматную доску необходимо поставить короля и ферзя. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы они не били друг друга?

759. Сколькими способами можно выбрать белое и черное поля, не лежащие на одной горизонтали или одной вертикали?

760. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга?

761. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (короля, ферзя, две ладьи, два слона и двух коней) на первой линии шахматной доски (не соблюдая шахматные правила)?

762. Сколькими способами можно поставить на доску две шашки — белую и черную так, чтобы белая шашка могла бить черную?

763. В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток? Сколькими способами можно купить 8 открыток? Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?

764. Имеется три курицы, четыре утки и два гуся. Сколькими способами можно выбрать из них несколько птиц так, чтобы среди выбранных оказались и куры, и утки, и гуси?

765. В восточной игре «нарды» 15 белых и 15 черных шашек стоят на 24 полях так, что каждое поле или пустое, или занято несколькими белыми шашками, или занято несколько черными шашками. Сколькими способами можно так поставить шашки?

766. В кондитерском магазине продавались пирожные 4 видов: корзиночки, наполеоны, песочные и эклеры. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

767. В соревновании по гимнастике участвуют 10 человек. Трое судей должны независимо друг от друга пронумеровать их в порядке, отражающем их выступление в соревновании. Победителем считается тот, кого назовут первым хотя бы двое судей. В какой доле победитель соревнований будет определен?

768. В корзине 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает из нее яблоко или апельсин, после чего Надя берет и яблоко и апельсин. В каком случае Надя имеет бóльшую свободу выбора: если Ваня выбрал яблоко или если Ваня выбрал апельсин?

769. Какое наибольшее число различных шаров можно построить в пространстве так, чтобы они касались трех данных плоскостей и данного шара?

770. Можно ли выписать девять чисел 1, 2, 3, ..., 9 по кругу так, чтобы сумма никаких двух соседних не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

771. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает чашку, блюдце и ложку)?

772. Из плит сечением 30×50 см строится лестница, ведущая из точки A в точку B. Точка C такая, что $\angle ACB = 90°$. Расстояние AC равно 4,5 м, а расстояние CB — 1,5 м. Высота каждой ступеньки равна 30 см, а ее ширина — целое кратное 50 см. Сколькими способами можно построить лестницу?

773. Сколькими способами можно расставить m нулей и n единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?

774. На полке стоят 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг так, чтобы никакие две из них не стояли рядом?

775. За круглым столом короля Артура сидят 12 рыцарей. Из них каждый враждует со своими соседями (и только с ними). Необходимо выбрать 5 рыцарей, чтобы освободить заколдованную принцессу, но среди выбранных рыцарей не должно быть врагов. Сколькими способами это можно сделать?

776. Докажите, что если за круглым столом сидят n рыцарей, и необходимо выбрать k рыцарей ($n > 2k + 1$) так, чтобы в их число не попали никакие два соседа, то это можно сделать $\frac{n}{n-k}C_{n-k}^{k}$ способами.

777. Укротитель хищных зверей хочет вывести на арену цирка 5 львов и 4 тигров; при этом нельзя, чтобы два тигра шли друг за другом. Сколькими способами он может расположить этих зверей?

778. Сколькими способами можно переставить буквы слова «перемет» так, чтобы три буквы «е» не шли подряд?

779. Найдите сумму четырехзначных чисел, получаемых при всевозможных перестановках следующих 4 цифр: а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 2, 2, 5; в) 1, 3, 3, 3; г) 1, 1, 4, 4.

780. В соревнованиях по хоккею участвовали пять команд: A, B, C, D, E. В конкурсе знатоков один участник предположил, что они займут места A, B, C, D, E, а другой предсказал порядок D, A, E, C, B. После окончания соревнований оказалось, что первый не угадал не только место хотя бы одной из команд, но даже какую-либо пару следующих друг за другом команд. Второй же угадал места двух команд и две пары следующих друг за другом команд. В каком порядке расположились команды?

781. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг (с тремя горизонтальными полосками), если имеется материя пяти различных цветов? А если цвета могут повторяться, но не рядом (полосы должны быть различными)?

782. От A до B 999 километров. Вдоль дороги стоят километровые столбы, на которых написаны расстояния до A и до B: 0|999, 1|998, 2|997, ..., 998|1, 999|0. Сколько среди этих километровых столбов таких, на которых есть только две различные цифры?

783. Дана конечная последовательность 1, 2, 3, ..., $2n$. Сколькими способами можно извлечь из нее три числа, из которых можно составить арифметическую прогрессию?

784. Найдите количество троек различных чисел, не превосходящих 100, из которых можно построить геометрическую прогрессию.

785. Четыре числа сложили всевозможными способами по два и получили следующие шесть сумм: 2, 4, 9, 9, 14, 16. Найдите эти числа.

786. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт есть хотя бы один туз? Ровно 1 туз? Не менее двух тузов? Ровно два туза?

787. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды, содержащей 52 карты, 6 карт так, чтобы среди них были все четыре масти?

788. Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека, если в каждую команду должен входить хотя бы один юноша?

789. Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать две перчатки так, чтобы эти перчатки были различных размеров?

790. У отца есть 5 различных апельсинов, которые он дает своим восьми сыновьям, причем каждый получает или один апельсин, или ничего. Сколькими способами это можно сделать? А если число апельсинов, получаемых каждым сыном, неограничено?

791. У мамы 2 одинаковых яблока, 3 одинаковых мандарина и 4 одинаковых апельсина. Каждый день в течение 9 дней подряд она выдает сыну по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

792. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого — 9 книг. Сколькими способами они могут обменять одну книгу одного на одну книгу другого? А 3 книги одного на 3 книги другого?

793. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, двух сержантов и 20 рядовых? А если в отряд должны войти командир роты и старший по возрасту из сержантов?

794. На собрании должны выступить 5 человек: A, $Б$, $В$, $Г$ и $Д$. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии, что $Б$ не должен выступать до того, как выступит A?

795. Сколькими способами можно переставлять буквы в слове «фацелия» так, чтобы не менялся порядок гласных букв? А в слове «параллелизм»?

Занятия 149–158

Игры: стратегии

Рекомендации по выбору стратегии в игре.

1. *Выделить (и использовать) множество выигрышных позиций.*
2. *Для достижения и удержания выигрышных позиций использовать стратегию дополнения.*
3. *Часто (но не всегда) выгодно отвечать на ход противника симметричным в некотором смысле ходом.*
4. *Следует стремиться к тому, чтобы передать очередь невыгодного хода противнику.*
5. *Переформулировать условие в другом, более удобном в каком-то смысле виде.*
6. *Иногда возможно вести противника, то есть действовать таким образом, чтобы у противника при каждом очередном ходе не было выбора, если он не хочет проиграть. Особенно это полезно в играх, где нет стратегии, обеспечивающей всегда выигрыш, но возможно любую игру свести к ничьей.*

Приведем несколько примеров на применение указанных рекомендаций.

Пример 1 (рекомендация 6). Двое играют в такую игру. В начале по кругу стоят числа 57, 70, 99, 112. Каждым своим ходом первый прибавляет к двум соседним числам по 1, а второй меняет любые два соседних числа местами. Первый выигрывает, если все числа станут равными. Может ли второй ему помешать?

○ *Решение.* Докажем, что второй может добиться того, чтобы перед каждым ходом первого четные и нечетные числа чередовались. Тогда этим ходом первому не удастся сделать все числа равными, и он не выиграет. Заметим, что изначально четные и нечетные числа чередуются. После любого хода первого игрока получим подряд два четных и два нечетных числа. Поменяем четное и соседнее с ним нечетное число местами. Таким образом, после хода второго четные и нечетные числа чередуются, поэтому первый игрок никогда не получит четыре равных числа. ●

Пример 2 (рекомендация 3). Даурен и Асхат играют в игру: они по очереди ставят ладьи на доску 10×10. Выигрывает тот, при ходе которого все клетки доски оказываются битыми поставленными фигурами. Начинает Даурен. Кто выигрывает, если оба стараются играть наилучшим образом?

○ *Решение.* Асхат выиграет, если он будет ставить ладьи симметрично ладьям Даурена относительно центра доски. В силу симметрии доски 10×10 после хода Даурена у Асхата всегда будет ход. ●

Пример 3 (рекомендация 1). Игра начинается с числа 1. За ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до 11. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000. Кто выигрывает при правильной игре?

○ *Решение.* Анализируя с конца, находим выигрышные позиции. Это целые числа от 46 до 90 и число 4. Таким образом, выигрывает первый игрок. Для этого он первым ходом выберет число 4. Тогда второй может получить числа 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44. Первый из этих чисел получит: 88, 84, 80, 80, 72, 84, 64, 72, 80 соответственно. После этого второй получит целое число, не большее 924 и не меньшее 128. Затем первый умножит результат на 11 и поскольку $128 \cdot 11 = 1408 > 1000$, выиграет первый игрок. ●

Пример 4 (рекомендация 2). На столе лежит 101 спичка. Разрешается по очереди брать не более 5 спичек. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю. Кто выигрывает при правильной игре?

○ *Решение.* Начинающий первым ходом берет 5 спичек, а затем каждый раз дополняет число спичек, взятых соперником, до 6, т.е. если второй берет x спичек, то первый берет $6\text{-}x$ спичек. Поскольку 101 при делении на 6 имеет остаток 5, то первый выигрывает. ●

Пример 5 (рекомендация 4). На столе лежат две стопки монет: в одной из них 50 монет, а в другой — 40. За ход разрешается взять любое количество монет из одной стопки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

○ *Решение.* Выигрывает первый игрок. Первым ходом он делает стопки равными, по 40 монет, а затем, как бы ни шел второй игрок, у первого есть возможность из другой кучки взять столько же монет (есть возможность делать симметричные ходы), поэтому последний ход сделает первый игрок. ●

Пример 6 (рекомендация 5). Двое игроков по очереди выставляют на доску 55×55 по одной шашке. При этом ни в одной линии (горизонтали или вертикали) не должно быть больше двух шашек. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

○ *Решение.* Переформулируем задачу. Есть два ряда по 55 точек в каждом (точки одного ряда обозначают горизонтали доски, точки другого — вертикали). Постановке шашки на пересечение горизонтали и вертикали соответствует проведение отрезка, соединяющего точки, которые обозначают эти горизонталь и вертикаль. Таким образом, правила запрещают проводить из одной точки больше двух отрезков. Второй игрок должен играть (за исключением последнего хода) так, чтобы после каждого его хода проведенные отрезки образовывали незамкнутую ломаную (возможно самопересекающуюся). Тогда после k-го хода второго игрока ломаная будет состоять из $2k$ звеньев и проходить через $2k + 1$ точку (k точек одного ряда и $k + 1$ — другого). Поэтому первые 54 хода второй игрок всегда сможет продолжить ломаную или соединить ее с отдельным отрезком, проведенным первым на предыдущем ходе. Последним, 55-м ходом, второй игрок должен соединить отрезком начало и конец ломаной, превращая ее в замкнутую ломаную, проходящую через все 110 точек. После этого первый игрок не сможет сделать ход. ●

796. Шоколадка представляет собой прямоугольник 5×8, разделенный углублениями на 40 квадратиков. Двое по очереди разламывают ее на части по углублениям: за один ход можно разломить любой из кусков (больше одного квадратика) на два. Кто не может сделать хода (все куски уже разломаны), проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

797. Имеется восемь шаров: два красных, два синих, два белых и два черных. Игроки A и $Б$ по очереди прикрепляют по одному шару к одной из вершин куба. Игрок A стремится к тому, чтобы нашлась такая вершина, что на ней и на трех соседних вершинах имелись бы шары всех четырех цветов, а игрок $Б$ стремится к тому, чтобы этому помешать. Кто и как выиграет при правильной игре?

Рассмотрим несколько наиболее распространенных игр.

Теорема 49. *Пусть имеется n предметов. Играют двое, ходят по очереди. При каждом ходе играющий берет* 1, 2, ..., *k предметов, $k < n$. Выиграет тот, кто возьмет последний предмет. Тогда*

а) *если n кратно $k + 1$, то выиграет второй: второй берет так, чтобы все время оставалось количество предметов, кратное $k + 1$;*

б) *если n* **не** *кратно $k + 1$, то выиграет первый: первый берет сначала количество предметов, равное остатку от деления числа n на $k + 1$, и далее берет после второго так, чтобы все время оставалось количество предметов, кратное $k + 1$.*

Теорема 50. *Пусть двое играют в игру, где имеется полоска бумаги длиной в m клеток, которые занумерованы числами* 0, 1, 2, ..., *$m - 1$. В начальный момент фишка стоит в клетке с номером p ($p \le m - 1$), и каждый может по очереди передвинуть ее на не более чем k клеток влево. Проигравшим считается тот, кому некуда ходить. Тогда*

а) *если $p = 0$, то проигрывает первый;*

б) *если $p \le k$, то проигрывает второй;*

в) *если $p > k$ и p кратно $k + 1$, то проигрывает первый;*

d) *если $p > k$ и p не кратно $k + 1$, то проигрывает второй.*

798. Двое играют в крестики-нолики: начинающий пишет крестики, второй игрок — нолики. Докажите, что существует стратегия, следуя которой начинающий не проиграет.

799. Имеется полоска клетчатой бумаги в 15 клеток, и ее клетки занумерованы числами 0, 1, 2, ..., 14. Два игрока по очереди передвигают фишку, которая стоит в клетке с номером 11, влево на одно, два или три поля. Проигравшим считается тот, кому некуда ходить. Кто выиграет при правильной игре?

800. Имеется куча из 11 камней. Двое играющих по очереди берут по своему усмотрению один, два или три камня. Проигрывает тот, кто возьмет последний камень. Кто выиграет при правильной игре?

801. Из кучки, где имеется нечетное число спичек, каждый из двух играющих берет себе по очереди одну или две спички. Выигрывает тот, у кого в конце игры окажется четное количество спичек. В каких случаях и при какой стратегии выигрывает начинающий? В каких случаях и при какой стратегии выигрывает начинающий, если по условию задачи выигрывает тот, у кого в конце окажется нечетное число спичек?

802. На столе лежат две кучи шаров. Два игрока по очереди берут со стола любое число шаров, но при одном ходе из какой-либо одной кучи. Выигравшим считается тот, кто берет со стола последние шары. Начинающий имеет право либо начать игру, либо предоставить первый ход противнику. Кто и как выигрывает при правильной игре?

803. На круглом столе лежат 11 шашек: 5 черных и 6 белых. Пятеро сидящих за столом ребят играют в следующую игру. Сначала каждый берет одну шашку. Затем каждый берет еще одну шашку. Последнюю шашку забирает первый игрок. Если у него оказывается все три шашки одинакового цвета, то он выиграл и игра прекращается, если нет, то он оставляет себе две шашки одинакового цвета, а третью предлагает противнику. Если у того все шашки окажутся одного цвета, то он выиграл, если нет, то поступает аналогично предшествующему и т.д. Может ли так случиться, что каждый сделает не меньше двух ходов?

804. Играют двое. Начинающий называет произвольное натуральное число, не превышающее десяти. Противник прибавляет к названному числу свое натуральное число, не превышающее десяти, и сообщает сумму. К этой сумме начинающий прибавляет какое-либо натуральное число, опять-таки не превышающее десяти, и сообщает сумму. К новой сумме противник прибавляет натуральное число не превышающее десяти и т.д. Выигрывает тот, кто первым достигнет ста. Как добиться победы?

805. Двое играют в следующую игру: каждый игрок по очереди вычеркивает одно число из ряда 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 до тех пор, пока не останется два числа. Если сумма этих чисел делится на 5, то выигрывает первый игрок, если не делится, то второй. Докажите, что первый игрок имеет выигрышную стратегию.

806. Двое играют в следующую игру. Каждый игрок по очереди вычеркивает девять чисел (по своему выбору) из последовательности 1, 2, ..., 100, 101. После одиннадцати таких вычеркиваний останутся два числа. Затем второй игрок присуждает первому столько очков, какова разница между этими оставшимися числами. Докажите, что первый игрок всегда сможет набрать по крайне мере 55 очков, как бы ни играл второй.

807. На доске написано число 60. За один ход разрешается уменьшить число на любой из его целых положительных делителей (в том числе на единицу и на само число). Если при этом получается нуль, то игрок проиграл. Кто выиграет при правильной игре?

808. Часы показывают полдень. Двое играющих по очереди переводят часовую стрелку на два или на три часа вперед. Если после хода игрока стрелка указывает на 6, то он выиграл. Кто выиграет при правильной игре?

809. Двое игроков по очереди кладут по одной шашке на круглый стол. Класть шашки друг на друга нельзя. Шашки одинакового размера, и их достаточно, чтобы закрыть им весь стол. Выигравшим считается тот, кто положит шашку на последнее свободное место на столе. Докажите, что начинающий при правильной игре выигрывает.

810. Мальчик и девочка играют в такую игру: они по очереди ставят ладьи на шахматную доску. Выигрывает тот, после хода которого все клетки доски оказываются побиты поставленными фигурами. Как следует вести себя в начале мальчику: уступить или нет первый ход (быть или не быть в этой ситуации джентльменом), если оба хотят выиграть и стараются играть наилучшим образом?

811. В одном ящике лежат 15 синих шаров, в другом — 12 белых. Одним ходом разрешается взять 3 синих шара или два белых. Выигрывает тот, кто берет последние шары. Кто выиграет при правильной игре?

812. На доске написаны числа 25 и 35. За один ход разрешается дописать еще одно натуральное число — разность любых двух имеющихся на доске чисел, если она еще не встречалась. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

813. Имеется 15 предметов. Играют двое, ходят по очереди. При каждом ходе играющий берет один или три предмета. Выигрывает тот, кто возьмет последний предмет. При какой стратегии выигрывает начинающий?

814. Двое играют в следующую игру. Имеется три кучки камней: в первой — 10, во второй —15, в третьей — 20. За один ход разрешается разбить любую кучу на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

815. Имеется 22 предмета. Играют двое, ходят по очереди. При каждом ходе играющий берет два или четыре предмета. Выигрывает тот, кто берет последний предмет. При какой стратегии выигрывает начинающий?

816. Имеется две кучки спичек, в одной — 20 спичек, в другой — 25. Каждый из двух играющих по очереди выбрасывает одну из кучек, а другую разбивает на части. Проигравшим считается тот, кто не сможет сделать очередного хода из-за того, что в каждой кучке осталось по одной спичке. Кто и как выиграет при правильной игре?

817. (Московская математическая олимпиада, 1999) Двое играют в следующую игру: первый выписывает в ряд по своему желанию буквы А и Б (слева направо одну за другой; по одной букве за ход), а второй после каждого хода первого меняет местами любые две из выписанных букв или ничего не меняет (это тоже считается ходом). Игра заканчивается, когда оба сделают по 1999 ходов. Может ли второй играть так, чтобы при любых действиях первого игрока в результате получится палиндром (т.е. слово, которое читается одинаково слева направо и справа налево)?

Изоморфизм игр

818. На поле $f8$ шахматной доски стоит ферзь. Играют двое по очереди. Каждый за один ход может передвинуть ферзя либо на несколько клеток вниз по вертикали, либо на несколько клеток влево-вниз по диагонали, либо на несколько клеток влево по горизонтали. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто и как выигрывает при правильной игре?

819. В двух кучах лежат камни: в первой — m камней, во второй n $(m \neq n)$. Играют двое, ходят по очереди. Каждый из игроков при своем ходе может взять либо произвольное число камней из первой кучки, либо любое число камней из второй кучки, либо поровну камней из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Существует ли выигрышная стратегия для начинающего?

820. Имеется 10 фишек: 2 белых, 2 черных, 2 красных, 2 синих и 2 зеленых. Два игрока A и B ставят по очереди по одной фишке в одной из вершин выпуклого 10-угольника. Игрок A хочет получить пять последовательных вершин всех пяти цветов, а игрок B стремится этому помешать. Игру начинает B. Кто выиграет при правильной игре?

821. На листке бумаги написаны два натуральных числа. Двое играющих по очереди делают ходы. Ход играющего состоит в том, что он зачеркивает любое из написанных чисел и вместо него пишет любое натуральное число, меньшее зачеркнутого, или нуль. Игра продолжается до тех пор, пока не будут написаны нули. Выигрывает тот, кто последним пишет нуль. Как должен вести игру начинающий, чтобы выиграть? В каком случае для выигрыша первый ход следует уступить противнику?

822. На одной из клеток доски 8×8 стоит шашка. Двое играющих по очереди перемещают шашку на одно поле вверх или вправо, или по диагонали вправо-вверх. Проигравшим считается тот, кто не может сделать очередной ход из-за того, что шашка оказалась в правом верхнем углу. При каких начальных позициях выигрывает начинающий, а при каких — второй игрок?

