第六讲 初等变换与初等矩阵，三类重要矩阵

2.5 矩阵的初等变换

2.6 初等矩阵

2.7 矩阵的化简与三种重要矩阵

一、矩阵的初等变换

1. 线性方程组的**同解变换**

对于线性方程组，可以做如下的三种变换：

（1）互换两个方程的位置；

（2）把某一个方程两边同乘以一个非零常数c；

（3）将某一个方程加上另一个方程的k倍。

这三种变换都称为线性方程组的同解变换。

问题 上述的变换是可逆的；如何定义可逆变换？

一个方程组经过某一同解变换后变为另一个方程组，新方程组与原方程组同解。

问题 此性质在矩阵中如何体现呢？

一、矩阵的初等变换

2. 矩阵的**初等变换（观看P38动画：矩阵的初等行变换）**

初等行变换 row

- 交换i, j两行　$r_i \leftrightarrow r_j$
- 数乘第 i 行　$k \times r_i$
- 数乘第 i行加到第 j 行　$r_j + kr_i$

初等列变换 column

- 交换i, j两列　$c_i \leftrightarrow c_j$
- 数乘第 i 列　$k \times c_i$
- 数乘第 i 列加到第 j 列　$c_j + kc_i$

一、矩阵的初等变换

2. 矩阵的初等变换

- 例2.5.1-2 用初等行变换求解方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \vdots & 5 \\ -1 & -2 & 5 & \vdots & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}r_3]{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & \vdots & 7 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \times (-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + 3r_3]{r_1 - 5r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -3, \;\; x_2 = 3, \;\; x_3 = 2$$

二、初等矩阵 Elementary Matrix

定义2.6.1

由单位阵I经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**

初等矩阵有三种类型:

1、对换型初等矩阵

(1) 对调 I 中的第 i, j 行,得到的矩阵记为 R_{ij}

（2）对调 I 中的第 i, j 列,得到的矩阵记为 C_{ij}

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_{12}$$

2、数乘型初等矩阵

(1) 用不为零的数 λ 乘以I中的第i行, 得到的矩阵记为 $R_i(\lambda)$

(2) 用不为零的数λ乘以I中的第 i 列,得到的矩阵记为 $C_i(\lambda)$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \times 5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix} = R_3(5)$$

3、消元型初等矩阵

(1) 以数 λ 乘以I中的第i行加到第j行去，得到的矩阵记为 $R_{ij}(\lambda)$

(2) 以数λ乘以I中的第i列加到第j列去，得到的矩阵记为 $C_{ij}(\lambda)$

$$I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\boxed{-2}&1\end{pmatrix}=R_{23}(-2)$$

二、初等矩阵

问题 初等变换对应初等矩阵，初等变换的逆变换对应什么？

猜一猜 如果一对初等变换为互逆变换，那么由它们分别对应的初等矩阵有什么关系？（问题2.6.1）

定理2.6.1 对矩阵实施一次初等行变换，等于用相应的初等矩阵左乘该矩阵，对矩阵实施一次初等列变换，等于用相应的初等矩阵右乘该矩阵。

例2.6.2

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

(1) $R_{12}A$

$$R_{12}A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

例2.6.2 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

(2)对矩阵 A 作一次初等变换得到 $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\7&8&9\end{pmatrix}$,

求这个初等变换对应的初等矩阵;

问题 1 （2）能否通过其它初等矩阵得到？**2** 初等矩阵把初等变换中的“箭头”转换成“等号”，有什么意义？

例2.6.2

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

(3)对矩阵 A 作一次初等列变换得到 $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 7 & 8 & -5\end{pmatrix}$,

求这个初等变换对应的初等矩阵;

三、矩阵的化简与三种重要矩阵

问题1 为什么要化简矩阵？

2 化简到什么矩阵最简单？

用简单矩阵研究复杂矩阵的性质！

研究矩阵的三类数字特征！

三种重要矩阵：

（1） 行阶梯形矩阵；

（2） 最简行阶梯型矩阵；

（3） 等价标准形。

三、矩阵的化简与三种重要矩阵

定义2.7.1 行阶梯型矩阵（**Row Echelon Matrix**）

（1）每一行的第一个非零元前面的零元素个数随着行数的增加严格递增；

（2）如果某一行的元素全为零，则以下所有行的元素全为零.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

三、矩阵的化简与三种重要矩阵

定义2.7.2 行最简型矩阵

（1）行阶梯型矩阵；

（2）非零行的第一个非零元素为1，且这些非零元1所在列的其他元素都为零的行阶梯型矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例2.7.1 用初等变换方法，将矩阵A化为行最简型矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-4r_1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -10 & 10 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_2]{r_4+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \times (-1)]{\substack{r_1 + r_2 \\ r_3 - 3r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 \times \frac{1}{3}]{r_3 \times \frac{1}{8}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_3]{\substack{r_1 + 2r_3 \\ r_2 - 3r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

三、矩阵的化简与三种重要矩阵

定义2.7.3 对矩阵A施行有限次初等变换得到矩阵B，则称矩阵A与矩阵B**等价**，记作$A \cong B$。

定义2.7.4 矩阵$A_{m\times n}$的等价标准形为：

$$I_{m\times n} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

定理2.7.1 每一个矩阵都有唯一的等价标准形。

例2.7.2 用初等变换方法求矩阵的等价标准形

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4+c_2]{c_4+c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_5+3c_3]{c_5-4c_1,\ c_5-3c_2}$$

三、矩阵的化简与三种重要矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

注意 矩阵的化简对于判断向量的线性关系，解线性方程组以及研究矩阵的数字特征等问题起着极为重要的作用。

小结 矩阵的化简和三类重要矩阵：行阶梯形矩阵、行最简形矩阵和矩阵的等价标准型。

四、作业

P42 作业2.6 第**3题**

P44 作业2.7 第**1题**