華南農業大學
South China Agricultural University

第一讲 向量及其线性关系

1.1 向量及其线性运算

1.2 向量的内积

1.3 向量的线性关系

1.4 向量的线性关系的判定（1）

1.5 向量的线性关系的判定（2）

一、向量及其线性运算

定义1.1.1

n个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 排成的有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

称为一个 n 维**行向量**，记作 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ ，其中 a_i

称为向量 α 的第i个分量（或坐标），分量的个数叫作向量的维数.

如果将有序数组写成一列的形式，则称向量$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

为**列向量**。

思考 建立一个描述人的特征的五维向量。

定义1.1.2

向量组：由维数相同的一些向量构成的集合。

（1）**向量相等**：如果向量 α 与 β 是同维向量，并且对应的分量相等，则称向量 α 与 β 相等。

（2）**零向量**：分量都是0的向量称为零向量，记作**O**。

（3）**负向量**：称向量 $(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$ 为向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的负向量，记作 $-\alpha$ 。

定义1.1.3 向量的加、减、数乘运算统称为向量的**线性运算**。

1.向量的加减法

设$\alpha=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$，$\beta=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)$，则称向量

$\left(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n\right)$ 为向量 α 与向量 β 的**和向量**，

记作 $\alpha+\beta$ ，称向量 $\left(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n\right)$ 为向量

α 与向量 β 的**差向量**，记作 $\alpha-\beta$ 。

2.数量乘积

设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$k\in R$，则称向量 $(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$

为数 k 与向量 α 的**数乘向量**，记作 $k\alpha$

向量线性运算的运算律

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ **加法交换律**

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ **加法结合律**

(3) $\alpha+O=\alpha$

(4) $\alpha+(-\alpha)=O$

(5) $1\cdot\alpha=\alpha$

(6) $k(l\alpha)=(kl\alpha)=l(k)\alpha$ **数乘结合律**

(7) $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$ **数乘分配律**

(8) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$

定义1.1.4 设V为n维向量组成的集合.如果集合V非空，且集合V对于加法及数乘两种运算封闭（即若 $\alpha \in V, \beta \in V$ 有 $\alpha + \beta \in V$；若 $\alpha \in V, k \in R,$ 有 $k\beta \in V$），并且满足上述八条运算规律，则V称为**向量空间.**

例如： 全体n维向量的集合 $R^n = \{\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_i \in R \}$

它对于加法和数乘构成一个向量空间。

例1.1.2 设向量$\alpha=\left(2,0,-1,3\right)^T$，$\beta=\left(1,7,4,-2\right)^T$， $\gamma=\left(0,1,0,1\right)^T$

求$2\alpha+\beta-3\gamma$.

解 $$2\alpha+\beta-3\gamma=2\left(2,0,-1,3\right)^T+\left(1,7,4,-2\right)^T-3\left(0,1,0,1\right)^T$$

$$=\left(5,4,2,1\right)^T$$

二、向量的内积

定义1.2.1 在实向量空间R^n中，任给$\alpha=(a_1,a_2,\cdots a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots b_n)$，令

$$\boxed{(\alpha,\ \beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i}$$

称为α与β的 **内积.**

例1.2.1 已知$\alpha=(1,1,1)$，$\beta=(1,-2,1)$，求$(\alpha,\ \beta)$

解 $(\alpha,\ \beta)=1\times1+1\times(-2)+1\times1=0$

向量内积的性质

设α，β，γ为任意n维向量，k为实数，

(1) $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ **(对称性)**

(2) $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta) = (\alpha, k\beta)$ **(数乘线性性)**

(3) $(\alpha+\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$ **(加法线性性)**

(4) $(\alpha, \alpha) \geq 0$，等号当且仅当$\alpha=0$时成立 **(非负性)**

定义1.2.2 设n维向量$\alpha=(a_1, a_2,\cdots,a_n)^T$，则称

$$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

为向量α的**模（或长度）.**

向量模的性质

（1） 非负性 $\|\alpha\|\geq 0$

（2） 齐次性 $\|k\alpha\|=|k|\cdot\|\alpha\|$

（3） 柯西-施瓦兹不等式 $|(\alpha, \beta)|\leq\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$

（4） 三角不等式 $\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$

如果 $\|\alpha\|=1$，则称 α 为**单位向量**。

$\alpha\neq 0, \dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 是单位向量，常记作 α^0

定义1.2.3 设向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$

为非零向量，规定 α与β 的**距离**为

$$\|\alpha-\beta\|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}$$

定义1.2.4 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$

为非零向量，则

$$\theta=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|} \qquad \theta\in[0,\ \pi]$$

称为向量α与β的 **夹角.**

余弦定理 $\|\alpha-\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2-2\cdot\|\alpha\|\cdot\|\beta\|\cos\theta$

例1.2.2 设 $\alpha=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\end{pmatrix}^T$，$\beta=\begin{pmatrix}5 & -4 & 5\end{pmatrix}^T$

求 $(\alpha,\beta),\|\alpha\|,\|\beta\|$, α与β的夹角和距离.