823. Между соседними лагерями один день пути. Экспедиции требуется перенести одну банку консервов в лагерь, находящийся в 5 днях пути от базового лагеря, и вернуться обратно, при условии что

- ✓ при каждом переходе каждый член экспедиции может взять с собой не более трех банок консервов;
- ✓ в день каждый съедает банку консервов;
- ✓ оставлять консервы можно только в промежуточных лагерях.

Какое наименьшее количество банок консервов придется взять из базового лагеря для этой цели?

824. Двое игроков отмечают точки на плоскости. Сначала первый отмечает точку красным цветом, затем второй отмечает 100 точек синим, затем первый снова одну точку красным цветом, второй 100 точек синим и так далее. Перекрашивать уже отмеченные точки нельзя. Докажите, что первый может построить правильный треугольник с вершинами в красных точках.

825. Двое играют в такую игру. Первый называет любое натуральное число от 2 до 9, второй умножает его на любое натуральное число от 2 до 9, первый умножает результат на любое натуральное число от 2 до 9 и т.д. Выигрывает тот, у кого получится число больше 1000. Кто выиграет при правильной игре?

Занятия 159–162

Математическая абака № 4

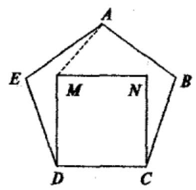
Призы: каждая из команд получает блоки в количестве $\left[\frac{N}{160}\right]$, где N — количество очков, которые заработала команда.

Задачи

	Магия	Числа	Комбинаторика
10	$x^2-53x+360=0$	Про натуральное число a известно, что число $3a$ является полным квадратом, а $5a$ является кубом натурального числа. Кроме того, a не делится на шестую степень какого-либо натурального числа, большего единицы. Найдите a.	Ферзь называется добрым, если он бьет не более 3 ферзей. Какое максимальное количество добрых ферзей можно поставить на шахматную доску?
20	$144x^2+32x-1=0$	Произведение нескольких (не обязательно различных) простых чисел в 10 раз больше, чем их сумма. Найдите эти числа.	Сколькими способами можно расположить на полке подряд шесть книг: два тома Достоевского, два тома Гоголя и два тома Тургенева, если Достоевского нельзя ставить по соседству с Тургеневым? (Все тома разные.)
30	$10x^2-17x-6=0$	Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $\text{НОК}(n, k) = 2^3 3^5 5^7$?	Каждая клетка доски 8×8 покрашена в один из цветов: желтый или черный. Известно, что в каждом уголке из трех клеток есть клетки обоих цветов. Сколько клеток доски может быть покрашено в желтый цвет?

	Магия	Числа	Комбинаторика
40	$27(x^2+1)^2-8x^2-$ $-27=0$	Найдите все натуральные числа n такие, что наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$ не кратно ни одному из чисел $n+1$, $n+2$, $n+3$.	В шахматном турнире по круговой системе (каждый играет с каждым ровно один раз) каждый из шахматистов ровно половину своих очков набрал во встречах участниками, занявшими последние три места. Сколько шахматистов участвовало в турнире?
50	$(x^2+x+1)^2-$ $-2(x^3+x^2+$ $+x)-3x^2=0$	Число 3^{2009} представлено в виде суммы k последовательных натуральных чисел. Чему равно наибольшее возможное значение k?	Пусть p — нечетное число, имеющее ровно n различных простых делителей. Сколько существует решений уравнения $p^2+b^2=c^2$ со взаимно простыми b и c (то есть примитивных пифагоровых троек (p, b, c))?
60	$\sqrt{3}(x^2+2x+2)=$ $=4(x+1)$	Множество S состоит из нескольких различных целых чисел. Известно, что для любых двух из них можно составить квадратный трехчлен ax_2+bx+c, корнями которого они являются, используя в качестве коэффициентов a, b, c числа из множества S (одно число можно использовать несколько раз). Какое наибольшее количество чисел может быть в таком множестве?	Назовем фигурой объединение единичных квадратов, не имеющих общих сторон, а вершинами фигуры — вершины этих квадратов. $F(M)$ — объединение образов фигуры M при центральных симметриях относительно всех вершин фигуры M. Найти площадь фигуры $F(F(\ldots F(M)\ldots))$ (F повторяется 2010 раз), где M — единичный квадрат.
Ответ считается правильным, если приведены все правильные варианты и нет ни одного неверного!			

	Решение уравнений в целых числах	Геометрия	Текстовые задачи и логика
10	$13x-18y=2010$	В треугольнике ABC с углом BAC, равным 24°, на сторонах AB и AC взяты точки X и Y соответственно. При этом окружность с центром в Y, проходящая через A, проходит также через X, а окружность с центром в X, проходящая через B, проходит также через C и Y. Найдите $\angle ABC$.	Рекс, Джульбарс, Тарзан, Барбос и Шарик резвятся на лужайке. Рекс вцепился в того, кто вцепился в Джульбарса, Джульбарс — в того, кто вцепился в Тарзана, Тарзан — в того, кто вцепился в Барбоса, Барбос — в того, кто вцепился в Шарика, Шарик — в того, кто вцепился в Рекса. Кто же вцепился в Рекса?
20	$7x-12y-34z=2009$	AB — диаметр единичной окружности с центром в точке O. C и D — такие точки на окружности, что AC и BD пересекаются внутри окружности в точке Q и $\angle AQB=2\angle COD$. Найдите $\angle OCD$.	В лаборатории социальной справедливости работает 15 сотрудников. Заведующий лабораторией каждый месяц повышает зарплату на 1 доллар 13 из них по своему усмотрению. Может ли он уравнять зарплаты вне зависимости от их начального уровня? Зарплаты всегда выражаются целым числом долларов. Если да, то сколько понадобится месяцев, чтобы одному сотруднику поднять зарплату на 1 доллар относительно других?

	Решение уравнений в целых числах	Геометрия	Текстовые задачи и логика
30	$2xy - 7x + 5y = 24$	Существует ли выпуклый четырехугольник, у которого сумма длин диагоналей не меньше, чем сумма дин всех сторон?	Какое наибольшее число ненулевых цифр можно выбрать так, чтобы разность любых двух выбранных была не выбрана?
40	$5x^2 - 19xy - 10y^2 = 17$	 На рисунке *ABCDE* — правильный пятиугольник, а *MNCD* — квадрат. Вычислите разницу углов $\angle AMN - \angle EAM$ в градусах.	Даны натуральные числа A и B. Известно, что из следующих четырех утверждений три верных, а одно – неверное: а) $A + 1$ делится на B, б) $A = 2B + 5$, в) $A + B$ делится на 3, г) $A + 7B$ – простое число. Найти все возможные пары чисел A и B.

	Решение уравнений в целых числах	Геометрия	Текстовые задачи и логика
50	$2x^2 - 5xy - 3y^2 + x - 7y = 85$	Две противоположные стороны *AB* и *CD* выпуклого четырехугольника *ABCD* лежат на перпендикулярных прямых. Расстояние между серединами сторон *BC* и *AD* равно 5. Найдите расстояние между серединами диагоналей *AC* и *BD*.	На дне рождения Тани ее старший брат — сорокалетний Вася — обнаружил, что если любой из присутствующих уйдет, то оставшиеся смогут разбиться на две группы так, что сумма числа полных лет членов первой группы будет равна сумме числа полных лет членов второй группы. Сколько лет исполнилось Тане? (Укажите все возможные варианты.)
60	$5x^2 + 12xy + 9y^2 + 2x + 6y + 2 = 0$	Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до всех вершин и до всех сторон треугольника — наименьшая.	Однажды улитка заползла с земли на вершину бамбука, который растет так, что каждая точка его стебля поднимается вверх с одной и той же скоростью. На это ей потребовалось 7 часов. Отдохнув ровно час на вершине, она спустилась на землю за 8 часов. Во сколько раз скорость улитки больше скорости роста бамбука, если обе скорости постоянны?
Ответ считается правильным, если приведены все правильные варианты и нет ни одного неверного!			

ОТВЕТЫ

	Магия	Числа	Комбинаторика	Решение уравнений в целых числах	Геометрия	Текстовые задачи и логика
10	8; 45	675	16 ферзей	$x = 30 + 18t$, $y = -90 + 13t$, $t \in \mathbb{Z}$	54°	Тарзан
20	$-\frac{1}{4}; \frac{1}{36}$	2, 3, 5, 5	96	$(10045 - 34t + 60y; y; 2009 - 7t + 12y)$, $y \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{Z}$	60°	Может. 7 месяцев.
30	–0,3; 2	$8 \times 12 \times 16 = 1536$	32	(4; 4), (–2; 10); (–9; 3), (–3; –3)	нет	5 цифр
40	0	1, 2, 6	9 шахматистов	Не имеет решений	36°	$A = 9, B = 2$ или $A = 17, B = 6$
50	–1; 1	2×3^{1004}	2^n	(35; 12), (–33; –10)	5	8 лет или 24 года
60	$-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$; $-1 + \sqrt{3}$	Три числа	$\frac{3^{2010} + 1}{2}$	(1; –1)	ортоцентр	В 9 раз

Коллоквиум № 4

Для получения допуска к сдаче коллоквиума необходимо показать решение не менее 100% — (оценка за предыдущий коллоквиум) × 10% от общего количества задач, т.е. от 80 до 120 задач (всего 169 задач).

Критерии оценок и пр. см. в материале к Коллоквиуму №1.

Список вопросов

1. Теорема об определении сильнейшего участника из n команд по кубковой схеме.
2. Теорема об упорядочивании нескольких предметов.
3. Троичная система счисления и взвешивания на чашечных весах без гирь.
4. Задача о короле и 30 рыцарях и взвешивания на весах со стрелкой.
5. Неравенство треугольника. Применения. Теорема о пересечении двух окружностей.
6. Задача о разрезании треугольника. Теорема о средней линии треугольника. Теорема о медианах.
7. Стратегии. Рекомендации с примерами.
8. Постановка комбинаторной задачи. Проблемы (задачи) комбинаторики. Основное комбинаторное правило.
9. Упорядоченные выборки с возвращением. Упорядоченные выборки без возвращения (размещения). Перестановки. Перестановки с повторениями и с ограничениями.
10. Неупорядоченные выборки с возвращением. Неупорядоченные выборки без возвращения (сочетания).
11. Различные определения выборки в комбинаторике. Сравнение двух подходов в комбинаторике.

Занятия 163–168

Шахматная доска

В «Журнале развлекательной математики» за июль 1968 г. Л.Д. Ярбро предложил новый вариант классической задачи о пути коня по шахматной доске. Вдобавок к правилу, что конь, путешествуя по шахматной доске, не должен заходить на одну и ту же клетку дважды (за исключением последнего хода, который в некоторых случаях позволяет коню вернуться в исходную клетку), коню также запрещено пересекать свой собственный путь. Естественно поставить вопрос, каков же максимально длинный путь коня по квадратным доскам различных размеров. На рис. 11 приведены примеры самых длинных путей коня, найденных Ярбро для квадратных досок порядков от 3 до 8.

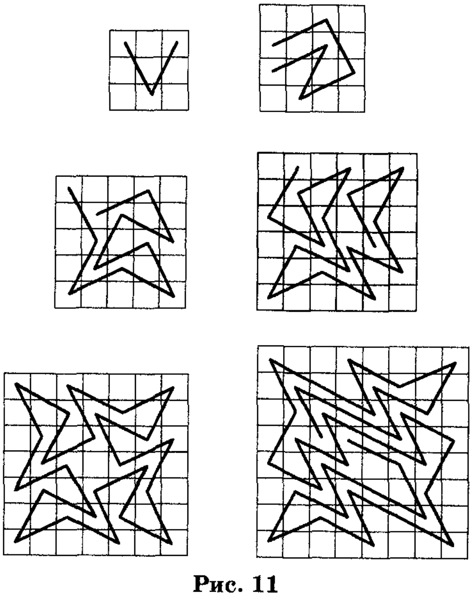


Рис. 11

Среди этих рисунков особый интерес представляет доска 6×6, поскольку Ярбро не смог найти наиболее длинный непересекающийся путь. Найденный им путь состоял из 16 ходов, однако на этой доске существует и непересекающийся путь в 17 ходов (см. рис. 12).

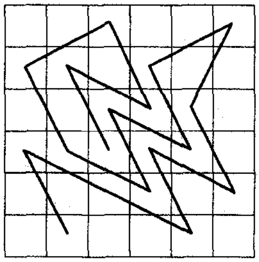


Рис. 12

826. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1973) Каждая клетка шахматной доски представляет собой квадрат со стороной 1. Шахматный король обошел все поля такой доски, побывав на каждом по одному разу, и последним ходом вернулся на исходное поле. Когда соединили центры полей, которые он последовательно проходил, получилась замкнутая ломанная без самопересечений. Какую наибольшую длину могла она иметь?

827. Какую наибольшую длину будет иметь ломанная в задаче 833, если она может самопересекаться?

828. Какую наибольшую длину будет иметь ломанная в задаче 833, если она не замкнутая и без самопересечений?

829. Какую наибольшую длину будет иметь ломанная в задаче 833, если она не замкнутая и может самопересекаться?

830. Какое наибольшее число клеток шахматной доски можно отметить, чтобы не нашлось ни одного прямоугольного треугольника с вершинами в центрах отмеченных клеток?

831. Какое наибольшее число клеток шахматной доски можно отметить, чтобы не нашлось ни одного тупоугольного треугольника (параллелограмма, трапеции) с вершинами в центрах отмеченных клеток?

832. На шахматной доске стоит фигура «верблюд», которая каждым ходом сдвигается на три клетки по вертикали и одну по горизонтали, или на три по горизонтали и одну по вертикали. Может ли «верблюд», сделав несколько ходов, встать на клетку, соседнюю исходной по стороне?

833. В каждой клетке квадрата 5×5 сидит жук. По команде каждый жук переполз на одну из соседних по стороне клеток. Может ли после этого оказаться так, что в каждой клетке снова будет сидеть ровно один жук? А если бы исходный квадрат был 6×6?

Разрезания и раскраска

834. При каких p и q прямоугольник $p \times q$ можно замостить плитками размером 2×1?

835. Имеются четыре квадрата со стороной 1, восемь — со стороной 2, двенадцать — со стороной 3. Можно ли из них сложить один большой квадрат?

836. Какое наибольшее число полосок размерами 1×5 клеток можно выкроить из квадрата клетчатой бумаги размером 8×8 клеток?

837. У мастера есть лист жести размером 22×15 кв. дм. Мастер хочет вырезать из него как можно больше прямоугольных заготовок размером 3×5 кв. дм. Помогите ему.

838. Можно ли прямоугольник 35×23 клетки разрезать без остатка на прямоугольники размером 5×7? Если можно, то как? Если нет, то почему?

839. Взяли квадрат клетчатой бумаги размером 8×8, отрезали от него две клетки (левую нижнюю и правую верхнюю). Можно ли полученную фигуру полностью покрыть доминошками — прямоугольниками 1×2?

840. Можно ли квадрат клетчатой бумаги 10×10 разрезать на фигурки следующего вида (рис. 13)?

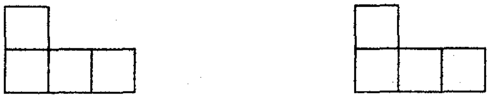
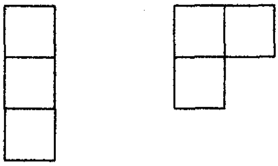


Рис. 13

841. Можно ли квадрат 8×8 клеток с вырезанной угловой клеткой разрезать на а) уголки и столбики, б) столбики, в) уголки (см. рис. 14)?



Столбики Уголки

Рис. 14

842. Известно, что квадрат клетчатой бумаги размером 8×8 покрыли несколькими плитками 2×2 и несколькими полосками 1×4. Можно ли покрыть квадрат 8×8, если одну плитку заменить полоской?

843. Набор «Юный паркетчик» состоит из 12 столбиков, плотно уложенных в коробку размером 6×6 клеток. Хулиган Вася сломал один столбик, и его заменили уголком. Удастся ли теперь все детали уложить в эту же коробку?

844. Докажите, что фигуру на рис. 15 нельзя разрезать на столбики.

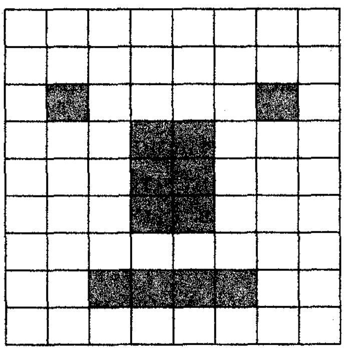
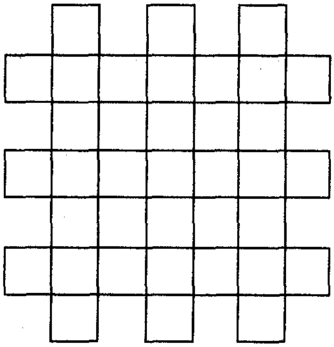


Рис. 15

845. На какое наименьшее число прямоугольников можно разрезать фигуру на рис. 16 (если разрезать можно только по сторонам клетки)?



846. Можно ли замостить шашечную доску 10×10 плитками размером 4×1?

847. Докажите, что если прямоугольник клетчатой бумаги размером $m \times n$ разрезали на полоски 1×5, то хотя бы одно из чисел m, n делится на 5.

848. Докажите, что если прямоугольник клетчатой бумаги размером $m \times n$ разрезали на полоски 1×6, то хотя бы одно из чисел m, n делится на 6.

849. Раскрасьте клетки таблицы 3×3 в наибольшее число цветов (каждую клетку — одним цветом) так, чтобы для любых двух цветов нашлись клетки этих цветов, имеющих общую сторону.

850. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить доску 4×4 (каждую клетку одним цветом) так, чтобы в каждом квадрате 2×2 нашлась пара клеток одного цвета?

851. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить доску 8×8 клеток так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета? Каждая клетка закрашивается целиком только в один цвет.

852. Расставьте крестики и нолики в квадрате 5×5 клеток так, чтобы в каждой строке (кроме, быть может, первой) крестиков было больше, чем ноликов, и в каждом столбце (кроме, быть может, последнего) ноликов было бы больше, чем крестиков. Пустых клеток быть не должно!

853. Дан квадрат 5×5. Закрасьте некоторые клетки белой краской, а остальные черной так, чтобы в любом квадрате 3×3 оказалось ровно 8 белых клеток.

854. Взяли квадрат клетчатой бумаги 6×6 клеток. Придумайте раскраску клеток в четыре цвета так, чтобы любые две клетки, между которыми есть ровно одна клетка (по горизонтали, вертикали, диагонали), были покрашены в разные цвета. Соседние клетки можно красить в один цвет.

855. Некоторые клетки квадрата 4×4 белые, а остальные черные. Известно, что у каждой белой клетки ровно 3 черные соседки (по стороне), а у каждой черной клетки — ровно 1 белая соседка. Восстановите раскраску по этим условиям.

856. Буратино взял квадрат клетчатой бумаги 8×8 клеток, некоторые клетки закрасил черным, а остальные оставил белыми. Посмотрел и говорит: «У каждой черной клетки ровно две черные соседки (по стороне)». Лиса Алиса картинку не видела, но утверждает, что черных клеток не больше, чем 36. Права ли она?

857. Рома, Сема и Тома взяли по квадрату клетчатой бумаги 5×5 клеток. Каждый закрасил 16 клеток черным, а остальные оставил белыми. Оказалось, что у каждой черной клетки ровно две черные соседки (по стороне). Рома хотел пройти по всем черным клеткам, переходя из клетки в соседнюю, но этого было сделать нельзя. На чертеже у Семы это было сделать можно, но некоторые черные клетки не имели белых соседей. Наконец, у Томы был чертеж, где можно было пройти по всем черным клеткам, переходя от соседки к соседке, и у каждой черной клетки была черная соседка. Какие были чертежи?

858. Клетки квадрата 7×7 раскрасьте в наименьшее число цветов (каждую одной краской) так, чтобы у каждой клетки все четыре соседки (по стороне) были разных цветов.

Занятия 169–174

Измерение углов, связанных с окружностью

Теорема 51 (об измерении вписанного угла). *Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.*

Теорема 52 (об измерении угла с вершиной внутри круга). *Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой двух дуг, одна из которых расположена внутри угла, а другая — внутри угла, вертикального данному.*

Теорема 53 (об измерении угла с вершиной вне круга). *Угол, вершина которого расположена вне круга, а каждая из сторон пересекает окружность в двух точках, измеряется полуразностью дуг, заключенных внутри угла.*

Теорема 54 (измерение угла между касательной и хордой). *Угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги, заключенной внутри этого угла.*

859. Продолжения высот остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около этого треугольника окружность в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1, BB_1, CC_1.

