華南農業大學
South China Agricultural University

第十五讲　二次型及其应用

5.3 实对称矩阵的对角化

5.1 二次型及其矩阵

5.4 二次型的标准型

5.2 二次型的标准型

三、实对称矩阵的对角化

如果方阵A满足 $A^T = A$, 就称A为**对称矩阵**

若矩阵中每一个元素均为实数，则称矩阵**A**为实对称矩阵.

例如 $\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 7 \\ -4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

实对称矩阵的性质

性质5.3.1 （1）实对称矩阵的特征值必为实数。

（2）实对称矩阵的不同特征值所对应的特征向量正交。

性质5.3.2 设A是n阶实对称矩阵,

λ是A的特征方程的 r 重根，则

对应特征值 λ 恰有 r 个线性无关的特征向量.

➢实对称矩阵的对角化

定理5.3.1： 设A是n阶实对称矩阵，则必有正交矩阵P，使得 $P'AP=\Lambda$ 其中 Λ 是以**A**的**n**个特征值为对角元素的对角矩阵，正交矩阵P的列向量是A的特征值所顺次对应的单位正交特征向量

$$P'AP=P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\Lambda=\mathrm{diag}(\overbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}^{r_1},\overbrace{\lambda_2,\cdots,\lambda_2}^{r_2},\cdots,\overbrace{\lambda_m,\cdots,\lambda_m}^{r_m})$$

$$A \xrightarrow{\text{正交变换}} P'AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$(A' = A)$$

$$P = (e_1\ e_2\ \cdots e_n)$$

$|\lambda I - A| = 0 \longrightarrow$ 解出特征值$\lambda_i \longrightarrow (\lambda_i I - A)x = 0 \longrightarrow$

求出基础解系$\xi_i \longrightarrow$ Schmidt正交化过程 $\longrightarrow$ 单位化得 e_i

注意：只需将重根所对应的基础解系正交化，因为不同特征值所对应的特征向量已经是正交向量了.

例 用正交变换把下列对称矩阵对角化

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

或求正交矩阵**P**,使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解 （1）求方阵A的特征值

由 $|\lambda I - A| = 0$ 得特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$

（2）求特征向量

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 解方程组 $(I - A)X = 0$

得一个基础解系 $\xi_1 = (-2,1,0)^T, \xi_2 = (2,0,1)^T$

对于 $\lambda_3 = 10$, 解方程组 $(10I - A)X = 0$

得一个基础解系 $\xi_3 = (1,2,-2)^T$

（3）将特征向量组正交化、单位化

令 $\alpha_1=\xi_1=(-2,1,0)^T$

$$\alpha_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=\frac{1}{5}(2,4,5)^T$$

$$\alpha_3=\xi_3=(1,2,-2)^T$$

正交化

P25 Schmidt正交化

$$e_1=\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^T$$

$$e_2=\frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5)^T$$

$$e_3=\frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3=\frac{1}{3}(1,2,-2)^T$$

单位化

（4）构造矩阵P，写出相应的对角形矩阵

令 $$P=\left(e_1,e_2,e_3\right)=\begin{pmatrix} -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{2\sqrt{5}}{15} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{\sqrt{5}}{5} & \dfrac{4\sqrt{5}}{15} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{5}}{3} & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则有 $$P^{-1}AP=P^{T}AP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}$$

正交变换将实对称矩阵对角化的一般步骤P138：

1、求矩阵A的特征值

2、求特征向量

3、将特征向量正交化（有重根）、单位化

4、构造正交矩阵，写出对应的对角形矩阵

P138 例题 5.3.1

设对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$，用**正交变换法**把它化为标准形。

解 A的特征多项式为：$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-4)$

它的特征值$\lambda_1=2$对应的特征向量是 $k_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}(k_1\neq 0)$

特征值$\lambda_2=4$对应的特征向量是 $k_2\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}(k_2\neq 0)$

P139 作业 3

取正交矩阵 $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

则有 $P^{-1}AP=\Lambda$

一、二次型及其矩阵

定义5.1.1 含有n个自变量的二次齐次函数:

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n$$
$$+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

