



目录

1. 实验任务	3
2. 实验基本对象—倒立摆	3
2.1. 倒立摆基本介绍	3
2.2. 倒立摆特性	3
2.3. 实验环境	3
3. 倒立摆系统的数学模型	6
3.1 摆杆转动惯量计算	6
3.2 倒立摆的数学模型	7
3.3 一阶倒立摆系统简要分析	8
4. 控制器设计.....	10
4.1 LQR 方法理论依据	10
4.2 LQR 方法实际设计	10
4.3 LQR 控制器验证	11
4.4 LQR 参数敏感性分析	11
5. 实验总结与致谢	13
5.1 总结与展望	13
5.2 致谢.....	13
【参考文献】	13
【附录】 部分 MATLAB 代码	14



1. 实验任务

本实验的目的是针对自动化系实验室搭建的倒立摆环境进行系统建模与控制器设计。实验在电院 4-403 进行，利用已经搭建好的倒立摆环境完成。

2. 实验基本对象—倒立摆

2.1. 倒立摆基本介绍

倒立摆系统是一个比较复杂的，带有快速、高阶次、多变量、严重非线性、绝对不稳定和非最小相位系统的机电系统，它的稳定控制是控制理论应用的一个典型范例。倒立摆系统一直是控制理论中非常典型的实验设备，也是控制理论教学和科研中不可多得的典型物理模型，许多抽象的控制概念，如系统稳定性、可控性、系统收敛速度、随动跟踪特性和系统抗干扰能力等许多控制中的关键问题，都可以通过倒立摆系统直观地表现出来，是应用各种控制理论和方法的理想控制对象。

倒立摆具有多种结构类型：

- 直线倒立摆，是在直线运动模块上装有摆体组件，直线运动模块有一个自由度，小车可以沿导轨水平运动，在小车上装载不同的摆体组件，可以组成许多类别的倒立摆；
- 环形倒立摆，是在圆周运动模块上装有摆体组件，圆周运动模块有一个自由度，可以围绕齿轮中心做圆周运动，在运动手臂末端装有摆体组件，根据摆体组件的级数和串联或并联的方式，可以组成很多形式的倒立摆
- 平面倒立摆，是在可以做平面运动的运动模块上装有摆杆组件；
- 多极倒立摆；
- 人形倒立摆。

2.2. 倒立摆特性

倒立摆形式与结构各异，但均具有以下五个特性：

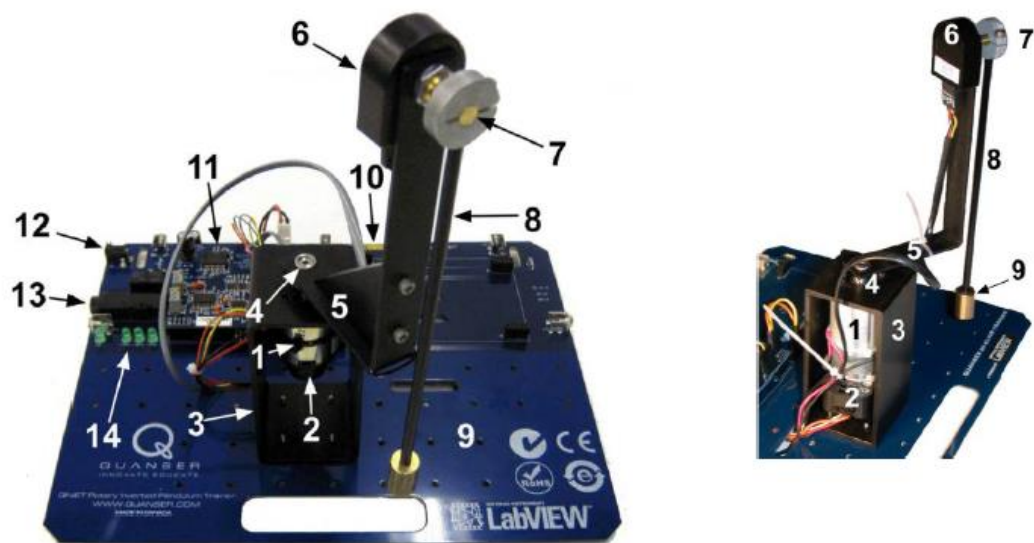
- 1) 非线性，倒立摆是一个典型的非线性复杂系统；
- 2) 不确定性，主要是模型误差以及机械传动间隙，各种阻力等；
- 3) 耦合性，倒立摆的各级摆杆之间，以及和运动模块之间都有很强的耦合关系；
- 4) 开环不稳定性，倒立摆的平衡状态只有两个，即在垂直向上的状态和垂直向下的状态，其中垂直向上为绝对不稳定的平衡点，垂直向下为稳定的平衡点；
- 5) 约束限制，倒立摆的结构尺寸和电机功率因制造方便和降低成本的要求，都比较小，行程限制对倒立摆的摆起影响尤为突出。

