華南農業大學
South China Agricultural University

第十讲　特征值与特征向量

2.20 特征值与特征向量的概念

2.21 特征值与特征向量的计算

2.22 特征值的性质

2.23 特征向量的性质

一、特征值与特征向量的概念

定义2.20.1 设 A 为 n 阶方阵，如果存在数 λ 和 n 维非零列向量 X，使得

$$AX = \lambda X$$

成立，则λ和非零向量X分别称为方阵A的**特征值**和**特征向量**.

由定义知，**特征向量必为非零向量.**

例1 求单位矩阵I的特征值与特征向量.

例2 求零矩阵O的特征值与特征向量.

例 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&0&2\\3&-2&4\end{pmatrix}$ $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$

试确定 ξ_1，ξ_2 是否为A的特征向量。

解 $$A\xi_1=\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&0&2\\3&-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=3\xi_1$$

$$A\xi_2=\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&0&2\\3&-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-2\\4\end{pmatrix}$$

ξ_1 是， ξ_2不是。

二、特征值的计算

定义2.21.1　设A为n阶方阵，含有未知量λ的矩阵 $\lambda I-A$ 称为A的**特征矩阵**，其行列式 $|\lambda I-A|$ 称为A的**特征多项式**，等式$|\lambda I-A|=0$称为A的**特征方程**.

λ为矩阵A的特征值

$\Leftrightarrow$　存在非零向量X满足$AX=\lambda X$

$\Leftrightarrow$　齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$有非零解

$\Leftrightarrow$　系数行列式$|\lambda I-A|$等于零

$\Leftrightarrow$　λ为特征方程$|\lambda I-A|=0$的根.

λ为矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值

$\Leftrightarrow$ λ为特征方程$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$的根.

特征值的计算：解特征方程$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$，其根为全部特征值.

n阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征方程为n次方程，它在复数范围内有n个根，即n阶方阵$\boldsymbol{A}$在复数范围内有n个特征值.

例3 求方阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\2&1&3\end{pmatrix}$的特征值.

解 该方阵的特征方程为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\1&\lambda-2&0\\-2&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=0$$

即 $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$

从而A的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3.$

总结：三角矩阵的对角线元素为该方阵的全部特征值.

P77 第2题 P78例题2.21.1

三、特征向量的计算

(观看P78特征值与特征向量)

非零向量X为方阵A对应于特征值λ的特征向量

$\Leftrightarrow$非零向量X满足$AX=\lambda X$

$\Leftrightarrow$非零向量X为齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$的解.

特征向量的计算：解齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，从全部解中去掉零向量，就得到特征值λ对应的全部特征向量.

例4 求方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值3对应的特征向量.

解 解齐次线性方程组 $(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$

即 $\begin{cases}x_1-x_2-x_3=0\\ -x_1+x_2+x_3=0\\ -x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=x_2+x_3\\ x_2=x_2\\ x_3=x_3\end{cases}$

从而齐次线性方程组的解可表示为 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

故3对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ 其中k_1, k_2不全为零

四、特征值的性质

性质2.22.1 设 λ 为n阶方阵A的特征值，X为其对应的特征向量，则

(1) $k\lambda$ 为kA的特征值，X为对应的特征向量

(2) 当A可逆时，λ^{-1}为A^{-1}的特征值，X为对应的特征向量

(3) λ^m为A^m的特征值，X为对应的特征向量

(4) λ为A^T的特征值.

(P93填空题第20小题)

例2.22.2

设$A_{n\times n}$满足$A^T=-A$，且λ_0为A的特征值，

证明：　$-\lambda_0$也是A的特征值。

性质2.22.2 设 A 是 n 阶方阵，$\varphi(A)=a_0I+a_1A+\cdots+a_mA^m$，

若 λ 为 A 的特征值，则

$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值

证明思路： **若要得到问题的结论，就要证明下式成立**

$$\varphi(A)X=\varphi(\lambda)X$$

即

$$(a_0I+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m)\ X$$

$$=(a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_m\lambda^m)\ X$$

P80 问题2.22.2　类似作业第1题

设 2 是方阵 A 对应于特征向量 X 的特征值，那么矩阵

$3A^2$， $A^4-2A+2I$ 的特征值分别是？

对应的特征向量是什么？

例5 设n阶方阵A满足$A^2-3A+2I=O$，证明：A的特征值只能是1或2（P81作业第3题，例题2.22.1类似）.

证 设λ为A的特征值，则$\lambda^2-3\lambda+2$为$A^2-3A+2I$的特征值

而$A^2-3A+2I$为零矩阵，只有特征值0

因此 $\lambda^2-3\lambda+2=0$

从而λ只能是1或2.

