线性方程组及其解空间

4.7 非齐次线性方程组解的结构

4.8 非齐次线性方程组的求解（1）

4.9 非齐次线性方程组的求解（2）

非齐次线性方程组

一、非齐次线性方程组解的结构

(性质、基础解系、解的结构)

二、非齐次线性方程组解的情况的判别定理

（一定有解？ 唯一解 Or 无穷解？）

三、非齐次线性方程组的求解方法（初等行变换)

四、带参数的线性方程组的解的情况的讨论

非齐次线性方程组定义

常数项全为零的线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$称为齐次线性方程组,例如

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

常数项不全为零的线性方程组称为非齐次线性方程组,例如

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

定义4.7.1 一般地 $AX=b\ \ (b \neq 0)$ 叫做**非齐次线性方程组**，

$\overline{A}=(A,\ b)$ 称为非齐次线性方程组$AX=b$ 的**增广矩阵**。同时，方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 称为 $AX=b$ 对应的齐次线性方程组，也称为**导出组**。

非齐次线性方程组解的性质

性质4.7.1 若α_1，α_2是非齐次线性方程组$AX=b$的解，则$\alpha_1-\alpha_2$ 是齐次线性方程组$AX=0$的解。

性质4.7.2 若α是非齐次线性方程组$AX=b$ 的解，β是齐次线性方程组$AX=0$的解，则$\alpha+\beta$ 是$AX=b$的解。

性质4.7.3 若是非齐次线性方程组$AX=b$ 的任意一个解α可以表示成$\alpha=\alpha_0+\beta$，其中α_0是$AX=b$的任意一个特解，β 是$AX=0$的解。

一、非齐次线性方程组的解的结构 P123定理4.7.1

非齐次线性方程组 $Ax = b$ (1)

对应的齐次线性方程组 $Ax = 0$ (2)

所以（1）的通解为 $x = \eta^* + k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$

P130第6题

η^* ↓ （1）的特解　　$k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ ↓ （2）的通解

$k_1, \ k_2 \ ,\cdots, \ k_{n-r} \in R$

通解唯一么?

例4.7.1 若三元非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX=b}$的一个特解为η_0，其对应的齐次线性方程组（导出组）$\boldsymbol{AX}=0$的一个基础解系为ξ，则$\boldsymbol{AX=b}$ 的通解可以表示为（ ）

A. $X=\eta_0+k\xi,\ k\in R$； **B.** $X=\eta_0+\xi$； **C.** $X=k\eta_0+\xi,\ k\in R$

解

因为非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX=b}$ 的一个特解η_0，导出$\boldsymbol{AX}=0$的一个基础解系为ξ，根据非齐次线性方程组解的结构定理知 $X=\eta_0+k\xi,\ k\in R$ 是$\boldsymbol{AX=b}$的通解，故选**A**。

P123作业第2，3题

二、非齐次线性方程组解的情况的判别定理

记系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$

矩阵形式的方程组可以写成等价的向量形式

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b$$

$\bar{A}$为增广矩阵

记矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & \vdots & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & \vdots & b\end{pmatrix}$

定理4. 8. 1非齐次线性方程组有解的充分必要条件是它的增广矩阵的秩与系数矩阵的秩相等。

非齐次线性方程组无解的充分必要条件是：

$R(\bar{A})=R(A)+1$

1. 设 R(A)=R($\bar{A}$)=n，其中，n为未知量的个数

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，而向量组

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$ 线性相关。可知b可由

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示且表法唯一。

即非齐次线性方程组AX=b有唯一解。

2. 设 **R(A)= R($\bar{A}$)=r<n，**其中，**n**为未知量的个数

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关，方程

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = Ax = 0$$ 有非零解

$$A\eta = b, \quad A\xi = 0\ (\xi \neq 0)$$ 对任意的实数**k**

$$A(\eta + k\xi) = A\eta + kA\xi = b + 0 = b$$

非齐次线性方程组**AX=b**有无穷多解。

非齐次线性方程组解的情况的讨论

n为
未知量的个数

$Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow R(\overline{A}) = R(A)$

$Ax = b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow R(\overline{A}) = R(A) = n$

$Ax = b$ 有无穷个解 $\Leftrightarrow R(\overline{A}) = R(A) < n$

$Ax = b$无解 $\Leftrightarrow R(\overline{A}) = R(A) + 1$

例4.8.1　判断非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ 有多少解（C）.

