華南農業大學
South China Agricultural University

线性方程组及其解空间

4.1 齐次线性方程组

4.2 齐次线性方程组的基础解系

4.3 齐次线性方程组的解法

4.4 线性方程组的解空间

4.5 特征向量的解法

一、齐次线性方程组的矩阵形式

含有n个未知量m个方程的齐次线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

可以写成矩阵方程的形式, 也就是$\boldsymbol{AX}=0$ ，其中$\boldsymbol{A}$是方程组的系数矩阵，$\boldsymbol{X}$ 是未知数所构成的列向量。

如果将方程组$\boldsymbol{AX}=0$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$做一系列的行初等变换,化成行阶梯矩阵$\boldsymbol{D}$，则方程组$\boldsymbol{DX}=0$与方程组$\boldsymbol{AX}=0$是同解方程组

思考

为什么方程组$\boldsymbol{DX}=0$与方程组$\boldsymbol{AX}=0$是同解方程组呢?

例如方程组 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$

将其矩阵$\boldsymbol{A}$作行初等变换，化为行阶梯矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{3}r_2]{r_3+r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

矩阵$\boldsymbol{D}$唯一地对应着一个齐次线性方程组:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

而这个方程组与原方程组是同解方程组。

思考 要得到齐次线性方程组的同解方程组，可以对其系数矩阵做列初等变换吗?

二、齐次线性方程组解的情形

注意：

n是未知量的个数

定理4.1.1 对于齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{4.1.1}$$

(1)

（1） 当系数矩阵的秩$r(\boldsymbol{A})=n$ 时，方程组只有唯一的零解；

（2） 当系数矩阵的秩$r(\boldsymbol{A})<n$ 时，方程组有无穷多解。

(证明略)

（**1**） 当**m**≥n，r=n时，不妨设A中的前n行构成的n阶子式D≠0，

此时，方程组（1）与下列方程组同解

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

系数行列式**D≠0**，由克拉默法则知，该方程组只有唯一零解。

（2） 当m≥n，$r<n$时，不妨设A中的前r行r列构成的r阶子式D≠0，此时，方程组（1）与下列方程组同解

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=-a_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r=-a_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots a_{2n}x_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r=-a_{r,r+1}x_{r=1}-\cdots a_{rn}x_n
\end{cases}
\qquad (2)
$$

系数行列式D≠0，由克拉默法则知，该方程组只有唯一解。但 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 可取任意常数，因此，方程组（1）有无穷多解。

（3） 当$m<n$时， 由于R（A）$=r\le m<n$，情况和（2）一样，方程组有无穷多解。

注意 该定理的逆命题也成立，即： P109 作业1，2

（1）齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=0$只有零解的充分必要条件是$r(\boldsymbol{A})=n$ 。

（2）齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=0$有非零解的充分必要条件是$r(\boldsymbol{A})<n$ 。

例1 设有齐次线性方程组问当λ取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=0 \\ (\lambda-1)x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+(\lambda-1)x_3=0 \end{cases}$$

P108 例4.1.1

有唯一的零解；有无穷多解?

解 （1）令系数矩阵的行列式$|\boldsymbol{A}|\neq\boldsymbol{0}$ ，解得：$\lambda\neq-1,\ 2.$

所以，当$\lambda\neq-1,\ 2$时， $r(\boldsymbol{A})=3=n$，方程组有唯一的零解，

例1 设有齐次线性方程组问当λ取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + (\lambda - 1)x_2 + x_3 = 0 \\ (\lambda - 1)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (\lambda - 1)x_3 = 0 \end{cases}$$

有唯一的零解；有无穷多解?

解 （2）当$\lambda = -1$ 时， $r(\boldsymbol{A})=2<n$，方程组有无穷多解，

（3）当 $\lambda = 2$ 时， $r(\boldsymbol{A})=1<n$，方程组有无穷多解.

总结 在考察含有未知参数的齐次线性方程组的解的情形时，如果方程个数与未知量个数相等，那么首先考虑用克拉默法则确定出方程组什么时候有唯一零解，然后再分别讨论。

三、齐次线性方程组的基础解系

齐次线性方程组一定有解，因为零解是它的一个解。求解齐次线性方程组的重点在于讨论：它是否有非零解？在有非零解的情况下，如何求出它的所有非零解?

齐次线性方程组解的性质

P112 作业1

性质4.2.1 若 α 是齐次线性方程组$AX=0$的解，则 $k\alpha$ 也是该方程组的解。

性质4.2.2 若α_1，α_2是齐次线性方程组$AX=0$的解，则 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 也是该方程组的解。

定义4.2.1 设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 是齐次线性方程组$AX=0$的 $\boldsymbol{r}$ 个解向量，如果

P112 作业2

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

（2）齐次线性方程组$AX=0$的任意一个解向量都可以由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性 表示，

则称$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$是齐次线性方程组的**基础解系**.