860. (Задача Архимеда) В дугу AB окружности вписана ломаная AMB из двух отрезков ($AM>MB$). Докажите, что основание перпендикуляра KH, опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам, т. е. $AH = HM + MB$.

861. Даны диаметр AB, перпендикулярная ему хорда CD и точка M окружности, отличная от точек C и D. Докажите, что лучи MA и MB делят пополам углы, образованные пересечением прямых MC и MD.

862. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку K первой окружности проводят прямые KA и

KB, пересекающие вторую окружность в точках P и Q. Докажите, что хорда PQ второй окружности перпендикулярна диаметру KM первой окружности.

863. Две окружности пересекаются в точках A и B. Продолжения хорд AC и BD первой окружности пересекают вторую окружность в точках E и F. Докажите, что прямые CD и EF параллельны.

864. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, AH — высота. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

865. Точки A, B, C, D лежат на одной окружности. Точки M, N, K, L — середины дуг BA, CB, DC, AD соответственно. Докажите, что $MK \perp NL$.

866. В треугольнике ABC стороны CB и CA равны соответственно 3 см и 4 см. Биссектриса угла ACB пересекает сторону AB в точке K, а описанную около треугольника ABC окружность — в точке M. Окружность, описанная около треугольника AMK, вторично пересекает прямую CA в точке P. Найдите AP.

867. Продолжения противоположных сторон AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а сторон AD и BC — в точке N. Докажите, что биссектрисы углов AMD и DNC взаимно перпендикулярны.

868. Две окружности касаются внутренним образом в точке M. Пусть AB — хорда большей окружности, касающейся меньшей окружности в точке T. Докажите, что MT — биссектриса угла AMB.

869. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M. Докажите, что прямая, проходящая через точку M и середину стороны AD, перпендикулярна BC.

870. Равные хорды окружности с центром O пересекаются в точке M. Докажите, что MO — биссектриса угла между ними.

871. Дана окружность с центром O. На продолжении хорды AB за точку B отложен отрезок BC, равный радиусу. Через точки C и O проведена секущая CD (D — точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Докажите, что $\angle AOD = 3\angle ACD$.

872. Через концы диаметра окружности проведены две хорды, пересекающиеся на окружности и равные 12 и 16. Найдите расстояния от центра окружности до этих хорд.

873. Известно, что AB — диаметр окружности, а хорды AC и BD параллельны. Докажите, что $AC = BD$, а CD — также диаметр.

874. Биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках P и Q. Докажите, что окружность, построенная на отрезке PQ как на диаметре, проходит через точку A.

875. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, $\angle AOC = 60°$. Найдите угол AMC, где M — точка пересечения биссектрис треугольника ABC.

876. Окружность S_2 проходит через центр O окружности S_1 и пересекает ее в точках A и B. Через точку A проведена касательная к окружности S_2; D — вторая точка пересечения этой касательной с окружностью S_1. Докажите, что $AD = AB$.

Занятия 175–184

Введение в теорию графов: терминология

Определение 1. Пусть дан граф $G = (V, E)$. Граф G называется *полным*, если любые две его вершины смежные.

Полный граф, имеющий n вершин (граф порядка n), обозначается символом K_n, число ребер в нем равно $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

877. В соревновании по круговой системе с двенадцатью участниками провели все встречи. Сколько было встреч сыграно?

878. В шахматном турнире, в котором каждый участник должен был встретиться с каждым, один шахматист заболел и не доиграл свои партии. Всего в турнире было проведено 24 встречи. Сколько шахматистов участвовало в турнире и сколько партий сыграл выбывший участник?

879. В шахматном турнире, в котором каждый участник должен был встретиться с каждым, два шахматиста заболели и выбыли из турнира до того, как прошла его половина. Всего в турнире было проведено 94 встречи. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

880. В шахматном турнире, в котором каждый участник должен был встретиться с каждым, два шахматиста заболели и выбыли из турнира после того, как прошла его половина. Всего в турнире было проведено 94 встречи. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

881. Чемпионат молодежного лагеря по футболу проводился по круговой схеме. За победу в матче давалось 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. Если две команды набирали одинаковое количество очков, то место определялось по разности забитых и пропущенных мячей. Чемпион набрал 7 очков, второй призер — 5, третий — 3. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место?

882. Чемпионат молодежного лагеря по футболу, в котором участвовало нечетное число команд, проводился по круговой схеме. За победу в матче давалось 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. Если две команды набирали одинаковое количество очков, то место определялось по разности забитых и пропущенных мячей. Каждая команда одержала хотя бы одну победу. Чемпион набрал 10 очков, второй призер — 7, третий — 5. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место?

Определение 2. Граф с n вершинами называется *помеченным*, если его вершины занумерованы числами от 1 до n. Два помеченных графа считаются равными, если множества ребер и вершин у них совпадают.

Теорема 55. *Число помеченных графов с n вершинами равно 2^k, где $k = n(n-1)/2$.*

883. В игре «Спортлото-Шиш» розыгрыш главного приза происходит по следующим правилам. Каждый присутствующий в студии пишет независимо от других любое число различных пар целых чисел из множества от 1 до 7 (отказаться писать нельзя). Если у некоторых участников выписанные ими пары совпадут, то эти участники делят между собой 1 000 000 тенге. Сколько участников должно быть в студии, чтобы приз заведомо оказался разыгранным?

884. В игре «Спортлото-Шиш» розыгрыш главного приза происходит по следующим правилам. Каждый присутствующий в студии пишет независимо от других 8 различных пар целых чисел из множества от 1 до 7 (отказаться писать нельзя). Если у некоторых участников выписанные ими пары совпадут, то эти участники делят между собой 1 000 000 тенге. Сколько участников должно быть в студии, чтобы приз заведомо оказался разыгранным?

Определение 3. Граф называется *пустым*, если в нем нет ребер. Пустой граф порядка n обозначается O_n.

885. В футбольном турнире 20 команд сыграли 8 туров: каждая команда сыграла с 8 разными командами. Докажите, что найдутся три команды, пока не сыгравшие между собой ни одного матча.

886. В городе 25 универсамов. Известно, что из любых трех универсамов можно выбрать два, расстояния между которыми меньше одного километра. Докажите, что среди универсамов найдутся 13, лежащих в круге радиуса 1 км.

887. В городском районе расположено 50 магазинов. Известно, что из любых четырех магазинов три находятся на расстоянии не больше 1 км от четвертого. Докажите, что все магазины находятся в круге радиуса 1 км.

888. В любой компании из пяти человек, среди любых трех человек найдутся двое знакомых и двое незнакомых друг с другом. Докажите, что компанию можно рассадить за круглым столом так, чтобы по обе стороны от каждого человека сидели его знакомые.

889. Известно, что в компании каждый человек знаком не менее чем с половиной присутствующих. Докажите, что можно выбрать из компании четырех человек и рассадить их за круглым столом так, что при этом каждый будет сидеть рядом со своими знакомыми.

890. Имеется некоторая компания. Человека называют нелюдимым, если у него не более 3 знакомых в компании. Известно, что у каждого человека из компании не менее трех нелюдимых знакомых. Докажите, что в этой компании все нелюдимые.

891. Назовем человека малообщительным, если у него не более 10 знакомых. Назовем человека чудаком, если все знакомые у него малообщительны. Докажите, что количество чудаков не больше количества малообщительных.

892. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими, и из любого города в любой другой можно перелететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?

Определение 4. Граф называется *связным*, если от любой его вершины можно по ребрам перейти к любой другой. В противном случае граф называется *несвязным.* Будем говорить, что две вершины *принадлежат одной компоненте*, если от одной из них до другой можно перейти по ребрам графа.

Теорема 56. *Если в графе G (с n вершинами) наименьшая степень его вершин* $\delta \geq \dfrac{n-1}{2}$, *то граф связный.*

Теорема 57. *Если граф с n вершинами имеет больше, чем* $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ *ребер, то он связный.*

893. Города страны соединены авиалиниями. Известно, что как бы ни разделить города на две группы, всегда найдется авиалиния, соединяющая какой-нибудь город одной группы с каким-то городом второй группы. Докажите, что можно перелететь из любого города страны в любой город (возможно, с пересадками).

894. Летом Иван отдыхал в молодежном лагере «Восход», где вместе с ним находилось 53 школьника. После окончания отдыха некоторые пары обменялись адресами, причем у каждого из отдыхающих оказалось не менее 26 адресов. Через некоторое время Ивану понадобился адрес Николая, с которым он адресом не обменивался.

а) Докажите, что Иван может узнать адрес Николая, т.е. существует цепочка школьников, которая начинается с Ивана и оканчивается Николаем, и в которой каждая пара обменивалась адресами.

б) Какой наименьшей длины может быть цепочка из школьников, которая начинается Иваном и оканчивается Николаем, и в которой каждая пара соседей обменялась адресами?

895. Маша отдыхала в молодежном лагере «Росинка», где вместе с ней находилось 45 школьников. После окончания отдыха 950 пар обменялись адресами. Через некоторое время Маше понадобился адрес Ирины, с которой она не обменивалась адресами. Докажите, что с помощью отдыхающих в лагере Маша может найти адрес Ирины.

896. Каждый из семи мальчиков имеет не менее трех родных братьев среди них. Докажите, что все мальчики — братья.

897. В стране $2n + 1$ город. Каждая пара городов соединена рейсом только одной из трех авиакомпаний. Докажите, что можно выбрать одну авиакомпанию и $n+1$ город так, что из любого из них можно добраться в любой другой выбранный город рейсами указанной компании.

Определение 5. Пусть дан граф G. Рассмотрим граф $\overline{G}$, который имеет такое же множество вершин, что и граф G, а ребро соединяет две вершины графа $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда эти вершины не соединены ребром в графе G. Граф $\overline{G}$ называется *дополнительным графом* к графу G.

Теорема 58. *Из двух графов, G и дополнительного к нему $\overline{G}$, хотя бы один связен.*

898. В одной стране каждая пара городов соединена только одним транспортным маршрутом: или железнодорожным, или автобусным. Докажите, что из любого города страны в любой другой город можно доехать (возможно, с пересадками) только поездом или только автобусом.

899. В области 5 городов. Каждая пара городов соединена только одним транспортным маршрутом: или железнодорожным, или автобусным. Известно, что не существует ни одной такой тройки городов, что из первого можно попасть во второй, из второго — в третий, а из третьего вернуться в первый, используя для переездов только один вид транспорта. Докажите, что из каждого города выходит ровно два автобус-ных и два железнодорожных маршрута и что существуют автобусные и железнодорожные маршруты, с помощью которых можно объехать все города, побывав в каждом ровно один раз.

900. В международном фестивале участвовало несколько сотен делегатов из разных стран мира. Выяснилось, что из трех любых делегатов по крайней мере двое могут объясняться на каком-то языке. Докажите, что найдется тройка делегатов, в которой каждый может объясниться с каждым.

Определение 6. Граф, все степени которого одинаковы, называется *регулярным* графом.

901. В некоторой компании любые два знакомых не имеют общих знакомых, а любые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых. Докажите, что в этой компании все имеют одинаковое число знакомых.

902. Про некоторую компанию известно, что если два человека из нее знакомы, то они имеют одинаковое в этой компании число знакомых, а если незнакомы — то разное. Докажите, что если в такой компании семьдесят человек, то обязательно найдется один, имеющий не менее одиннадцати знакомых.

903. Про некоторую компанию известно, что каждый человек знаком в ней ровно с шестью людьми и для любой группы из шести человек найдется член компании, знакомый с каждым из этой шестерки. Сколько человек в компании?

904. В лагере 50 школьников. Известно, что среди любых четырех школьников найдется по крайне мере один, знакомый с тремя остальными. Докажите, что найдется школьник, знакомый со всеми школьниками.

905. На конгрессе собрались ученые, среди которых есть знакомые друг с другом. Оказалось, что никакие двое ученых, имеющих равное число знакомых, не имеют общих знакомых. Докажите, что найдется ученый, который имеет только одного знакомого.

906. В городе среди любых трех человек либо никто не враждует, либо враждуют все трое, либо только двое.

Какое наименьшее число жителей может быть в городе, если известно, что каждый из половины жителей имеет 70 врагов, а каждый из второй половины — ровно 90?

Определение 7. Граф, у которого существует пара вершин, соединенные несколькими ребрами, называется *мультиграфом*.

Теорема 59 (лемма о рукопожатиях). *Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу ребер.*

Определение 8. Вершина графа называется *нечетной* (*четной*), если из нее выходит нечетное (четное) число ребер.

Теорема 60. *Во всяком графе количество нечетных вершин четно.*

907. Одиннадцать школьников, уезжая на каникулы, договорились, что каждый из них пошлет открытки трем остальным. Может ли так оказаться, что каждый получит открытки именно от тех, кому сам напишет?

908. В Диснейленде на озере семь островов, из каждого из них выходит один, три или пять мостов. Докажите, что хотя бы один из мостов ведет на берег.

909. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно три дороги, быть ровно 1000 дорог между городами?

910. В шахматном турнире по круговой системе с пятью участниками только Ваня и Леша провели одинаковое число встреч, а все остальные — разное. Сколько встреч сыграли Ваня и Леша?

911. В парке 9 озер. Каждое озеро соединено с другими озерами не менее чем 3 каналами. Какое наименьшее количество каналов может быть в парке?

912. Докажите, что в любой компании, состоящей из четного числа людей, найдутся два таких человека, которые будут иметь четное число общих знакомых.

913. В стране из каждого города выходит 12 дорог, по которым из любого города можно добраться в любой другой. Для ремонта закрыли одну дорогу. Докажите, что и теперь из любого города можно добраться в любой другой.

914. В шахматном турнире участвуют 11 человек. В настоящее время среди любых трех участников по крайне мере двое не сыграли друг с другом. Докажите, что сыграно не более 30 партий.

915. В розыгрыше первенства страны по футболу участвуют 20 команд. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

916. Среди девяти мушкетеров некоторые поссорились и вызвали друг друга на дуэль. Оказалось, что нет ни одной такой тройки мушкетеров, в которой все должны драться между собой. Докажите, что найдется четверка мушкетеров, в которой нет ни одной пары поссорившихся.

917. У каждого из депутатов парламента не более трех противников (если депутат A — противник депутату B, то депутат B — противник депутату A). Докажите, что депутатов можно разбить на две палаты так, что каждый депутат будет иметь не более одного противника в своей палате.

Раскраска и решение задач на графы

918. Докажите, что в любой группе из шести человек всегда найдутся три человека, знакомые между собой, или три человека, не знакомые между собой.

919. Каждый из 17 ученых переписывается с остальными коллегами. Каждые двое переписываются на одном из трех языков: английском, французском или русском. Докажите, что не менее трех ученых переписываются друг с другом на одном языке.

920. Докажите, что в компании из 18 человек или четверо попарно знакомых, или четверо попарно незнакомых.

921. В некоторой стране между любыми двумя городами существует ровно один рейс, непосредственно связывающий эти города: или автобусом, или поездом, или самолетом. Известно, что нет города, обеспеченного всеми тремя видами транспорта и в то же время нет трех городов, любые два из которых связаны одним и тем же средством сообщения. Сколько городов в стране?

922. На конференцию приехали 300 участников. Каждый знает три языка из пяти, официально принятых на конференции. Докажите, что всех участников можно разбить на 3 группы по 100 человек так, чтобы для каждой группы нашелся язык, общий для членов группы.

Занятия 185–196

Задачи на построение и геометрические места точек. Метод вспомогательной окружности

Базовые построения с помощью циркуля и линейки

I. *Построение серединного перпендикуляра к отрезку. Деление отрезка пополам.*
II. *Построение треугольника, равного данному.*
III. *Построение угла, равного данному.*
IV. *Построение биссектрисы угла.*
V. *Построение прямой, перпендикулярной данной, проходящей через данную точку.*
VI. *Построение прямой, параллельной данной, проходящей через данную точку.*
VII. *Построение касательной к окружности из точки, лежащей вне окружности.*
VIII. *Деление отрезка на равные части.*

923. Постройте окружность с центром в данной точке на стороне данного угла, которая на другой стороне угла отсекала бы хорду данной длины.

924. Дана окружность. Найдите геометрическое место середин хорд окружности, имеющих данную длину.

925. Постройте треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности.

926. Постройте равнобедренный треугольник, зная высоту и угол при вершине.

927. Постройте треугольник, зная две стороны и медиану, проведенную к одной из них.

Теорема 61. *Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

Теорема 62. *Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.*

Теорема 63. *Через любые три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную окружность.*

Теорема 64 (условие принадлежности четырех точек окружности). *Пусть для четырех точек плоскости A, B, M и K выполнено одно из следующих условий:*

а) точки M и K расположены по одну сторону от прямой AB и при этом $\angle AMB = \angle AKB$;

б) точки M и K расположены по разные стороны от прямой AB и при этом $\angle AMB + \angle AKB = 180°$.

Тогда точки A, B, M и K лежат на одной окружности.

Теорема 65. *Высоты треугольника пересекаются в одной точке.*

Теорема 66. *Всякий треугольник является вписанным и описанным, и центром вписанной окружности является точка пересечения биссектрис, а центром описанной окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника.*

Теорема 50 (теорема Фалеса). *Если параллельные прямые на одной стороне угла отсекают равные между собой отрезки, то и на другой стороне угла они отсекают равные между собой отрезки.*

928. Данный отрезок AB разделите на части, находящиеся в отношении $m:n$, например, 3:2.

929. Данный отрезок AB продолжите до такой точки C, чтобы $AC : AB = m : n$.

Основные геометрические места точек

- *Серединный перпендикуляр к отрезку AB — геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и B;*
- *биссектриса угла — геометрическое место точек внутри угла, равноудаленных от сторон угла;*
- *пара прямых, параллельных прямой l и отстоящих от нее на расстоянии h, — геометрическое место точек, удаленных от прямой l на расстояние, равное h;*

- *две дуги окружности с общей хордой AB без самих точек A и B такие, что вписанный угол, опирающийся на дугу AB, равен α, — геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под углом α;*
- *геометрическое место точек, делящих в известном отношении равные хорды, проведенные в данной окружности, есть концентрическая окружность, радиус которой равен расстоянию от данного центра до одной из точек геометрического места;*
- *точки, из которых данная окружность ω видна под данным углом α (т.е. точки, из которых две касательные к окружности ω образуют между собой угол α), составляют концентрическую окружность определенного радиуса.*

930. Найдите геометрическое место центров окружностей данного радиуса, высекающие на данной прямой отрезки, равные данному.

931. Постройте окружность данного радиуса, которая касалась бы данной прямой и данной окружности.

932. Точка A лежит на окружности. Найдите геометрическое место точек M таких, что отрезок AM делится этой окружностью пополам.

933. Постройте треугольник по радиусу описанной окружности, стороне и высоте, проведенной к другой стороне.

934. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от трех данных прямых.

935. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касающуюся данной окружности.

936. Точка O лежит на отрезке AC. Найдите геометрическое место точек M, для которых $\angle MOC = 2\angle MAC$.

937. Постройте треугольник по стороне и проведенной к ней высоте, если известно, что эта сторона видна из центра вписанной в треугольник окружности под углом 135°.

938. Даны точки A и B. Проводятся всевозможные окружности с центром в точке B и радиусом, не превосходящим AB, а через точку A — касательные к ним. Найдите геометрическое место точек касания.

939. Докажите, что если в треугольнике биссектриса угла при вершине делит пополам угол между высотой и медианой, то треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный.

940. В четырехугольнике три тупых угла. Докажите, что большая из его диагоналей выходит из вершины острого угла.

941. В треугольнике ABC угол B равен $60°$, AK и CE — биссектрисы, причем точки K и E лежат на соответствующих сторонах. Отрезки AK и CE пересекаются в точке O. Докажите, что $OK = OE$.

942. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрана точка O, не лежащая на диагонали BD, такая, что $\angle ODC = \angle CAB$, $\angle OBC = \angle CAD$. Докажите, что $\angle ACB = \angle OCD$.

943. В треугольнике ABC угол A в два раза больше угла B, AL — биссектриса угла A (точка L лежит на стороне BC). На луче AL отложен отрезок AK, равный CL. Докажите, что $AK = CK$.

944. Проведите окружность, касательную к сторонам данного угла ABC, причем к одной из его сторон — в данной точке F.

945. Постройте треугольник, зная одну из его сторон, противолежащий угол и высоту, проведенную к другой стороне.

946. В данную окружность ω впишите треугольник, два угла которого равны α и β, и прямая, содержащая одну из его сторон, проходит через данную точку M.

947. Даны окружность ω и точка A. Проведите в окружности хорду данной длины так, чтобы она была видна под углом α из точки A.

948. Постройте треугольник, зная расстояние от центра вписанной окружности до концов основания и основание.

949. Постройте окружность данного радиуса R, проходящую через две данные точки A и B.

950. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и проведенной к ней высоте.

Занятия 197–206

Инвариант

951. На чудо-дереве растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет еще один ананас, а если сорвать банан и ананас, то вырастет банан. В итоге остался один плод. Какой это плод, если известно, сколько бананов и ананасов росло вначале?

952. На 44 деревьях, посаженных по окружности, сидели 44 чижа (на каждом дереве по одному). Время от времени какие-то два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). Смогут ли чижи когда-нибудь собраться на одном дереве?

953. С тройкой чисел (a, b, c) разрешается проделать следующую операцию: одно число увеличить на 2, а два других одновременно с этим уменьшить на 1. Можно ли с помощью таких операций из тройки (13, 15, 17) получить тройку с двумя нулями?

954. (СПО, 1966) На доске написаны числа 1, 2, ... , 101. Разрешается стереть любые два числа и написать их разность. Повторив эту операцию 100 раз, мы получим одно число. Докажите, что это число не может быть равно 0.

955. (Московская математическая олимпиада, 1957, СПО, 1961) Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью и каждые 15 минут поворачивает на 90°. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только через целое число часов.

956. В последовательности 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... каждый член, начиная с седьмого, равен последней цифре суммы шести предыдущих. Докажите, что в этой последовательности никогда не встретятся подряд шесть чисел 0, 1, 0, 1, 0, 1.

957. Пусть $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$, $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$ и $\sigma(1)$, $\sigma(2)$, ..., $\sigma(n)$ – произвольная перестановка чисел 1, 2, ..., n. Докажите, что $\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} \le \sum_{k=1}^{n} a_k b_{\sigma(k)} \le \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.

958. (Московская математическая олимпиада, 1953) Девять шестеренок зацеплены по кругу: первая со второй, вторая с третьей, и т.д., девятая с первой. Могут ли они вращаться?

959. N солдат выстроены в шеренгу (плечом к плечу). По команде «налево» все одновременно повернулись на 90°, но некоторые повернулись направо. Ровно через секунду каждый, кто оказался лицом к лицу со своим соседом, поворачивается «кругом» — на 180°. Еще через секунду каждый, что оказался лицом к лицу со своим соседом, поворачивается на 180° и т.д. Докажите, что движение в строю не может продолжаться более $N-1$ секунд.

960. Целые числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, сумма которых положительна, расставлены по окружности. Если $x_j < 0$, то числа x_{j-1}, x_j, x_{j+1} разрешается заменить на числа $x_{j-1} + x_j$, $-x_j$, $x_{j+1} + x_j$ (подразумевается, что $x_{j+5} = x_j$). Докажите, что после конечного числа таких операций все числа станут неотрицательными.

961. Игра «15» заключается в следующем. В квадрате со стороной 4 расположено 15 фишек — квадратов со стороной 1. На фишках написаны числа от 1 до 15:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Любую фишку, граничащую (по стороне) со свободной клеткой, разрешается переместить на свободную клетку (освободив тем самым другую клетку). Можно ли поменять местами фишки 14 и 15, причем так, чтобы свободная клетка осталась на прежнем месте?

962. (Московская математическая олимпиада, 1973) В трех вершинах квадрата сидели кузнечики. Они стали играть в чехарду: один из кузнечиков прыгает в точку, симметричную относительно другого. Сможет ли хоть один кузнечик попасть в четвертую вершину квадрата?

963. (Московская математическая олимпиада, 1947) Можно ли выпуклый 13-угольник разрезать на параллелограммы?

964. (СПО, 1985) Три кузнечика играют на прямой в чехарду. Каждый раз один из них прыгает через другого (но не через двух сразу!). Могут ли они после 1985-го прыжка оказаться на прежних местах?

965. (Всероссийская олимпиада по математике, 1993) На каждой клетке главной диагонали доски 10×10 стоит по шашке. За один ход разрешается выбрать любые две шашки и передвинуть каждую из них на одну клетку вниз. Можно ли за несколько таких ходов поставить все шашки на нижнюю горизонталь?

966. (Московская математическая олимпиада, 1965) Есть 10 пар карточек, на которых написаны числа 0, 0, 1, 1, ... , 8, 8, 9, 9. Докажите, что их нельзя выложить в ряд так, чтобы между любыми двумя карточками, на которых написаны одинаковые цифры n, лежало ровно n других карточек ($n = 0, 1, \dots, 9$).

967. (Московская математическая олимпиада, 1970) На бесконечной шахматной доске на двух соседних по диагонали черных полях стоят две черные шашки. Можно ли дополнительно поставить на эту доску некоторое число черных шашек и одну белую так, чтобы белая одним ходом взяла все черные шашки, включая две первоначально стоявшие?

968. (Московская математическая олимпиада, 1970) Можно ли разбить числа 1, ... , 33 на 11 групп по 3 числа в каждой так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось сумме двух других?

969. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1967) Одно из чисел получается из другого перестановкой цифр. Может ли их сумма равняться 99 ... 9 (1967 девяток)?

970. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1971) В вершинах правильного 12-угольника расставлены числа $+1$ и -1 так, что во всех вершинах, кроме одной, стоят +1. Разрешается изменять знак в любых k подряд идущих вершинах. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы единственное число −1 сдвинулось в соседнюю с исходной вершину, если а) $k = 3$; б) $k = 4$; в) $k = 6$?

971. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1987) На доске написаны числа 1, 2, ... , 1987. За ход разрешается стереть любые два числа и вместо них написать остаток от деления на 7 их суммы. После нескольких шагов на доске осталось два числа, одно из которых равно 987. Каким числом является второе из оставшихся чисел?

972. Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа клетчатой бумаги, клетки которого — квадраты со стороной 1. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом его вокруг одной из ножек перемещать вторую ножку в другой узел на листе. Можно ли за несколько таких шагов поменять ножки циркуля местами?

973. На острове Серобуромалин живут хамелеоны: 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых. Если два хамелеона разных цветов встречаются, то они оба меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что в некоторый момент все хамелеоны на острове станут одного цвета?

974. (СПО, 1984) В странах Диллии и Даллии денежными единицами являются диллеры и даллеры соответственно, причем в Диллии диллер меняется на 10 даллеров, а в Даллии даллер меняется на 10 диллеров. Начинающий финансист имеет 1 диллер и может свободно переезжать из одной страны в другую и менять свои деньги в обеих странах. Докажите, что количество даллеров у него никогда не сравняется с количеством диллеров.

975. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1964) У каждого из чисел от 1 до 1 000 000 000 подсчитывается сумма его цифр, у каждого из получившегося миллиарда чисел снова подсчитывается сумма его цифр и т. д. до тех пор, пока не получится миллиард однозначных чисел. Каких чисел получится больше: 1 или 2?

976. (Московская математическая олимпиада, 1960) Докажите, что шахматную доску размера $4 \times n$ нельзя обойти конем так, чтобы побывать при этом по одному разу на каждом поле и последним ходом вернуться на исходное поле.

977. (Югославия, 1981) Мышка грызет куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к другому, который имеет с предыдущим общую грань. Может ли мышка съесть весь куб, кроме среднего кубика?

978. (Турнир городов, 1991) На доске выписаны числа 1, 2, ... , 20. Разрешается стереть любые два числа a и b и изменить их на число $ab + a + b$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

979. (СПО, 1996) На доске написано несколько натуральных чисел. Разрешается стереть с доски два различных числа и написать вместо этого их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Докажите, что когда-нибудь числа на доске перестанут меняться.

980. (СПО, 1985) Сумасшедший путешественник едет из родного города A в самый удаленный от него город B. Затем оттуда он едет в самый удаленный от B город C, который оказывается отличным от A и т. д. Докажите, что он никогда не вернется в A.

981. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1961) В клетки таблицы $m \times n$ вписаны числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел одного столбца или одной строки. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы суммы чисел в каждой строке и каждом столбце были неотрицательными.

982. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1974) Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку «особой», если более половины из соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Особые точки разрешается перекрашивать по следующему правилу: на каждом шаге выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через несколько шагов не останется ни одной особой точки.

983. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1976) Из дроби m/n разрешается получить любую из трех дробей: $(m-n)/n$, $(m+n)/n$, n/m. Можно ли, используя такие операции, из дроби $1/2$ получить дробь $67/91$?

984. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1991) На доске выписаны n чисел. Разрешается стереть любые два из них, скажем a и b, и вместо них записать одно число $(a+b)/4$. Эта операция повторяется $n-1$ раз, и в результате на доске остается одно число. Доказать, что если на доске вначале было написано n единиц, то в результате всех операций на доске останется число, не меньше, чем $1/n$.

985. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1998) На доске записано целое число. Его последняя цифра запоминается, затем стирается и, умноженная на 5, прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Первоначально было записано число 7^{1998}. Может ли после применения нескольких таких операций получиться число 1998^7?

986. (Всесоюзная олимпиада по математике, 1998) В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

Занятия 207–210

Математическая дуэль №2

Задачи

1. Маша заменила в примере на умножение двузначных чисел цифры буквами: одинаковые — одинаковыми, разные — разными. У нее получилось $\overline{АБ} \cdot \overline{ВГ} = \overline{БББ}$. Каким мог быть исходный пример? Найдите все возможные варианты.
2. Сколько чисел от 1 до 1000 можно представить в виде суммы натурального числа, кратного 7, и натурального числа, кратного 4?
3. Все четырехзначные числа, цифры которых различны и стоят в порядке возрастания, выписали друг за другом — снова в порядке возрастания. Какое число стоит на 16-м месте?
4. На карточке у каждого из 11 школьников написано какое-то натуральное число. Известно, что все эти числа различны, а их сумма равна 71. Чему может быть равно среднее по величине из написанных чисел?
5. От города до горного приюта целое число километров. Однажды утром три группы альпинистов отправились из города в приют. В первый день группа A прошла шестую часть пути, группа B — половину пути, а группа C — четверть пути. На следующий день группа A прошла 100 км, группа B — 10 км, а группа C — 78 км. За два дня группа B прошла большее расстояние, чем группа A, но меньшее, чем группа C. Каково расстояние от города до приюта?
6. За круглым столом сидят 2009 человек. Каждый из них — или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжет. Оказалось, что рядом с каждым лжецом сидит ровно один лжец. Каж-

дого из сидящих за столом спросили, сколько лжецов сидит рядом с ним. Несколько человек ответили, что один, а все остальные — что два. Какое наименьшее количество лжецов может сидеть за столом?

7. Сколько существует пятизначных чисел, десятичная запись которых начинается с 1 и содержит ровно две одинаковые цифры?

8. Найдите 2009-й член последовательности 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, ...

9. Найдите наименьшее натуральное n такое, что все 73 дроби $19/(n+21)$, $20/(n+22)$, $21/(n+23)$, ..., $91/(n+93)$ несократимы.

10. Сколько существует трехзначных чисел, у которых сумма цифр больше произведения цифр?

11. На плоскости провели 6 прямых и отметили несколько точек так, что на каждой прямой оказалось ровно по три отмеченных точки. Какое наименьшее число точек могло быть отмечено?

12. В каждой клетке квадрата 3×3 лежит монета орлом вверх. Какое наименьшее количество монет нужно перевернуть, чтобы в результате не оказалось трех монет, расположенных в одной вертикали, одной горизонтали или одной диагонали и лежащих одинаково (то есть все три орлом вверх или все три решкой вверх)?

13. Города Верходырье, Среднедырье и Нижнедырье соединены дорогами. Между каждыми двумя городами есть не менее трех, но не более десяти прямых (то есть не проходящих через третий город) дорог. Географическое общество подсчитало, что добраться из Верходырья в Нижнедырье (напрямик или через Среднедырье) можно 33 способами. А путей из Среднедырья в Верходырье (прямых или через Нижнедырье) всего 23. Сколькими способами можно проехать из Нижнедырья в Среднедырье (возможно, посетив по дороге Верходырье)?

14. Граничные клетки прямоугольника 3×5 закрыты шестью разными костями домино, приложенными друг к другу по правилам. Какое наименьшее количество точек может быть на всех шести костях вместе? (Напомним, что кость домино состоит из двух клеток, в каждой из которых от 0 до 6 точек; если у клеток двух разных костей есть общая сторона, в этих клетках должно быть поровну точек.)

15. Все четырехзначные числа, цифры которых различны и стоят в порядке возрастания, выписали — снова в порядке возрастания. Какое число стоит на 97-м месте?

16. Сколькими способами можно расставить числа 1 и -1 во всех клетках таблицы 4×4 так, чтобы сумма всех чисел в каждой строке и в каждом столбце была равна 0?

17. На карточке у каждого из 2009 школьников написано какое-то натуральное число. Известно, что все эти числа различны, а их сумма равна 2020049. Чему может быть равно среднее по величине из написанных чисел?

18. Пусть A — двузначное число, не кратное 10. B — трехзначное число. Известно, что $A\%$ от B равны 400. Найдите, чему могут быть равны A и B.

19. Сумма двух четырехзначных чисел $\overline{abab}$ и $\overline{cdcd}$ — квадрат целого числа. Каково наибольшее возможное значение произведения $abcd$?

20. Грузчики Коля и Петя носят ящики. Переноска маленького ящика занимает у Пети 1 минуту, а у Коли — 3 минуты. Зато большой ящик Коля переносит за 5 минут, а Петя — за 6. Всего им нужно перенести 10 больших и 10 маленьких ящиков. За какое наименьшее время они могут это сделать?

21. В советские времена у школьника было несколько монет по 15 коп. и по 20 коп., причем 20-копеечных больше. Пятую часть всех денег он истратил, заплатив двумя монетами за билет в кино. Половину оставшихся денег он потратил на обед, заплатив за него тремя монетами. Сколько монет каждого достоинства было у школьника изначально?

22. Медведь, Волк и Лиса разговаривали на полянке: Медведь: «Лиса не самая хитрая». Лиса: «Я хитрее медведя». Волк: «Лиса хитрее меня». Солгал самый хитрый зверь, остальные сказали правду. Кто самый хитрый?

23. У четырехзначного числа каждая его цифра, кроме цифры в разряде единиц, на 1 меньше цифры в предыдущем разряде (например, число сотен на 1 меньше числа десятков). На сколько может измениться это число, если его цифры записать в обратном порядке? Укажите все возможности.

24. Площадь фигуры, нарисованной на клетчатой бумаге (рис. 17), равна 40,5 см^2. Чему равна сторона клеточки?

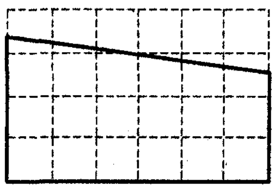


Рис. 17

25. Отмечена точка пересечения двух прямых и, кроме нее, 5 точек на одной прямой и 7 точек на другой. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

26. Два кафе испекли по одинаковому количеству тортов. Первое кафе продало 7 тортов целиком, а все остальные разрезали каждый на семь кусков и продавали кусочками. Второе кафе продало 11 тортов, а каждый из оставшихся разрезали на 11 кусочков и продали по кусочкам. Оказалось, что каждое кафе продало одинаковое число кусочков. Сколько тортов первоначально было испечено в каждом кафе?

27. Про целое положительное число A сделаны четыре утверждения: «A делится на 5», «A делится на 11», «A делится на 55», «A меньше 15». Известно, что два из этих утверждений истинны, а два — ложны. Чему может быть равно число A?

28. Найдите 9 таких последовательных целых чисел, что сумма трех первых равна сумме шести последних.

29. К углам прямоугольного бассейна периметром 200 м подошли 4 ученика. Тренер подплыл куда-то к краю бассейна и пригласил учеников подойти. Все пошли кратчайшими путями. Ваня прошел 30 м, Максим — 60 м, Маша — 40 м. Сколько метров пришлось пройти четвертому ученику?

30. Сколько есть трехзначных чисел, у которых сумма двух крайних цифр вдвое больше средней цифры?

31. Двое лыжников шли с постоянной скоростью 6 км/ч на расстоянии 200 метров друг от друга. Потом они стали подниматься в большую горку, и скорость упала до 4 км/ч. Потом оба лыжника съехали с горки со скоростью 7 км/ч и попали в глубокий снег, где их скорость стала всего 3 км/ч. Каким стало расстояние между ними?

32. Петя задумал натуральное число, не большее 20. Вася может назвать Пете произвольное натуральное число, и Петя скажет, делится ли на него задуманное число. Сколько, самое меньшее, чисел должен назвать Вася, чтобы наверняка узнать, какое число задумал Петя?

33. Найдите все решения ребуса ОГО × ГЫГЫ = ХАХАХА, где одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры.

34. Из одной точки на плоскости провели 20 лучей. Какое наибольшее число углов, равных 25 градусам, могло при этом образоваться?

35. Три ковбоя зашли в салун. Один купил 4 сандвича, чашку кофе и 10 пончиков — всего на 1 доллар 69 центов. Второй купил 3 сандвича, чашку кофе и 7 пончиков за 1 доллар 26 центов. Сколько заплатил третий ковбой за сандвич, чашку кофе и пончик?

36. Каждый из 12 человек — или рыцарь, всегда говорящий правду, или всегда лгущий лжец. Один из них сказал: «Число лжецов среди нас делится на 1», второй: «Число лжецов среди нас делится на 2», ..., 12-й: «Число лжецов среди нас делится на 12». Сколько среди них может быть рыцарей?

37. Найдите все натуральные числа, которые на 14 больше произведения своих цифр.

38. На прямой отмечены 5 точек. Попарные расстояния между ними, выписанные в порядке возрастания, равны 2, 4, 5, 7, 8, k, 13, 15, 17, 19. Чему может быть равно k? Укажите все варианты.

39. В коробке лежат 40 синих перчаток, 30 красных и 20 желтых. Среди перчаток поровну левых и правых. Какое наименьшее число перчаток надо, не глядя, вынуть из коробки, чтобы среди вынутых наверняка оказалась пара одноцветных перчаток на разные руки?

40. Аня рассказывает: «В нашем классе N человек, из них 15 человек имеют карие глаза, у 16 — темные волосы, 17 человек весят более 40 кг и 18 ростом выше 160 см». Таня ответила: «Тогда я точно скажу, что как минимум четверо школьников из вашего класса имеют все четыре признака». Чему может быть равно наибольшее возможное значение N?

41. Аня написала на бумажке числа 1 и a; Боря — a, b и 3; Саша написал 2, 4 и с, Дима — a, b и 4, Егор написал четыре числа a, b, c, e. Все, что написала Аня, написал и Дима, а все, что написано у Бори, Саши и Димы, можно найти и у Егора. Найдите, чему равны числа a, b, c, e.

42. Некоторое четырехзначное число является квадратом числа x. Если же четырехзначное число записать в обратном порядке, то мы получим квадрат числа y, причем y кратно x. Найдите, чему равно x.

43. Сколькими различными способами можно разбить числа от 1 до 9 на три группы так, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковыми?

44. Урожай на поле убирали несколько одинаковых комбайнов, которые, начни они вместе, справились бы с работой за 24 часа. К сожалению, по техническим причинам, они начинали работать только через равные промежутки времени, но уже каждый работал до самого конца. Первый работал в пять раз дольше последнего. Сколько часов работал первый комбайн?

45. В гандбольном турнире, где за победу давали 2 очка, за ничью — 1 очко, а за поражение — 0 очков, участвовали 10 команд. Команда «Долбило» одержала в нем больше побед, забила больше и пропустила меньше мячей, чем любая другая команда. Какое самое низкое место она могла занять?

46. При каком наименьшем k, большем 1, число 2008 можно представить в виде суммы k подряд идущих натуральных чисел?

47. Квадрат разбит на 16 равных квадратиков. Получилось множество из 25 вершин. Какое наименьшее число вершин можно удалить из этого множества так, чтобы никакие четыре точки в оставшемся множестве не были бы вершинами квадрата со сторонами, параллельными сторонам исходного квадрата?

48. Сколькими различными способами можно из клетчатой доски 6×6 вырезать два непересекающихся трехклеточных «уголка», у каждого из которых средняя клетка левее одной из крайних и ниже другой?

49. Можно ли соединить 77 телефонов так, чтобы из каждого можно было позвонить ровно в 17 других? Почему?

50. В стране Лапландии все города, кроме столицы и города Дальнего, соединены с 20 другими городами. Столица же соединена с 51 городом, а город Дальний с одним городом. Можно ли из города Дальнего добраться самолетом до столицы (быть может, с пересадками). Почему?

51. Можно ли расположить на плоскости 7 прямых так, чтобы каждая пересекала ровно пять других? Почему?

52. Из Москвы выходит 101 авиалиния, из Ижевска — 17 авиалиний, а из всех остальных городов страны — либо по две, либо по десять, либо по двадцать. Докажите, что из Ижевска можно долететь до Москвы (может быть, с пересадками).