A.唯一解　　　　B.无解　　　　C.无穷多解

解　对非齐次线性方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

P125作业第一题
P128作业第一题

因为 $r(A) = r(\overline{A}) = 1 < 2$　　　所以方程组有无穷多解。

三、非齐次线性方程组求解方法：初等行变换

P126 求解非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的**步骤**：

（1）对增广矩阵$\overline{A}=(A,\ b)$作一系列初等行变换化成行阶梯矩阵；

（2）判断非齐次线性方程组是否有解，在有解的情况下，判断其解的个数；

（3）求得方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的一个特解$\eta_0$，以及导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$；

（4）写出方程组的通解：$X=\eta_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$

观看P116动画：非线性方程组的解集

例 解下列线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=2 \\ 3x_1-2x_2+x_3=2 \\ x_1-5x_2+2x_3=1 \end{cases}$

解 对增广矩阵B施行初等行变换

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & -5 & -1 \\ 0 & 13 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

结论:
无解

P126例4.9.1 求解非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$.

解 由例4.8.1该方程组有无穷多解，且原方程组等价于方程组：

$$x_1 = -x_2 + 1$$

令 $x_2 = 1$，得到方程组顶一个特解为$\eta_0 = (0,\ 1)^T$

原方程组的导出组为$x_1 + x_2 = 0$，它的一个基础解系为 $\xi = (1,-1)^T$

故原方程组的通解为：

$$X = \eta_0 + k\xi = (0,\ 1)^T + k(1,\ -1)^T, k \in R.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

解:

对增广矩阵实施行的初等行变换

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & 4 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -7 & -9 & 5 \\ 0 & 10 & -14 & -18 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -7 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & \vdots & -2 \\ 0 & 5 & -7 & -9 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \div 5} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{5} & \frac{-9}{5} & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 + 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{5} & \frac{-9}{5} & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

原方程组的同解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5} x_3 + \frac{2}{5} x_4 + 1 \\ x_2 = \frac{7}{5} x_3 + \frac{9}{5} x_4 + 1 \end{cases}$$

对应的齐次线性方程组的基础解系

$$\xi_1 = (1, 7, 5, 0)' \qquad \xi_2 = (2, 9, 0, 5)'$$

对应的齐次线性方程组的基础解系

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{5}x_3 + \dfrac{2}{5}x_4 + 1 \\ x_2 = \dfrac{7}{5}x_3 + \dfrac{9}{5}x_4 + 1 \end{cases}$$

$$\xi_1 = (1, 7, 5, 0)' \quad \xi_2 = (2, 9, 0, 5)'$$

非齐次线性方程组特解

$$\eta^* = (1, 1, 0, 0)'$$

所求的非齐次方程组的通解为

$$x = \eta^* + k_1\xi_1 + k_2\xi_2,$$

$$k_1, k_2 \in R$$

练一练

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B=(A \vdots b)$$

解

$$=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-\frac{1}{4})]{r_3+r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{4}x_4 + \frac{5}{4} \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{4}x_4 - \frac{1}{4} \end{cases}$$

齐次方程组的基础解系

$$\xi_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0\right)' \quad \xi_2 = \left(-\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, 0, 1\right)'$$

非齐次线性方程组的一个特解

$$\eta^* = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 0\right)'$$

原方程组的通解

$$x = \eta^* + k_1\xi_1 + k_2\xi_2$$

$$k_1, k_2 \in R$$

四、带末知参数的线性线性方程组解的讨论

λ 为何值时，方程组有唯一解？有无穷多解？无解？有无穷多解时，求解方程组。

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

五星级重要

类似P126 第2题

解　方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(3+\lambda)$$

（1）当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时，方程组有唯一解

（2）当 $\lambda=0$ 时，

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^2\end{cases}$$

方程组的增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$R(A)=1, R(\bar{A})=2$ ，所以原方程组无解

（3）当 $\lambda=-3$ 时，

方程组的增广矩阵为

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1+(r_2+r_3)} \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

$R(A)=2, R(\overline{A})=3$ ，原方程组无解

例　求解线性方程组，当 K 为何值时，方程组有（1）唯一解？（2）无解？（3）无穷多解？并用基础解系表示通解。

P126 第2题

$$\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k^2 \end{cases}$$

解　方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+2)(k-1)^2$$

（1）当 $k \neq -2$ 且 $k \neq 1$ 时，方程组有唯一解。

（2）当 $k=-2$ 时，增广矩阵为

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 + 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$R(\bar{A}) = 3 \neq R(A) = 2$$

此时，方程组无解。

解法也可参见上页PPT

（3）当 $k=1$ 时，增广矩阵为

$$\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k^2 \end{cases}$$

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R(\bar{A})=R(A)=1<n=3$$

此时方程组有无穷多解，一般解为

$x=1-y-z$ （ y,z 为自由未知量）

分别取 $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 　　则 $x=2,0$

故 $\xi_1=(2\quad -1\quad 0)^T,\xi_2=(0\quad 0\quad 1)^T$ 为基础解系

$$x = 1 - y - z$$

P131 第7题 类似

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 则 $x = 2, 0$

故 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ 为基础解系

所以，其通解为：$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad k_1, k_2 \in R$

请注意本题红色字体部分是错的

五、作业

P126 作业4.8 2

P128 作业4.9 2

预习5.1-5.6

观看视频5.1-5.6