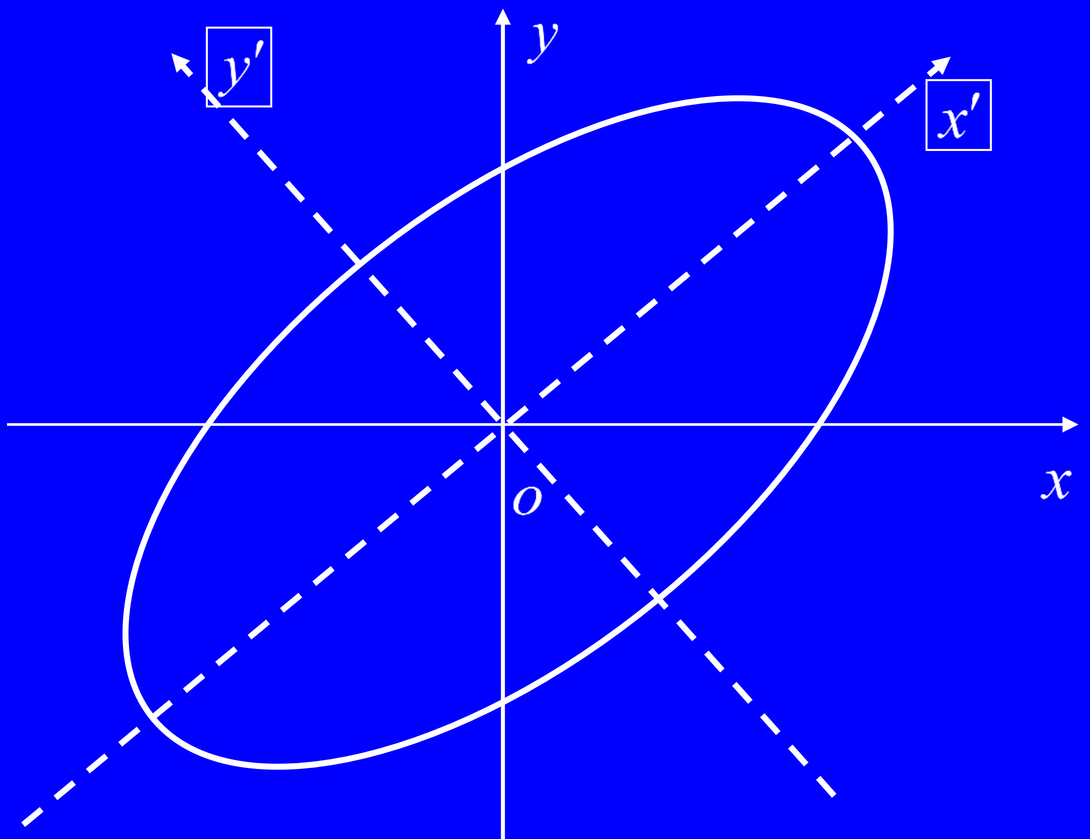
叫作**二次型**。

如果二次型的系数都为实数，则称二次型为**实二次型**。

例如 $f(x,y,z)=3xy-6xz-yz-3z^2$ 是二次型

$f(x,y)=x^2+y^2+x+y+1$ 不是二次型

$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=1$ 为平面上一条二次曲线



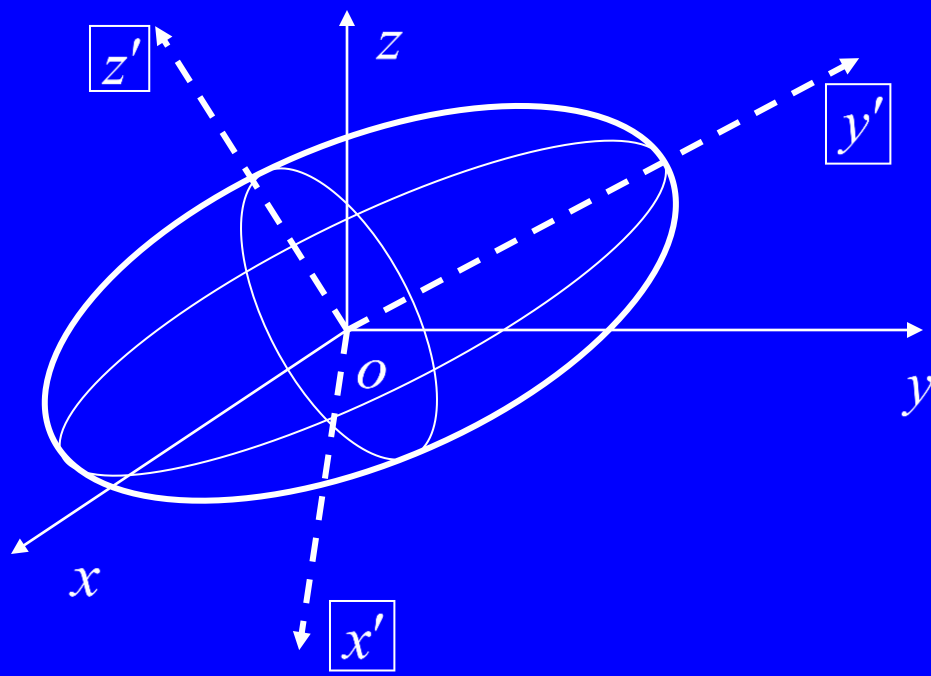
几何背景

经坐标变换: $\begin{cases} x=x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y=x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \tilde{a}x'^2+\tilde{b}y'^2=1$

