華南農業大學
South China Agricultural University

第七讲 行列式

2.8 二阶行列式与三阶行列式

2.9 *n* 阶行列式

2.10 行列式的性质

2.11 行列式的计算

一、二阶行列式

用消元法解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

$$(1)\times a_{22}: \quad a_{11}a_{22}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_1a_{22},$$

$$(2)\times a_{12}: \quad a_{12}a_{21}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_2a_{12},$$

两式相减消去 x_2**，得**（$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$）$x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$;

类似的，消去 x_1**，得** （$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$）$x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,

$$\boxed{x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},} \quad \boxed{x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \qquad (3)}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

特点：分子、分母具有相同的结构：两个数的乘积减去另外两个数的乘积.

定义2.8.1 对于二阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，表达式$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为方阵$\boldsymbol{A}$对应的**二阶行列式**，记为

$$\det \boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

思考 对于二阶行列式，是否总有$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\det\boldsymbol{A}+\det\boldsymbol{B}$?

二阶行列式计算

主对角线

副对角线

行标

列标

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

主对角线元素之积减去副对角线元素之积

根据定义算一算

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 6\times(-3) - 2\times(-5) = -8$$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta - (-\sin^2\theta) = 1$$

主对角线元素之积减去副对角线元素之积

二、三阶行列式

三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0$

时，方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}$$

$$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}$$

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}$$

特点：分子、分母具有相同的结构：都是三个数乘积的代数和，其中三个乘积为正，三个乘积为负.

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - a_{13} a_{22} b_3 - a_{12} b_2 a_{33} - b_1 a_{23} a_{32}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 a_{33} + b_1 a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} b_3 - a_{13} b_2 a_{31} - b_1 a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} b_3}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}}$$

$$x_3 = \frac{a_{11} a_{22} b_3 + a_{12} b_2 a_{31} + b_1 a_{21} a_{32} - b_1 a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} b_3 - a_{11} b_2 a_{32}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

定义2.8.2 对于三阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，表达式

$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$称为方阵$A$对应的**三阶行列式**，记为

$$\det \boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

三阶行列式的计算

对角线法则（了解）

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}
- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.
$$

以上方法只适用于二阶与三阶行列式.

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 5\times 2\times 2 + 1\times(-1)(-2) + 4\times 3\times 0$$

$$-4\times 2\times(-2) - 1\times 3\times 2 - 5\times(-1)\times 0 = 32$$

例1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

解

$$D = 2\times3\times5 + 1\times1\times2 + 2\times(-4)\times3 - 2\times3\times2 - 1\times(-4)\times5 - 2\times1\times3$$

$$= 30+2-24-12+20-6$$

$$= 10$$

三、n 阶行列式的定义

定义2.9.1 对于n阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

它所对应的***n*阶行列式**，记为

$$\det\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

四、n阶行列式的展开（计算）

●定义2.9.2 余子式和代数余子式

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，余下的 n－1 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式(cofactor)。记为 M_{ij}

称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

例如：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ $\quad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$

元素 a_{23} 的代数余子式 $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

元素 a_{44} 的余子式 $M_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

元素 a_{44} 的代数余子式 $A_{44} = (-1)^{4+4} M_{44} = M_{44}$

注：行列式的每个元素都分别对应着一个余子式和一个代数余子式。

3 阶行列式的余子式定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

三阶行列式的值等于它的第一行元素乘以各自的代数余子式再相加

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

三阶行列式等于第一行每个元素与其代数余子式的乘积之和.

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

三阶行列式等于第一列每个元素与其代数余子式的乘积之和.

定义2.9.3 n 阶行列式的值等于第一行的每个元素与其代数余子式的乘积之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

性质2.9.1 行列式的按行按列展开

行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

一般情况下按零元素多的行（列）展开较为简单

例1　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

解

观看P55动画：行列式的计算

例2 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

解 按第三列展开，得

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{43} = 0$$

总结：（1）行列式中零越多，越容易计算；

（2）如果有一行（列）元素全部为零，行列式等于零.

