華南農業大學

South China Agricultural University

第二讲　向量与线性空间

1.6 向量组的秩

1.7 线性空间

一、向量组的秩

向量组中任一向量
都可由
极大无关组线性表示。

定义1.6.1 设有向量组 T，如果

(1)存在 T 中 r 个向量 $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_r$ 线性无关；

(2)T中任意$r+1$个向量（如果有的话）都线性相关。

则称 $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_r$是向量组$T$的一个**极大线性无关组**，简称**极大无关组**。

其中，数r称为向量组T的**秩**，记为*rank(T)*，简称为$r(T)$。

注意：只含有零向量的向量组没有极大无关组，规定它的秩为0.

例1.6.1 试求三维向量组

$$\alpha_1=(1,0,1),\ \alpha_2=(0,2,1),\ \alpha_3=(0,0,-1),\ \alpha_4=(-1,3,2),\ \alpha_5=(1,-2,1)$$

的一个极大无关组及其秩.

解 可以验证，三个向量α_1，α_2，α_3构成的向量组线性无关，而任意四个向量都线性相关. 因此α_1，α_2，α_3是这个向量组的一个极大无关组，向量组的秩等于3. 也可以验证，α_2，α_3，α_4也是该向量组的一个极大无关组.

小结： 向量组的极大无关组不唯一,而极大无关组所含向量的个数唯一. 即秩唯一.

定义1.6.2 （向量组的线性表示）

如果向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$中的每个向量都可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表示，则称向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$**线性表示。**

定义1.6.3 （向量组的等价）

如果向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$和向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$可以互相线性表示，则称这两个**向量组等价。**

判别向量组线性相关的其他方法

引理1.6.1 如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示，且 $s > r$，则向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性相关。

P27
选择题
（7）

问题1.6.1 请给出引理1.6.1的逆否命题。

引理1.6.2 两个等价的向量组的秩相等。

问题1.6.2 两个秩相等的向量组等价么?

定理1.6.1

设有向量组T ,如果

（1）在T中r个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关;

（2）T中任意一个向量都是可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示,

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量组T的一个**极大无关组。**

P27 选择题（6）

问题1.6.3

例1.6.2 设向量组

$$\alpha_1=(2,1,4)^T,\quad \alpha_2=(-1,1,-6)^T,\quad \alpha_3=(-1,-2,2)^T,\quad \alpha_4=(1,1,-2)^T,$$

求该向量组 α_1，α_2，α_3，α_4 的秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大线性无关组表示 。

解 根据向量组线性相关的判定方法，可知 α_1，α_2，α_4 是一个极大无关组，故向量组的秩为3，且向量α_3可以由极大无关组线性表示为$\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2$.

注意：目前只能根据极大无关组的定义来判断和求向量组的秩，矩阵判断更简单.

二、数域

定义1.7.1　设P是由一些数组成的集合，如果P中任意两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍然是P中的数，那么P就称为一个**数域.**

举例

三、线性空间

定义1.7.2　设V是由一个非空集合，R 为实数域，如果V上定义了一种**加法运算**：对任意元素 α，$\beta \in V$ 有唯一元素γ与之对应，并称为α 和β 的**和**，记作$\gamma=\alpha+\beta$.又定义了一种**数乘运算**：对任意的一个数$\lambda \in R$ 与任意一个元素$\alpha \in V$，总有唯一的元素$\delta \in V$与之对应，称为λ 与α 的**积**，记作$\delta = \lambda\alpha$.

对任意的和任意的，加法和数乘运算满足以下八条运算规律：

（1）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) 在V中存在**零元素0**，对任何$\alpha\in V$，都有 $\alpha+0=\alpha$;

(4) 对任何$\alpha\in V$，都有 α 的负元素 $\beta\in V$，使得$\alpha+\beta=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$;

(7) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\beta$;

(8) $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$,

则 V 称为实数域 R 上的**线性空间**（或**向量空间**）， V 中的元素也称为**向量**。

例1.7.3 集合$V=\left\{\alpha=(1,x_2,x_3)^T \middle| x_2,x_3\in R\right\}$是不是线性空间?

解 因为任意$\alpha=(1,a_2,a_3)^T\in V$，则$2\alpha=(2,2a_2,2a_3)^T\notin V$,

所以集合V不是线性空间.

四、线性空间的性质

线性空间有如下**性质**：

(1) 零元素的唯一性；

(2) 任何元素的负元素唯一；

(3) $0\alpha=0,(-1)\alpha=-\alpha$，$\lambda 0=0$；

(4) 如果 $\lambda\alpha=0$，则 $\lambda=0$ 或 $\alpha=0$.

五、线性子空间

定义1.7.3 设V是一个线性空间，L为V的一个子集，如果对任意 α，$\beta \in L$ 和任意 λ，$\mu \in R, \lambda\alpha + \mu\beta \in L$，则称$L$为$V$的一个**子空间**.

六、线性空间的基和维数

定义1.7.4 在线性空间V中，如果存在r个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，满足:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关;

(2) V中任意一个向量都可以由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示,

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是线性空间V的一个**基**，数r称为线性空间V的**维数**，记为$dimV=r$.

定义1.7.5　如果一个线性空间V中存在任意多个线性无关的向量，则称V是**无限维线性空间**.

定理1.7.1　若线性空间V的维数 $dimV=r$，则 V 中任意 r 个线性无关的向量都是 V 的基.

定义1.7.6 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性空间 V 的一个基，对于任意元素$\alpha \in V$，有且仅有一组序数$x_1, x_2, \cdots, x_r \in R$，使

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_r\alpha_r$$

则 $(x_1, x_2, \cdots, x_r)^T$ 称为 α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 这个**基下的坐标.**

P26 选择题（2）

例1.7.4 设向量组

$$\alpha_1=(2,1,4)^T,\quad \alpha_2=(-1,1,-6)^T,\quad \alpha_3=(1,1,-2)^T,$$

（1）证明向量组 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 是欧氏空间 R^3 的一组基;

（2）求向量 $\alpha=(1,2,3)^T$ 在基 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 下的坐标.

解 (1) 设实数k_1,k_2,k_3满足$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$,则

$$\begin{cases}2k_1-k_2+k_3=0,\\ k_1+k_2+k_3=0,\\ 4k_1-6k_2-2k_3=0,\end{cases}$$

解该方程组得 $k_1=k_2=k_3=0$, 即向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的向量组.

又$\dim \mathrm{R}^3=3$,故向量组α_1, α_2, α_3是线性代数的向量组.

(2) 设实数x_1,x_2,x_3满足$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha$,则

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=1,\\ x_1+x_2+x_3=2,\\ 4x_1-6x_2-2x_3=3,\end{cases}$$

解该方程组得

$$x_1=\frac{9}{4},\quad x_2=\frac{13}{8},\quad x_3=-\frac{15}{8},$$

即向量α在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$\left(\frac{9}{4},\frac{13}{8},-\frac{15}{8}\right)$.

七、作业

P15 作业1.6 第3题

P19 作业1.7 第2题

预习1.8-1.10，

观看视频1.8-1.10