2020年7月高一第二学期期末考试选解

T10：对于A选项，假设$\{a_n\}$有界，即存在常数M，对任意$n\in N^*$，都有$a_{n+1}\le M,a_n\le M$，则$1+n=a_{n+1}+a_n\le M+M=2M$．由于左边$1+n$递增到无穷大，而右边为常数，从而A项错误；

同理，C项$a_{n+1}a_n=1+2^n\le M^2$，错误；

对于B项，$n\ge 2$时，$a_{n+1}-a_n=1-\frac{1}{n}\ge\frac{1}{2}$，累加可得，$a_n-a_2\ge\frac{1}{2}(n-2)$，$a_2=1,a_n\ge\frac{n}{2}$，显然不是有界的；

对于D选项，$a_2=2$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{1}{n^2}=\frac{n^2+1}{n^2}<\frac{n^2}{n^2-1}=\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n}{n-1}$，（糖水不等式）累乘可得$\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\cdots\times\frac{a_3}{a_2}=(\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{2}{3})\cdot(\frac{n-1}{n-2}\times\frac{n-2}{n-3}\times\cdots\times\frac{2}{1})$，

$\frac{a_n}{a_2}=\frac{2}{n}\cdot(n-1)<2$，从而$a_n<4$,D正确.

对于D选项，法2:（韩头儿）

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{1}{n^2}\Rightarrow a_n=(1+\frac{1}{1^2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{3^2})\cdots(1+\frac{1}{(n-1)^2})$$

$$\ln a_n=\ln(1+\frac{1}{1^2})+\ln(1+\frac{1}{2^2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{(n-1)^2})<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1\times 2}+\cdots+\frac{1}{(n-2)(n-1)}<2.$$

$\therefore a_n<e^2.$

T17.设$\angle CAB=\theta(\theta<\frac{\pi}{4})$，则折叠后，$AB'=\cos\theta$, $AD=\sin\theta$, $\angle B'AD=\frac{\pi}{2}-2\theta$，

故$S_{\Delta ADB'}=\frac{1}{2}AB'\cdot AD\cdot\sin\angle DAB'=\frac{1}{2}\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\sin(\frac{\pi}{2}-2\theta)=\frac{1}{8}\sin 4\theta\le\frac{1}{8}$，

取最大值时$\theta=\frac{\pi}{8}$．

21.（本题满分15分）在ΔABC中，已知$B\ne\frac{\pi}{2}$，且$\sin C-\cos A\sin B+\sin C\cos B=\sin 2B$，设角$A,B,C$所对的边分别是$a,b,c$．

（Ⅰ）求证：a,b,c成等差数列；

（Ⅱ）若 $\dfrac{\sin A}{\sin C}+\dfrac{\sin C}{\sin A}=3$，求 $\sin A+\sin C$ 的值.

解:（Ⅰ） $\sin(A+B)-\cos A\sin B+\sin C\cos B=2\sin B\cos B$.

$\sin A\cos B+\sin C\cos B=2\sin B\cos B$ ， $B\neq\dfrac{\pi}{2}$，从而 $\sin A+\sin C=2\sin B$，

$a+c=2b$ ，即 a,b,c 成等差数列.

（Ⅱ） $\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}=3, a^2+c^2=3ac$，又 $a+c=2b$， $b^2=\dfrac{1}{4}(a^2+c^2+2ac)=\dfrac{5}{4}ac$.

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{3ac-\dfrac{5}{4}ac}{2ac}=\dfrac{7}{8}$ ， $\sin B=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$.

即 $\sin A+\sin C=2\sin B=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

解法 2:（安静） $\begin{cases}a+c=2b\\ a^2+c^2=3ac\end{cases}$ 不妨假设 $a\geq c$,则 $(\dfrac{a}{c})^2-5\dfrac{a}{c}+1=0\Rightarrow\dfrac{a}{c}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore a:b:c=(6+2\sqrt{5}):(5+\sqrt{5}):4$

$\cos B=\dfrac{(6+2\sqrt{5})^2+4^2-(5+\sqrt{5})^2}{2(6+2\sqrt{5})4}=\dfrac{7}{8}$. 得 $\sin B=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$. $\sin A+\sin C=2\sin B=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

22.（本题满分 15 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且 $\sqrt{a_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{a_n}}{1+\sqrt{a_n}}$ （$n\in\mathbf{N}^*$）.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（Ⅱ）设 $b_n=\sqrt{1+3a_n}-a_n$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$0\leq S_n-n<\dfrac{1}{2}$.

解：（Ⅰ）由题设得 $\dfrac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}=\dfrac{1+\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}}=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}+1$，

从而 $\{\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，所以 $\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}=n$，

即 $a_n=\dfrac{1}{n^2}$.

（Ⅱ）方法 1（均值不等式破根号）

$$b_n=\sqrt{1+3a_n}-a_n=\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}-\frac{1}{n^2}=\sqrt{1\cdot(1+\frac{3}{n^2})}-\frac{1}{n^2}\le\frac{1+1+\frac{3}{n^2}}{2}-\frac{1}{n^2}$$

$$=1+\frac{1}{2n^2}<1+\frac{1}{2}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})\quad（n\ge 2）.$$

故 $S_n-n=(b_1-1)+(b_2-1)+\cdots+(b_n-1)$

$$\le 0+\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})<\frac{1}{2}.$$

另一方面：

$$b_n=\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}-\frac{1}{n^2}=\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{n^2}\ge\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}-\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}=1.$$

从而 $S_n\ge n$，即 $S_n-n\ge 0$．综上得：$0\le S_n-n<\frac{1}{2}$．

方法 2：（安静-伯努利不等式破根号）

熟知 $Bernoulli$ 不等式 $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{1}{2}x(x\ge 0)$

$$b_n-1=\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}-(1+\frac{1}{n^2})\le 1+\frac{3}{2n^2}-(1+\frac{1}{n^2})=\frac{1}{2n^2}<\frac{1}{2}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$$

$$S_n-n=\sum_{k=1}^{n}(b_k-1)<0+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}.$$

方法 3：（安静-凑完全平方）

$$b_n-1=\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}-(1+\frac{1}{n^2})$$

$$\le\sqrt{1+\frac{4}{n^2}+\frac{4}{n^4}}-(1+\frac{1}{n^2})=(1+\frac{2}{n^2})-(1+\frac{1}{n^2})=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$S_n-n=\sum_{k=1}^{n}(b_k-1)<0+\frac{2\sqrt{7}-5}{4}+2(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+2(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$

$$<\frac{2\sqrt{7}-5}{4}+\frac{2}{5}<\frac{2\sqrt{7.29}-5}{4}+\frac{2}{5}=\frac{2\times 2.7-5}{4}+\frac{2}{5}=0.1+0.4=0.5.$$