第十二讲　函数与线性变换

3.1 函数

3.2 函数与变换

3.3 线性变换

一、函数

定义3.1 集合 将具有某些属性的对象放在一起就称为**集合**，一般用大写的英文字母表示；集合中的对象称为**元素**。元素有限的集合称为**有限集**，否则称为**无限集**。

问题1 请举生活中集合的一些例子。

一、函数

定义3.2 函数 给定集合(定义域)和实数集合Y（值域），对于X任意一个元素x，按照某种对应法则f，在Y中都有确定的元素y与之对应，则f称为**函数关系**，记为y=f(x).若一个x对应一个y，反之亦然，则称为**1-1对应关系**。

一元函数、二元函数、n元函数；

线性函数与非线性函数。

一、函数

例3.1 一个教学班有90人，教室有93个座位。

（1） 如何知道有几个学生缺席?

（2） 用什么办法知道缺席的学生是谁?

解 （1）把学生和座位各看成一个集合，学生坐到座位上就建立了一个函数关系，只要看空座位数是否等于3。

（2）学生按学号坐。

问题2 举例说明序结构在日常生活中的作用

一、函数

例3.2 建立两种从区间[0，1]到区间[0，k]的1-1对应关系，其中一种是线性函数，另一种是非线性函数。

解 (1) $y = kx$

(2) $y = kx^2$

一、函数

例3.3 正整数集合与奇数集合哪个元素多?

解 建立1-1对应关系: $n \longleftrightarrow 2n-1$

说明两个集合中元素一样“多”。

问题3 你还可以得到类似结论吗?

二、函数与变换

问题4 把定义域中元素从实数推广到数组，能不能把值域也推广一下呢?

定义3.3 集合X和Y中的元素都为n元数组的对应关系称为变换。

例3.4 平面向量的旋转变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ -----**平面旋转公式**

注意 一个二阶矩阵乘以一个二维向量，变换成另一个二维向量

二、函数与变换

例3.2.3 哪个二阶对角矩阵把向量(1，2)^{T}变到(2，1)^T?

解

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 2, b = \frac{1}{2} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

注意 仔细体会矩阵A中a,b的作用。

请看教材99页例4。

三、线性变换

定义3.4 线性空间V上的一个变换A称为**线性变换**，如果对于V中任意的元素X，Y和数域P中任意数k，都有

A（X+Y）=A（X）+A（Y）；　　A(kX)=kA(X).

上述两个式子分别称为可加性与齐次性。

线性变换保持元素的加法运算与数乘运算。

定义3.5 设A是线性变换，若对于线性空间中任意元素X，有 X=AX,则线性变换A称为**恒等变换**，记为**I**。

三、线性变换

定义3.6 设A是线性变换，若存在线性变换B，对于线性空间中任意元素X，有X=B(AX)，则线性变换B称为A的逆变换，记为A^{-1}。

问题4 函数中有没有类似概念?

对应复合函数，能否定义“复合变换”？

问题5 能否把抽象的线性变换与具体的熟悉的东西建立1-1对应关系，用具体东西研究抽象的线性变换呢?

三、线性变换

定理3.1 在线性空间的基确定的条件下，

线性变换与矩 阵1-1对应。

定理3.2 线性变换A在不同基下对应的矩阵相似。

可以用矩阵表示或“代替”线性变换，既在一些场合可以用矩阵代替线性变换。

三、线性变换

线性变换的作用

1 线性变换可以表示n个n元线性函数

设n个n元线性函数

$Y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, (i = 1, 2, \dots, n),$

可以表示为：$Y = AX$

三、线性变换

2 按矩阵分类的线性变换

n阶矩阵A通过线性变换把n维向量X变换为n维向量Y：$Y=AX$。按A不同进行分类。

（1）设A为可逆矩阵，线性变换$Y=AX$称为**可逆线性变换**。

问题6 可逆线性变换的逆变换对应的矩阵是A^{-1}吗？

（2）若n阶矩阵A满足 $AA^T=I$，则A称为正交矩阵。

（3）线性变换$Y=AX$称为**正交变换**，其中A是正交矩阵。

●正交矩阵的性质

如果方阵P满足 $P'P=I$ ， 则 称P为正交矩阵

1、正交矩阵**P**是可逆的，且 $P^{-1}=P^{T}$ **P105 选择17**

2、如果矩阵**P**是正交矩阵，则 $|P|=1$ 或 $|P|=-1$

3、**P**是正交矩阵 $\Longleftrightarrow$

矩阵**P**的行向量组及列向量组都是标准正交组

正交矩阵 (Orthogonal Matrix)