由定义知，**基础解系是齐次线性方程组解向量集合的一个极大无关组，因此基础解系不是唯一的.**

定理4.2.1 若含有n个未知量的齐次线性方程组$AX=0$的系数矩阵A的秩 $r(A)=r<n$，则该方程组的基础解系必存在，其基础解系中所含向量个数为 $n-r$。

P112 作业3

注意 （1）齐次线性方程组$AX=0$ 只有零解的充分必要条件是$r(A)=n$ 。

（2）齐次线性方程组$AX=0$有非零解的充分必要条件是$r(A)<n$ 。

（3）若$r(A)<n$ ，则自由未知量的取值是自由的，不是唯一的；自由未知量的选取也不唯一。

（4）基础解系不唯一，但$AX=0$的任何两个基础解系是等价的，故它们所含向量的个数唯一确定。

（**2**） 当**m**≥n，r<n时，不妨设A中的前r行r列构成的r阶子式 D≠0，此时，方程组（1）与下列方程组同解

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=-a_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r=-a_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r=-a_{r,r+1}x_{r=1}-\cdots a_{rn}x_n \end{cases} \qquad (2)$$

系数行列式**D≠0**，由克拉默法则知，该方程组只有唯一解。但 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 可取任意常数，因此，方程组（**1**）有无穷多解。

设齐次线性方程组（1）的系数矩阵的秩R（A）=r<n。不妨设A中左上角r阶子式D≠0。将 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 看成常数，可得（1）的解。

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + \cdots + c_{1,n-r}x_n \\ x_2 = c_{21}x_{r+1} + c_{22}x_{r+2} + \cdots + c_{2,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = c_{r1}x_{r+1} + c_{r2}x_{r+2} + \cdots + c_{r,n-r}x_n \\ x_{r+1} = x_{r+1} \\ x_{r+2} = x_{r+2} \\ \cdots\cdots \\ x_n = x_n \end{cases} \quad (3)$$

$x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$

可取任意数

一般解

General Solution

如果 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 分别取 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$

则可以得到方程组（**1**）的**n-r**个线性无关的解向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = (c_{11}, c_{21}, \cdots, c_{r1}, 1, 0, \cdots, 0)^T \\ \alpha_2 = (c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{r2}, 0, 1, \cdots, 0)^T \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n-r} = (c_{1,n-r}, c_{2,n-r}, \cdots, c_{r,n-r}, 0, 0, \cdots, 1)^T \end{cases}$$

$$\alpha = x_{r+1}\alpha_1 + x_{r+2}\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_{n-r}$$

四、齐次线性方程组的解法

定义4.3.1 若α_1，α_2，…，α_{n-r}是齐次线性方程组$AX=0$的一个基础解系，则$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+,\ \ldots,\ +k_{n-r}\alpha_{n-r}$称为齐次线性方程组的**通解**，其中$k_1$，$k_2$，…，$k_r$是任意常数。

求解齐次线性方程组$AX=0$通解的**步骤 P113**：

（1）用初等**行**变换将系数矩阵A化成行阶梯矩阵B；

（2）根据矩阵B的非零行的行数写出A的秩r，方程组 含有n-r 个自由未知量 x_{r+1}，x_{r+2}，…，x_n；

（3）求得方程组$AX=0$的一个基础解系$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$;

（4）**写出方程组的通解**（即基础解系的线性组合）：

$$X=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}(k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in R).$$

齐次线性方程组的求解方法（初等行变换）

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & -10 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解　对系数矩阵**A**作初等行变换，变为行最简形矩阵

$$\mathbf{A} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 4r_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \div 2]{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 + 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = x_3 - 6x_4 - 5x_5 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 - 2x_5 \end{cases} \quad (*)$$

顺次取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

代入方程(*) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3为方程组的基础解系

$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$

为方程组的通解,

其中k_1, k_2, k_3为任意常数

练一练

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

解 对系数矩阵实施初等行变换

$$\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & -5 \\ 0 & -4 & 20 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & -2 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 3x_4 \\ x_2 = 5x_3 - \dfrac{5}{2}x_4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\xi_1 = (-7,5,1,0)'$　$\xi_2 = (6,-5,0,2)'$　ξ_1,ξ_2为方程组的基础解系

$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$　为方程组的通解, 其中k_1,k_2为任意常数

例2 求齐次线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ 的基础解系与通解.