例3 计算行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

总结：三角行列式的值等于主对角线上所有元素的乘积.

上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

利用首行展开法可以证明

五、行列式的性质

对行列式也可以实施三种初等变换：

（1）对调第i行（列）和第j行（列），记为 $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$

（2）以数k（$k \neq 0$）乘第i行（列）每个元素，记为$r_i \times k (c_i \times k)$

（3）第j行（列）的每个元素乘同一常数k再加到第i行（列）的对应元素上，记为$r_i + kr_j (c_i + kc_j)$

对行列式实施以上三种初等变换，得到的行列式的值与原行列式的值之间有何关系呢？

性质2.10.1　行列式转置后，其值不变，即$D^T = D$.

性质2.10.2　交换行列式的两行（列），行列式改变符号.

推论2.10.1　行列式有两行（列）的对应元素完全相同，行列式为零.

性质2.10.3　行列式的某一行（列）中所有元素都乘以同一数k，行列式变为原来的k倍.

推论2.10.2　行列式有两行（列）对应元素成比例，行列式为零.

性质2.10.5　行列式的某一行（列）的每个元素乘以同一数k后加到另一行（列）对应元素上，行列式的值不变.

◆P54 如果行列式的某一行（列）的元素都是两项的和，则可以把该行列式拆成相应的两个行列式之和。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

◆ 把行列式的某一行（列）的元素都乘以同一个数后，加到另一行（列）的对应元素上去，行列式的值不变。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1、转置变换　行与列对调　$r_i \leftrightarrow c_i$　等值

2、

行的变换

row

交换i, j两行	$r_i \leftrightarrow r_j$	变号
数乘第 i 行	$k \times r_i$	K 倍
数乘第 i行 加到第 j 行	$r_j + kr_i$	等值

3、

列的变换

column

交换i, j两列	$c_i \leftrightarrow c_j$	变号
数乘第 i 列	$k \times c_i$	K 倍
数乘第 i 列 加到第 j 列	$c_j + kc_i$	等值

例

证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

主对角线行列式

证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

六、 行列式的计算 化行列式为三角行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2 - r_1 \\ r_4 - r_1}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3 - r_2}{=\!=\!=} 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_3 \leftrightarrow r_4}{=\!=\!=} -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -21$$

六、 行列式的计算 化行列式为三角行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 + 5r_1]{r_2 - r_1}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & 2 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & 2 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \underset{r_4-8r_2}{\overset{r_3+4r_2}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} \overset{r_4+\frac{5}{4}r_3}{=\!=\!=\!=}$$

$$\underset{r_3+4r_2}{\overset{r_4+2r_3}{=\!=\!=\!=}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 25/2 \end{vmatrix} = 1\times 2\times 8\times \frac{25}{2} = 200$$

例2.11.1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

解

$$=2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-3r_1}}{\underset{\substack{r_3+3r_1 \\ r_4-r_1}}{=\!=\!=\!=}} 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & -12 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3+4r_2}{=\!=\!=\!=} 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$r_4 - \frac{1}{2} r_3$$

$$\overset{r_4 - r_3}{=\!=\!=\!=} 4\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1)\times(-3)\times(-3)\times 1 = -36$$

两个特殊行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda+3 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda+3 & 1 & \lambda & 1 \\ \lambda+3 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+3)(\lambda-1)^3$$

自学2.11.2 掌握

例5 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$.

