华南农业大学
South China Agricultural University

第九讲 矩阵的秩与向量组秩的关系

2.16 矩阵的秩（1）

2.17 矩阵的秩（2）

2.18 向量组与矩阵的秩

一、矩阵的秩（1）

定义2.16.1 从矩阵 A 中任取 K 行 K 列，其行列交叉位置上的元素保持相对位置不变，而构成的 K 阶行列式，称之为矩阵 A 的一个 ***K* 阶子式**.

例如 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 4\end{pmatrix}$,

第1行及第1列交叉位置元素得一阶子式 $|1|=1.$

第2，3行及第1，2列交叉位置元素得二阶子式 $\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=2.$

三阶子式为 $|A|=0$

定义2.16.2 如果矩阵 A 中至少有一个 r 阶子式不等于零，所有 $r+1$ 阶的子式都为零，即矩阵 A 中所有不为零的子式的最高阶数为 r，称 r 为矩阵 A 的**秩**(Rank)，记作 $r(A)=r$ 。

例如 $r(A)=5$ $\Longleftrightarrow$ 矩阵A有一个5阶子式不为零，所有6阶，7阶等高于5阶子式全为零.

注：

1. 矩阵的秩为非零子式的最高阶数.
2. 如果 A 为 n 阶方阵，$|A|\neq 0$，则称 A 为**满秩矩阵**.

例1 计算矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩.

解 取 A 的第1，2行，第1，2列，则交叉位置的元素构成

一个二阶子式为

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

计算40个三阶
行列式为零

而 A 的所有三阶子式共有 $C_4^3 C_5^3 = 40$ 个，经验算全部等于零，

故 $r(A)=2$.

二、矩阵的秩（2）

定理2.17.1 若矩阵 A 与 B 等价，则 $r(A)=r(B)$.

注： 任意非零矩阵 A 都可以通过行初等变换化为行阶梯形矩阵 B，即 A 与 B 等价，有 $r(A)=r(B)$.

例2 计算行阶梯形矩阵的秩.

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 易知 A 的所有4阶子式为零，有一个三阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=24，r(A)=3.$$

定理2.17.2 行阶梯形矩阵的秩等于其非零行的个数.

求矩阵秩的方法:

为了计算一个矩阵的秩，只要用初等行变换把它化为行阶梯形矩阵， 则这个行阶梯形矩阵的非零行数等于矩阵 A 的秩.

例3　计算矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&1&2&1\\1&-1&1&-1&2\\2&-3&2&1&3\\1&-3&1&5&0\end{pmatrix}$ 的秩.

解　用初等**行**变换把 A 化为行阶梯形矩阵.

$$A\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&-2&1&2&1\\0&1&0&-3&1\\0&1&0&-3&1\\0&-1&0&3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_3-r_2\\ r_4+r_2}}\begin{pmatrix}1&-2&1&2&1\\0&1&0&-3&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行阶梯形

所以 $r(A)=2$.

课堂练习：

利用矩阵的初等变换求下列矩阵的秩

(1) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$　　(2) $B=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\-1&-2&1&3\\0&0&2&4\\3&6&1&2\end{pmatrix}$

答案：　$R(A)=3$　　$R(B)=3$

(2)

$$B=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\-1&-2&1&3\\0&0&2&4\\3&6&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\boldsymbol{r}_4-3\boldsymbol{r}_1]{\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1}\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&3\\0&0&2&4\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

三、向量组与矩阵的秩

引理2.18.1 设有 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^T$，$i=1,2,\cdots,n$，则向量组线性无关的充分必要条件是由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 构成的 n 阶行列式不等于零，即

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0.$$

例4 讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,9)$ 的线性相关性.

解 把向量组按列排成行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

由引理2.18.1可知，向量组 α_1，α_2，α_3 线性无关.

复习回顾

定义1.6.1 (P14) 设有向量组 T，如果

(1)在T中有 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关；

(2)中任意 $r+1$ 个向量线性相关；

则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量组T的一个极大无关组.

极大无关组所含向量个数 r 称为向量组T的秩.

