2015-2016 学年第 2 学期

线性代数试题答案与评分标准

一. 选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. D 2. C 3． C 4． B 5. A

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

6. $-\frac{1}{2}$ 7. 0 8. -125 9. -2 10. $t>\frac{1}{5}$

三、计算题

11. (满分 8 分)

(1) $$A=B^TC=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\1&2&3\\3&6&9\end{pmatrix}$$

(2) --------------4 分

$$\begin{aligned}A^2&=(B^TC)(B^TC)\\&=B^T(CB^T)C\\&=13A\\&=13\begin{pmatrix}2&4&6\\1&2&3\\3&6&9\end{pmatrix}\end{aligned}$$

--------------8 分

12. (满分 7 分)

$$D=2\begin{vmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}+(-1)^{1+5}\begin{vmatrix}0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\\1&0&0&0\end{vmatrix}$$

--------------3 分

$$=2\times 2^4+(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}$$

--------------5 分

$$=32-8=24$$

--------------7 分

13. (满分 8 分)

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&-2&0&1&0\\2&-2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-6&-2&1&0\\0&-6&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-6&-2&1&0\\0&0&9&2&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow[-\frac{1}{3}r_2]{\frac{1}{9}r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&2&2/3&-1/3&0\\0&0&1&2/9&-2/9&1/9\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&5/9&4/9&-2/9\\0&1&0&2/9&1/9&-2/9\\0&0&1&2/9&-2/9&1/9\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/9&2/9&2/9\\0&1&0&2/9&1/9&-2/9\\0&0&1&2/9&-2/9&1/9\end{array}\right)$$

可见 $$A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$$

--------------4 分

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{vmatrix}\overset{r_2-2r_1}{\underset{r_3-2r_1}{=}}\begin{vmatrix}1&2&2\\0&-3&-6\\0&-6&-3\end{vmatrix}=-27$$

$$AA^*=A^*A=|A|I\Rightarrow\left(A^*\right)^{-1}=\frac{A}{|A|},$$

所以 $$\left(A^*\right)^{-1}=-\frac{1}{27}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}.$$

--------------8 分

四、解答题

14.(满分 10 分)

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

--------------6 分

可见$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$是一个极大无关组。

--------------8 分

$\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2,\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$

--------------10 分

15. (满分 10 分)

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1&-1&-1\\2&2&-3&-4&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\times(-1)\\ r_1+r_2}]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&1&0&1&-2\\0&0&1&2&-1\end{bmatrix},$$

--------------3 分

得原方程组的同解方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_4-2x_5=0\\x_3+2x_4-x_5=0\end{cases}$,

即$\begin{cases}x_1=-x_2-x_4+2x_5\\x_2=x_2\\x_3=-2x_4+x_5\\x_4=x_4\\x_5=x_5\end{cases}$,

--------------6 分

写成向量方程的形式为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$,

得到原方程组的一个基础解系：

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

--------------9 分

通解为：

$$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_2\eta_3 \quad k_1,k_2,k_3\text{为任意实数}$$

--------------10 分

16.(满分 8 分)

$A\sim B$ 可得存在可逆阵 P $P^{-1}AP=B$

--------------1 分

$$P^{-1}(A-I)P=B-I$$

-------------2 分

从而

$$R(A-I)=R(B-I)$$

-------------3 分

$$B-I=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

-------------5 分

$$R(B-I)=1$$

-------------7 分

所以

$$R(A-I)=1$$

-------------8 分

17.（满分 8 分）

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$$

--------------1 分

A 的特征值为 1, 2, 5 --------------2 分

$$|A|=1\times2\times5 \text{ 即 } |A|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{vmatrix}=2(9-a^2)=10$$

$$\therefore a=2$$

--------------4 分

解方程组 $(I-A)x=0$，得基础解系 $\xi_1=(0,-1,1)^T$

单位化 $e_1=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$ -------------5 分

解方程组 $(2I-A)x=0$，得基础解系 $\xi_2=(1,0,0)^T$

单位化 $e_2=(1,0,0)^T$ --------------6 分

解方程组 $(5I-A)x=0$，得基础解系 $\xi_3=(0,1,1)^T$ -------------7 分

单位化 $e_3=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$

所以

$$P=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

--------------8 分

18. (满分 6 分)

α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。证明如下 --------------2 分

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，因此 α_2,α_3 线性无关，又 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，因此 α_4 可以由 α_2,α_3 线性表示，从而 α_4 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

--------------6 分