解

$$D \overset{\substack{c_1+c_2\\ c_1+c_3\\ c_1+c_4}}{=} \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+3b)(a-b)^3$$

例2.11.3 证明范德蒙德(Vander monde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 9 & 25 & 36 \end{vmatrix} = 6$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$D_3 = (b-a)(c-a)(c-b)$$

证明:
(范德蒙行列式)

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

解

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1\\a_1&a_2\end{vmatrix}\overset{r_2-a_1r_1}{=}\begin{vmatrix}1&1\\0&a_2-a_1\end{vmatrix}=a_2-a_1$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\\a_1^2&a_2^2&a_3^2\end{vmatrix}\overset{r_3-a_1r_2}{=}\begin{vmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\\0&a_2^2-a_1a_2&a_3^2-a_1a_3\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2-a_1r_1}{=}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a_2-a_1&a_3-a_1\\0&a_2^2-a_1a_2&a_3^2-a_1a_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2-a_1&a_3-a_1\\a_2^2-a_1a_2&a_3^2-a_1a_3\end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\begin{vmatrix}1&1\\a_2&a_3\end{vmatrix}=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_n - a_1 r_{n-1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_{n-1} - a_1 r_{n-2}}{=} \cdots \overset{r_2 - a_1 r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \cdots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$
\overset{r_2-a_1r_1}{=}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & \cdots & a_n^2-a_1a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & \cdots & a_n^2-a_1a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}
$$

$$
=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}
$$

$$
=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)D_{n-1} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)
$$

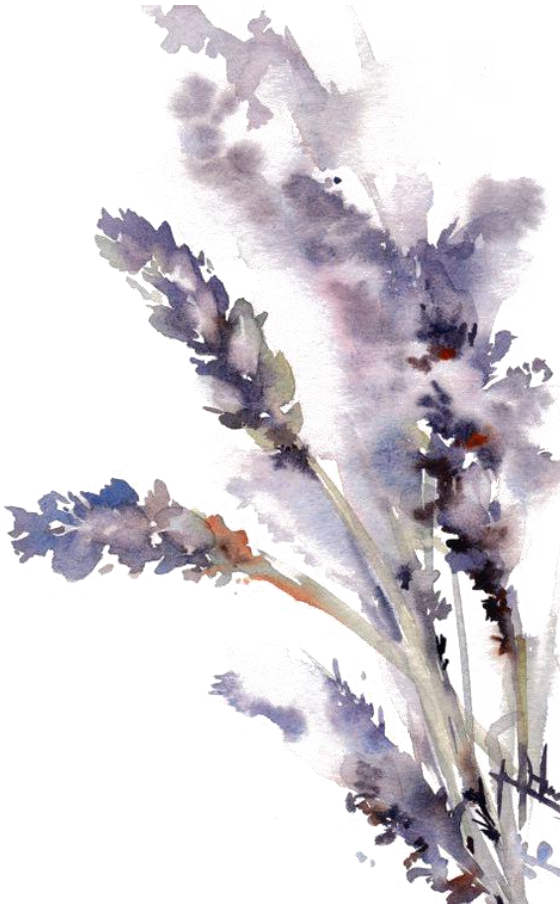
八、作业

P54 作业2.10　2

P58 作业2.11（1)(2)

预习2.12-2.15

观看2.12-2.15视频



1、转置变换　行与列对调　$r_i \leftrightarrow c_i$　等值

2、行的变换 row	交换i, j两行	$r_i \leftrightarrow r_j$	变号
	数乘第 i 行	$k \times r_i$	K 倍
	数乘第 i行 加到第 j 行	$r_j + kr_i$	等值
3、列的变换 column	交换i, j两列	$c_i \leftrightarrow c_j$	变号
	数乘第 i 列	$k \times c_i$	K 倍
	数乘第 i 列 加到第 j 列	$c_j + kc_i$	等值

1、练习：行列式性质

P92 12，13，17

2、练习：$|kA|$

P51 2

P93 22

小

结

行列式的计算方法：

（1）降阶法：一般是先利用性质，用消法变换将行列式中某一行（或列）的元素尽可能地化为零，最好是只留下一个元素不为零，然后按该行（或列）展开，使行列式降阶，最终化为二阶行列式，而得解。