53. На доске написаны числа 1, 2, 3, 4, 5. За один ход разрешается стереть два числа, а вместо них записать их сумму или разность. Через 4 хода останется одно число. Может ли оно равняться нулю?

54. В таблице 3×3 расставлены числа. За один ход разрешается к любым двум числам в соседних (т.е. имеющих общую границу) клетках прибавить по одинаковому целому числу. Можно ли получить таблицу из восьми нулей и одной единицы?

0	3	2
6	7	0
4	9	5

55. Пятнадцать пятаков лежат гербом вверх. Разрешается за один раз перевернуть любые четырнадцать из них. Можно ли за несколько раз перевернуть все пятаки гербом вниз?
56. 10 фишек поставлены в ряд. Разрешено менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли поставить все фишки в обратном порядке?
57. На доске выписаны целые числа от 1 до 1974. Разрешается стереть любые два числа, записав вместо них их сумму или разность. После многократного повторения такой операции на доске останется лишь одно число. Доказать, что нельзя добиться, чтобы на доске остался один нуль.
58. На доске написано 10 плюсов и 15 минусов. Разрешается стереть любые два знака и поставить вместо них плюс, если знаки одинаковы, и минус в противоположном случае. Какой знак останется после выполнения двадцати четырех операций? Докажите, что оставшийся знак не зависит от порядка сокращения.
59. На доске были написаны несколько плюсов и 1991 минус. Разрешается стирать любые два знака и вместо них писать плюс, если они одинаковы, и минус, если они различны. После многократного выполнения этой операции на доске остался один знак. Какой?
60. На столе лежат 12 монет. Арман закрывает глаза, а Даурен переворачивает монеты (по одной), говоря при каждом переворачивании «Хоп!» (он может переворачивать одну монету несколько раз, не забывая всякий раз сказать «Хоп!»). После этого Даурен накрывает одну из монет рукой, а Арман открывает открывает глаза и отгадывает, как лежит невидимая монета — гербом вверх или вниз. Как Арман это делает?
61. Карлсон написал дробь 10/97. Малыш может 1) прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, 2) умножить числитель и знаменатель на одно и тоже натуральное число. Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь, а) равную $\frac{1}{2}$, б) равную 1?

62. Три ежика делили три кусочка сыра массами 5 г, 8 г и 11 г. Лиса стала им помогать. Она может от любых двух кусочков одновременно отрезать и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить ежикам равные кусочки сыра?
63. Резидент одной иностранной разведки сообщил в центр о готовящемся подписании ряда двусторонних соглашений между пятнадцатью бывшими республиками СССР. Согласно его донесению, каждая из них заключит договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?
64. На столе стоят 7 стаканов дном вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли дном вниз?
65. С набором из пяти чисел, каждое из которых равно 1 или -1, разрешено производить следующую операцию: менять знаки у каких-нибудь двух чисел. Можно ли с помощью нескольких таких операций из набора $\{1, -1, -1, 1, 1\}$ получить набор $\{-1, 1, 1, 1, 1\}$?
66. Найдите цифру, обозначенную звездочкой, в числе 41875*, если это число делится на 18.
67. Существует ли цифра, которую необходимо приписать справа и слева к числу 97, чтобы полученное четырехзначное число делилось на 27?
68. Найдите все значения цифр x и y, при которых число $\overline{124xy}$ делится на 75.
69. Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается только 1 и 0 и делится на 225.
70. Докажите, что ребус АПЕЛЬСИН – СПАНИЕЛЬ = 1999 не имеет решения.
71. Докажите, что число 111...1 (27 единиц) делится на 27.
72. Найдите все значения цифр x и y, при которых число $\overline{53xy213}$ делится на 99.
73. У трехзначного числа, делящегося на 45, разность между второй и первой цифрами равна разности между третьей и второй. Найдите все такие трехзначные числа.

74. Найдите все трехзначные числа, делящиеся на 11, у которых сумма цифр делится на 11.
75. Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается одинаковыми цифрами и делится на 693.
76. Найдите такое трехзначное число, делящиееся на 27, что при любой перестановке его цифр получается число, также делящееся на 27. Укажите все такие числа.

Ответы

1. $37 \times 21 = 777$ или $15 \times 37 = 555$.
2. 981.
3. 1267.
4. 6.
5. 271 км.
6. 1006.
7. 5040.
8. 29.
9. 95.
10. 199.
11. 7.
12. 4.
13. 21.
14. 10.
15. 3468.
16. 90.
17. 1005.
18. $A = 64$, $B = 625$.
19. 600.
20. 33 минуты.
21. 2 по 15 коп. и 6 по 20 коп.
22. Волк.
23. 3087.
24. 1,5 см.
25. 210.
26. 18.
27. 5, 10, 11.
28. –10, ..., –2.

29. 70.
30. 45.
31. 100 м.
32. 8.
33. Нет решений.
34. 19.
35. 40 центов.
36. 3, 4, 12.
37. 26, 38, 59.
38. 12.
39. 86.
40. 20.
41. $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$, $e = 4$.
42. 33.
43. 7.
44. 40 часов.
45. 10-е (последнее).
46. 16.
47. 8.
48. 253.
49. Нет.
50. Да.
51. Нет.
52. Если бы нельзя было добраться из Ижевска до Москвы, то получился бы граф с нечетным числом вершин, что не возможно.
53. Нет.
54. Нет.
55. Да.
56. Нет.
57. Сумма всех чисел нечетна, при такой операции четность суммы чисел не меняется.
58. Минус.
59. Минус.
60. Считает количество раз сказанное слово «Хоп» и в зависимости от четности определяет, как лежит монета.
61. Да. Нет.
62. Да.
63. Нет.

64. Нет.
65. Нет.
66. 2.
67. Да. 1.
68. $x = 5$, $y = 0$.
69. 1111111100.
70. 1999 не делится на 9.
71. Сгруппировать по 3 единицы.
72. $x = 9$, $y = 4$.
73. 135, 630, 765.
74. 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902.
75. 333333.
76. 999.

Коллоквиум №5

Для получения допуска к сдаче коллоквиума необходимо показать решение не менее 100% — (оценка за предыдущий коллоквиум) × 10% от общего количества задач, т.е. от 80 до 120 задач (всего 161 задача).

Критерии оценок и пр. см. в материале к Коллоквиуму №1.

Список вопросов

1. По-новому о классической задаче пути коня по шахматной доске. Королевские прогулки.
2. Раскраска и разрезания.
3. Измерение углов связанных с окружностью: теорема о вписанном и центральном углах, опирающихся на одну дугу, теоремы об угле между секущими с вершиной внутри и вне круга.
4. Полный, пустой и регулярный графы. Теорема о количестве ребер полного графа.
5. Помеченный граф. Теорема о количестве помеченных графов с n вершинами.
6. Связный граф. Достаточные условия связности графа через наименьшую степень вершин и количество ребер.
7. Дополнительный граф. Теорема о связности графа или его дополнения.
8. Лемма о рукопожатиях. Теорема о четности количества нечетных вершин.
9. Постановка задачи на построение. Базовые построения с помощью циркуля и линейки.
10. Основные геометрические места точек (ГМТ). Метод ГМТ в задачах на построение.
11. Применения метода ГМТ для доказательства теорем: теорема о пересечении биссектрис треугольника, теорема о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
12. Теорема о четырех точках на окружности. ГМТ, из которых отрезок виден под одним углом.
13. Метод вспомогательной окружности. Теорема о пересечении высот треугольника.
14. Теорема Фалеса. Построение соизмеримых отрезков.

Экзамен

В жизни каждого обучающегося должен быть момент, когда он все знает. И этот момент – экзамен.

Список экзаменационных вопросов

1. Парадокс лжеца. Табличный метод решения логических задач: преимущества и недостатки, различные формы использования.
2. Кванторы. Правило формулирования противоположного высказывания. Доказательство от противного. Теорема. Критерий. Различные способы чтения теорем.
3. Множество. Парадоксы теории множеств. Парадокс Брадобрея. Теоретико-множественные операции над множествами и их свойства.
4. Законы де Моргана и их применения для доказательства равенства множеств. Круги Эйлера. Применения теории множеств для решения задач.
5. Числа: натуральные, целые, рациональные, действительные, иррациональные. Десятичная запись числа. Соизмеримые отрезки. Недостаточность рациональных чисел для измерения длин отрезков.
6. Делимость чисел: что означает «целое число a кратно b»? Четные и нечетные числа. Формулы сокращенного умножения и их применения в задачах на делимость.
7. Конечные и бесконечные множества. Парадоксы теории множеств, связанные с бесконечными множествами. Пример «Гостиница». Теорема Евклида о бесконечности простых чисел.

8. Многоточие как форма записи суммы нескольких слагаемых. Определение количества слагаемых. Вычисление некоторых типов сумм.
9. Графы: определение, примеры. Лемма о рукопожатиях. Теорема о четности количества нечетных вершин.
10. Наибольший и наименьший элементы множества. Примеры множеств, у которых есть наибольший элемент, и у которых нет ни наибольшего, ни наименьшего элемента. Целая часть числа. Свойства целой части. Задача Эрмита.
11. Задача о кроликах. Обобщенный дискретный принцип Дирихле. Непрерывный принцип Дирихле для отрезков.
12. Метод математической индукции. Рекомендации: применение метода математической индукции в задачах на делимость, при доказательстве тождеств, неравенств. Формула бинома Ньютона.
13. Простые числа. Наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК): определение, свойства.
14. Основная теорема арифметики. Алгоритм разложения на простые множители. Следствия: НОД и НОК. Теорема о произведении НОД и НОК двух чисел.
15. Теорема Лежандра (о разложении $n!$ на простые множители). Количество делителей и сумма делителей натурального числа.
16. Теорема о делении с остатком. Геометрический смысл неполного частного и остатка при делении. Системы счисления. Арифметические операции. Применения.
17. Признак делимости Паскаля. Эстафетные признаки делимости.
18. Признаки равенства треугольников: формулировки. Доказательство признаков равенства прямоугольных треугольников.
19. Теорема о сумме острых углов прямоугольного треугольника. Свойство медианы прямоугольного треугольника.
20. Применение признаков равенства треугольников: признаки равнобедренного треугольника, доказа-

тельство теоремы о сравнении внешнего угла и внутреннего угла треугольника, не смежного с ним. Теорема о сравнении углов треугольника через длины противолежащих сторон треугольника.

21. Дополнительные построения на основе признаков равенства треугольников. Метод удвоения медианы. Следствия теоремы о сравнении внешнего угла и внутреннего угла треугольника, не смежного с ним: теоремы о количестве прямых и тупых углов в треугольнике.
22. Признаки и свойства параллельности прямых. Сумма углов треугольника. Определение типа угла треугольника (острый, прямой, тупой) через сравнение медианы и половины длины противолежащей стороны.
23. Уравнение первой степени с двумя неизвестными: частное решение, общий вид решения. Теорема о существовании решений.
24. Постановка задачи: отличие тем «решение уравнений» и «решение уравнений в целых числах». Уравнение второй степени с двумя неизвестными: метод неопределенных коэффициентов (I—IV уровни).
25. Теорема о делении с остатком: решение уравнений в целых числах. Полная и приведенная системы вычетов по модулю m.
26. Задача Пуассона. Переливания и уравнения в целых числах первой степени.
27. Теорема об определении сильнейшего участника из n команд по кубковой схеме. Теорема об упорядочивании нескольких предметов.
28. Троичная система счисления и взвешивания на чашечных весах без гирь. Задача о короле и 30 рыцарях и взвешивания на весах со стрелкой.
29. Неравенство треугольника. Применения. Теорема о пересечении двух окружностей.
30. Задача о разрезании треугольника. Теорема о средней линии треугольника. Теорема о медианах.
31. Стратегии. Рекомендации с примерами.
32. Постановка комбинаторной задачи. Проблемы (задачи) комбинаторики. Основное комбинаторное правило.

33. Упорядоченные выборки с возвращением. Упорядоченные выборки без возвращения (размещения). Перестановки. Перестановки с повторениями и с ограничениями.
34. Неупорядоченные выборки с возвращением. Неупорядоченные выборки без возвращения (сочетания).
35. Различные определения выборки в комбинаторике. Сравнение двух подходов в комбинаторике.
36. Измерение углов, связанных с окружностью: теорема о вписанном и центральном углах, опирающихся на одну дугу, теоремы об угле между секущими с вершиной внутри и вне круга.
37. Полный, пустой и регулярный графы. Теорема о количестве ребер полного графа. Помеченный граф. Теорема о количестве помеченных графов с n вершинами.
38. Связный граф. Достаточные условия связности графа через наименьшую степень вершин и количество ребер. Дополнительный граф. Теорема о связности графа или его дополнения.
39. Постановка задачи на построение. Базовые построения с помощью циркуля и линейки.
40. Основные геометрические места точек (ГМТ). Теорема о четырех точках на окружности. ГМТ, из которых отрезок виден под одним углом.
41. Метод ГМТ в задачах на построение. Применения метода ГМТ для доказательства теорем: теорема о пересечении биссектрис треугольника, теорема о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
42. Метод вспомогательной окружности. Теорема о пересечении высот треугольника.

Задачи для подготовки к экзамену

1. (СПО, 2000, олимпиада ФМЛ №239, 8–9 кл.) Даны попарно взаимно простые натуральные числа x, y, z, t, такие, что $xy + yz + zt = xt$. Докажите, что сумма квадратов каких-то двух из этих чисел вдвое больше суммы квадратов оставшихся.

2. (СПО, 2002, 1-й тур, 10 кл.) Положительное число x таково, что $[x] \cdot \{x\} = 100$. Чему может быть равно число $[x^2] - [x]^2$? (Как обычно, $[y]$ — целая часть числа y, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее y; $\{y\} = y - [y]$ — дробная часть числа y.)
3. (СПО, 2001, ФМЛ №239, отборочный тур, 9-10 кл.) Пусть n, m и k — натуральные числа, причем $n > 1$. Докажите, что $(\sigma(n))^k \neq n^m$, где $\sigma(n)$ — сумма всех натуральных делителей числа n.
4. (СПО, 2000, 2-й тур, 7 кл.) Написанное на доске число n можно заменить на одно из чисел $2n - 4$, $3n - 8$, $8 - n$. Можно ли за несколько таких операций из числа 41 получить число, большее 10 000 000, но меньше 10 000 020?
5. (СПО, 2002, 1-й тур, 8 кл.) $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, $\angle CBD = \angle CAB$, $\angle ACD = \angle BDA$. Докажите, что $\angle ABC = \angle ADC$.
6. (СПО, 2000, 11 кл.) Отрезки AM и BH — соответственно медиана и высота остроугольного треугольника ABC. Известно, что $AH = 1$ и $2\angle MAC = \angle MCA$. Найдите длину стороны BC.
7. (СПО, 2001, 1-й тур, 11 кл.) На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, то $2AD = DC$. Точка E — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на отрезок BC, F — точка пересечения отрезков BD и AE. Найдите $\angle ADB$, если известно, что треугольник BEF равносторонний.
8. (СПО, 2000, 1-й тур, 9 кл.) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B провели медиану BM. K и L — точки касания вписанной окружности треугольника ABM со сторонами AB и AM. Известно, что прямые KL и BM параллельны. Найдите угол ACB.
9. (СПО, 2000, 1-й тур, 6 кл.) Квадрат 100×100 см разбит на 9 прямоугольников двумя вертикальными линиями и двумя горизонтальными линиями. Внутренний прямоугольник имеет размеры 45×30 см, а стороны остальных прямоугольников не обязательно выражаются целым числом сантиметров. Найдите сумму площа-

дей четырех угловых прямоугольников. Не забудьте обосновать ответ.

10. (СПО, 2000, 1-й тур, 9 кл.) Числа a, b, c, d лежат в промежутке от 2 до 4. Докажите неравенство
$$25(ab+cd)^2 \geq 16(a^2+d^2)(b^2+c^2).$$
11. (СПО, 2002, 1-й тур, 8 кл.) На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться произведение трех натуральных чисел, если их сумма равна 407?
12. (СПО, 2000, 2-й тур, 6 кл.) Имеется 185 монет, из них ровно 7 фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково. Все фальшивые монеты также весят одинаково. Фальшивая монета легче настоящей. Как за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь отобрать 23 настоящие монеты?
13. (СПО, 1966, 7 кл.) Докажите, что радиус окружности равен разности длин двух хорд, одна из которых стягивает дугу в 1/10 окружности, а другая в 3/10 окружности.
14. (СПО, 1976, 6 кл.) По кругу расставлено 300 точек, в одной из которых сидит блоха. Она начинает прыгать по кругу против часовой стрелки, причем первым прыжком она попадает в соседнюю точку, затем прыгает через одну точку, затем через две и так далее. Докажите, что найдется точка, в которую блоха никогда не попадет.
15. (СПО, 2000, 1-й тур, 11 кл.) Дима сложил из одинаковых кубиков прямоугольный параллелепипед (ребра кубиков равны 1), написал на бумажке числа 42, 48 и 82 и сказал, что это объем, площадь поверхности и сумма длин всех ребер параллелепипеда, но не сказал, где какое число. Чему равны длины ребер Диминого параллелепипеда?
16. (СПО, 1961, 6 кл.) Доказать, что наибольший делитель суммы двух чисел и их наименьшего кратного равен наибольшему общему делителю самих чисел.
17. (СПО, 2000, 2-й тур, 7 кл.) $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, в котором $\angle CAD + \angle BCA = 180°$ и $AB = BC + AD$. Докажите, что $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$.
18. (СПО, 1961, 7 кл.) Даны окружность O и квадрат K, а также прямая L. Постройте отрезок данной длины,

параллельный L и такой, что его концы лежат на O и K соответственно.

19. (СПО, 1961, 8 кл.) Построить четырехугольник по длинам сторон и расстоянию между серединами диагоналей.
20. (СПО, 1961, 10–11 кл.) Найдите наименьшее значение выражения $\frac{a^2+x^2}{x}$, где $a > 0$ — константа, а $x > 0$ — переменная.
21. (СПО, 2000, 1-й тур, 8 кл.) Перед боем с белогвардейцами у Василия Ивановича и Петьки было поровну патронов. Василий Иванович израсходовал в бою в 8 раз меньше патронов, чем Петька, а осталось у него в 9 раз больше, чем у Петьки. Докажите, что изначально количество патронов у Василия Ивановича делилось на 71.
22. (СПО, 1966, 7 кл.) Докажите, что при любом натуральном n число
$$n(2n+1)(3n+1)\cdot\ldots\cdot(1966n+1)$$
делится на каждое простое число, меньше 1966.
23. (СПО, 1966, 8 кл.) Докажите, что сумма всех делителей числа n^2 нечетна.
24. (СПО, 1971, 6 кл.) Среди всех треугольников, имеющих данную сумму медиан, укажите тот, который имеет наибольшую сумму высот.
25. (СПО, 1971, 8 кл.) Натуральное число n таково, что $n + 1$ делится на 24. Докажите, что сумма всех делителей числа n, включая 1 и само число n, делится на 24.
26. (СПО, 1971, отборочный тур.) Докажите, что уравнение $x^3 + y^3 + z^3 = 2$ имеет бесконечно много решений в целых числах.
27. (СПО, 1976, 6 кл.) Числа от 1 до 9 разбиты на три группы, после чего числа в каждой группе перемножили. A — наибольшее их трех произведений. Какое наименьшее значение может принимать A?
28. (СПО, 1962, 6 кл.) 15 журналов лежат на столе, полностью покрывая его. Докажите, что можно убрать восемь журналов из них так, что оставшиеся журналы будут покрывать не менее 7/15 площади стола.
29. (СПО, 1990, 8 кл.) Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c) такие, что $a^2 + b - c = 100$, $a + b^2 - c = 124$.

Примерные экзаменационные билеты

Экзаменационный билет № 1

1. Парадокс лжеца. Табличный метод решения логических задач: преимущества и недостатки, различные формы использования.
2. Признаки и свойства параллельности прямых. Сумма углов треугольника. Определение типа угла треугольника (острый, прямой, тупой) через сравнение медианы и половины длины противолежащей стороны.
3. Задача.

Экзаменационный билет № 2

1. Кванторы. Правило формулирования противоположного высказывания. Доказательство от противного. Теорема. Критерий. Различные способы чтения теорем.
2. Теорема об определении сильнейшего участника из n команд по кубковой схеме. Теорема об упорядочивании нескольких предметов.
3. Задача.

Экзаменационный билет № 3

1. Множество. Парадоксы теории множеств. Парадокс Брадобрея. Теоретико-множественные операции над множествами и их свойства.
2. Постановка задачи: отличие тем «решение уравнений» и «решение уравнений в целых числах». Уравнение второй степени с двумя неизвестными: метод неопределенных коэффициентов (I–IV уровни).
3. Задача.