解 $(\alpha,\beta)=2\times5+1\times(-4)+(-3)\times5=-9$

$$\|\alpha\|=\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$$

$$\|\beta\|=\sqrt{5^2+(-4)^2+5^2}=\sqrt{66}$$

$$\theta=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}=\arccos\frac{-9}{\sqrt{14}\sqrt{66}}$$

$$\|\alpha-\beta\|=\sqrt{(2-5)^2+(1+4)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{98}$$

余弦定理 $\|\alpha-\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2-2\cdot\|\alpha\|\cdot\|\beta\|\cos\theta$

三、向量的线性关系

定义1.3.1

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 为n维向量，如果存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 满足

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots k_m\alpha_m$$

称β可表示为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$的线性组合.

或β 可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 线性表示

线性表示(Linear Representation).

例1.3.3 设 $\alpha_1=(95\quad 96)'$ $\alpha_2=(97\quad 98)'$

$\beta=(99\quad 100)'$ 讨论β能否由α_1，α_2线性表示

解 考虑方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=\beta$， 其分量形式为

$$\begin{cases}95x_1+97x_2=99\\96x_1+98x_2=100\end{cases}$$

解得 -1，2。

可见向量β能由α_1，α_2线性表示

例 设 $\beta=(1 \quad 4 \quad 7)'$ $\quad \alpha_1=(1 \quad 2 \quad 3)'$

$$\alpha_2=(1 \quad 4 \quad 3)' \quad \alpha_3=(1 \quad 1 \quad 3)'$$

讨论向量β能否由α_1，α_2，α_3线性表示

解 考虑方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 其分量形式为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1+4x_2+x_3=4 \\ 3x_1+3x_2+3x_3=7 \end{cases}$$

第一，三两方程显然相互矛盾，故无解

可见，向量β不能由α_1，α_2，α_3线性表示

定义1.3.2

给定向量组S：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$， 如果存在*不全为零*的实数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$， 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \quad \textbf{(1)}$$

则称向量组S**线性相关**；否则称S**线性无关**。

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow$（1）式仅当 $k_1 = \cdots = k_m = 0$ 成立

P9 思考问题1.3.2

例1.3.4 $\alpha_1=(1,2,-1)'$， $\alpha_2=(2,-1,3)'$， $\alpha_3=(1,-3,4)'$

例 判断向量组

$$\alpha_1=(1,0,2,-1)' \quad \alpha_2=(0,2,3,1)' \quad \alpha_3=(2,2,7,-1)'$$

的线性相关性。

解： 通过观察 $\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$

$$2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

类似例1.3.5 讨论向量组 $\alpha_1=(1,1,2,2,1)$，$\alpha_2=(0,2,1,5,-1)$，$\alpha_3=(2,0,3,-1,3)$，$\alpha_4=(1,1,0,4,-1)$ 的线性相关性

解 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$

则
$$\begin{cases} k_1+2k_3+k_4=0 \\ k_1+2k_2+k_4=0 \\ 2k_1+k_2+3k_3=0 \\ 2k_1+5k_2-k_3+4k_4=0 \\ k_1-k_2+3k_3-k_4=0 \end{cases}$$

可见，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$$

有非零解

利用矩阵的初等变换，可求得

$k_1=-2,\ k_2=k_3=1,\ k_4=0$

注：有无穷多组解

所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关。

练习 判断向量组的线性相关性

$$\alpha_1=(2,1,-1,-1),\alpha_2=(0,3,-2,0),\alpha_3=(2,4,-3,-1)$$

解 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

则有
$$\begin{cases}2k_1+2k_3=0\\k_1+3k_2+4k_3=0\\-k_1-2k_2-3k_3=0\\-k_1-k_3=0\end{cases}$$

因为 $k_1=1,k_2=1,k_3=-1$ 是方程组的一组非零解

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

例1.3.2 证明下列向量组线性无关.

$$\varepsilon_1=(1,0,0,\cdots,0),\ \varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\ \varepsilon_n=(0,0,0,\cdots,\ 1)$$

证明 设 $k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=o$

则 $(k_1,\ k_2,\cdots,\ k_n)=(0,0,\cdots,0)$

所以 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$

所以向量组 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots,\ \varepsilon_n$ 线性无关。

称向量组 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots,\ \varepsilon_{\mathrm{n}}$ 为n维向量空间的**单位坐标向量组**。