如果方阵A满足 $A'A = I$ ， 则 称A为正交矩阵

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是正交矩阵A的列向量，则

$$A^T A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

等价于 $\alpha_i^T \alpha_j = \begin{cases} 1, & \text{当} i = j \\ 0, & \text{当} i \neq j \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$

三、线性变换

定理3.3 设Y=AX为正交变换，则

正交变换保持向量的长度；

正交变换保持两个向量的内积；

正交变换保持两个向量的夹角、距离。

证明 （1）设Y=AX，其中A为正交变换，

$||Y||^2=(Y,Y)=(AX,AX)=X^TA^T AX=X^TX=(X,X)=||X||^2$

所以 $||Y|=|X||$。

（2）和（3）自己证明。

问题7 一个二维或三维图形，经过正交变换后的图形的形状变不变？

三、线性变换

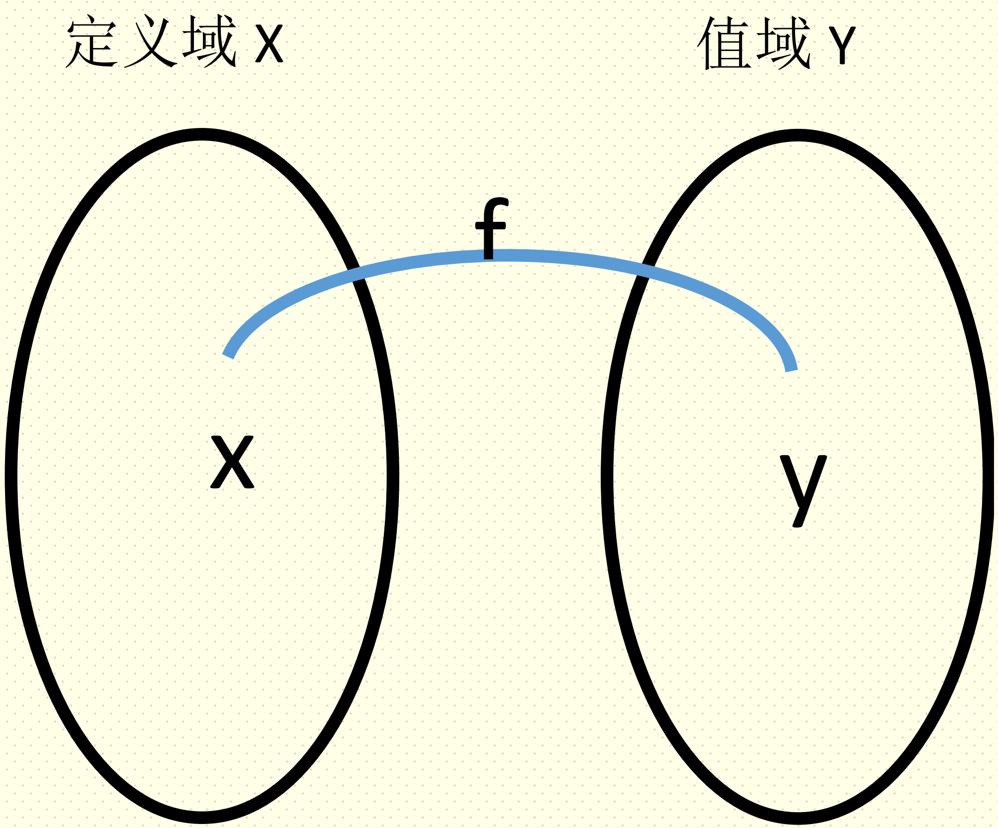
P102 线性变换研究非线性问题（第五章二次型）

三、线性变换

辩证唯物主义方法论——**延拓与类比**

（1）函数：把定义域集合中的元素逐步延拓

（2）变换：值域中元素类比定义域中元素的方法延拓



六、作业

P98 3;

P100 3;

P103 练习三.

预习 4.1-4.5

观看视频 4.1-4.5