華南農業大學
South China Agricultural University

第五讲 矩阵及其运算

2.1 矩阵的概念

2.2 矩阵的线性计算与转置

2.3—2.4 矩阵的乘法

一、矩阵的概念

人类的认知过程总是从简单到复杂。

数学上，从数到向量再到矩阵也符合这样的过程。

一个学期班级同学各门课程的成绩表

就是由几个行向量组成的表格

	语文	数学	英语	体育	历史
张三	90	89	98	99	87
李四	87	70	89	80	90
王五	97	78	88	90	95

一、矩阵的概念

定义2.1.1

由$m\times n$个数$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots n)$排成的$m$行$n$列的数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为<u>m行n列矩阵</u>，简称 <u>$m\times n$</u> 矩阵。

其中诸 a_{ij} 叫做该矩阵的元素，i,j分别称为矩阵A的行标和列标。

$$A=A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}，\text{或}A=(a_{ij})$$

一、矩阵的概念

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$ 行矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$ 列矩阵

元素全是零的矩阵称为**零矩阵**，记为O

问题2.1.1 你能举出生活中的一些矩阵例子吗？

一、矩阵的概念

n行n列矩阵称为**n阶方阵**或**n阶矩阵**，简称**n阶阵**

$$A = A_{n\times n} = A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n\times n}$$

在方阵中，从左上角到右下角的对角线称为主对角线(main diagonal)，主对角线上的元素 称为矩阵 的对角元素。主对角线元素之和称为矩阵 的**迹(trace)**，记为 $tr(A)$ 。

一、矩阵的概念

定义2.1.4 主对角线下方元素都为零的方阵称为**上三角矩阵**(upper triangular matrix)；主对角线上方和下方的元素都为零的方阵称为**对角矩阵**(diagonal matrix)；对角线上元素都为1的阶对角矩阵称为 阶**单位矩阵**(identity matrix)，记为I 。

上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

单位矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定义2.1.2分块矩阵：把矩阵划分成一些小矩阵，称为**矩阵的分块**。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

记 $A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $A_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$

$A_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ $A_{22}=\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

n阶矩阵可以分成 n个列矩阵；n个行向量也可以组成一个大矩阵

一、矩阵的概念

定义2.2.1 两个矩阵行数相同，列数也相同时，称为同型矩阵

如果$A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$是同型矩阵，并且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

那么就称矩阵**A**与矩阵**B**相等，记作

A=B

$$\begin{pmatrix} \sqrt{8} & \dfrac{5}{2} & \sin\dfrac{\pi}{6} \\ (-3)^2 & 0 & 9-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 2.5 & 0.5 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 92 & 90 \\ 85 & 86 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 85 & 86 \\ 92 & 90 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

二、矩阵的线性运算

1. 矩阵的加减法

定义2.2.2 设有两个$m\times n$矩阵$A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$,

那么矩阵**A**与矩阵**B**的和记作**A+B**,规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

对应元素相加

二、矩阵的线性运算与转置

矩阵的加法满足下列运算规律

(i) A+B=B+A (交换律)

(ii) (A+B)+C=A+(B+C) (结合律)

(iii) A+O=O+A=A

设矩阵$A=(a_{ij})$, 记

$$-A=(-a_{ij}),$$

-A称为矩阵A的**负矩阵**，显然有

A+(-A)=(-A)+A=O

对应元素相减

矩阵的减法：A-B=A+(-B)

二、矩阵的线性运算

2. 矩阵的数乘运算

定义2.2.3 数λ与矩阵A的乘积记作λA或$A\lambda$，规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

（1）$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

（2）$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

（3）$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

（4）$1 \cdot A = A$

（5）$(-1) \cdot A = -A$

（6）$0 \cdot A = O$

二、矩阵的线性运算

3. 矩阵的转置

行列对调

定义2.2.4 把矩阵**A**的行换成同序数的列得到一个新矩阵,叫做的**A**转置矩阵，记作 A^T 。

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

运算规律

★ $(A^T)^T=A$

★ $(A+B)^T=A^T+B^T$

★ $(\lambda A)^T=\lambda A^T$

二、矩阵的线性运算

定义2.2.5 若方阵A满足 $A^T = A$, 则A称为**对称矩阵**。

例如

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 7 \\ -4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

