1(2020 年 9 月 2 日浙江协作体联考). $\forall x\in\mathbb{R}$,不等式 $ax+b+\left|x^2-ax-b\right|\ge 4$ 恒成立（ ）

$A.b+2a\le 4$ $\qquad$ $B.b-2a\ge 4$

$C.\exists a,b\in\mathbb{R},s.t.a^2+4b<16.$ $\qquad$ $D.\forall a,b\in\mathbb{R},a^2-4b\ge 16.$

法 1：

问题转化为：$\forall x\in\mathbb{R}$，$x^2\ge 4$ 或 $-x^2+2ax+2b\ge 4$

（1）当 $x\in\left(-\infty,-2\right]\cup\left[2,+\infty\right)$ 时，$x^2\ge 4$ 满足题目要求。

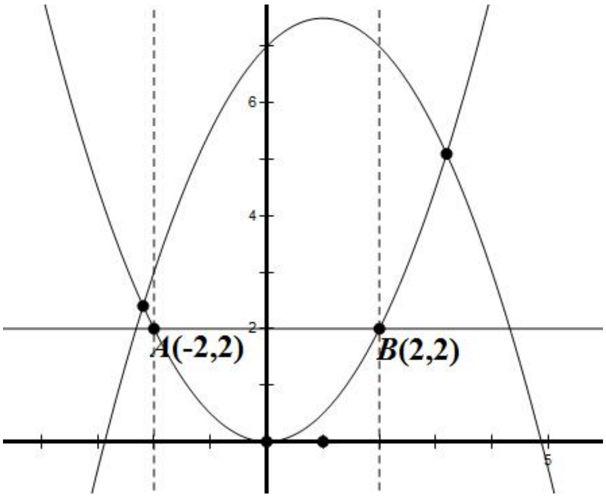
（2）当 $x\in\left(-2,2\right)$ 时，一定使得 $-x^2+2ax+2b\ge 4$ 恒成立。

令 $g(x)=-x^2+2ax+2b$ 由于开口向下，从而当且仅当

$$\begin{cases}g(2)\ge 4\\ g(-2)\ge 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+2a\ge 4\\ b-2a\ge 4\end{cases}\Leftrightarrow b-2|a|\ge 4.$$ 因此 A 错 B 对。

法 2：$\begin{cases}f(x)+g(x)=ax+b\\ f(x)-g(x)=x^2-ax-b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)=\dfrac{x^2}{2}\\ g(x)=-\dfrac{x^2}{2}+ax+b\end{cases}$

$$\forall x\in\mathbb{R},f(x)+g(x)+\left|f(x)-g(x)\right|\ge 4\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\max\{f(x),g(x)\}\ge 2.$$



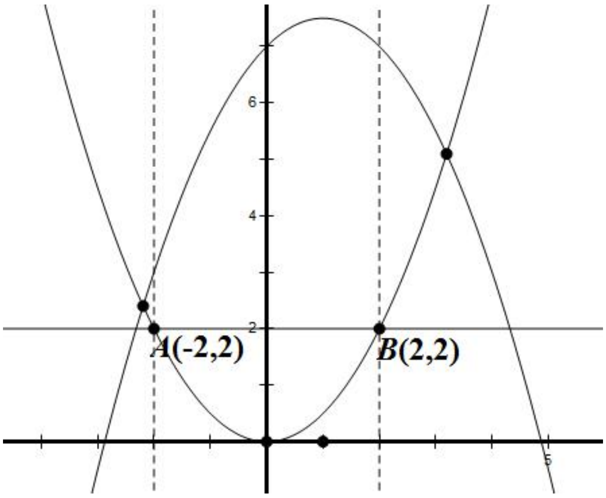
注意到（1）当 $x\in\left(-\infty,-2\right]\cup\left[2,+\infty\right)$ 时，$\dfrac{1}{2}x^2\ge 2$ 满足题目要求。

（2）当 $x\in\left(-2,2\right)$ 时，$g(x)=-\dfrac{x^2}{2}+ax+b\ge 2$ 恒成立。

从而：$\begin{cases}g(2)\ge 2\\ g(-2)\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+2a\ge 4\\ b-2a\ge 4\end{cases}\Leftrightarrow b-2|a|\ge 4.$ 因此 A 错 B 对，再取 $(a,b)=(0,4)$ 则满足题目要求，但是不满足 D 选项，从而 D 错误。

法 3：$\begin{cases} f(x)+g(x)=ax+b \\ f(x)-g(x)=x^2-ax-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{2} \\ g(x)=-\dfrac{x^2}{2}+ax+b \end{cases}$

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)+g(x)+\left|f(x)-g(x)\right|\geq 4 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, \max\{f(x),g(x)\}\geq 2.$$



令：$F(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，$F(x)_{\min}=\min\left\{F(x_1),F(x_2)\right\}$

$$F(x_1)=\frac{f(x_1)+g(x_1)}{2}+\left|f(x_1)-g(x_1)\right|=f(x_1)=\frac{1}{2}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^2$$

$$F(x_1)=\frac{1}{8}\left(2a^2+4b+2a\sqrt{a^2+4b}\right)=\frac{1}{4}\left(a^2+2b+a\sqrt{a^2+4b}\right),$$

$$F(x_2)=\frac{1}{8}\left(2a^2+4b-2a\sqrt{a^2+4b}\right)=\frac{1}{4}\left(a^2+2b-a\sqrt{a^2+4b}\right)$$

$\forall x\in\mathbb{R}, F(x)\geq 2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}\left(a^2+2b+a\sqrt{a^2+4b}\right)\geq 2 \\ \dfrac{1}{4}\left(a^2+2b-a\sqrt{a^2+4b}\right)\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b+a\sqrt{a^2+4b}\geq 8 \\ a^2+2b-a\sqrt{a^2+4b}\geq 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2\geq 16-4a\sqrt{a^2+4b} \\ b^2\geq 16+4a\sqrt{a^2+4b} \end{cases} \Leftrightarrow b^2\geq 16-4\left|a\right|\sqrt{a^2+4b}$$

$$\Leftrightarrow 4\left|a\right|\sqrt{a^2+4b}+b^2\geq 16$$

取：$(a,b)=(0,4)$ 则满足题目要求，但是不满足 D 选项，从而 D 错误。

疑问：$b-2\left|a\right|\geq 4 \Leftrightarrow 4\left|a\right|\sqrt{a^2+4b}+b^2\geq 16$，这个成立么？