T22.(2020 年 9 月 1 日高二协作体联考) $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足 $S_n=2a_n-2(n\in\mathbb{N}+)$

（1）求 a_n

（2）记 $T_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$， $\left\{\dfrac{a_n}{T_n}\right\}$ 前 n 项和为 R_n，求证： $\dfrac{3}{4}(1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1})\le R_n<1.$

（3）数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1,b_nb_{n+1}=\log_2 a_n$，试比较 $\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}$ 与 $2\sqrt{n}-1$ 的大小，并说明理由。

解：（1） $a_n=2^n$

（2） $T_n=4+4^2+\cdots+4^n=\dfrac{4}{3}(4^n-1)$， $\dfrac{a_n}{T_n}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2^n}{4^n-1}$

先证： $R_n\ge\dfrac{3}{4}(1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1})$

注意到 $\dfrac{3}{4}(1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1})$ 是 c_1-c_n 结构，从而可以运用裂项放缩来表达。

$$\frac{a_n}{T_n}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2^n}{4^n-1}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2^n}{(2^n-1)(2^n+1)}\ge\frac{3}{4}\cdot\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$$

$$\therefore R_n\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2^k-1}-\frac{1}{2^{k+1}-1}\right)=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$$

法 2:（数学归纳法）

$n=1$， $R_1=\dfrac{2}{3}\ge\dfrac{2}{3}$ 成立

假设 $n=m$ 时，命题成立：即 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{2^k}{4^k-1}\ge1-\frac{1}{2^{m+1}-1}$

$n=m+1$ 时，

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{2^k}{4^k-1}\ge1-\frac{1}{2^{m+1}-1}+\frac{2^{m+1}}{4^{m+1}-1}$$

$$1-\frac{1}{2^{m+1}-1}+\frac{2^{m+1}}{4^{m+1}-1}\ge1-\frac{1}{2^{m+2}-1}\Leftrightarrow(2^m-1)(2^{m+1}-1)\ge0,\text{ 成立}$$

所以由数学归纳法知问题成立。

再证明： $R_n<1.$

法 1：

$$R_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4}\cdot\frac{2^k}{4^k-1}<1$$

$$\because b_1=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\therefore \text{构造}\left\{d_n\right\},d_1=1,\sum_{k=1}^{n}d_k=\frac{\frac{1}{2}(1-q^n)}{1-q}<\frac{\frac{1}{2}}{1-q}=1.$$

$$\therefore q=\frac{1}{2},d_n=\frac{1}{2^n}$$

下面只需验证：$\frac{3}{4}\cdot\frac{2^n}{4^n-1}<\frac{1}{2^n}$ 从而 $\frac{3}{4}\cdot\frac{2^n}{4^n-1}<\frac{3}{4}\cdot\frac{2^n}{3\times 4^{n-1}}=\frac{1}{2^n}$

$$\therefore R_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4}\cdot\frac{2^k}{4^k-1}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}<1.$$

法 2：（二项式定理展开失败）

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2^n}{4^n-1}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2^n}{(3+1)^n-1}\le\frac{3}{4}\cdot\frac{2^n}{3^n+n\times 3^{n-1}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2^n}{(n+3)3^{n-1}}\le\frac{3}{16}\cdot\frac{2^n}{3^{n-1}}=\frac{9}{16}\cdot(\frac{2}{3})^n$$

$$\therefore R_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4}\cdot\frac{2^k}{4^k-1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{2}{21}+\frac{9}{16}\sum_{k=4}^{n}(\frac{2}{3})^k<\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{2}{21}+\frac{1}{3}\approx 1.1333$$

法 3：加强命题

令 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4}\cdot\frac{2^k}{4^k-1}+\frac{a}{2^n}$ 期望：$f(n)\searrow$ 从而有 $f(n)\le f(1).$

而

$$f(n)\searrow\Leftrightarrow f(n+1)<f(n)\Leftrightarrow\frac{3}{4}\times\frac{2^{n+1}}{4^{n+1}-1}<\frac{a}{2^{n+1}}$$

$$\therefore a>\frac{3}{4}\times\frac{4^{n+1}}{4^{n+1}-1}=\frac{3}{4}\times\left(1+\frac{1}{4^{n+1}-1}\right)\therefore a\ge\frac{3}{4}\times\left(1+\frac{1}{4^{n+1}-1}\right)_{\max}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore a\in\left[\frac{4}{5},+\infty\right)\text{有}f(n)\searrow$$

从而：取 $a=\frac{4}{5}$，$f(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4}\cdot\frac{2^k}{4^k-1}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2^n}$ 在 $\mathbb{N}+$ 上单调递减。

从而 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4}\cdot\frac{2^k}{4^k-1}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2^n}\le f(1)=\frac{9}{10}$

从而：$\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4}\cdot\frac{2^k}{4^k-1}\le\frac{9}{10}-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2^n}<\frac{9}{10}<1.$

法 4：（减乘放缩法）

$$\therefore R_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4}\cdot\frac{2^k}{4^k-1}<\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4}\cdot\frac{2^k}{\frac{3}{4}\times 4^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^{n+1}}<1.$$

$$R_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4}\cdot\frac{2^k}{4^k-1}=\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{3}{4}\cdot\frac{2^k}{4^k-1}<\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{3}{4}\cdot\frac{2^k}{\frac{15}{16}4^k}=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}(1-\frac{1}{2^n})<\frac{9}{10}-\frac{2}{5}\times\frac{1}{2^n}<\frac{9}{10}<1.$$

（3）$b_1=1, b_nb_{n+1}=\log_2 a_n=n, \begin{cases} b_nb_{n+1}=n \\ b_nb_{n-1}=n-1 \end{cases} \therefore b_n(b_{n+1}-b_{n-1})=1.$

$\frac{1}{b_n}=b_{n+1}-b_{n-1}\therefore \frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\cdots+\frac{1}{b_n}=b_{n+1}+b_n-1\geq 2\sqrt{b_{n+1}b_n}-1=2\sqrt{n}-1.$,