Экзаменационный билет № 4

1. Законы де Моргана и их применения для доказательства равенства множеств. Круги Эйлера. Применения теории множеств для решения задач.

2. Троичная система счисления и взвешивания на чашечных весах без гирь. Задача о короле и 30 рыцарях и взвешивания на весах со стрелкой.
3. Задача.

Экзаменационный билет № 5

1. Числа: натуральные, целые, рациональные, действительные, иррациональные. Десятичная запись числа. Соизмеримые отрезки. Недостаточность рациональных чисел для измерения длин отрезков.
2. Метод ГМТ в задачах на построение. Применения метода ГМТ для доказательства теорем: теорема о пересечении биссектрис треугольника, теорема о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
3. Задача.

Экзаменационный билет № 6

1. Делимость чисел: что означает «целое число a кратно b»? Четные и нечетные числа. Формулы сокращенного умножения и их применения в задачах на делимость.
2. Неравенство треугольника. Применения. Теорема о пересечении двух окружностей.
3. Задача.

Экзаменационный билет № 7

1. Конечные и бесконечные множества. Парадоксы теории множеств, связанные с бесконечными множествами. Пример «Гостиница». Теорема Евклида о бесконечности простых чисел.
2. Уравнение первой степени с двумя неизвестными: частное решение, общий вид решения. Теорема о существовании решений.
3. Задача.

Экзаменационный билет № 8

1. Многоточие как форма записи суммы нескольких слагаемых. Определение количества слагаемых. Вычисление некоторых типов сумм.
2. Задача о разрезании треугольника. Теорема о средней линии треугольника. Теорема о медианах.
3. Задача.

Экзаменационный билет № 9

1. Графы: определение, примеры. Лемма о рукопожатиях. Теорема о четности количества нечетных вершин.
2. Основные геометрические места точек (ГМТ). Теорема о четырех точках на окружности. ГМТ, из которых отрезок виден под одним углом.
3. Задача.

Экзаменационный билет № 10

1. Наибольший и наименьший элементы множества. Примеры множеств, у которых есть наибольший элемент, и у которых нет ни наибольшего, ни наименьшего элемента. Целая часть числа. Свойства целой части. Задача Эрмита.
2. Измерение углов, связанных с окружностью: теорема о вписанном и центральном углах, опирающихся на одну дугу, теоремы об угле между секущими с вершиной внутри и вне круга.

Экзаменационный билет № 11

1. Задача о кроликах. Обобщенный дискретный принцип Дирихле. Непрерывный принцип Дирихле для отрезков.
2. Упорядоченные выборки с возращением. Упорядоченные выборки без возвращения (размещения). Перестановки. Перестановки с повторениями и с ограничениями.
3. Задача.

Экзаменационный билет № 12

1. Метод математической индукции. Рекомендации: применение метода математической индукции в задачах на делимость, при доказательстве тождеств, неравенств. Формула бинома Ньютона.
2. Стратегии. Рекомендации с примерами.
3. Задача.

Экзаменационный билет № 13

1. Простые числа. Наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК): определение, свойства.
2. Полный, пустой и регулярный графы. Теорема о количестве ребер полного графа. Помеченный граф. Теорема о количестве помеченных графов с n вершинами.
3. Задача.

Экзаменационный билет № 14

1. Основная теорема арифметики. Алгоритм разложения на простые множители. Следствия: НОД и НОК. Теорема о произведении НОД и НОК двух чисел.
2. Метод вспомогательной окружности. Теорема о пересечении высот треугольника.
3. Задача.

Экзаменационный билет № 15

1. Теорема Лежандра (о разложении $n!$ на простые множители). Количество делителей и сумма делителей натурального числа.
2. Связный граф. Достаточные условия связности графа через наименьшую степень вершин и количество ребер. Дополнительный граф. Теорема о связности графа или его дополнения.
3. Задача.

Экзаменационный билет № 16

1. Теорема о делении с остатком. Геометрический смысл неполного частного и остатка при делении. Системы счисления. Арифметические операции. Применения.

2. Постановка комбинаторной задачи. Проблемы (задачи) комбинаторики. Основное комбинаторное правило.
3. Задача.

Экзаменационный билет № 17

1. Признак делимости Паскаля. Эстафетные признаки делимости.
2. Неупорядоченные выборки с возвращением. Неупорядоченные выборки без возвращения (сочетания).
3. Задача.

Экзаменационный билет № 18

1. Признаки равенства треугольников: формулировки. Доказательство признаков равенства прямоугольных треугольников.
2. Теорема о делении с остатком: решение уравнений в целых числах. Полная и приведенная системы вычетов по модулю m.
3. Задача.

Экзаменационный билет № 19

1. Теорема о сумме острых углов прямоугольного треугольника. Свойство медианы прямоугольного треугольника.
2. Задача Пуассона. Переливания и уравнения в целых числах первой степени.
3. Задача.

Экзаменационный билет № 20

1. Применение признаков равенства треугольников: признаки равнобедренного треугольника, доказательство теоремы о сравнении внешнего угла и внутреннего угла треугольника, не смежного с ним. Теорема о сравнении углов треугольника через длины противолежащих сторон треугольника.
2. Различные определения выборки в комбинаторике. Сравнение двух подходов в комбинаторике.
3. Задача.

Экзаменационный билет № 21

1. Дополнительные построения на основе признаков равенства треугольников. Метод удвоения медианы. Следствия теоремы о сравнении внешнего угла и внутреннего угла треугольника, не смежного с ним: теоремы о количестве прямых и тупых углов в треугольнике.
2. Постановка задачи на построение. Базовые построения с помощью циркуля и линейки.
3. Задача.

Задачи экзамена

1. (СПО, 2009, 2-й тур, 7 кл.) В магазине продаются три вида наборов «Юный техник». В одном наборе 4 винтика и 5 шпунтиков, в другом — 5 винтиков и 8 шпунтиков, в третьем — 8 винтиков и 3 шпунтика. Вася купил несколько наборов и собрал несколько паровозов. Докажите, что у него не могли остаться не использованными ровно 1 винтик и 1 шпунтик.
2. (СПО, 1996, 1-й тур, 7 кл.) Тома задумала число и нашла его остатки при делении на 3, 6, 9. Сумма этих остатков оказалась равна 15. Найдите остаток от деления задуманного числа на 18.
3. (СПО, 1996, 2-й тур, 7 кл.) Можно ли провести в выпуклом шестиугольнике несколько диагоналей так, чтобы каждая из них пересекала во внутренних точках ровно три другие?
4. (СПО, 1996, 2-й тур, 7 кл.) Решите уравнение в натуральных числах
$$\text{НОК}(x^2, y) + \text{НОК}(x, y^2) = 1996.$$
5. (СПО, 1996, 2-й тур, 7 кл.) Можно ли расставить по кругу натуральные числа от 1 до 10 таким образом, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих через одно, делилась на 3?
6. (СПО, 1998, 1-й тур, 7 кл.) Как разрезать квадрат со стороной 4 см на прямоугольники, сумма периметров которых равна 25 см?

7. (СПО, 1998, 1-й тур, 7 кл.) На складе стеклотары могут храниться банки из-под консервированных овощей по 0,5 л, 0,7 л и 1 л. Сейчас на складе имеется 2500 банок общей вместимостью 1998 л. Докажите, что на складе есть хотя бы одна пол-литровая банка.
8. (СПО, 1998, 2-й тур, 7 кл.) На пальме сидело много мартышек. Двадцать из них получили по пинку. Пнутая мартышка срывает с пальмы три финика и раздает подружкам. Мартышка, получившая два финика, съедает их и пинает другую мартышку. После того как произошло 30 новых пинков, мартышки успокоились. Сколько фиников осталось у мартышек?

Задачи пересдачи экзамена

1. (СПО, 2009, 1-й тур, 7 кл.) Остап Бендер умножил некоторое двузначное число на его первую цифру, Буратино умножил то же самое число на его вторую цифру, а Крокодил Гена сложил их результаты. Докажите, что сумма не равна 672.
2. (СПО, 2009, 2-й тур, 7 кл.) В куче 888 000 спичек. Два мудреца по очереди берут спички. В свой ход можно взять из кучи любое количество спичек кроме того, которое было взято противником на предыдущем ходе (брать первым ходом все спички не разрешается). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что как бы хитро ни играл первый мудрец, второй мудрец сможет выиграть.
3. (СПО, 2009, 2-й тур, 7 кл.) Деревня рыцарей и лжецов на карте имеет вид клетчатого прямоугольника 2×10, в каждой клетке живет один человек — рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Соседними считаются клетки, примыкающие друг к другу по стороне или углу. Каждый житель сказал: «Среди моих соседей нечетное число лжецов». Четно или нечетно количество лжецов в деревне?

Задание на лето

Задание на лето состоит из двух частей: обязательной и на перспективу.

Обязательная часть: в течение учебного года было проведено несколько письменных олимпиад, после каждой из них желающим были рассказаны решения соответствующих задач. В обязательной части задания на лето представлены задачи этих письменных олимпиад (см. следующий раздел). Необходимо до начала занятий в сентябре представить решение не менее 90% данных задач. В случае не выполнения из рейтинга будущего учебного года будут вычтены 20 баллов.

На перспективу: в этой части представлены задачи письменных олимпиад 8 классов. Представлять решения этих задач не требуется, как не требуется и решать их. Однако задачи первой письменной олимпиады следующего учебного года будут полностью состоять из задач этой части. В дальнейшем для письменных олимпиад эти задачи использоваться не будут.

Олимпиады по математике для учащихся 7 классов школы «Келешек»

Отборочный тур №1
4 сентября 2010 года

Продолжительность: 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Среди любых пяти школьников 7А класса есть хотя бы трое, которые играют в компьютерные игры. Учителя информатики решили выгнать с урока всех, кто играет в компьютерные игры. Какое максимальное число учащихся может остаться в классе, если в 7А учатся 30 учеников?
2. В Цветочном городе состоялся турнир по футболу между командами «Шайба», «Зубило» и «Крендель», в котором каждая команда сыграла с каждой одно и то же число матчей. Рассказывая о турнире, Незнайка сообщил, что «Шайба» одержала пять побед и потерпела пять поражений, но не сделала ни одной ничьей, а «Крендель» выиграл только три матча, зато шесть свел вничью. «Экое вранье!» — перебил его Знайка. «Откуда ты знаешь? Ты ведь и футболом-то совсем не интересуешься! Да и до конца я еще не рассказал!» — обиделся Незнайка. «Хоть и не рассказал, а наврать уже успел!» — отрезал Знайка. Почему он так решил?
3. На кошачьем конкурсе красоты участниц оценивали по трем параметрам: усатости, хвостатости и кусастости. Из двух кошек более красивой считается та, которая первосходит другую хотя бы по двум из этих трех параметров (одинаковых значений не бывает). Было 25 участниц, и оказалось, что каждая красивее ровно 12 из оставшихся. Мурка была 8-й по усатости и 15-й по хвостатости. Которой она была по кусастости?
4. На острове Невезения живут 100 человек, причем некоторые всегда лгут, а остальные говорят только

правду. Каждый житель острова поклоняется одному из трех богов — богу Солнца, богу Луны или богу Земли. Каждому жителю задали три вопроса:

а) Поклоняетесь ли Вы богу Солнца?

б) Поклоняетесь ли Вы богу Луны?

в) Поклоняетесь ли Вы богу Земли?

На первый вопрос утвердительно ответили 60 человек, на второй — 40 человек и на третий — 30 человек. Сколько лжецов на острове?

5. На экране компьютера — число 123. Компьютер каждую минуту прибавляет к числу на экране 102. Программист Федя в любой момент может изменить число на экране, переставив произвольным образом его цифры. Может ли Федя действовать так, чтобы на экране всегда оставалось трехзначное число?
6. На острове 2/3 всех мужчин женаты и 3/5 всех женщин замужем. Какая доля населения острова состоит в браке?

Отборочный тур №2
11 сентября 2010 года

Продолжительность: 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Мама дала Арману денег на 30 карандашей. Оказалось, что в магазине карандашная фабрика проводит рекламную акцию: в обмен на чек о покупке набора из 20 карандашей возвращают 25% стоимости товара, а в обмен на чек о покупке набора из 5 карандашей — 10%. Какое наибольшее число карандашей может купить Арман?
2. Эстафета длиной 2004 км состоит из нескольких этапов одинаковой длины, выражающейся целым числом километров. Участники команды города Энск бежали несколько дней, пробегая каждый этап ровно за один час. Сколько часов они бежали, если известно, что они уложились в неделю?

3. Найдите наибольшее четырехзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 5, 9 и 11.
4. Царь выделял на содержание Писарского приказа 1000 рублей в год (все писари получали поровну). Царю посоветовали сократить численность писарей на 50%, а оставшимся писарям повысить жалование на 50%. На сколько изменятся при этом затраты царя на писарский приказ?
5. Сумасшедший кассир меняет любые две монеты на любые три монеты по вашему выбору, а любые три — на любые две. Сможете ли вы обменять у него 100 монет достоинством 100 тенге на 100 монет достоинством 1 евро, отдав ему при обмене ровно 2011 монет? Ответ обоснуйте.

Отборочный тур №3
2 октября 2010 года

Продолжительность: 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Докажите, что

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\cfrac{1}{1991}}}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\cfrac{1}{1991}}}}}=1.$$

2. На окружности записаны 6 чисел: каждое равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найдите эти числа.

3. В ряд стоят 30 сапог: 15 левых и 15 правых. Докажите, что среди некоторых 10 подряд стоящих сапог левых и правых поровну.
4. Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух соседних положительных четных чисел?
5. Можно ли расставить в вершинах куба натуральные числа так, чтобы в каждой паре чисел, связанных ребром, одно из них делилось на другое, а во всех парах такого не было?

Отборочный тур №4
13 ноября 2010 года

Продолжительность: 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Расставьте все числа от 1 до 9 в таблице 3×3 так, чтобы сумма чисел в любых двух соседних по стороне клетках была равна 8, 9, 10 или 11.
2. На плоскости провели четыре различных луча: OA, OB, OC и OD. Оказалось, что углы AOB, BOC и COD равны между собой, а угол AOD втрое меньше каждого из них (все рассматриваемые углы меньше развернутого угла). Найдите величину угла AOD (постарайтесь перечислить все возможные варианты).
3. В королевстве Логрия живут рыцари. Любые два из них враждуют (например, сэр Гавейн враждует с сэром Ланселотом), дружат, или вовсе друг к другу безразличны. Друг врага рыцаря — враг этого рыцаря. Докажите, что хотя бы у одного рыцаря врагов больше, чем друзей.
4. В клетках шахматной доски (8 × 8) расставлены натуральные числа так, что в каждой горизонтали и в каждой вертикали сумма чисел четна. Докажите, что сумма чисел, расставленных в черных клетках, четна.
5. В ряду чисел 1, 501, 751, 876, 438, ... каждое число, кроме первого, равно половине предыдущего, если

предыдущее четно, и половине предыдущего числа, увеличенного на 1001, в противном случае. Верно ли, что в этом ряду встретятся все натуральные числа от 1 до 1000?

Отборочный тур №5
21 ноября 2010 года

Продолжительность: 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Упростите:
$$\frac{3+36+369+3702+37035+370368+3703701}{4+48+492+4936+49380+493824+4938268}.$$
2. В клетках таблицы, содержащей 4 строки и 7 столбцов, расставьте натуральные числа так, чтобы их сумма в каждой строке была равна 28, а в каждом столбце 15. Можно ли осуществить требуемое? Если да, то покажите, если нет, то объясните почему.
3. Шесть мальчиков и четыре девочки организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с каждым по одной партии. За выигрыш присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Девочки вместе набрали 40 очков. Кто выиграл больше очков: мальчики у девочек или девочки у мальчиков, и на сколько?
4. Среди девушек школы «Келешек» найдутся две девушки, отличающиеся цветом волос, а также две девушки, отличающиеся ростом. Докажите, что среди девушек школы «Келешек» найдутся две девушки, отличающиеся и цветом волос, и ростом.
5. Учащийся физико-математического класса купил картошки и по дороге вычислял: он умножил целую часть цены 1 кг картошки на целую часть массы купленной картошки и получил 24. Потом он умножил целую часть цены на дробную часть массы и получил 1,2. Наконец, он умножил дробную часть цены на

целую часть массы и получил 2. Определите стоимость купленной картошки. (Целая часть числа x есть наибольшее целое число, не превосходящее x, ее обозначают $[x]$. Дробная часть числа x есть разность $x - [x]$, ее обозначают $\{x\}$. Например, $[5] = 5$, $[3{,}4] = 3$, $\{5\} = 0$, $\{3{,}4\} = 0{,}4$.)

Отборочный тур №6
11 декабря 2010 года

Продолжительность: 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Запишите число 10 с помощью семи «4», знаков арифметических действий и запятой.
2. Поставьте знаки модуля так, чтобы равенство
$$1 - 2 - 4 - 8 - 16 = 19$$
стало верным.
3. Сосчитайте:
$$1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - \ldots + \\ + 2002 - 2003 - 2004 + 2005.$$
4. В сосуде было 20 л чистого спирта. Часть этого спирта отлили, а сосуд долили водой. Затем отлили столько же литров смеси и сосуд опять долили водой. После этого в сосуде оказалось чистого спирта втрое меньше, чем воды. Сколько спирта отлили в первый раз?
5. Сколькими нулями оканчивается произведение всех целых чисел от 1 до 100 включительно.

Отбор на «Великолепную семерку»

1. На доске написали три целых числа. Затем одно из них стерли и вместо него написали сумму двух оставшихся чисел, уменьшенных на единицу. Эту опера-

цию повторили несколько раз, и в результате получили числа 17, 1967, 1983. Могли ли на доске первоначально быть записаны числа 2, 2, 2?

2. В некотором лагере каждый мальчик знаком с 10 девочками, а каждая девочка знакома с 10 мальчиками. Докажите, что в этом лагере мальчиков и девочек поровну.
3. Докажите, что число $5^{2011} \cdot 2^{1007} + 3^{1007} \cdot 2^{2011}$ делится на 19.
4. При дворе короля Артура собралось 2010 рыцарей, причем каждый из них имеет среди присутствующих не более 1004 врагов. Докажите, что Мерлин, советник Артура, может так рассадить рыцарей за круглым столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.
5. Решите ребус СНЕГ + КРУГ = СПОРТ (различные буквы обозначают различные цифры).

Олимпиады по математике для учащихся 7–8 классов школы «Келешек»

Отборочный тур №1
30 января 2011 года

1. Вычислите:

$$\frac{1}{2}+\frac{403^2}{402\cdot 404}+\frac{805^2}{804\cdot 806}+\frac{1207^2}{1206\cdot 1208}+\frac{1609^2}{1608\cdot 1610}+\frac{2011^2}{2010\cdot 2012}.$$

2. Докажите, что для любых трех положительных чисел a, b, c выполнены неравенства:

$$1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2.$$

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE. Известно, что DE — биссектриса угла ADC. Найдите величину угла A.
4. На бесконечной клетчатой доске двое играют в крестики-нолики по обычным правилам: выигрывает тот, кто первым выстроит 5 своих знаков в ряд по вертикали или по горизонтали (ряд по диагонали не считается). Докажите, что второй может гарантировать себе как минимум ничью.

Отборочный тур №2
27 февраля 2011 года

1. Докажите, что сумма $\frac{1}{1007}+\frac{1}{1008}+\ldots+\frac{1}{2012}$ больше 0,5.
2. Данным четырехугольником неправильной формы настлать паркет, т.е. покрыть всю плоскость четырехугольниками, равными данному, без промежутков и перекрытий.
3. Факториалом числа n называется произведение всех целых чисел от 1 до n включительно. Найдите все

трехзначные числа, равные сумме факториалов своих цифр.

4. В Циссильвании 2011 жителей. Трое из них — вампиры, но мало кому известно, кто именно. Заезжий писатель мистер Стокер попросил каждого жителя назвать двух человек, которые, по его мнению, являются вампирами. Каждый вампир назвал двух других вампиров, а остальные могли назвать кого угодно. Докажите, что, пользуясь этими данными, мистер Стокер может выбрать себе проводника, не являющегося вампиром.