$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2 \Longrightarrow g(x',y')=\tilde{a}x'^2+\tilde{b}y'^2$

$$f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2mxz+2nyz=1$$

为空间上一二次曲面的一般形式



几何背景

经坐标系旋转变换: $\longrightarrow \tilde{a}x'^2+\tilde{b}y'^2+\tilde{c}z'^2=1$

$$f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2mxz+2nyz$$

$$\Longrightarrow g(x',y',z')=\tilde{a}x'^2+\tilde{b}y'^2+\tilde{c}z'^2$$

现有两个问题：

1、这种结果能否推广到四元，甚至*n*元二次型上去？

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4) = {} & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + \\
& 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + \\
& 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4
\end{aligned}
$$

$$\xrightarrow{\text{经坐标变换}}$$

$$g(y_1,y_2,y_3,y_4) = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + d_3y_3^2 + d_4y_4^2$$

2、如果可以，相应的变换如何寻找，结果如何实现？

定义5.1.2 设n元二次型 ## ●二次型的矩阵表示及其秩

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots x_n)=a_{11}x_1^2&+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\
&+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n\\
&+\cdots+a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 称为它的**对应矩阵**。

二次型 f $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 对称矩阵 A

对称矩阵 A 的秩定义为**二次型 f 的秩**

例1 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$ 的对应矩阵.

P133 例题 5.1.1

解 此二次型为三元二次型，其中

$$a_{11}=3,\ \ a_{22}=1,\ \ a_{33}=-1,\ \ a_{12}=2,\ \ a_{13}=-1,\ \ a_{23}=3$$

根据定义，它对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

P133问题5.1.2

P133作业第2，3题

P147 1（1）

P149 2（1，2，3）

P149 3

例2 设A为n阶矩阵，证明 $A+A^{\mathrm{T}}$是对称矩阵。

P133 例题 5.1.2

证明

$$(A+A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+A$$

故n阶矩阵$A+A^{\mathrm{T}}$是对称矩阵。

二、二次型的标准型

定义5.2.1 只含有平方项的二次型

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\cdots+\lambda_nx_n^2$$

叫作**标准形**。

●将二次型化为标准型的实质问题

一般形式 $f(x_1, x_2, \cdots x_n) = x'Ax$

经可逆变换 $x = Py$

化为标准形式 $f(y_1, y_2, \cdots y_n) = y'\Lambda y$

本质问题：寻找可逆矩阵**P**，使得

$$P'AP = \Lambda$$

回顾上一节知识，能否解决？如何解决？

我们刚刚的结论:

对于实对称阵*A*, 一定存在正交阵*P*使得*A*相似对角阵, 即:

$$P^{-1}AP = P^T AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

问题的结论

对实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Ax,$

总存在正交变换 $x = Py$ 化二次型为标准型

$$f = y^T \Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

事实上: $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x) = x^T Ax$

$$\underline{\underline{x = Py}}\; y^T P^T APy = y^T \Lambda y$$

●用正交变换化二次型为标准型的具体步骤 P139

1. 写出二次型的矩阵A
2. 求矩阵A的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$
3. 对每个特征值λ_i，求对应的特征向量
4. 将特征向量正交化（重根）
5. 将所有特征向量单位化，得到 $e_1, e_2, \cdots e_n$
6. 构造正交矩阵，写出相应的正交变换及标准型

正交矩阵 $P = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix}$

正交变换 $x = Py$

标准型 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & 4 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ 试用正交变换化把二次型

P140 例5.4.1

$f=x'Ax$ 为标准型.

解 **A**的特征多项式为 $\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & -4\\ -2 & 4-\lambda & -2\\ -4 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+4)(\lambda-5)^2$

得**特征值**λ_1=-4， $\lambda_2=\lambda_3$=5 ,对于λ_1=-4，解方程 $(A+4I)x=0$

$$A+4I=\begin{pmatrix}5 & -2 & -4\\ -2 & 8 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{pmatrix}\overset{r_1+r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -4 & 1\\ -2 & 8 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2+2r_1\\ r_3+4r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -18 & 9\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2\leftrightarrow r_3\\ r_2\div(-9)}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -4 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{r_1+2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得**特征向量**$\xi_1=(2,1,2)^T$

同理，对于$\lambda_2=\lambda_3$=5，得到线性无关的**特征向量**

$$\xi_2=(-1,0,1)^T,\ \xi_3=(-1,2,0)^T$$

将 ξ_2,ξ_3 **正交化**

$$\beta_2=\xi_2 \qquad \beta_3=\xi_3-\frac{[\xi_2,\ \beta_2]}{[\beta_2,\ \beta_2]}\beta_2==(-\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2})^T$$

