《线性代数》期末考试试卷（A 卷）参考答案

2019～2020 学年第 2 学期

一、选择题（本大题共有 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

BDABB

二、填空题（本大题共有 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、$\sqrt{39}, 0$　7、$-\dfrac{343}{9}$　8、$t > \dfrac{3}{5}$　9、$k \neq 1$　10、$k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

三、计算题（本大题共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

11、解一：$B^T A^T = (AB)^T, AB = \begin{pmatrix}2&1&0\\4&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\4&2\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&4\\1&5\end{pmatrix}$................6 分

所以 $B^T A^T = \begin{pmatrix}4&4\\1&5\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}4&1\\4&5\end{pmatrix}$...8 分

解二：$B^T A^T = \begin{pmatrix}0&4&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&1\\4&5\end{pmatrix}$............................8 分

12、解：$D = \begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}5&5&5&5\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix} = 5$

每个变换给 2 分,最后答案给 2 分。（注：只要过程和答案都对就给满分。）

13、解：根据逆矩阵的充要条件，$A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$，(2 分）

$A_{11} = -2, A_{12} = 1, A_{13} = 1, A_{21} = -1, A_{22} = 1, A_{23} = 1, A_{31} = -4, A_{32} = 3, A_{33} = 2$.....（5 分）

因为$|A| = \begin{vmatrix}1&2&-1\\-1&0&-2\\0&-1&1\end{vmatrix} = -1$，所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix}2&1&4\\-1&-1&-3\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$....................（8 分）

四、解答题（本大题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分）

14、解：令 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，容易看出 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$，因此向量组线性相关。（4 分）

因 α_1,α_2 线性无关，故一个极大无关组为 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$，（8 分）$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$。（10 分）

15、解：用初等变换将其增广矩阵 $\overline{A}$ 化为行阶梯形矩阵：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 4\\ 1 & 7 & -4 & a\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}0 & -5 & 3 & -7\\ 1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 5 & -3 & a-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -5 & 3 & -7\\ 0 & 0 & 0 & a-11\end{pmatrix}$$

当 a=11 时，R(A)=R（$\overline{A}$）=2<n=3，此时方程有无穷多解。............5 分

此时，$\overline{A}\xrightarrow[r_1-2r_2]{-\frac{1}{5}r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -5 & 3 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，即 $\begin{cases}x_1=-\frac{1}{5}x_3+\frac{6}{5}\\ x_2=\frac{3}{5}x_3+\frac{7}{5}\end{cases}$........7 分

所以方程组的通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1/5\\ 3/5\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6/5\\ 7/5\\ 0\end{pmatrix}$..10 分

16、解：（1）因为 A 与 B 相似，所以 A，B 有相同的特征值-1,2,y，于是|A|=|B|,

tr(A)=tr(B)，则有 $\begin{cases}4=-2y\\ -2+x=-1+2+y\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$.................................5 分

（2）对于 $\lambda_1=-1$，解方程 $(-I-A)x=0$，得 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$..........................6 分

对于 $\lambda_2=2$，解方程 $(2I-A)x=0$，得 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.......................7 分

对于 $\lambda_3=-2$，解方程 $(-2I-A)x=0$，得 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=k_3\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$..................8 分

取$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$,令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,则有

...........10 分

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

17、解：(1) B 的特征值为 1^3-5*1^2= -4，$(-1)^3$-5*$(-1)^2$= -6，2^3-5*2^2= -12。

与B相似的对角阵为$\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-6&0\\0&0&-12\end{pmatrix}$.......................................5 分

(2) $|B|=-4\times(-6)\times(-12)=-288,$
$|A-5I|=(1-5)(-1-5)(2-5)=-72.$ ....10 分

五、证明题（本大题共 1 小题，共 6 分）

18、设α_1，α_2，α_3线性无光，$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_3=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$,试证明$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$线性相关。

证明：设$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，即

$$(k_1+2k_3)\alpha_1+(-k_1+k_2-k_3)\alpha_2+(2k_1-k_2+3k_3)\alpha_3=0$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，因此$\begin{cases}k_1+2k_3=0\\-k_1+k_2-k_3=0\\2k_1-k_2+3k_3=0\end{cases}$ ....3 分

由于其系数行列式$\begin{vmatrix}1&0&2\\-1&1&-1\\2&-1&3\end{vmatrix}=0$，因此有不全为零的$k_1,k_2,k_3$满足

$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，所以$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关。.........................6 分