2.3. 实验环境

本次实验采用的是一个一级环形倒立摆系统，由一个摆杆和旋转臂组成，如下图所示，形象直观，结构简单，构件组成参数和形状易于改变，成本低廉。



该一阶倒立摆的系统构成如下图所示。各标号及说明如下表所示。



编号	说明
1	直流电机
2	臂杆角度测量高精度编码器
3	电机金属支架
4	旋转臂杆转轴
5	旋转臂杆
6	摆杆编码器
7	摆杆转轴
8	摆杆
9	摆杆质量块



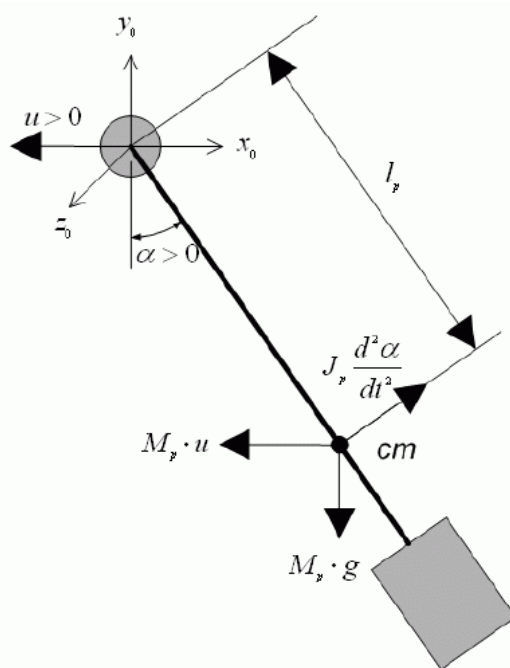
10	ELVIS-II 抽卡金手指
11	QNET 倒立摆 PWM 和编码器信号接口板
12	QNET 倒立摆 24V 电源插头
13	熔丝
14	电源指示灯

该一阶倒立摆的旋转臂和摆杆可以简化成两个均匀的质量杆, 参数及物理意义见下表所示。

符号	描述	值	单位
M_{p1}	摆杆连杆的质量	0.008	kg
M_{p2}	摆杆小锤的质量	0.019	kg
L_{p1}	摆杆连杆的长度	0.171	m
L_{p2}	摆杆小锤的长度	0.190	m
M_p	摆杆连杆和小锤质量之和	0.0270	kg
l_p	摆杆质心到中轴的距离	0.153	m
r	旋转臂轴到摆杆轴的距离	0.0826	m
g	重力常数	9.8	m/s ²
n_{cyc}	旋转的圈数	3	圈
Δt	旋转 n_{cyc} 耗时	1.25	s
L_p	摆杆总长度	0.191	m
B_r	旋转臂粘性阻尼系数	0	Nms. rad ⁻¹
B_p	摆杆粘性阻尼系数	0	Nms. rad ⁻¹
K_m	反向电势系数	0.03334	V/(rad/s)
K_t	电机力矩系数	0.03334	N. m
R_m	直流电机电枢电阻	8.7	ohms
J_{eq}	旋转臂关于中轴的转动惯量	0.0000184	kg. m ²
V_m	直流电机的输入电压		V
f	测量频率		Hz
J_p	摆杆关于中轴的转动惯量		kg. m ²
τ	直流电机输出转矩		Nm