（2）化行列式为三角形行列式（对角、上三角、下三角）

六、

例题

（降阶）

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 10 \\ 3 & 0 & 10 & 0 & 15 \\ 4 & 0 & 12 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & 6 & 11 & 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 10 & 0 & 15 \\ 4 & 12 & 0 & 11 \\ 2 & 6 & 11 & 24 \end{vmatrix}$$

$$= -11 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 10 & 15 \\ 4 & 12 & 11 \end{vmatrix} = -11 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 12 & 11 \end{vmatrix} = -11 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= 99$$

六、例题（降阶）

利用行列式的性质计算行列式的值

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解　原式

$$\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -8 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 16 & 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -8 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+c_2]{c_1-2c_2} - \begin{vmatrix} -16 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 20 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -16 & 6 \\ 20 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -(-16\times 5 - 6\times 20) = 200$$

计算行列式的值

1、 $$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

2、 $$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

课堂练习

解答

1、

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

原式 $\overset{r_2-3r_1}{\underset{\substack{r_3-r_1\\ r_4-r_1}}{=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -6 & -4 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

$$\overset{\text{按第二列展开}}{=\!=\!=\!=}(-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & -6 & -4 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}\overset{c_2+4c_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} -3 & -18 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{按第二行展开}}{=\!=\!=\!=}1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -18 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=-1\times\left[(-18)\times(-3)-(-4)\times 4\right]=-70$$

解答　2、

原式 $\xlongequal{r_2-2r_3}\begin{vmatrix}1&0&2&0\\-1&0&13&0\\0&2&-5&3\\3&1&1&0\end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{按第四列展开}} 3\times(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}1&0&2\\-1&0&13\\3&1&1\end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{按第二列展开}} -3\times1\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&2\\-1&13\end{vmatrix}$

$=3\times(13+2)=45$

2、 $D=\begin{vmatrix}1&0&2&0\\-1&4&3&6\\0&2&-5&3\\3&1&1&0\end{vmatrix}$

行列式的按行按列展开

行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

$$(j = 1, 2, \cdots, n)$$

P53性质4　行列式中某一行（或列）的元素与另一行（或列）对应元素的代数余子式乘积之和为零。

小结　行列式按行（或列）展开得D，
串行（或列）展开得零。

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases} D & (i=k) \\ 0 & (i\neq k) \end{cases}$$

$$a_{1j}A_{1s}+a_{2j}A_{2s}+\cdots+a_{nj}A_{ns}=\begin{cases} D & (j=s) \\ 0 & (j\neq s) \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

首行展开法

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

$$D_1=a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=0$$

例 设有行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 4 & 0\\ 3 & -1 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

A_{11}、A_{12}、A_{13}、A_{14}分别是D的第一行元素的代数余子式，试求$3A_{11}-A_{12}+3A_{13}-A_{14}$的值。

练习 P92 15

解： 将代数式还原成行列式，得

$$3A_{11}-A_{12}+3A_{13}-A_{14}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 3 & -1\\ 3 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 4 & 0\\ 3 & -1 & 3 & -1\end{vmatrix}=0$$

P51 问题2.9.5

P54性质2.10.6　设A、B为n阶方阵，则

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$$

性质2.10.6　可推广到n阶方阵.　问题2.10.4

P91　2（3）

九、行列式的几何意义

二维平面上向量 $\overrightarrow{AB}=(a,b)$ 、$\overrightarrow{AD}=(c,d)$ 张成的平行四边形 $ABCD$ 的面积等于二阶行列式 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ 的绝对值.

三维空间中向量 $\overrightarrow{AB}=(a,b,c)$ 、$\overrightarrow{AA'}=(d,e,f)$ 、$\overrightarrow{AD}=(g,h,i)$ 张成的平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的体积等于三阶行列式 $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$ 的绝对值.　　P47　P51

课堂小结

- 行列式的定义
- 行列式的性质
- 行列式的按行按列展开定理
- 行列式的计算