Отборочный тур №3
27 марта 2011 года

1. Имеется два дома, в каждом по два подъезда. Жильцы держат кошек и собак, причем доля кошек (отношение числа кошек к общему числу кошек и собак) в первом подъезде первого дома больше, чем доля кошек в первом подъезде второго дома, а доля кошек во втором подъезде первого дома больше, чем доля кошек во втором подъезде второго дома. Верно ли, что доля кошек в первом доме больше доли кошек во втором доме?
2. Какое наибольшее значение может принимать выражение $\dfrac{1}{a+\dfrac{2010}{b+\dfrac{1}{c}}}$, где a, b, c — попарно различные ненулевые цифры?
3. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, T — центр описанной окружности треугольника AOC, M — середина AC. На сторонах AB и BC выбраны точки D и E соответственно так, что $\angle BDM = \angle BEM = \angle ABC$. Докажите, что $BT \perp DE$.
4. Куб размером $10 \times 10 \times 10$ сложен из 500 черных и 500 белых кубиков в шахматном порядке (кубики, примыкающие друг к другу гранями, имеют различ-

ные цвета). Из этого куба вынули 100 кубиков так, чтобы в каждом из 300 рядов размером $1 \times 1 \times 10$, параллельных какому-нибудь ребру куба, не хватало ровно одного кубика. Докажите, что число вынутых чёрных кубиков делится на 4.

Отборочный тур №4
24 апреля 2011 года

1. Разрежьте одну из фигур, представленных на рис. 18, на две части так, чтобы из них можно было сложить каждую из оставшихся. Нарисуйте как вы разрезаете и как складываете.

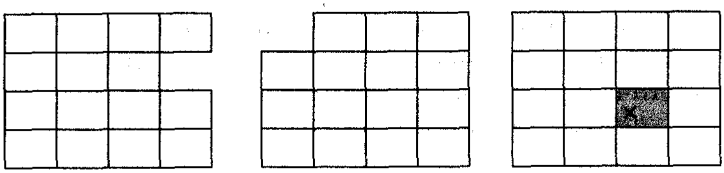


Рис. 18

2. Мальчик стоит на автобусной остановке и мерзнет, а автобуса нет. Ему хочется пройтись до следующей остановки. Мальчик бегает вчетверо медленнее автобуса и может увидеть автобус на расстоянии 2 км. До следующей остановки ровно километр. Имеет ли смысл идти или есть риск упустить автобус?
3. В парке росли липы и клены. Кленов среди них было 60%. Весной в парке посадили липы, после чего кленов стало 20%. А осенью посадили клены, и кленов снова стало 60%. Во сколько раз увеличилось количество деревьев в парке за год?
4. Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120°. Из вершины B выпустили внутрь треугольника два луча под углом 60° друг к другу, которые отразившись от основания AC в точках P и Q, попали на боковые стороны AB и BC в точки M и N соответственно. Докажите, что площадь треугольника PBQ равна сумме площадей треугольников AMP и CNQ.

Отборочный тур №5
2 мая 2011 года

1. На доске написано: «В этом предложении ...% цифр делится на 2, ...% цифр делится на 3, а ...% цифр делятся и на 2, и на 3». Вставьте вместо многоточий какие-нибудь целые числа так, чтобы написанное на доске утверждение стало верным.
2. В треугольнике ABC на стороне AC отмечены точки D и E, так что $AD = DE = EC$. Может ли оказаться, что $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$?
3. На некоторых клетках шахматной доски лежит по одной конфете. Известно, что в каждой строке, в каждом столбце и в каждой диагонали (любой длины, даже состоящей из одной клетки) лежит четное количество конфет (возможно, ни одной). Какое максимальное количество конфет может лежать на доске?

Олимпиады по математике для учащихся 8 классов школы «Келешек»

Отборочный тур №1
4 сентября 2010 года

Продолжительность: 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Докажите равенство
$$\frac{1}{1\cdot 2009}+\frac{1}{3\cdot 2007}+\frac{1}{5\cdot 2005}+\ldots+\frac{1}{2007\cdot 3}+\frac{1}{2009\cdot 1}=$$
$$=\frac{2}{2010}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2009}\right).$$
2. Шесть игральных костей нанизали на спицу так, что каждая может вращаться независимо от остальных (протыкаем через центры противоположных граней). Спицу положили на стол и прочитали число, образованное цифрами на верхних гранях костей. Докажите, что можно так повернуть кости, чтобы это число делилось на 7. (На гранях стоят цифры от 1 до 6, сумма цифр на противоположных гранях равна 7.)
3. В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме «р», которую просто пропускают при письме, а остальные знают все буквы, кроме «к», которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово «кот», 18 других учеников — слово «рот», а остальных — слово «крот». При этом слова «кот» и «рот» оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали свое слово верно? Ответ обоснуйте.
4. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AB и BC взяты точки D и E так, что $AD = CB$, $BD = CE$. Докажите, что угол между отрезками AE и CD равен 45°.
5. Доказать неравенство $2a^2 + 5b^2 \geq 6ab$.
6. В сосуде было 20 л чистого спирта. Часть этого спирта отлили, а сосуд долили водой. Затем отлили столь-

ко же литров смеси и сосуд опять долили водой. После этого в сосуде оказалось чистого спирта втрое меньше, чем воды. Сколько спирта отлили в первый раз?

Отборочный тур №2
11 сентября 2010 года

Продолжительность: 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. На станции «Лукоморье» продают карточки на 1, 5 и 20 поездок. Все карточки стоят целое число монет. Пять карточек на одну поездку стоят дороже, чем одна на пять поездок, а четыре карточки на 5 поездок дороже одной карточки на 20 поездок. Оказалось, что самый дешевый способ проезда для 33 богатырей — это купить карточек на 35 поездок, потратив на это 33 золотые монеты. Сколько стоит карточка на 5 поездок?
2. В вершинах правильного девятиугольника расставляют числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, после чего на каждой диагонали пишут произведение чисел, стоящих на ее концах. Можно ли так расставить числа в вершинах, чтобы все числа на диагоналях были разные?
3. Ваня считает что дроби «сокращают», зачеркивая одинаковые цифры в числителе и знаменателе. Сережа заметил, что иногда Ваня получает верные ответы, например $\frac{49}{98}=\frac{4}{8}$. Найдите все правильные дроби с числителем и знаменателем, состоящими из двух ненулевых цифр, которые можно так «сократить».
4. Отмечены четыре вершины квадрата. Отметьте еще четыре точки так, чтобы на всех серединных перпендикулярах к отрезкам с концами в отмеченных точках лежало по две отмеченные точки.
5. Незнайка думает, что только равносторонний треугольник можно разрезать на три равных треугольника. Прав ли он?

Отборочный тур №3
27 сентября 2010 года

Продолжительность: 4 часа

1. (3б) Встретились рыцарь, лжец и политик. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжет, а политик может как лгать, так и говорить правду. Когда их спросили, кто из них кто, первый ответил — «лжец», второй — «рыцарь», третий — «политик». Кто из них кто?
2. (4б) Есть 4 одинаковые банки, в них 4 разные краски, каждая банка заполнена на $\frac{3}{4}$. Разрешается переливать любую часть жидкости из одной банки в другую (если поместится). Можно ли во всех банках сделать одинаковую смесь? Выливать краску нельзя.
3. (5б) Клетки прямоугольника 99×101 раскрашены в красный и синий цвета. Докажите, что найдется клетка, для которой в содержащих ее строке и столбце найдутся хотя бы 99 клеток того же цвета.
4. (5б) Докажите, что следующие две гипотезы равносильны:
   а) существует бесконечно много пар простых чисел с разностью 2;
   б) существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $6uv \pm u \pm v$ ни при каких натуральных u и v, и ни при каком выборе знаков.
5. (7б) Внутри треугольника ABC выбрана точка D. Описанные окружности треугольников CAD и CBD пересекают отрезки CB и CA соответственно в точках E и F. Оказалось, что $BE = AF$. Докажите, что CD — биссектриса угла $\angle ACB$.
6. (8б) Какие натуральные числа можно представить в виде $[x, y] + [y, z] + [x, z]$ с натуральными x, y, z? ($[a, b]$ — наименьшее общее кратное чисел a и b.)

7. (8б) Дан параллелограмм $ABCD$. На лучах DB и AC нашлись такие точки K и L соответственно, что $KL \parallel BC$, $\angle BCD = 2\angle KLD$. Докажите, что $AK \perp DL$.
8. (9б) В стране 101 аэропорт. Каждое возможное направление обслуживается ровно одной авиакомпанией (в обе стороны сразу). Известно, что ни одна авиакомпания не может организовать круговое турне, в котором городов будет больше двух и города не повторяются. Какое наименьшее возможное количество авиакомпаний?
9. Докажите для положительных чисел x, y, z неравенство
$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz + 4(x - y)(y - z)(z - x).$$

Отборочный тур №4
2 октября 2010 года

Продолжительность: 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. На окружности записаны 6 чисел: каждое равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найдите эти числа.
2. Найдите все действительные корни уравнения
$$(x + 1)^{21} + (x + 1)^{20}(x - 1) + (x + 1)^{19}(x - 1)^2 + \ldots + (x - 1)^{21} = 0.$$
3. Длины оснований трапеции — целые числа. Докажите, что ее можно разбить на равные треугольники.
4. Дана окружность радиуса R и точка A внутри нее. Найдите геометрическое место вершин C всевозможных прямоугольников $ABCD$, где B и D — точки окружности.
5. Разбойники Хапок и Глазок делят кучу из 100 монет. Хапок захватывает из кучи пригоршню монет, а Глазок, глядя на пригоршню, решает, кому из двоих она достанется. Так продолжается, пока кто-то из них не получит 9 пригоршней. После чего другой забирает

все оставшиеся монеты (дележ может закончиться и тем, что монеты будут разделены прежде, чем кто-то получит 9 пригоршней). Хапок может захватить в пригоршню сколько угодно монет. Какое наибольшее число монет он сможет гарантировать себе независимо от действий Глазка?

Отборочный тур №5
13 ноября 2010 года

Продолжительность: 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Игорь написал четырехзначное число, а Костя подписал под ним в столбик все числа, получающиеся из данного всевозможным стиранием цифр (числа могли получиться равными). Сумма всех 15 чисел оказалась равна 2001. Какое было первоначальное число?
2. Точка M — середина хорды CD полуокружности с диаметром AB. Точки K и L — основания перпендикуляров, опущенных из точек C и D на AB. Докажите, что $\angle CKM = \angle DLM$.
3. Решите в действительных числах систему
$$2x_2 = x_1 + \frac{2}{x_1},\ 2x_3 = x_2 + \frac{2}{x_2},\ \ldots,\ 2x_n = x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}},$$
$$2x_1 = x_n + \frac{2}{x_n}.$$
4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle B = 90°$) точки D и E расположены на стороне BC так, что $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC$. Известно, что $EC = 2BD$. Найдите углы треугольника ABC.
5. Все целые числа раскрасили в 100 цветов так, что каждым цветом окрашено хотя бы одно число. Если $[a, b]$ и $[c, d]$ — два отрезка одинаковой длины, a и c одного цвета, и b и d одного цвета, то отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ раскрашены одинаково, то есть для каждого целого $x \in [0, b-a]$ числа $a+x$ и $c+x$ — одного цвета. Докажите, что числа -2001 и 2001 разного цвета.

Отборочный тур №6
21 ноября 2010 года

Продолжительность: 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Найдите все целые неотрицательные решения уравнения $xy - x + y = 2006$.
2. Пусть $ABCD$ — параллелограмм ($AB>AD$), M — середина AB, а N — пересечение CD и биссектрисы угла ABC. Докажите, что если CM и BN перпендикулярны, то AN — биссектриса угла DAB.
3. Что больше — 79^{26} или 244^{21}, и почему?
4. Доказать, что если длины сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то произведение чисел, выражающих длины катетов, делится на 12.
5. Владелец кодового дипломата забыл 3-значный набор цифр (000-999), с помощью которого открывается дипломат. Он помнит, что сумма цифр равна 15. Какое минимальное количество вариантов ему следует опробовать, чтобы гарантированно открыть дипломат?

Личная письменная олимпиада
(алгебра и теория чисел, 8–9 классы)

1. Числа a, b, c таковы, что $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2008$ и $a \neq b$. Найдите значение выражения $c^2(a+b)$.
2. Петя задумал натуральное число и для каждой пары его цифр выписал на доску их разность. После этого он стер некоторые разности, и на доске остались числа 2, 0, 0, 7. Какое наименьшее число мог задумать Петя?
3. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполнено неравенство
$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

4. Найдите все целые числа x, y, z такие, что
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(yz + 1) \text{ и } x + y + z = 4018.$$

Личная письменная олимпиада (геометрия, 8–9 классы)

1. Пусть AC — наибольшая сторона треугольника ABC. На стороне AC выбраны точки M и N такие, что $AM = AB$, $CN = CB$. Докажите, что если $BM = BN$, то треугольник ABC равнобедренный.
2. В выпуклом четырехугольнике семь из восьми отрезков, соединяющих вершины с серединами противоположных сторон, равны. Докажите, что все восемь отрезков равны.
3. В треугольнике ABC точка G является точкой пересечения медиан, а точка D — серединой стороны AC. Через точку G проведена линия, параллельная BC, которая пересекает AB в точке E. Докажите, что $\angle AEC = \angle DGC$ тогда и только тогда, когда $\angle ACB = 90°$.
4. В неравнобедренном треугольнике ABC точки H и M — точки пересечения высот и медиан соответственно. Через вершины A, B и C проведены прямые, перпендикулярные прямым AM, BM и CM соответственно. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника, образованного проведенными прямыми, лежит на прямой MH.

Личная устная олимпиада (комбинаторика и логика, 8–9 классы)

1. В турнире по теннису участвовало не менее трех спортсменов. Каждый спортсмен играл со всеми по одной партии. К тому же каждый спортсмен выиграл хотя бы одну партию (все партии заканчивались победой одного из двух спортсменов, ничьих не было). Докажите, что существуют три спортсмена A, B и C

такие, что A выиграл у B, B выиграл у C, и C выиграл у A.

2. На фестивале камерной музыки собралось шесть музыкантов. На каждом концерте часть музыкантов выступает, а остальные слушают их из зала. За какое наименьшее число концертов каждый из шести музыкантов сможет послушать (из зала) всех остальных?
3. Двадцать футбольных команд проводят первенство. В первый день все команды сыграли по одной игре. Во второй день также все команды сыграли по одной игре. Докажите, что после второго дня можно указать такие 10 команд, что никакие две из них не играли друг с другом.
4. Двое играют на шахматной доске 8×8. Начинающий игру делает первый ход — ставит на доску коня. Затем они по очереди его передвигают, при этом нельзя ставить коня на поле, где он уже побывал. Проигравшим считается тот, кому некуда ходить. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер?
5. На плоскости 15 точек покрашены в один из трех цветов: синий, зеленый и красный. Известно, что сумма всех расстояний между красными и синими точками равна 51, сумма расстояний между красными и зелеными точками — 39, между синими и зелеными точками — 1. Сколько точек окрашено в каждый из цветов?

Программа спецкурса по математике

	Количество часов
АЛГЕБРА	140
ГЕОМЕТРИЯ	42
КОЛЛОКВИУМЫ	28
ИТОГО	210
ВНЕ УРОКОВ	64

ПОУРОЧНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

№ занятия	Содержание материала	Кол-во часов
	Часть 1	
	ГЛАВА I. Логика (14 часов)	
1	Парадокс лжеца.	1
2—4	Табличный метод решения логических задач.	3
5	Истинные и ложные утверждения.	1
6	Правдолюбцы и лжецы.	1
7—12	Турнирные задачи.	3
13,14	Различные логические задачи.	2
	ГЛАВА II. Введение в теорию множеств (10 часов)	
15	Кванторы. Правило формулирования противоположного высказывания. Доказательство от противного. Теорема. Критерий.	1
16	Числа: натуральные, целые, рациональные, действительные, иррациональные.	1
	Четные и нечетные числа. Свойства четности суммы и знака произведения.	
	Аналоги четности: чередование и разбиение на пары.	

17—18	Множество. Парадоксы теории множеств. Парадокс Брадобрея.	2
19—20	Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметричная разность.	2
21	Круги Эйлера.	1
22	Теорема о количестве элементов объединения нескольких конечных множеств.	1
23	Законы де Моргана.	1
24	Применения теории множеств для решения задач.	1
25—28	Абака №1	4
ГЛАВА III. Введение в теорию чисел (16 часов)		
29—30	Многоточие как форма записи суммы нескольких слагаемых. Определение количества слагаемых. Вычисление некоторых типов сумм.	2
31—34	Делимость целых чисел. Формулы сокращенного умножения и их применения в задачах на делимость.	4
Коллоквиум № 1 (8 часов)		
35—38	Абака №2.	4
39—42	Математическая дуэль №1.	4
Вне уроков	Прием блоков задач.	8
	Коллоквиум №1.	6
Часть 2		
ГЛАВА III. Введение в теорию чисел. Продолжение (10 часов)		
43—48	Графы. Четность числа нечетных вершин. Инварианты, связанные с четностью.	6
49—52	Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11. Текстовые задачи с целыми числами.	4
ГЛАВА IV. Принцип Дирихле (10 часов)		
53—54	Целая и дробная части числа. Задача Эрмита.	2
55—56	Задача о кроликах. Обобщенный дискретный принцип Дирихле.	2
57—58	Принцип Дирихле и делимость целых чисел.	2

59—62	Принцип Дирихле и дополнительные соображения.	4
ГЛАВА V. Метод математической индукции (8 часов)		
63	Последовательность: определение, способы задания.	1
64—65	Метод математической индукции. Рекомендации.	2
66	Формула бинома Ньютона.	1
67—68	Доказательство тождеств.	2
69—70	Применение метода математической индукции в задачах на делимость.	2
Глава VI. Введение в геометрию (4 часа)		
71—72	Геометрия как аксиоматическая наука. Различные системы аксиом: Гильберт, Атанасян, Бутузов, Погорелов, Лобачевский.	2
73	О чертежах в геометрии. Рисунок Р. Пенроуза, лестница Схоутена.	1
74	Параллельные и перпендикулярные прямые. Расстояние от точки до прямой. Софизм: все прямые параллельны. Софизм: все треугольники равнобедренные.	1
ГЛАВА VII. Три важнейшие теоремы в теории чисел или три взгляда на целые числа (12 часов)		
75	*Основная теорема арифметики.*	1
76—77	Алгоритм разложения на простые множители.	2
78	Теорема о НОД и НОК нескольких чисел. Теорема о произведении НОД и НОК двух чисел.	1
79	Разложение $n!$ на простые множители (теорема Лежандра).	1
80	Теорема о количестве и сумме натуральных делителей.	1
81—82	*Теорема о делении с остатком.* Геометрический смысл неполного частного и остатка при делении.	2
83	Задача о взятке. *Теорема о системах счисления.* Арифметические операции. Применения.	1

84	Признак делимости Паскаля. Эстафетные признаки делимости.	1
85—86	Математические фокусы.	2
Коллоквиум № 2 (4 часа)		
87—90	Математическая байга.	4
Вне уроков	Прием блоков задач.	6
	Коллоквиум №2.	6
Часть 3		
Глава VIII. Элементы геометрии треугольника (8 часов)		
91	Треугольники и их виды. Равнобедренный треугольник. Равенство геометрических фигур. Признаки равенства треугольников.	1
92	Применение признаков равенства треугольников: доказательство теоремы о сравнении внешнего угла и внутреннего угла треугольника, не смежного с ним.	1
93—94	Признаки равенства прямоугольных треугольников.	2
95	Признаки и свойства равнобедренного треугольника.	1
96	Соотношения между сторонами и углами треугольника.	1
97	Теорема о сумме острых углов прямоугольного треугольника.	1
98	Теорема о медиане прямоугольного треугольника.	1
ГЛАВА IX. Решение уравнений в целых числах (12 часов)		
99	Постановка задачи: отличие тем «решение уравнений» и «решение уравнений в целых числах».	1
	Конечные и бесконечные множества. Пример «гостиница». Примеры уравнений с конечным и бесконечным числом решений.	
100—101	Уравнение первой степени с двумя неизвестными: частное решение, общий вид решения.	2

102—103	Уравнение второй степени с двумя неизвестными: метод неопределенных коэффициентов (I–V уровни).	2
104—105	Уравнение первой степени с несколькими неизвестными: метод замены переменных.	2
106	Текстовые задачи, приводящие к решению уравнений в целых числах.	1
107—108	Полная и приведенная системы вычетов по модулю m: определение, свойства. Решение уравнений в целых числах с помощью остатков при делении: сужение области (множества) допустимых значений.	2
109—110	Доказательство отсутствия решения уравнений в целых числах с помощью остатков.	2
Глава X. Параллельные прямые (6 часов)		
111_112	Признаки и свойства параллельных прямых.	2
113—114	Теорема о сумме углов треугольника.	2
115—116	Теорема о медиане и противоположной стороне треугольника.	2
ГЛАВА XI. Переливания (6 часов)		
117—118	Задача Пуассона. Переливание и уравнения в целых числах первой степени.	2
119—120	Распределения в заданных соотношениях.	2
121—122	Процент. Процентное содержание в задачах на переливание.	2
Коллоквиум № 3 (4 часа)		
123—126	Абака №3.	4
Вне уроков	Прием блоков задач	6
	Коллоквиум №3	6
Часть 4		
ГЛАВА XII. Взвешивания (8 часов)		
127—128	Упорядочивание конечных наборов.	2
129—130	Троичная система счисления и взвешивания на чашечных весах без гирь.	2