3. 倒立摆系统的数学模型

3.1 摆杆转动惯量计算



基于对 CSTR 系统物理模型的理解，将摆杆结构投影为正视图，如下图所示。根据系统参数计算摆杆整体转动惯量的理论值为

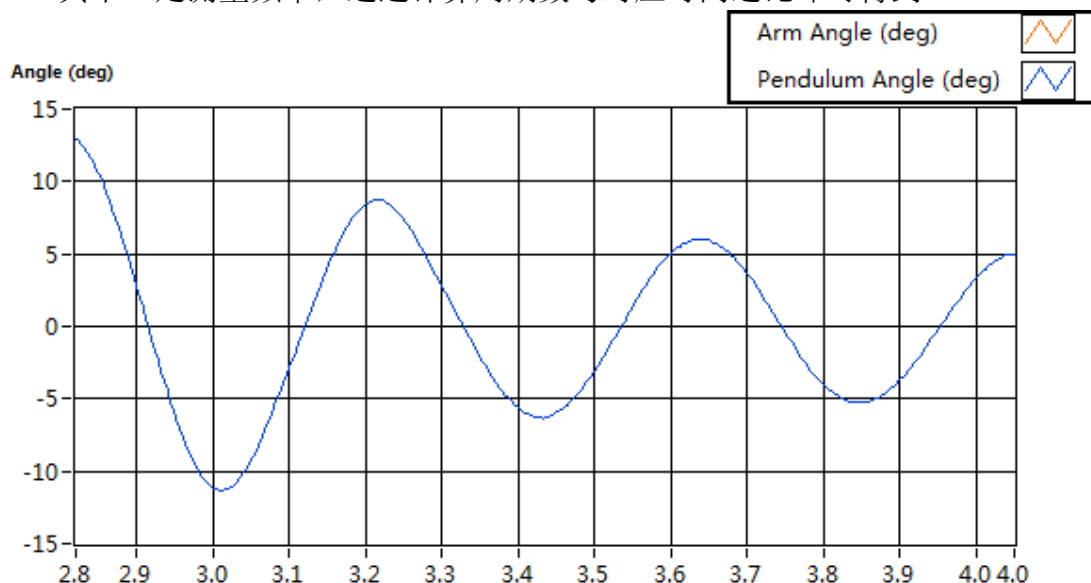
$$J_{p_theory} = \frac{1}{3} M_{p1} L_{p1}^2 + M_{p2} L_{p1}^2 + M_{p2} L_{p1} L_{p2} + \frac{1}{3} M_{p2} L_{p2}^2$$

$$= 6.9757 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

测得出摆杆转动惯量的理论值为

$$J_p = \frac{M_p g l_p}{4\pi^2 f^2} = 1.780324 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

其中 f 是测量频率，通过计算周期数与对应时间之比即可得到。



$$f = \frac{n_{cyc}}{\Delta t} = 2.4 \text{ Hz}$$

误差分析：实际值与理论值的相对误差为：

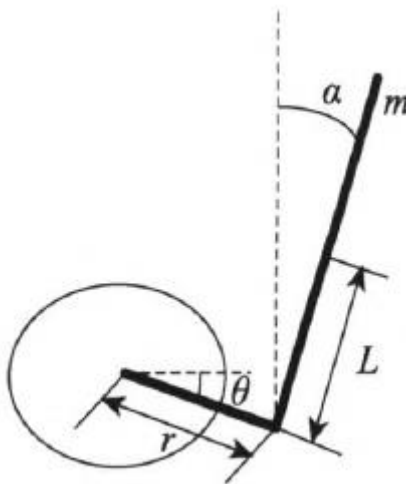
$$\frac{J_p - J_{p_theory}}{J_{p_theory}} \times 100\% = 74.48\%$$

