華南農業大學
South China Agricultural University

矩阵的对角化

2.25.2 矩阵的对角化 P88

4.6 矩阵的对角化 P119

P83 例题

矩阵的对角化 P88

定义 2.25.2 对 n 阶方阵 A，如果存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则称 A 与对角矩阵相似，或称 A **可对角化**。

矩阵的对角化 P88

方阵可对角化的充分必要条件

定理2.25.1 n 阶矩阵A能相似于对角矩阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量。

A 能否与对角阵 Λ 相似取决于
A 是否有 n 个线性无关的特征向量

P

证明: 必要性

$\because A$与对角阵$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$相似

$\therefore$存在一个n阶可逆阵$P = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，使

（P的列向量 ξ_i 线性无关）

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda,$$

$$即A(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$(A\xi_1, A\xi_2, \cdots, A\xi_n) = (\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, \ldots, \lambda_n\xi_n)$$

$$\Rightarrow A\xi_i = \lambda_i\xi_i \ (i = 1, 2, \cdots, n),$$

即ξ_i是对应于特征值λ_i的n个线性无关特征向量。

充分性

反之设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的特征值,对应的特征向量关

$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$线性无关.

构造$P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$(注：P可逆），$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$,则

$$\boxed{AP}=(A\xi_1,A\xi_2,\cdots,A\xi_n)=(\lambda_1\xi_1,\lambda_2\xi_2,\cdots,\lambda_n\xi_n)$$

$$=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=\boxed{P\Lambda}$$

$\Rightarrow P^{-1}AP=\Lambda$, A与对角矩阵Λ相似。

矩阵的对角化 P88

注意：
P不唯一
P决定Λ

定理2.25.1的意义

（1）指出n阶方阵可对角化的充要条件.

（2）若某n方阵A可对角化，则存在可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP=\Lambda$$

$P=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$

恰为

“n个线性无关特征向量ξ_i”

按列排成的可逆阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

恰为“ξ_i依次对应的全体特征值（含重数）”排成的对角阵

P89 例2.25.2

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&0&2\\3&1&1\end{pmatrix},\ \alpha_1=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-2$$

求可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

P83 例2.23.1

设$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$为三阶方阵$A$的三个不同的特征值，对应的特征向量分别为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，

证明 $P=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆， 并求$P^{-1}AP$.

作业P84 第1题

问题2.23.3 $P^{-1}A^2P$

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，已知A可对角化即有

与P89课后作业2类似

$P^{-1}AP=\Lambda$，其中$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}5&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$，求$A^{100}$.

解 由$P^{-1}AP=\Lambda$可得$A=P\Lambda P^{-1}$，于是

$$A^{100}=P\Lambda P^{-1}\ P\Lambda P^{-1}\ P\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1}$$
$$=P\ \Lambda^{100}\ P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5^{100}&&\\&(-1)^{100}&\\&&(-1)^{100}\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\-1&2&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5^{100}+2&5^{100}-1&5^{100}-1\\5^{100}-1&5^{100}+2&5^{100}-1\\5^{100}-1&5^{100}-1&5^{100}+2\end{pmatrix}$$

矩阵的对角化 P88 P119

推论2.25.2

（1）若A有n个互异的特征值，则 A与对角阵相 似，可对角化。

（2）如果 k **重特征值**正好对应 k **个线性无关**的特征向量，则可对角化。

反之不真

若A 有**重特征值**，不能马上断言A 是否与对角阵相似，

这时要看重根对应的特征向量.

n 阶方阵 A对角化的**步骤 P119**：

（1）求出所有的特征值；

（2）求出所有特征值对应的线性无关的特征向量；

（3）若矩阵$\boldsymbol{A}$有n个线性无关的特征向量$\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，…，$\boldsymbol{X}_n$，则矩阵$\boldsymbol{A}$可对角化，相似变换矩阵为$\boldsymbol{P}$，其中$\boldsymbol{P}$ 的列向量就是$\boldsymbol{A}$的特征值λ_1，λ_2 ，…， λ_n 对应的线性无关的特征向量$\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ ，…， $\boldsymbol{X}_n$；

（4）写出对角矩阵

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

例1 判断矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$能否对角化. P85作业2

P120 例4.6.1

解 矩阵$\boldsymbol{A}$的特征方程为:

所以，可以对角化

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7)=0$$

解得$\boldsymbol{A}$的所有特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-7$

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 代入方程组解方程组$(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

解得方程组的一个基础解系为 $X_1=\left(2,\ 0,\ 1\right)^T, X_2=\left(0,\ 1,\ 1\right)^T,$

例2 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ -5 & 3 & -3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 能否对角化.

P120 例4.6.2

解 矩阵***A***的特征方程为：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & 2\\ 5 & \lambda-3 & 3\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0$$

解得***A***的所有特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$

将$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 代入方程组解方程组

$(\lambda_1 \boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$，

解得方程组的一个基础解系为 $X=(1,\ 1,\ -1)^T$.

特征值1的重数是3，

其所对应的

线性无关的

特征向量的个数是1，

两者不相等，

所以***A***不能对角化。

例3 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$ 能否对角化？若能，将其对角化，并求$\boldsymbol{A}^n$.

P121 例4.6.3

解 矩阵$\boldsymbol{A}$的特征方程为：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -6 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 0\\ 3 & 6 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$$

解得$\boldsymbol{A}$的所有特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-2$

将$\lambda_1=\lambda_2=1$ 代入方程组解方程组$(\lambda_1\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

解得方程组的一个基础解系为$X_1=\left(-2,\ \ 1,\ \ 0\right)^T, X_2=\left(0,\ \ 0,\ \ 1\right)^T$,

将λ_3=-2代入方程组$(\lambda_3 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，解得该方程组的一个基础解系为 $X_3=(-1,1,1)^T$

因为$\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，$\boldsymbol{X}_3$线性无关,所以$\boldsymbol{A}$可对角化.

$$令\ P=(X_1,X_2,X_3)=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$可得\ P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \quad 则有 P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

则有

$$A^n=\left[P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}P^{-1}\right]^n=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(-2)^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}2-(-2)^n & 2+(-2)^{n+1} & 0\\(-1)+(-2)^n & (-1)+2(-2)^n & 0\\(-1)+(-2)^n & (-2)+2(-2)^n & 1\end{pmatrix}.$$

P91 选择题第9题

P83 例2.23.2

P90 选择题第2题C选项

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$，利用其特征值与特征向量，计算 A^{10}.

P77 第3题
P95 第18题
P121 第3题

作业

P89　作业2.25　2

P121　作业4.6　3

预习3.1-3.3

观看视频3.1-3.3