ξ_1,β_2,β_3 是正交化向量组。

单位化

$$e_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})' \quad e_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})' \quad e_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=(-\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{6})'$$

令

$$P=\begin{pmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{6}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix}$$

做正交变换

$$(x_1, x_2, x_3)' = P(y_1, y_2, y_3)'$$

带入二次型 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，**得到标准型**

$$f = -4y_1^2 + 5y_2^2 + 5y_3^2$$

P148 选择题6

P149 填空题4

例 求下列平面图形所围图形的面积：

$$3x^2-2xy+3y^2=1$$

解

$$f(x)=3x^2-2xy+3y^2 \qquad A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+8=(\lambda-2)(\lambda-4)$$

A 的特征值为 $\lambda=2,4$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$

曲线可化为标准型 $2x'^2+4y'^2=1$

$$S=\pi\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

P133 求二次型 $f(x_1,x_2)=3x_1^2+4x_1x_2+6x_2^2$

例5.2.1 经过线性变换 $\begin{cases} x_1=2y_1+y_2 \\ x_2=-y_1+2y_2 \end{cases}$ 之后的表达式

解 记

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

则 $f(x_1,x_2)=X'\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}X$， $X=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}Y$

$$f(x_1,x_2)=\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}y\right]'\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}y\right]$$

$$=y'\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}y=y'\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 35 \end{pmatrix}y=10y_1^2+35y_2^2$$

对于普通二次型，可以通过变换将其变换成标准型。

配方法化二次型为标准型 P136 作业1

配方法

$$f=6x_1^2+24x_1x_2-x_2^2$$
$$=6(x_1^2+4x_1x_2)-x_2^2$$
$$=6(x_1+2x_2)^2-24x_2^2-x_2^2$$
$$=6(x_1+2x_2)^2-25x_2^2$$

作线性变换

$x=Cy$

$$C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}y_1=x_1+2x_2\\ y_2=x_2\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}x_1=y_1-2y_2\\ x_2=y_2\end{cases}$$

则**f** 只含平方项 $f=6y_1^2-25y_2^2$

P135 例5.2.2 用配方法把二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$$

化为标准形，并求所用的变换矩阵. P136 作业2

解 $f(x_1,x_2,x_3)$ 中含有x_1的平方项，因此首先将含有x_1的项集中起来配平方,得

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2+2x_1x_2)+3x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$$

$$=(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)-x_2^2+3x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$$

$$=(x_1+x_2)^2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$$

再将含有x_2的项集中起来配平方,得

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+2(x_2^2+2x_2x_3)+4x_3^2$$

$$=(x_1+x_2)^2+2(x_2+x_3)^2+2x_3^2$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = \quad\quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases}$ ，即 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$

，所求的可逆线性变换为

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = CY$$

由

$$C^T AC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

将原二次型化为标准形

$$f = X^T AX = Y^T C^T ACY^T = y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$$

P135例题5.2.3　用配方法把二次型化为标准形，并求所用的变换矩阵.

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

●将二次型化为标准型的实质问题

一般形式 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)=x^T Ax$

经可逆变换 $x=Cy$

$$f=x^T Ax=(Cy)^T A(Cy)=(y^T C^T)\ A\ (Cy)=y^T(C^T AC)y$$

化为标准形式 $C^T AC=\Lambda$

$$f(y_1,y_2,\cdots y_n)=y'\Lambda y$$

本质问题：寻找可逆矩阵C，使得 $C^T AC=\Lambda$

P135

定义5.2.2 对于两个n阶矩阵A和B, 如果存在n阶可逆阵C, 使得$C^{\mathrm{T}}AC=B$, 就称A**合同**于B, 记作$A\cong B$. C为**合同变换矩阵**.

对任意一个二次型 $f(X)=X^TAX$， 可用**配方法**找到可逆线性变换 $X=CY$ ， 把二次型 $f(X)$ 为标准形.

观看P134动画：二次型及其标准形

六、作业

P136 作业5.2　2

P141 作业5.4　3

期末考试一般大题归类70分（8-10分）

1、矩阵运算（加减乘转置）

2、行列式的计算

3、求逆矩阵

4、求极大无关组，其余向量用其线性表示

5、求解方程组（齐次、非齐次、带参数）

6、二次型化为标准型（正交变换，配方法）

7、小证明题（5-6分）

注意事项:

1、正定二次型、正惯性指标5.5-5.6节，今年不考

2、应用型练习

（1）14-15年第13题;

（2）16-17年的第16题;

（3）建议大家看看教材P124交通流量规划问题)

预祝大家

取得好成绩

身体棒棒

学业有成

3、周二、周四上午会过来这边，上午11点20以后，

有问题可以DS429，若需要，我们可以借课室

4、平时成绩　　5、考试先易后难