理论值比实际值大得多，有两个原因：

- 1) 理论情况下没有考虑摩擦阻力和空气阻力以及地球重力的影响。
- 2) 实际摆杆重心和理论中心不重合。

3.2 倒立摆的数学模型

一阶旋转倒立摆的旋转臂和摆杆可以简化两个均匀的质量杆，模型简化如下图所示。其中 α 是摆杆关于垂直线的角位移， θ 是旋转臂关于水平线的角位移。



系统的动能包括：旋转臂转动的动能，摆杆摆动的动能，摆杆质心在水平方向和竖直方向的动能。定义零势能面为旋转臂转动的平面，则系统的动能和势能可分别记为 T 和 V ，且动能与势能的差记为 H ，则：

$$T = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_p\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}M_p(r\dot{\theta} - l_p\dot{\alpha}\cos\alpha)^2 + \frac{1}{2}M_p(-l_p\dot{\alpha}\sin\alpha)^2$$

$$V = M_p g L \cos\alpha$$

$$H = T - V = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_p\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}M_p(r\dot{\theta} - l_p\dot{\alpha}\cos\alpha)^2 + \frac{1}{2}M_p(-l_p\dot{\alpha}\sin\alpha)^2 - M_p g l_p \cos\alpha$$

建立旋转倒立摆的非线性 Lagrange 方程组如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial H}{\partial \theta} &= \tau - B_r \dot{\theta} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial H}{\partial \alpha} &= -B_p \dot{\alpha} \end{aligned}$$



其中, τ 代表直流伺服电机输出转矩

$$\tau = \frac{K_t(V_m - K_m\dot{\theta})}{R_m}$$

计算 Lagrange 方程组的各个分量, 并在平衡位置附近进行线性化, 得到如下线性方程组

$$\begin{aligned}(J_{eq} + M_p r^2)\ddot{\theta} - M_p l_p r \ddot{\alpha} &= \tau - B_r \dot{\theta} \\ (J_p + M_p l_p^2)\ddot{\alpha} - M_p l_p r \ddot{\theta} - M_p g l_p \alpha &= -B_p \dot{\alpha}\end{aligned}$$

转化为矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{M_p^2 l_p^2 r g}{J_T} & \frac{-(J_p + M_p l_p^2)G}{J_T R_m} & \frac{-M_p l_p r B_p}{J_T} \\ 0 & \frac{M_p l_p g (J_{eq} + M_p r^2)}{J_T} & \frac{-M_p l_p r G}{J_T R_m} & \frac{-(J_{eq} + M_p r^2)B_p}{J_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(J_p + M_p l_p^2)K_t}{J_T R_m} \\ \frac{M_p l_p r K_t}{J_T R_m} \end{bmatrix} V_m$$

其中, $J_T = J_{eq}J_p + J_{eq}M_p l_p^2 + J_p M_p r^2$, $G = K_t K_m + B_r R_m$ 。

代入具体参数值, 可得一阶旋转倒立摆系统的线性化模型为:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + B \\ Y &= CX + D\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 77.26 & -0.573 & 0 \\ 0 & 83.37 & -0.244 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 17.19 \\ 7.31 \end{bmatrix} V_m$$

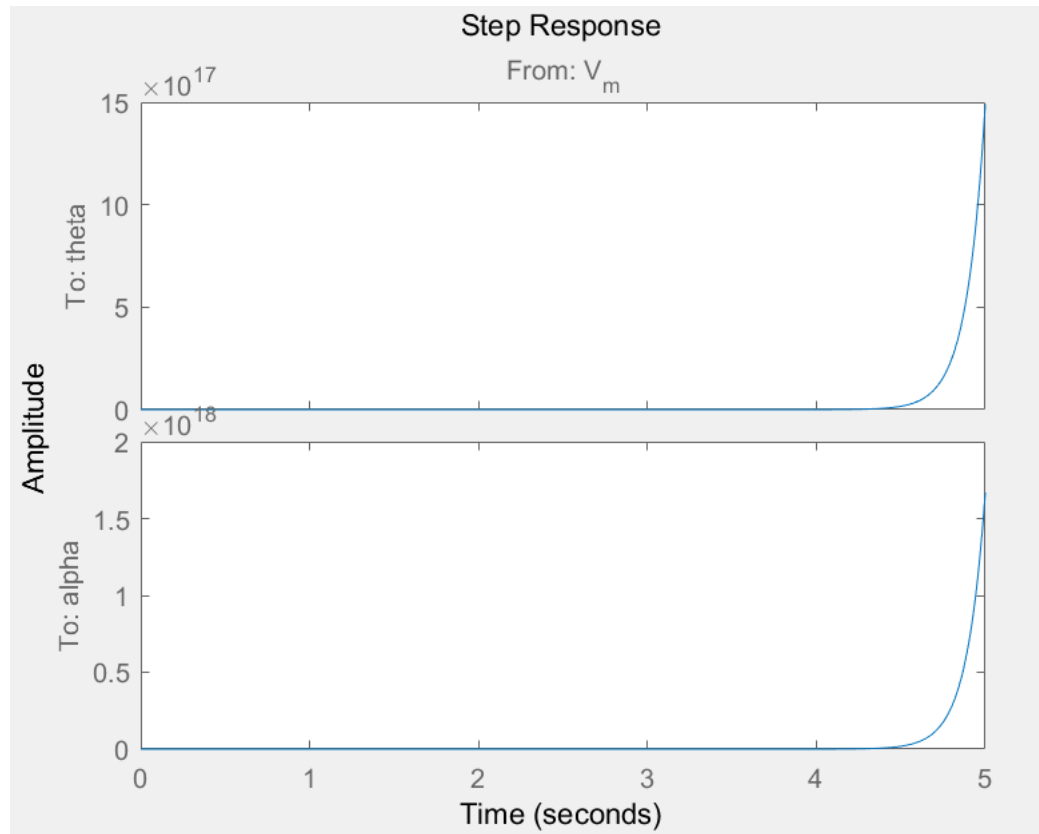
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