方阵A为对称矩阵 $\Longleftrightarrow$ 矩阵A中关于主对角线对称的每一对元素都相等

注意 对称矩阵有很多好的性质。

三、矩阵的乘法

为了学习矩阵的乘法, 先看一个实例:

设两个商店销售三种电视机的数量由矩阵A表示:

$$A=\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}12 & 8 & 10\\ 14 & 9 & 6\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\text{百佳}\\ \text{华润}\end{array}\\ \begin{array}{ccc}\text{长虹} & \text{康佳} & \text{创维}\end{array} & \end{array}$$

三种电视机的零售单价由矩阵B表示

$$B=\begin{pmatrix}2.5\\ 3\\ 3.5\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{长虹}\\ \text{康佳}\\ \text{创维}\end{array}$$

$$C=AB=\begin{pmatrix}12 & 8 & 10\\ 14 & 9 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2.5\\ 3\\ 3.5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}12\times 2.5+8\times 3+10\times 3.5\\ 14\times 2.5+9\times 3+6\times 3.5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}89\\ 83\end{pmatrix}$$

三、矩阵的乘法

定义2.3.1 矩阵的乘法（观看P34动画：矩阵的乘法）

设矩阵A的列数与矩阵B的行数相同：$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times p}$，

规定矩阵A与B的乘积是一个$m\times p$矩阵$C=(c_{ij})_{m\times p}$，其一般元素为

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,p),$$

矩阵乘法的法则：乘积矩阵AB=C的第i行第j列元素等于前矩阵A的第i行的各元素与后矩阵B的第j列中顺次对应的各个元素的乘积之和。

三、矩阵的乘法

矩阵乘法的规则：

(1) 两矩阵相乘时，前矩阵（居左）每一行（如第I行）的各元素与后矩阵（居右）每一列（如第j列）中顺次对应的各元素相乘再相加，从而得到乘积矩阵（第i行第j列）的元素。

(2) 为保证规则（1），前矩阵的列数应与后矩阵的的行数相等，否则两矩阵不能相乘。

(3) 乘积矩阵的行数与前矩阵相同，乘积矩阵的列数与后矩阵相同。

$$C_{m\times p}=A_{m\times n}B_{n\times p}$$

例2.3.1

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 0\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ 求 AB

解

$$C=AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 0\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times 3+2\times 2 & 1\times 1+2\times 4\\ 4\times 3+0\times 2 & 4\times 1+0\times 4\\ 3\times 3+5\times 2 & 3\times 1+5\times 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 9\\ 12 & 4\\ 19 & 23\end{pmatrix}$$

矩阵与矩阵相乘不满足交换律，AB有意义，但BA不一定有意义

例2.3.2

设 $A=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5 & 6 & 4\end{pmatrix}$ 求**AB**和**BA**

解

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times5 & 2\times6 & 2\times4\\3\times5 & 3\times6 & 3\times4\\1\times5 & 1\times6 & 1\times4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 12 & 8\\15 & 18 & 12\\5 & 6 & 4\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}5 & 6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\times2+6\times3+4\times1\end{pmatrix}=32$$

AB和BA都意义，但不同型

例2.3.3

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$$ **求AB和BA**

解 $\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}$

$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(1) AB与BA都有意义，且同型，但AB与BA不相等

(2) 两个非零矩阵相乘可能是零矩阵

三、矩阵的乘法

矩阵的乘法虽不满足交换律，但仍满足下列结合律和分配律

(i) $(AB)C=A(BC)$

(ii) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$

$$\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$$

(iii) $A(B+C)=AB+AC$

$(B+C)A=BA+CA$

问题2.4.2 比较数的运算$(a+b)^2$和矩阵$(A+B)^2$的运算 。

三、矩阵的乘法

例2.4.2 乘法与向量的变换

向量 $\alpha=(1\ \ 2)^T$，逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ ，再投影到OX轴，

用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$$

向量 $\alpha=(1\ \ 2)^T$，投影到 OX 轴，再逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ ，
用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

三、矩阵的乘法

例2.4.3 线性变换的矩阵

三维向量 $(1,1,1)^T$ 投影到 xoy 平面得到 $(1,\quad 1,\quad 0)^T$

用矩阵表示为: $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 矩阵称为这个投影变换矩阵。

问题: 你会求出投影到 xoz 坐标面的投影矩阵吗?

六、作业

作业2.1

作业2.2

P35 作业2.3 第2题

P37 作业2.4 第1(3)题

预习2.5-2.7节，观看2.5-2.7视频