華南農業大學

South China Agricultural University

第三讲 标准正交向量组

1.8 正交向量组

1.9 标准正交向量组

1.10 向量组的标准正交化

一、正交向量与正交向量组

定义1.8.1　如果两个向量的内积等于零，则称它们**正交**.

定义1.8.2　设n 维向量组 α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_n 不含零向量，且任意两个向量都正交，则该向量组称为**正交向量组**.

定义1.8.3　在n 维欧氏空间中，由n 个向量组成的正交向量组称为R^n **正交基**.

例1.8.2 验证向量组

$$\alpha_1=(1,1,1)^T,\quad \alpha_2=(1,0,-1)^T,\quad \alpha_3=(1,-2,1)^T$$

是一个正交向量组.

解 因为$(\alpha_1,\ \alpha_2)=0,(\alpha_1,\ \alpha_3)=0,(\alpha_2,\ \alpha_3)=0,$

所以α_1，α_2，α_3是一个正交向量组.

P21 问题1.8.1

定理1.8.1

设n维向量 α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r 是向量空间V的正交基，则 α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r 线性无关.

证明 设有 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$, 使

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0$$

以 α_i^T 左乘上式两端，得 $\lambda_i\alpha_i^T\alpha_i=0$

$\because \alpha_i\neq 0, \therefore \alpha_i^T\alpha_i=\|\alpha_i\|^2\neq 0,$ 从而必有 $\lambda_i=0$

所以 $\lambda_1=0,\lambda_2=0,\cdots,\lambda_r=0.$

于是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

注意：反之不成立。举反例

问题1.8.2：若向量 γ 与向量 α，β 都正交，则 γ 与 α，β 的任意线性组合都正交

二、标准正交向量组

定义1.9.1　每个向量都是单位向量的一个正交向量组，称为**标准正交向量组**.

定义1.9.2　在n维欧式空间R^n中，若一组基e_1，$e_2,\cdots$，e_n满足标准正交向量组的条件，即

$$\left(e_i,e_j\right)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}\quad i,j=1,2,\cdots,n,$$

则称e_1，$e_2,\cdots$，e_n是R^n的**标准正交基**.

例1.9.1 已知向量组

$$\alpha_1=(1,1,1)^T,\quad \alpha_2=(1,0,-1)^T,\quad \alpha_3=(1,-2,1)^T$$

是一个正交向量组，请将它化为标准正交向量组.

解 令 $$e_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T,$$

$$e_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T,$$

$$e_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)^T,$$

则 e_1,e_2,e_3 就是一组标准正交向量组.

定理1.9.1

设向量 α，β 在某个**标准正交基下**的坐标分别为

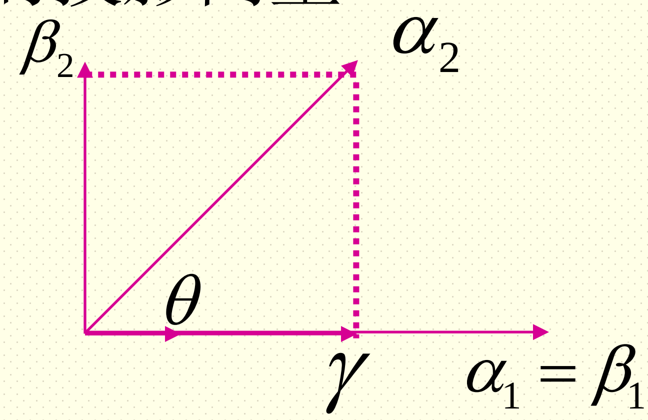
$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，则

$$(1)\ (\alpha, \beta)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_j;$$

$$(2)\ \|\alpha\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2}}.$$

施密特正交化方法

如图，向量γ是向量α_2在向量β_1上的投影向量



$$\|\gamma\| = \|\alpha_2\| \cos\theta$$

$$= \|\alpha_2\| \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{\|\alpha_2\| \|\beta_1\|} = \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{\|\beta_1\|}$$

$$\gamma = \|\gamma\| \bullet \frac{1}{\|\beta_1\|} \beta_1 = \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{\|\beta_1\|} \times \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

$\beta_2 = \alpha_2 - \gamma$ 与 β_1 正交，即 $\left(\alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \cdot \beta_1,\ \beta_1 \right) = 0$

三、向量组的标准正交化

例1.10.1 求与向量组 $\alpha_1=(1,0)^T$，$\alpha_2=(2,2)^T$ 等价的正交向量组.

解 令 $\beta_1=\alpha_1=(1,0)^T$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1=(2,2)^T-\frac{2}{1}(1,0)^T=(0,2)^T,$$

容易验证，向量组 β_1，β_2 是 α_1，α_2 与等价的正交向量组.

定理 1.10.1 设n维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,令

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_m=\alpha_m-\frac{(\alpha_m,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_m,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_m,\beta_{m-1})}{(\beta_{m-1},\beta_{m-1})}\beta_{m-1}$$

施密特正交化过程

则得到的 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是正交向量组,且与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 等价

$$\eta_i=\frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 是与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 等价的**标准正交向量组.**

例1.10.2 设 $\alpha_1=(1,2,-1)^T$， $\alpha_2=(-1,3,1)^T$， $\alpha_3=(4,-1,0)^T$

试用施密特正交化方法把这组向量化为标准正交向量组.

解 取 $\beta_1=\alpha_1=(1,2,-1)^T$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1=\frac{5}{3}(-1,1,1)^T,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\ \beta_2)}{(\beta_2,\ \beta_2)}\beta_2=2(1,0,1)^T,$$

再将β_1，β_2，β_3单位化，即

$$\eta_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)^T,\ \eta_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^T,\ \eta_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T,$$

则η_1，η_2，η_3就是所求的标准正交向量组.

四、作业

P22 作业1.8

P23 作业1.9　　2题

P26 作业1.10　（1）题

预习2.1-2.4节，观看2.1-2.4视频