3.3 一阶倒立摆系统简要分析

对于建模得到的系统, 计算他的特征值得到:

$$\lambda_1=0 \quad \lambda_2=9.0225 \quad \lambda_3=-9.2489 \quad \lambda_4=-0.3466$$

其中, 存在位于复平面右半平面的极点, 因而系统开环不稳定, 类似的, 使用 MATLAB 对一阶开环倒立摆进行仿真, 同样也能得到系统不稳定的结论。



对系统矩阵 A 进行可控性分析，得到系统的能控性矩阵 M 为：

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 17.19 & -9.8849 & 570.41 \\ 0 & 7.31 & -4.1944 & 611.83 \\ 17.19 & -9.849 & 570.414 & -650.90 \\ 7.31 & -4.194 & 611.83 & -488.87 \end{bmatrix}$$

进行分析得到，该矩阵的秩为 4，系统可控，因而我们可以进行下一步的控制器设计。



4. 控制器设计

4.1 LQR方法理论依据

对于线性系统的控制器设计问题, 若其性能指标是状态变量和控制变量的二次型函数的积分, 则这种动态系统的最优化问题称为线性系统二次型性能指标的最优控制问题(即 LQ 问题), 简称为线性二次型最优控制问题或线性二次问题。

在对倒立摆非线性点线性近似后, 我们可以将其控制器设计问题简化为 LQ 问题, 因而我们可以采用经典的 LQR 法(线性二次型调节器)进行控制器设计, 对于如下系统:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = Cx\end{aligned}$$

我们设计 LQR 控制器为

$$u(t) = -Kx(t)$$

因而我们只需找到 K, 使得系统从给定的初始状态转移到目标控制末态时候, 系统性能指标即二次型性能指标最小化:

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)S_x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^t R(t)u(t)]dt$$

令终止时间为无穷, 可求解得到 Riccatti 方程(黎卡提微分方程):

$$\dot{P}(t) = -P(t)A - A^T P(t) + P(t)BR^{-1}B^T P(t) - Q = 0$$

那么, 由最优控制理论, 最优反馈系数矩阵就由下式构成

$$K = R^{-1}B^T P(t)$$

4.2 LQR方法实际设计

LQR 控制器的性能主要由加权矩阵 Q 和 R 决定, 加权矩阵 Q 和 R 的选择反映能耗和误差的折中。

本文取 R 阵为 1。

LQR 方法中 Q 对角矩阵表示对各个状态变量的关注程度, 越重视某个状态变量, 越希望其误差分量尽可能小, Q 的对角元素相应的数值要取得越大。对于倒立摆系统, 我们的主要目标就是使摆杆倒置稳定, 也就是说对角度变量的重视程度最高, 其对应的值也应该最大, 因此, 我们取

$$Q = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1$$

使用 MATLAB 的 lqr 函数进行求解, 我们得到最终设计的反馈矩阵为:

$$K = [-5.0000 \quad 86.7103 \quad -2.7431 \quad 11.5722]$$

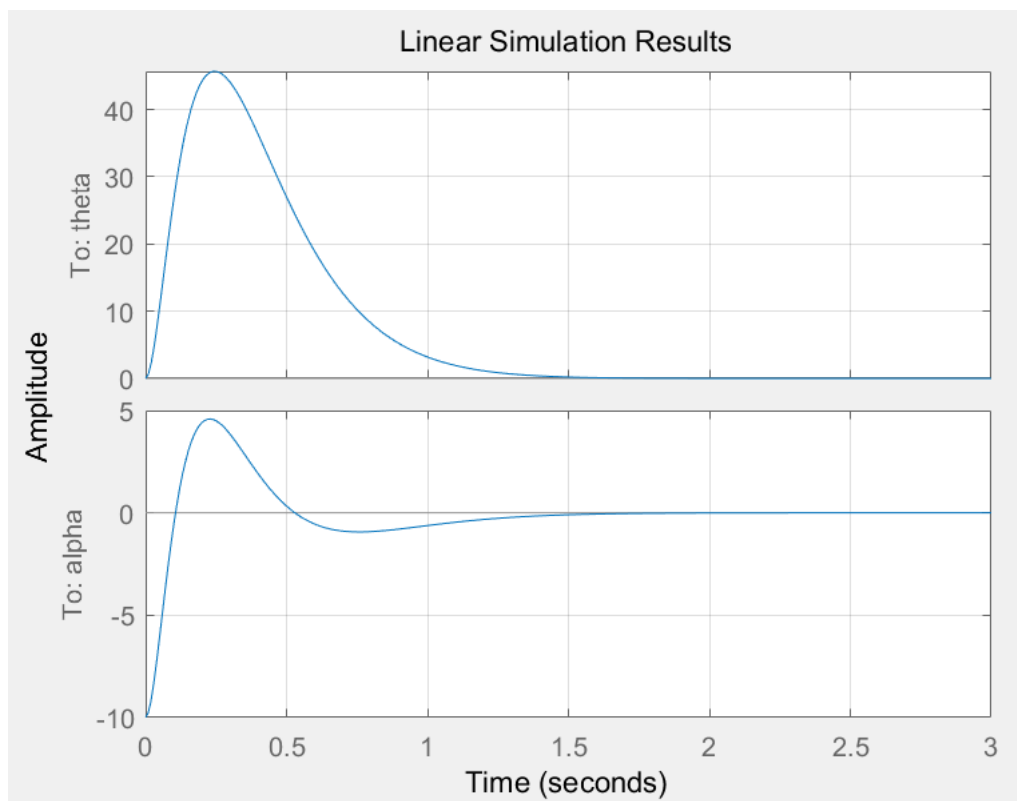


4.3 LQR控制器验证

加入控制器后，系统的特征值为：

$$\lambda_1 = -20.3610 \quad \lambda_2 = -6.9304 \quad \lambda_3 = -5.3604 + 1.4264i \quad \lambda_4 = -5.3604 - 1.4264i$$

其中，所有极点全部位于复平面左半平面的极点，因而系统可镇定。同样的，使用 MATLAB 对一阶开环倒立摆进行仿真，给定-10 rad 的扰动，我们可以得到得到效果图如下所示：