问题： 如何求向量组的秩和极大无关组?

定理2.18.1 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，则矩阵 A 的秩等于它的列向量组的秩, 也等于它行向量组的秩.

例4 讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,9)$ 的线性相关性.

另一解法 把向量组 α_1, α_2, α_3 按列排成矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\xrightarrow[\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1]{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&3&8\end{pmatrix}\xrightarrow{\boldsymbol{r}_3-3\boldsymbol{r}_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}$$

行阶梯形

所以 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=3$，向量组$\alpha_1$, α_2, α_3 线性无关.

例 5 判别下列向量组的线性相关性,

$$\alpha_1=(-1,0,2,1),\alpha_2=(3,4,0,-2),\alpha_3=(1,4,4,0).$$

解 把向量组 α_1，α_2，α_3 按列排成矩阵

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}-1&3&1\\0&4&4\\2&0&4\\1&-2&0\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{array}\end{array}\to\begin{pmatrix}-1&3&1\\0&4&4\\0&6&6\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&3&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

行阶梯形

所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，向量组$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$ 线性相关.

可以证明：若对矩阵 A 仅仅施行初等行变换，得到矩阵 B，则 A 的列向量组与 B 的列向量组有相同的相关性.

即初等行变换不改变列向量组的线性相关性.

利用该结论以及引理2.18.1，不仅可以得到求向量组的一个极大无关组的方法，也可以得到用该极大无关组来表示此向量组中的其它向量的具体方法.

观看P71动画：向量组的秩与线性关系

例 6 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,4,3)^T$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,-6,6)^T$，

$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-2,2,-9)^T$， $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,-2,7)^T$， $\boldsymbol{\alpha}_5=(2,4,4,9)^T$，

的一个极大无关组，并且把其它向量用此极大无关组表示.

解 把向量组按列排成矩阵 A，再作行变换化为行最简形.

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_3]{\boldsymbol{r}_2 \leftrightarrow \boldsymbol{r}_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-r_3\\ r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&2&-2&2&0\\0&-5&5&-3&-6\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_2]{\substack{\frac{1}{2}r_2\\ r_3+5r_2}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_3]{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

行最简形

即 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=B$

行最简形

所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3.$

观察 B 可知，它的第1，2，4列为3个线性无关的向量，

从而 A 的第1，2，4列，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关, 它就是

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组.

观察 B 可知，$\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2$，　$\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4.$

例 7 求下列向量组的一个极大无关组，并且把其余向量用此极大无关组来表示,

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,1),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,0,2),\ \boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,1,1)$$

解 把向量组按**列**排成矩阵 A，再作**行变换**化为行最简形.

$$A=\left(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T,\boldsymbol{\alpha}_4^T\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&1&3&2\\0&0&0&1\\1&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_1]{\boldsymbol{r}_2-2\boldsymbol{r}_1}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3]{\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行最简形

即 $A=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&1&3&2\\0&0&0&1\\1&1&2&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$

行最简形

所以 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3.$

观察 B 可知，它的第1，2，4列为3个线性无关的向量，

从而 A 的第1，2，4列，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, 它就是

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组.

观察 B 可知，$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$

给定具体的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 可以利用矩阵的初等行变换来确定向量组的线性相关性以及线性关系，方法为：

(1)把向量组按**列**排成矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$;

(2)对 A 作初等行变换化为行阶梯形矩阵，即

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\to\to\cdots\to \text{行阶梯形矩阵 } \boldsymbol{B}$$

根据行阶梯形矩阵 B 可以确定向量组的秩和极大无关组;

(3)继续把 B 化为行最简形，确定其余向量用极大无关组线性表示的形式.

小结

1. 矩阵的秩的定义---非零子式的最高阶数.

2. 矩阵的秩的求法---行阶梯形矩阵的非零行数.

3.求向量组极大无关组以及把其余向量用极大无关组线性表示的方法.

作业

P69 作业2.17 （2）

P72 作业2.18 2（2）（3）

预习2.20-2.23节

观看视频2.20-2.23