131—132	Задача о короле и 30 рыцарях. Взвешивания на весах со стрелкой.	2
133—134	Составление наборов с заданными весовыми свойствами.	2
ГЛАВА XIII. Неравенство треугольника (6 часов)		
135—136	Неравенство треугольника.	2
137	Теорема о пересечении двух окружностей.	1
138—139	Задача о разрезании треугольника. Средняя линия треугольника.	2
140	Теорема о пересечении медиан треугольника.	1
ГЛАВА XIV. Комбинаторика (8 часов)		
141	Постановка комбинаторной задачи. Проблемы (задачи) комбинаторики.	1
142	Основное комбинаторное правило (частный случай).	1
143	Основное комбинаторное правило (общий случай).	1
144	Выборки с возвращением и без возвращения. Выборки неупорядоченные и упорядоченные.	1
145	Упорядоченные выборки с возвращением. Упорядоченные выборки без возвращения (размещения). Перестановки. Перестановки с повторениями.	1
146	Неупорядоченные выборки с возвращением. Упорядоченные выборки без возвращения (сочетания).	1
147—148	Различные определения выборки в комбинаторике. Сравнение двух подходов в комбинаторике.	2
ГЛАВА XV. Стратегии (10 часов)		
149—150	Игры с точки зрения математики: постановка задачи.	2
151—156	Рекомендации: выигрышные позиции, симметрия, дополнение, передача невыгодного хода и др.	6
157—158	Изоморфизм игр.	2

Коллоквиум № 4 (4 часа)		
159—162	Абака №5.	4
Вне уроков	Прием блоков задач.	6
	Коллоквиум №4.	6
Часть 5		
ГЛАВА XVI. Шахматная доска (6 часов)		
163—164	Разрезания.	2
165—166	Шашки.	2
167	Шахматные расстановки.	1
168	Необычные шахматные задачи.	1
ГЛАВА XVII. Измерение углов, связанных с окружностью (6 часов)		
169	Центральный угол. Градусная мера дуги.	1
170	Вписанный угол.	1
171—172	Угол с вершиной внутри круга.	2
173—174	Угол с вершиной вне круга. Угол между касательной и хордой.	2
ГЛАВА XVIII. Введение в теорию графов (10 часов)		
175	Неориентированный граф: определение. Ребра: определение, смежные ребра. Вершины: определение, смежные вершины, окружение вершины, степень вершины. Подграф.	1
176	Полный граф. Теорема о количестве ребер полного графа. Пустой граф.	1
177	Помеченный граф. Теорема о количестве помеченных графов.	1
178	Связный граф. Теоремы о наименьшем количестве вершин и ребер в связном графе.	1
179	Дополнительный граф. Теорема о связности графа или его дополнения.	1
180	Регулярный граф.	1
181	Лемма о рукопожатиях. Теорема о четности количества нечетных вершин.	1
182—184	Раскраска графов	3

ГЛАВА XIX. Построение с помощью циркуля и линейки и ГМТ (12 часов)		
185—186	Основные (базовые) геометрические построения с помощью циркуля и линейки.	2
187—188	Геометрическое место точек (ГМТ): определение.	2
189—190	Серединный перпендикуляр к отрезку. Теорема о пересечении серединных перпендикуляров со сторонами треугольника. Описанная около треугольника окружность.	2
191	Свойство биссектрисы угла. Теорема о пересечении биссектрис треугольника. Вписанная в треугольник окружность.	1
192	Условие принадлежности четырех точек окружности.	1
193—194	Теорема Фалеса: построение соизмеримых отрезков.	2
195	Метод геометрических мест точек в задачах на построение.	1
196	Метод вспомогательной окружности. Теорема о пересечении высот треугольника.	1
Глава XX. Инвариант (10 часов)		
197—198	Числовые инварианты: четность.	2
199	Числовые инварианты: остатки от деления.	1
200—201	Шахматы и инварианты. Ориентация.	2
202—203	Геометрические инварианты: длина, симметрия и др.	2
204—205	Полуинварианты: сумма всех чисел, число «неправильных» пар и др.	2
206	Четность перестановки.	1
Коллоквиум № 5 (4 часа)		
207—210	Математическая дуэль.	4
Вне уроков	Прием блоков задач (допуск к экзамену).	6
	Экзамен.	8

Список литературы

1. *Агаханов Н.Х. и др.* Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993—2006. — М.: МЦНМО, 2007.
2. *Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А. и др.* Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 1. — М.: Просвещение, 2008.
3. *Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А. и др.* Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993—2009. — М.: МЦНМО, 2010.
4. *Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А. и др.* Математика. Областные олимпиады. 8—11 классы. — М.: Просвещение, 2010.
5. *Агаханов Н.Х., Подлипский О.К.* Математика. Районные олимпиады. 6—11 классы. — М.: Просвещение, 2010.
6. *Агаханов Н.Х., Подлипский О.К.* Математические олимпиады Московской области 1993—2005. — М.: Физматкнига, 2006.
7. *Агаханов Н.Х., Подлипский О.К.* Математика. Всероссийские олимпиады. Вып.2. — М.: Просвещение, 2009.
8. *Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С.* Математика. Всероссийские олимпиады. Вып.3. — М.: Просвещение, 2011.
9. *Агаханов Н.Х., Терешин Д.А., Кузнецова Г.М.* Школьные математические олимпиады. — М.: Дрофа, 2003.
10. *Акулич И.Ф.* Королевские прогулки. — М.: Бюро Квантум, 2008.
11. *Арнольд В.И.* Цепные дроби. — М.: МЦНМО, 2009.
12. *Базылев Д.Ф.* Олимпиадные задачи по математике. — М.: ЛИБРОКОМ, 2010.
13. *Бегунц А.В., Бородин П.А., Горяшин Д.В. и др.* Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике (2005—2011). — М.: МЦНМО, 2011.
14. *Берлов С.Л., Иванов С.В., Кохась К.П.* Петербургские математические олимпиады. — М.: Лань, 2005.
15. *Берлов С.Л., Кохась К.П., Храбров А.И. и др.* Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2008 года. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008.
16. *Блинков А.Д., Блинков Ю.А.* Геометрические задачи на построение. — М.: МЦНМО, 2010.

17. *Блинков А.Д., Горская А.С.* LXX Московская математическая олимпиада. Окружной тур. — М.: МЦНМО, 2007.
18. *Блинков А.Д., Горская А.С.* LXXI Московская математическая олимпиада. Окружной тур. — М.: МЦНМО, 2008.
19. *Блинков А.Д., Горская Е.С., Гуровиц В.М.* Московские математические регаты. — М.: МЦНМО, 2007.
20. *Богомолова О.Б.* Логические задачи. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
21. *Васильев Н.Б.* Задачник «Кванта». Математика. Часть 1. — М.: Бюро Квантум, 2005.
22. *Васильев Н.Б., Егоров А.А.* Задачи Всесоюзных математических олимпиад. Часть 2. — М.: МЦНМО, 2011.
23. *Виленкин Н.Я.* Комбинаторика. — М.: ФИМА, МЦНМО, 2006.
24. *Виленкин Н.Я., Шибасов Л.П., Шибасова З.Ф.* За страницами учебника математики: арифметика. Алгебра. — М.: Просвещение, 2008.
25. *Виленкин Н.Я., Шибасов Л.П,, Шибасова З.Ф.* За страницами учебника математики: геометрия. Старинные и занимательные задачи. — М.: Просвещение, 2008.
26. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. — СПб.: Лань, 2006.
27. *Галкин Е.В.* Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами. — Челябинск: Взгляд, 2005.
28. *Гарднер М.* Лучшие математические игры и головоломки, или самый настоящий математический цирк. — М.: Астрель, 2009.
29. *Гарднер М.* Новые математические развлечения. — М.: АСТ, Астрель, 2009.
30. *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. — М.: Мир, 1999.
31. *Гарднер М.* Математические чудеса и тайны. — Минск: Современное слово, 1997.
32. *Гашков С.Б.* Системы счисления и их применение. — М.: МЦНМО, 2004.
33. *Гик Е.Я.* Шахматы и математика. — М.: Бюро Квантум, 2010.
34. *Гогенищева-Кутузова Т.И., Казанцев А.Д., Кудряшов Ю.Г. и др.* Элементы математики в задачах (с решениями и комментариями). Ч. 1. — М.: МЦНМО, 2010.
35. *Гогенищева-Кутузова Т.И., Казанцев А.Д., Кудряшов Ю.Г. и др.* Элементы математики в задачах (с решениями и комментариями). Ч.2. — М.: МЦНМО, 2010.

36. *Голубев В.И.* Решение сложных и нестандартных задач по математике. – М.: Илекса, 2007.
37. *Горбачев Н.В.* Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2004.
38. *Гордин Р.К.* Геометрия. Планиметрия. — М.: МЦНМО, 2006.
39. *Гордин Р.К.* Это должен знать каждый матшкольник. — М.: МЦНМО, 2008.
40. *Гуровиц В.М., Ховрина В.В.* Графы. — М.: МЦНМО, 2008.
41. *Гусев В.А.* Математика. Сборник геометрических задач: 5—6 классы. — М.: Экзамен, 2011.
42. *Гуцанович С.А.* Занимательная математика в базовой школе. — М.: ТетраСистемс, 2004.
43. *Джозеф Д.* 100 занимательных математических задач-головоломок. — М.: Прайм-ЕВРОЗНАК, 2009.
44. *Дынкин Е.Б., Успенский В.А.* Математические беседы. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
45. *Екимова М.А., Кукин Г.П.* Задачи на разрезание. — М.: МЦНМО, 2007.
46. *Жуков А.В.* XII Турнир математических боев им. А.П. Савина. — М.: МЦНМО, 2007.
47. *Зайчик А.И.* Числовая мозаика. — М., 2003.
48. *Заславский А.А., Френкин Б.Р.* Математика Турниров. — М.: МЦНМО, 2009.
49. *Заславский А.А., Пермяков Д.А., Скопенкова А.Б., Шаповалов А.В.* Сборник материалов выездных школ команд Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду. — М.: МЦНМО, 2009.
50. *Иванов С.В., Кохась К.П., Храбров А.И. и др.* Петербургские олимпиады школьников по математике: 2003—2005. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006.
51. *Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К.* Как решают нестандартные задачи. — М.: МЦНМО, 2004.
52. *Ковалева С.П.* Олимпиадные задания по математике. 9 класс. — Волгоград.: Учитель, 2005.
53. *Козлова Е.Г.* Сказки и подсказки (задачи для математического кружка). — М.: МЦНМО, 2006.
54. *Козловская Н.А.* Математика. Нестандартные задачи по развитию логического и комбинаторного мышления. — М.: ЭНАС, 2007.
55. *Коннова Е.Г.* Математика. Поступаем в вуз по результатам олимпиад. 5—8 класс. Часть 1. — М.: Легион-М, 2010.

56. *Коннова Е.Г.* Математика. Поступаем в вуз по результатам олимпиад. 6—9 класс. Часть 2. — М.: Легион-М, 2010.
57. *Кохась К.П., Храбров А.И., Берлов С.Л.* Задачи Санкт-Петербурской олимпиады школьников по математике 2003 года. — СПб.: БХВ, 2003.
58. *Кохась К.П., Храбров А.И., Иванов С.В.* Задачи Санкт-Петербурской олимпиады школьников по математике: 2000—2002. — СПб.: БХВ, 2006.
59. *Кузьмин О.В.* Комбинаторные методы решения логических задач. — М.: Дрофа, 2006.
60. *Куланин Е.Д., Норин В.П., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.* 3000 конкурсных задач по математике. — М.: Айрис-пресс, 2004.
61. *Кулыгин А.А.* Турнир им. М.В. Ломоносова 1999—2006 гг. Задания. Решения. Комментарии. — М.: МЦНМО: Факториал Пресс, 2007.
62. *Купиллари А.* Трудности доказательств. Как преодолеть страх перед математикой. — М.: Техносфера, 2002.
63. *Купцов Л.П., Нестеренко Ю.В., Резниченко С.В., Слирько А.М.* Математические олимпиады школьников. — М.: Просвещение, 1999.
64. *Курант Р.* Что такое математика? — М.: МЦНМО, 2010.
65. *Кущенко В.С.* Сборник конкурсных задач по математике. — Ленинград.: Судостроение, 1986.
66. *Литлвуд Дж.* Математическая смесь. — М.: Наука, 1965.
67. *Мадера А.Г., Мадера Д.А.* Математические софизмы. — М.: Просвещение, 2003.
68. *Маркова И.С.* Новые олимпиады по математике. — Ростов н/Д.: Феникс, 2005.
69. *Медников Л.Э.* Четность. — М.: МЦНМО, 2008.
70. *Мельников О.И.* Незнайка в стране графов. — М.: ЛИБРОКОМ, 2010.
71. *Мельников О.И.* Теория графов в занимательных задачах. — М.: ЛИБРОКОМ, 2009.
72. *Мерзляков А.С.* Четность и аналоги четности. — Ижевск.: Удмурский университет, 2002.
73. *Мерлин А.В., Мерлина Н.И., Ильин О.В.* Двенадцатый турнир юных математиков Чувашии: 5—11 классы. — Чебоксары.: Чуваш. ун-т , 2008.
74. *Мерлин А.В., Мерлина Н.И., Ильин О.В.* Одинадцатый турнир юных математиков Чувашии: 5—11 классы. — Чебоксары.: Чуваш. ун-т , 2007.

75. *Мордкович А.Г.* Беседы с учителями математики. — М.: Оникс 21 век, 2005.
76. *Мочалов Л.П.* Головоломки и занимательные задачи. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
77. *Мякишев А.Г.* Элементы геометрии треугольника. — М.: МЦНМО, 2002.
78. *Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В., Потапов М.К.* Старинные занимательные задачи. — М.: Дрофа, 2006.
79. *Оре О.* Графы и их применение. — М.: КомКнига, 2006.
80. *Оре О.* Теория графов. — М.: ЛИБРОКОМ, 2009.
81. *Панов В.Ф.* Математика древняя и юная. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.
82. *Петраков И.С.* Математика для любознательных — М.: Просвещение, 2000.
83. *Петров В.А.* Математика. 5–11 кл. Прикладные задачи — М.: Дрофа, 2010.
84. *Петров Н.Н.* Математические игры: Игры-шутки. Симметрия. Игры «Ним». Игра «Цзяньшицзы». Игры с многочленами. Игры и теория чисел. Анализ с конца. Выигрышные стратегии. — М.: ЛИБРОКОМ, 2012.
85. *Петров Ф.В., Кохась К.П., Берлов С.Л. и др.* Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2007 года. — Спб.: БХВ-Петербург, 2007.
86. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения — М.: Наука, 1975.
87. *Пойа Д.* Математическое открытие. — М.: Наука, 1970.
88. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. Т. I: Индукция и аналогия в математике. Т.II: Схемы правдоподобных умозаключений. — М.: ЛИБРОКОМ, 2010.
89. *Пойа Дж., Килпатрик Д.* Сборник задач по математике Стэнфордского университета с подсказками и решениями. — М.: Научный Фонд "Первая Исследовательская Лаборатория имени академика В.А. Мельникова", 2002.
90. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия: в 2 т. — Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. — М.: МЦНМО, 2008.
91. *Постников М.М.* Магические квадраты. — М.: ЛИБРОКОМ, 2010.
92. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2007.
93. *Прасолов В.В.* Задачи по алгебре, арифметике и анализу. — М.: МЦНМО, 2011.

94. Прасолов В.В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. — М.: МЦНМО, 2007.
95. *Прасолов В.В., Голенищева-Кутузова Т.И., Канель-Белов А.Я., Кудряшов Ю.Г., Ященко И.В.* Московские математические олимпиады 1935—1957. — М.: МЦНМО, 2010.
96. *Радемахер Г., Теплиц О.* Числа и фигуры. Опыты математического мышления. — М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962.
97. *Рингель Г.* Теорема о раскраске карт. — М.: Мир, 1977.
98. *Сергеев И.Н.* Олимпиада МГУ «Ломоносов» по математике (2005—2008). — М.: МЦНМО, 2009.
99. *Смирнов В.А., Смирнова И.М.* Геометрия на клетчатой бумаге — М.: МЦНМО, 2009.
100. *Соуза Д.* Как мозг осваивает математику. Практические советы учителю. — М.: Ломоносовъ, 2010.
101. *Спивак А.В.* Арифметика-2. — М.: Бюро Квантум, 2008.
102. *Спивак А.В.* Математический кружок. 6—7 классы. — М.: Посев, 2003.
103. *Спивак А.В.* Математический праздник. — М.: Квантум, 2004.
104. *Спивак А.В.* Тысяча и одна задача по математике. — М.: Просвещение, 2010.
105. *Степанова Л.Л., Жмулева А.В., Деза Е.И.* Практикум по элементарной математике. Арифметика. — М.: МЦНМО, 2008.
105. *Тихомиров В.М.* Рассказы о максимумах и минимумах. — М.: МЦНМО, 2006.
106. *Ткачук В.В.* Математика абитуриенту. — М.: МЦНМО, 2008.
107. *Толпыго А.К.* Девяносто шесть нестандартных задач. Из запасников математических олимпиад. — М.: МЦНМО, 2008.
108. *Толпыго А.К.* Тысяча задач Международного математического Турнира городов. — М.: МЦНМО, 2009.
109. *Траунсенд Ч.Б.* Самые трудные головоломки из старинных журналов. — М.: Аст-Пресс, 1998.
110. *Трошин В.В.* Магия чисел и фигур. Занимательные материалы по математике. — М.: Глобус, 2007.
111. *Унфаровский В.А.* Математический аквариум. — М.: МЦНМО, 2010.
112. *Успенский В.А.* Простейшие примеры математических доказательств. — М.: МЦНМО, 2009.
113. *Фалин Г.И., Фалин А.И.* Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

114. *Фарков А.В.* Готовимся к олимпиадам по математике. — М.: Экзамен, 2006.
115. *Фарков А.В.* Математические олимпиады в школе. 5—11 класс. — М.: Айрис-пресс, 2003.
116. *Федоров Р.М., Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Ященко И.В.* Московские математические олимпиады 1993—2005 г. — М.: МЦНМО, 2006.
117. *Филькенштейн В.М.* Что делать, когда задачу решить не удается. — М.: Илекса, 2008.
118. *Фомин Д.В., Кохась К.П.* Петербургские математические олимпиады 1961—1993. — СПб.: Лань, 2007.
119. *Фридман Л.М.* Как научиться решать задачи. — М.: Просвещение, 2005.
120. *Храбров А.И., Иванов С.В., Берлов С.Л.* Задачи Санкт-Петербурской олимпиады школьников по математике 2006 года. — М.: БХВ, 2006.
121. *Храбров А.И., Кохась К.П., Петров Ф.В. и др.* Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2009 года. — Спб.: БХВ-Петербург, 2009.
122. *Чулков П.В.* Арифметические задачи. — М.: МЦНМО, 2009.
123. *Шаповалов А.В.* Принцип узких мест. — М.: МЦНМО, 2006.
124. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия. 7—9 кл.: учеб. для общеобразоват. учережд. — М.: Дрофа, 2007.
125. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия. 9—11 кл.: От учебной задачи к творческой. — М.: Дрофа, 1997.
126. *Шарыгин И.Ф.* Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. — М.: Астрель, 2001.
127. *Шарыгин И.Ф.* Уроки дедушки Гаврилы или Развивающие каникулы. — М.: Дрофа, 2009.
128. *Шевкин А.В.* Текстовые задачи по математике: 5—6. — М.: Илекса, 2009.
129. *Шень А.* Игры и стратегии с точки зрения математики. — М.: МЦНМО, 2007.
130. *Шень А.* О “математической строгости” в школьном курсе математики. — М.: МЦНМО, 2006.
131. *Шикин Е., Григорян А., Шикина Г.* Сначала немного подумайте. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
132. *Штейнгауз Г.* Математический калейдоскоп. — М.: Наука, 1981.
133. *Шумихин С., Шумихина А.* Число Пи. История длиною в 4000 лет. — М.: Эксмо, 2011.
134. *Яглом И.М.* Как разрезать квадрат? — М.: КомКнига, 2006.

135. *Ященко И.В.* Приглашение на Математический праздник. — М.: МЦНМО, 2009.
136. *Ященко И.В.* Парадоксы теории множеств. — М.: МЦНМО, 2002.
137. http://problems.ru
138. http://cdoosh.ru
139. http://www.matol.ru
140. http://zaba.ru