4.4 LQR参数敏感性分析

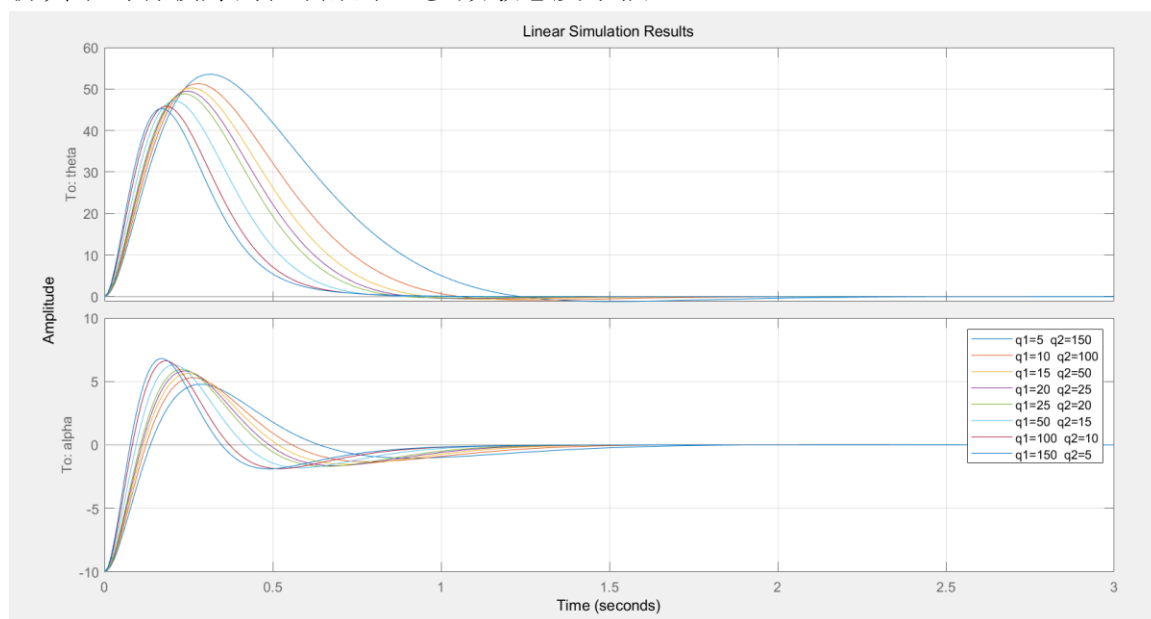
考虑不同 Q 参数的选取对控制器设计的影响，我们这里选取多组控制器参数进行探究，并分析不同参数对系统的影响。

我们选取多组如下所示的参数，分别计算他们得到的 K 矩阵，得到具体数值如下所示。

Q1	Q2	K1	K2	K3	K4
5	150	-2.2361	52.8071	-1.2825	6.5450
10	100	-3.1623	58.8431	-1.6232	7.4895
15	50	-3.8730	63.1290	-1.8704	8.1651
20	25	-4.4721	67.0133	-2.0801	8.7453
25	20	-5.0000	70.6880	-2.2678	9.2705
50	15	-7.0711	84.8593	-2.9910	11.2763
100	10	-10.000	104.0041	-3.9824	13.9794
150	5	-12.2474	118.1997	-4.7266	15.9825



在 MATLAB 中，进行仿真，给定一定扰动，得到的控制效果图如下所示，在仿真中均有较好的控制效果，参数敏感度不强。



从图中可以发现, Q 矩阵中, 增加 Q_1 使 θ 稳定时间和上升时间变短, 增大 Q_2 使 α 响应明显加快, 符合 LQR 方法的理论实际。



5. 实验总结与致谢

5.1 总结与展望

本次《倒立摆系统课程设计》中，我们针对倒立摆进行了系统建模与控制器设计。

通过建立系统的状态空间表达式，设计控制器对旋转倒立摆进行了运动控制，控制仿真结果及实测结果证明：LQR 方法设计得到的控制器响应速度快，超调小，系统鲁棒性好，参数敏感性不强，有着较好的应用空间。

实验过程中，测得摆杆整体克服静摩擦力所需的电压为 1.83V。考虑到静摩擦力的影响，在后续的实验中需要施加相应补偿。

控制器设计方面，由于小组成员的考研压力，我们仅仅采用了并不高级的 LQR 控制方法进行实验。本考虑结合其余课程所学知识，采用 MPC、神经网络等先进控制方法进行实验设计，但脱离实验环境，没有足够的时间很难完成这一任务，最终只能采用了经典的控制方法进行。

我们也将在下一次的实验中，对这次建模进行验证。

5.2 致谢

首先需要感谢**赵群飞老师**和**宫亮老师**为本课程提供了良好的实验平台与实验设备。控制系统的学习与设计很难在书本中得到实例化的理解，本次课程设计针对实际的倒立摆系统进行，拓宽了我们的视野，使我们对现代控制系统有了更深的理解与感悟。也要感谢《现代控制系统》这一课程的**杨博老师**，感谢老师在这一课程的教导为我们本次实践打下现代控制理论的基础，谢谢！

