

华南农业大学期末考试试卷 (A 卷)

2017-2018 学年第 2 学期

考试科目: 线性代数

考试类型: (闭卷) 考试

考试时间: 120 分钟

学号_____姓名_____年级专业_____

题号	一	二	三	四	总分
得分					
评阅人					

试卷说明:

A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^{-1} 表示矩阵 A 的逆矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, I 表示单位矩阵, O 表示零矩阵.

请直接在本试卷上作答。答案写在草稿纸上无效。

得分	
----	--

一. 选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分) 在每小题的选项中, 只有一项符合要求, 把所选项前的字母填在题中括号内

1. 下列命题成立的是 ()

- (A) 若 $A \neq O$, 则 $|A| \neq 0$ (B) 若 $|A| \neq 0$, 则 $A \neq O$;
(C) 若 $AB = AC$, 则 $B = C$; (D) 若 $AB = O$, 则 $A = O$ 或 $B = O$

2. 已知 n 阶行列式 $|A| = 0$, 则下列表述正确的是 ()

- (A) A 的秩为 n ; (B) A 可逆;
(C) 方程 $AX = 0$ 仅有零解; (D) A 的行向量组线性相关

3. 已知 4×3 矩阵 A 的列向量组线性无关, 则 A^T 的秩等于 ()

- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4

4. 若矩阵 A 与对角矩阵 $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $A^3 =$ ()

- (A) I (B) D
(C) $-I$ (D) A

5. 设 4 阶矩阵 A 的秩为 3, η_1, η_2 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解, c 为任意常数, 则该方程组的通解为 ()

(A) $\eta_1 + c \frac{\eta_1 - \eta_2}{2}$

(B) $\frac{\eta_1 - \eta_2}{2} + c\eta_1$

(C) $\eta_1 + c \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}$

(D) $\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} + c\eta_1$

得分	
----	--

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分)

6. $\begin{vmatrix} 2017 & 2018 \\ 2018 & 2019 \end{vmatrix} =$ _____.

7. $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 均为 4 维列向量, $A = (\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $B = (\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $|A|=1$, $|B|=4$, 则 $|A+B| =$ _____.

8. 已知方阵 A , 且满足方程 $A^2 - A - 2I = 0$, 则 A 的逆矩阵 $A^{-1} =$ _____.

9. $\lambda = 2$ 为可逆矩阵 A 的一个特征值, 则矩阵 $\left(\frac{1}{2}A^3\right)^{-1}$ 有一个特征值_____.

10. 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + ax_2x_3$ 是正定二次型, 则 a 的取值范围是_____.

得分	
----	--

三、计算题 (本大题共 3 小题, 每小题 8 分, 满分 24 分)

11. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $3A - 2B$ 及 AB^T .

12. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}.$

13. 已知 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$ 求 $A^{-1}.$

四、解答题 (本大题共 5 小题, 满分 41 分)

14. (满分 9 分) 求下列向量组的秩及一个极大无关组, 并将其余向量用这个极大无关组线性表示

$$\alpha_1 = (3, 1, 1)^T, \quad \alpha_2 = (1, -1, 3)^T, \quad \alpha_3 = (2, -1, 5)^T, \quad \alpha_4 = (0, 2, -4)^T.$$

15. (满分 10 分) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = a \end{cases}$$

试确定 a 的值, 使方程组有解, 并求出其全部的解.

16. (满分 6 分) 设 $\alpha = (6, -2, 2, -10)^T$, $\beta = (2, -1, -2, 4)^T$, 求

(1) α 与 β 的距离 $\|\alpha - \beta\|$;

(2) α 与 β 的内积 $[\alpha, \beta]$;

(3) α 与 β 的夹角 θ .

17. (满分 9 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$,

(1) 求 f 的矩阵 A ;

(2) 求矩阵 A 的特征值;

(3) 写出 f 的标准型;

(4) 写出 f 的正惯性指标.

-
18. (满分 7 分) 设 η 为 $AX = b$ ($b \neq 0$) 的一个解, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 为对应齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系, 证明 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}, \eta$ 线性无关.