任何一个n维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 都可由向量组 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots,\ \varepsilon_{\mathrm{n}}$ 线性表示，$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_{\mathrm{n}}$

例1.5.1 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，证明：向量组 $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$ 线性无关。

证明 设 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$

则 $(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

所以有 $\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$

解得 $k_1=k_2=k_3=0$

所以向量组 $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$ 线性无关。

四、向量的线性关系的判定（1）

定理1.4.1　向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **线性相关**的充分必要条件是该向量组中**至少有一个**向量可由其余的向量组线性表示。

P11 问题1.4.1

P10 推论1.4.1

证明　因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关

所以存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$　不妨设 $k_1\neq 0$

于是有 $\alpha_1=-\dfrac{1}{k_1}(k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots+k_n\alpha_n)$

反过来，若有 α_1 可由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 线性表示

$\alpha_1=l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+\cdots+l_m\alpha_m$

则有 $l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+\cdots+l_m\alpha_m-\alpha_1=0$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关

定理1.4.2 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性相关，则 β 必能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示，且表示式是唯一的

证明 设存在不全为零 $k_1, k_2, \cdots, k_m, k$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m + k\beta = 0$$

则 $k \neq 0$，（若 $k = 0$，可推出 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 相关）

$$\beta = \left(-\frac{k_1}{k}\right)\alpha_1 + \cdots + \left(-\frac{k_m}{k}\right)\alpha_m$$

$$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_m\alpha_m = \lambda_1'\alpha_1 + \cdots + \lambda_m'\alpha_m$$

$$(\lambda_1 - \lambda_1')\alpha_1 + \cdots + (\lambda_m - \lambda_m')\alpha_m = 0$$ **由无关性即得**

五、向量的线性关系的判定（2）

●向量组的线性相关性的几个性质定理

1、由单个非零向量构成的向量组线性无关；

2、任何含有零向量的向量组必线性相关；

3、两个非零向量线性相关（无关）的充要条件是它们的分量对应成（不成）比例。

4、含有相同向量的向量组总是线性相关的。

定理1.5.1

线性相关的向量组添加若干向量后，仍是线性相关的。

部分相关，则整体相关；

设存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$$

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r + 0\cdot\alpha_{r+1} + \cdots + 0\cdot\alpha_m = 0$$

线性相关的向量组添加若干向量后，仍是线性相关的。
即部分相关，则整体相关；（定理**1.5.1**）

推论1.5.1：线性无关向量组的部分向量组，仍是线性无关的。整体无关，则部分无关。（定理**1.5.1**的逆否命题）

反证法：设线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r, \cdots, \alpha_m$

的部分向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关，

由定理**1.5.1**，将这一部分向量组扩充得到的原向量组

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r, \cdots, \alpha_m$ 也线性相关。

这与原向量组线性无关矛盾。

讨论

设向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性相关，向量组 $\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 线性无关。

（1）α_1 能否由α_2,α_3线性表示?

（2）α_4 能否由α_1，α_2，α_3线性表示?

讨论题答案

(1) $\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$线性无关$\Rightarrow\{\alpha_2,\alpha_3\}$线性无关

又$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$线性相关$\Rightarrow\alpha_1$可由$\alpha_2,\alpha_3$唯一线性表示

(2) 假设α_4可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且

$$\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 \qquad (1)$$

α_1可由α_2，α_3线性表示$\Rightarrow$存在数λ_2，λ_3，使得

$$\alpha_1 = \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3$$

代入（1）式可知α_4能由α_2，α_3线性表示

与$\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$线性无关矛盾

定理1.5.2

增加分量，不改变向量组线性无关；减少分量，不改变向量组线性相关。即**低维无关，则高维无关；高维相关，则低维相关。**

定理 1.5.2 设n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，试证n+2维向量组

$$\beta_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ a_1\\ b_1\end{pmatrix}\quad \beta_2=\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \cdots\\ a_2\\ b_2\end{pmatrix}\quad \beta_3=\begin{pmatrix}\alpha_3\\ \cdots\\ a_3\\ b_3\end{pmatrix}$$

也线性无关.

证明 考虑方程 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0 \qquad (*)$

该方程等价于
$$\begin{cases} x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0\cdots(1)\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0\cdots(2)\\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0\cdots(3)\end{cases}$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关$\Rightarrow$ 方程（1）只有零解 $\Rightarrow$

方程 $(*)$ 有唯一零解

课堂小结

- **重点**：向量组线性相关、线性无关的概念；
- **难点**：讨论、证明向量组的线性相关性。

六、作业

P4 作业1.1

P6 作业1.2

P9 作业1.3 **第2题**

P11 作业1.4 **第3题说明为什么**

P13 作业1.5 **第1,2题说明为什么**

预习1.6节及1.7节,

观看P13 视频1.6, P15 视频1.7