最后，还要感谢**自动化系**同一实验的同学，一起讨论实验方法，交互验证，共同进步，获得了许多过程控制系统的相关知识。

【参考文献】

- [1] 于树友, 褚建新, 王银敏. 一阶旋转倒立摆输出反馈控制[J]. 实验技术与管理, 2020, 37(03): 165-170+199.
- [2] 杨柏松, 林河利, 陈卸水, 熊建斌, 郑桂彬. 基于 LQR 的环形一级倒立摆控制算法研究[J]. 广东石油化工学院学报, 2015, 25(04): 47-51.
- [3] 徐泽远. 简易旋转倒立摆及控制装置的设计[J]. 安徽农业科学, 2014, 42(26): 9216-9217+9254.



【附录】部分 MATLAB 代码

```
1. %% 倒立摆课程作业
2. %% @Author : C_zihao, DJ_Cheng, Xu Juan
3.
4. clc;
5. clear;
6. close all;
7.
8. %% 输入系统
9. states = {'theta' 'alpha' 'theta_dot' 'alpha_dot'};
10. inputs = {'V_m'}; outputs = {'theta'; 'alpha'};
11. t_test = 0: 0.01: 3; %测试时间
12. A = [0 0 1 0
13.      0 0 0 1
14.      0 77.26 -0.573 0
15.      0 83.37 -0.244 0];
16. B = [0;0;17.19;7.31];
17. C = [1 0 0 0
18.      0 1 0 0]; %观测角度
19. D = 0;
20.
21. %% 开环测试
22. sys_ss = ss(A, B, C, D, 'statename', states, 'inputname', inputs, 'outputname', outputs);
23. %开环阶跃
24. step(sys_ss, t_test);
25. %验证 A 特征值
26. [~,Eigen] = eig(A)
27. %验证系统能控性
28. M = ctrb(A,B)
29. controllable = [rank(M) ==4]
30.
31.
32. %% LQR 控制器设计
33. % 系统状态的权重矩阵  $x^*Qx$ 
34. q1= 25;
35. q2 = 25;
36. legend1 = sprintf('q1=%d q2=%d', q1, q2);
37. Q = [q1 0 0 0
38.      0 q2 0 0
39.      0 0 1 0
40.      0 0 0 1];
41. %控制量 u 的权重矩阵  $u^*R^*u$ 
```



```
42. R = 1;
43. % K 为状态反馈矩阵; P 为 Riccati 方程的解; r 为特征值
44. [K,P,r] = lqr(A,B,Q,R);
45. K
46.
47. %% 仿真结果验证
48. %对控制器进行仿真
49. A_c = A - B*K;
50. B_c = B;C_c = C;D_c = D;
51. %验证 A_c 特征值
52. [~,Eigen2] = eig(A_c);
53.
54. sys_lqr = ss(A_c, B_c, C_c, D_c, 'statename', states, 'inputname', in
    puts, 'outputname', outputs);
55. % LQR 系统阶跃测试
56. x0 = [0;-10;0;0]; %初始阶跃
57. u = zeros(size(t_test));
58. lsim(sys_lqr, u, t_test, x0);
59. grid on
60.
61. %% 对比测试, 取不同 Q
62. theta_q= [5, 10, 15, 20, 25, 50, 100, 150]
63. alpha_q= [150,100, 50, 25, 20, 15, 10, 5]
64. for i=1:length(theta_q)
65.     q1 = theta_q(i);
66.     q2 = alpha_q(i);
67.     Q = [q1 0 0 0
68.          0 q2 0 0
69.          0 0 0 0
70.          0 0 0 0];
71.     [K,P,r] = lqr(A,B,Q,R);
72.     K
73.     A_c = A - B*K;
74.     B_c = B;C_c = C;D_c = D;
75.     sys_lqr2 = ss(A_c, B_c, C_c, D_c, 'statename', states, 'inputname
        ', inputs, 'outputname', outputs);
76.     lsim(sys_lqr2, u, t_test, x0);
77.     hold on
78.     grid on
79. end
```