2013-2014 学年第 2 学期线性代数试卷 A 答案和评分标准

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. C
2. D
3. A
4. D
5. A

二、填空题（本大题共5小题，每小题4分，满分20分）

6. 1

7. $\sqrt{2}$ $\quad \frac{3}{4}\pi$

8. 24

9. $-\frac{2^{2n-1}}{3}$

10. $-\sqrt{\frac{5}{2}} < t < \sqrt{\frac{5}{2}}$

三、计算题

11.（**满分 8 分**）

$$3AB-2B=3\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{bmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{vmatrix}-2\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{bmatrix}$$ ——————————4 分

$$=\begin{bmatrix}-2&11&18\\2&-11&10\\6&17&-2\end{bmatrix}$$ ——————————8 分

12.（**满分 8 分**）

(1)

$$\begin{vmatrix}3&0&-2&0\\2&10&5&0\\0&0&-2&0\\-2&3&-2&3\end{vmatrix}=3\times(-2)*10*3=-180$$ ——————————4 分

(2) $D=\begin{vmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\\5&6&7&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&6\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0$. ——————————4 分

13. **(满分 7 分)**

$$(A,E)=\begin{pmatrix}5&2&0&0&1&0&0&0\\2&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&2&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}10&4&0&0&2&0&0&0\\10&5&0&0&0&5&0&0\\0&0&2&1&0&0&1&0\\0&0&2&2&0&0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}10&4&0&0&2&0&0&0\\0&1&0&0&-2&5&0&0\\0&0&2&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}10&0&0&0&10&-20&0&0\\0&1&0&0&-2&5&0&0\\0&0&2&0&0&0&2&-2\\0&0&0&1&0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-2&0&0\\0&1&0&0&-2&5&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&-1&2\end{pmatrix},$$ ——————————5 分

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}.$$ ——————————7 分

解法二：令 $A_1=\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$，

则 $A_1^{-1}=\dfrac{1}{|A_1|}A_1^*=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&5\end{pmatrix}$，$A_2^{-1}=\dfrac{1}{|A_2|}A_2^*=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$， ——————————4 分

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}.$$ ——————————7 分

四、解答题

14. **(满分 10 分)**

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1+\lambda\\1&1+\lambda&1\\1+\lambda&1&1\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda+3)$$ ——————————1 分

（1） 当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，有 $|A|\neq0$，方程组有惟一解； ——————————4 分

（2）当 $\lambda=-3$ 时，$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&-2&0\\1&-2&1&-3\\-2&1&1&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&0\\0&-3&3&-3\\0&0&0&6\end{bmatrix}$，

$R(A)=2<R(\overline{A})=3$，所以无解； ----------7 分

（3）当$\lambda=0$时，$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，

$R(A)=R(\overline{A})=1$，方程组有无穷多解. ----------10 分

另解:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&0\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1+\lambda&1&1&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&0\\0&\lambda&-\lambda&\lambda\\\lambda&0&-\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&0\\0&\lambda&-\lambda&\lambda\\0&-\lambda&-\lambda(\lambda+2)&\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&0\\0&\lambda&-\lambda&\lambda\\0&0&-\lambda(\lambda+3)&\lambda(\lambda+1)\end{pmatrix}$$

15. **(满分 10 分)**

（1）$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&-1&1&2\\3&2&-2&3\\6&4&-8&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&-3&3&0\\0&-1&1&0\\0&-2&-2&-4\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&-1&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&-2&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$ ----------6 分

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一个极大线性无关组； ----------8 分

（2）$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. ----------10 分

16. **(满分 8 分)**

$|A-\lambda E|=-(\lambda-4)^2(\lambda+1)$，

特征值$\lambda_1=\lambda_2=4,\lambda_3=-1$. ----------2 分

当$\lambda_1=\lambda_2=4$时，解$(A-4E)\vec{x}=\vec{0}$ ----------4 分

得$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$， ----------6 分

A的对应于$\lambda_1=\lambda_2=4$的全体特征向量为$\eta=k_1\vec{\xi}_2+k_2\vec{\xi}_2$，　$(k_1^2+k_2^2\neq0)$.

----------8 分

17.（**满分 8 分**）

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2+4x_1x_3+4x_3^2)-2x_2^2-6x_3^2 \quad =(x_1+2x_3)^2-2x_2^2-6x_3^2 ,$$

——————————3 分

令$\begin{cases} y_1=x_1+2x_3 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_3 \end{cases}$，即$\begin{cases} x_1=y_1-2y_3 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$，

所以$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, ——————————6 分

变换矩阵$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $|C|=1\neq 0$. 标准形 $f=y_1^2-2y_2^2-6y_3^2$.

——————————8 分

五、证明题

18.（**满分 6 分**）

证:假定向量组$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2$线性相关, 则存在不全为零的常数$k_1,k_2$,使得

$k_1(\beta-\alpha_1)+k_2(\beta-\alpha_2)=0,$

即$[(k_1+k_2)c_1-k_1]\alpha_1+[(k_1+k_2)c_2-k_2]\alpha_2=0,$ ——————————3 分

向量组α_1，α_2线性无关,

则$(k_1+k_2)c_1-k_1=0,\ (k_1+k_2)c_2-k_2=0,$

常数k_1+k_2不恒等于零, 得$c_1=\dfrac{k_1}{k_1+k_2}$, $c_2=\dfrac{k_2}{k_1+k_2}$，故$c_1+c_2=1$,与题设矛盾.

所以向量组$\beta-\alpha_1$，$\beta-\alpha_2$线性无关. ——————————6 分