P80 问题2.22.1

若$\lambda(\lambda\neq 0)$是 可逆$A_{n\times n}$ 的特征值，

X 为对应的特征向量，

则 A^* 的特征值和特征向量？ $\dfrac{|A|}{\lambda}$

（P93填空题第18小题）

例2.22.3

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$方阵$A$的分别对应于特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$的特征向量，

若$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，求$A^m\beta$.

P85定理2.24.1

设n阶方阵A的全部特征值是λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_n，则

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

P86 2：方阵 A 不可逆的充要条件是A至少有一个特征值为零.

例 设 A 是一个三阶矩阵，1，2，3是它的三个特征值，试求

（1） A 对角线元素之和

（2） $|A|$

(3) $|A^2 + A + I|$

解

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$A^2 + A + I$ 的特征值依次为

$$1 + 1 + 1 = 3, \quad 2^2 + 2 + 1 = 7, \quad 3^2 + 3 + 1 = 13$$

$$|A^2 + A + I| = 3 \times 7 \times 13 = 273$$

例6 已知3阶方阵A的特征值为1,2,-1，求$B=(2A^*)^{-1}$的特征值.（P91选择题第8小题）

解 由于 $A^* = |A|A^{-1} = -2A^{-1}$

因此 $B = (2A^*)^{-1} = (-4A^{-1})^{-1} = -\frac{1}{4}A$

从而B的特征值为

$$-\frac{1}{4}\cdot 1 = -\frac{1}{4} \qquad -\frac{1}{4}\cdot 2 = -\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{4}\cdot(-1) = \frac{1}{4}$$

例 已知 $B = A^5 - 3A^4 + 2A - I$，其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，试求$B$的特征值和 行列式。 (P94 第11题)

解 求解矩阵A的特征方程 $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

得特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$

所以B的特征值为 $\lambda_{B1} = 1^5 - 3 \times 1^4 + 2 \times 1 - 1 = -1$

$$\lambda_{B2} = 3^5 - 3 \times 3^4 + 2 \times 3 - 1 = 5$$

所以 $|B| = -5$。

P93填空题第23小题

五、特征向量的性质

性质2.23.1　若$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$是方阵$\boldsymbol{A}$的同一特征值λ的特征向量，

则非零向量$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$也是方阵$\boldsymbol{A}$的特征向量.

（P91选择题第12小题）

五、特征向量的性质

性质2.23.2　若α_1，α_2是方阵A的不同特征值的特征向量，则α_1，α_2线性无关.

性质2.23.3　若α_1，α_2，…，α_m是方阵A的不同特征值对应的的特征向量，则α_1，α_2，…，α_m线性无关.

P82 问题2.23.1

性质2.23.4 若λ_1，λ_2，…，λ_m是方阵A的不同特征值，$\boldsymbol{\alpha}_{k1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{k2}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{kr_k}$为特征值$\lambda_k$的特征向量且线性无关，则

$$\boldsymbol{\alpha}_{11}，\boldsymbol{\alpha}_{12}，\ldots，\boldsymbol{\alpha}_{1r_1}；\ \ldots\ ；\boldsymbol{\alpha}_{m1}，\boldsymbol{\alpha}_{m2}，\ldots，\boldsymbol{\alpha}_{mr_m}$$

线性无关.

P83 例2.23.1

设$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$为三阶方阵$A$的三个不同的特征值，对应的特征向量分别为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,

证明 $P=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆， 并求$P^{-1}AP$.

问题2.23.3 $P^{-1}A^2P$

作业P84 第1题

例8 设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$是方阵A的不同特征值对应的特征向量，证明：$2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$不是$A$的特征向量.

证 设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$对应的特征值分别为λ_1，$\lambda_2(\lambda_1\neq\lambda_2)$，则

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{A\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$$

假设$2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$是$A$的特征向量，对应的特征值为$\lambda_3$，则

$$\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_3(2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2)$$

而 $\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2)=2\boldsymbol{A\alpha}_1+3\boldsymbol{A\alpha}_2=2\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+3\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$

因此$\lambda_3(2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2)=2\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+3\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$，即$2(\lambda_3-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+3(\lambda_3-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$

由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关得 $\lambda_3-\lambda_1=0,\ \lambda_3-\lambda_2=0$

于是 $\lambda_3=\lambda_1=\lambda_2$，矛盾!

因此$2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$不是$A$的特征向量.

例9　若λ_1，λ_2，…，λ_m是方阵A的**全部**不同特征值，特征值λ_k的特征向量的极大无关组为$\boldsymbol{\alpha}_{k1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{k2}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{kr_k}$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_{11}, \boldsymbol{\alpha}_{12}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{1r_1}; \dots; \boldsymbol{\alpha}_{m1}, \boldsymbol{\alpha}_{m2}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{mr_m}$$

为方阵A的全部特征向量的极大无关组.

六、作业

P81 作业2.22　2

P84 作业2.23　2 求特征值

预习2.19，2.24，2.25

观看视频2.19，2.24，2.25