P113 例4.3.1

解 对系数矩阵A作初等行变换，化为行最简矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}r_2]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{5}{3}x_3 \\ x_2 = -\dfrac{1}{3}x_3 + x_4 \end{cases}$ 令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 分别取 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{3}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{3}x_3 + x_4 \end{cases}$$ 令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 分别取 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

问题：x_3和x_4还可以怎样取值较简单

则对应有 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，即得基础解系：

$$\xi_1 = (-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0)^T, \xi_2 = (0, 1, 0, 1)^T$$

$(k_1, k_2 \in R)$

故得通解：$X = k\xi_1 + k_2\xi_2$，$(k_1, k_2 \in R)$

五、线性方程组的解空间

将方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ 写成矩阵方程： $\boldsymbol{AX}=0$。

称$\boldsymbol{A}$为方程组的系数矩阵，当系数矩阵的秩$r(\boldsymbol{A})<n$ 时，齐次线性方程组有无穷多解。齐次线性方程组的一个解称作一个解向量；齐次线性方程组的所有解向量构成的集合称作解集合，记作S，解集合S 对于向量的加法和数乘运算封闭。

定义4.4.1 解集合对于向量的加法和数乘运算封闭，满足构成线性空间的八条性质，此空间称为齐次线性方程组的**解空间**。

定义4.4.2 设α_1，α_2，…，α_p属于R^n,则α_1，α_2，…，α_p的所有线性组合构成的R^n的子空间称为由α_1，α_2，…，α_p张成的**子空间**，记为$L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$。

例3 求解下列齐次线性方程组，并说明其解空间的几何表示。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

解 对系数矩阵A作行初等变换，化成行阶梯矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{3}r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得到原方程组的同解方程组: $\begin{cases}x_1 = x_3\\x_2 = x_3\end{cases}$

求解得到齐次线性方程组的通解: $X = k(1\ \ 1\ \ 1)^T$

容易知道，通解的图像是$\boldsymbol{R}^3$中过原点的直线簇，原方程组的解空间是$\boldsymbol{R}^3$的子空间，此空间的基础解系仅包含了一个向量 $(1\ \ 1\ \ 1)^T$ 。

例4 说明下列齐次线性方程组解空间的几何意义：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

解 求解可得该方程组的一个基础解系：$(1\ \ 1\ \ 0)^T,(1\ \ 0\ \ 1)^T$

它的解空间是过原点的平面：$x_1 = x_2 + x_3$，此解空间是$\boldsymbol{R}^3$的子空间，并由向量 $(1\ \ 1\ \ 0)^T,(1\ \ 0\ \ 1)^T$ 张成。

把齐次线性方程组的解空间又称为矩阵A的**零空间**，记为$\boldsymbol{Null(A)}$，零空间的维数记为$\dim\boldsymbol{Null(A)}$ 。

定理4.4.1 $r(A)+\dim\boldsymbol{Null(A)}=n$

六、特征向量的解法

求矩阵的特征值与特征向量的**步骤 P117**：

（1）求矩阵A的特征方程 $|\lambda I-A|=0$ ；

（2）求特征方程的全部根λ_1，λ_2，…，λ_n，即为A的全部特征值；

（3）对每个特征值 $\lambda_i\,(i=1,\ldots n)$，求齐次线性方程组$(\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，即为对应于特征值$\lambda_i\,(i=1,\ldots n)$ 的特征向量。

例5 设矩阵阵$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$，求$A$的特征值与特征向量.

P117 例4.5.1

解 A的特征多项式为：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&-1&-1\\0&\lambda-2&0\\4&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

A的所有特征值为：λ_1=-1，λ_2=λ_3=2

对于特征值 λ_1=-1，解方程组$(-I-A)X=0$，

得线性无关的特征向量 $p_1=\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix}^T$

所以对于特征值λ_1=-1的全部特征向量为$k_1p_1(k_1\neq 0)$.

例5　设矩阵阵$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量.

解　对于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$，解方程组$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

得线性无关的特征向量 $p_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix}^T, p_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\end{pmatrix}^T$

所以对于特征值$\lambda_2=\lambda_3=2$的全部特征向量为：

$k_2p_2+k_3p_3$ 其中k_2, k_3**不全为零**.

例6 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

P118 例4.5.2

解 A的特征多项式为：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

所以A的所有特征值为：$\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$

对于特征值 $\lambda_1=2$，解方程组$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

得线性无关的特征向量 $p_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$

所以对于特征值$\lambda_1=2$的全部特征向量为$k_1p_1(k_1\neq 0)$.

例6 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解 对于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$，解方程组$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

得线性无关的特征向量 $p_2=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\end{pmatrix}^T$,

所以对于特征值$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量为$k_2p_2(k_2\neq 0)$。

定义4.5.1 对矩阵A，属于特征值λ_i的所有特征向量组成一个子空间称为属于特征值λ_i的**特征子空间**。

七、作业

P114 作业4.3 2（2）

P117 作业4.4 2

P119 作业4.5 2

预习4.6-4.9

观看视频4.6-4.9