装

订

线

华南农业大学期末考试试卷（A卷）

2018～2019 学年第 2 学期　　　　**考试科目：** 线性代数

一、选择题

CCDCB

二、填空题

7　　3　　$\sqrt{26}$　　3　　$-3<a<1$

三、计算题（本大题共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

11、解答：$AB^T-2A=\begin{pmatrix}-1&3&3\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&3&-2\\-1&0&3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&3&3\\0&0&2\end{pmatrix}$..............2 分

$=\begin{pmatrix}-1&9&2\\-2&0&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&6&6\\0&0&4\end{pmatrix}$...........6 分　　$=\begin{pmatrix}1&3&-4\\-2&0&2\end{pmatrix}$................8 分

12、解答：$D=\begin{vmatrix}2&-2&4&-2\\-1&2&0&0\\1&-1&2&0\\-1&-2&0&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&-1&2&-1\\-1&2&0&0\\1&-1&2&0\\-1&-2&0&2\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2+r_1\\r_3-r_1\\r_4+r_1}}{=\!=}2\begin{vmatrix}1&-1&2&-1\\0&1&2&-1\\0&0&0&1\\0&-3&2&1\end{vmatrix}$.....4 分

$\overset{r_4+3r_2}{=\!=}2\begin{vmatrix}1&-1&2&-1\\0&1&2&-1\\0&0&0&1\\0&0&8&-2\end{vmatrix}$........6 分　　$\overset{r_3\leftrightarrow r_4}{=\!=}-2\begin{vmatrix}1&-1&2&-1\\0&1&2&-1\\0&0&8&-2\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-16$..........8 分

13、解答：$(A\quad I)=\begin{pmatrix}-2&5&-5&1&0&0\\-1&4&-3&0&1&0\\-2&6&-5&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}-1&1&-2&1&-1&0\\-1&4&-3&0&1&0\\-2&6&-5&0&0&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\substack{r_2-r_1\\r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}-1&1&-2&1&-1&0\\0&3&-1&-1&2&0\\0&4&-1&-2&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{pmatrix}-1&1&-2&1&-1&0\\0&-1&0&1&0&-1\\0&4&-1&-2&2&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3+4r_2}\begin{pmatrix}-1&1&-2&1&-1&0\\0&-1&0&1&0&-1\\0&0&-1&2&2&-3\end{pmatrix}$..4 分

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{\substack{r_1\times(-1)\\ r_2\times(-1)}}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&-2&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+r_2]{r_1-2r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&2&5&-5\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&-2&-2&3\end{pmatrix}$$

因此 $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&5&-5\\-1&0&1\\-2&-2&3\end{pmatrix}$ ....8 分

四、解答题（本大题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分）

14、解答：将向量按列排成矩阵，实施初等行变换，化为行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix}-1&4&-4&-1\\0&-2&0&2\\0&1&2&-3\\-2&-4&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-2r_1}\begin{pmatrix}-1&4&-4&-1\\0&-2&0&2\\0&1&2&-3\\0&-12&9&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4\times(\frac{1}{3})]{r_2\times(-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}-1&4&-4&-1\\0&1&0&-1\\0&1&2&-3\\0&-4&3&1\end{pmatrix}......2\text{ 分}\quad\xrightarrow[r_4\times(\frac{1}{3})]{r_2\times(-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}-1&4&-4&-1\\0&1&0&-1\\0&0&2&-2\\0&0&3&-3\end{pmatrix}.......4\text{ 分}$$

$$\xrightarrow[r_4\times(\frac{1}{3})]{\substack{r_1\times(-1)\\ r_3\times(\frac{1}{2})}}\begin{pmatrix}1&-4&4&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_3]{r_1-4r_3}\begin{pmatrix}1&-4&0&5\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}........................6\text{ 分}$$

$$\xrightarrow{r_1+4r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}..8\text{ 分}$$

极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$， $\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$ ....10 分

15、解答：对增广矩阵实施初等行变化，化为行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix}1&-2&-3&2&3\\-1&0&1&2&-1\\1&2&1&-6&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&-2&-3&2&3\\0&-2&-2&4&2\\0&4&4&-8&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & 2 & 3\\0 & -2 & -2 & 4 & 2\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\times(-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & 2 & 3\\0 & 1 & 1 & -2 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times(-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -2 & 1\\0 & 1 & 1 & -2 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ ……………………………………5 分

由于系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩等于未知数的个数，因此方程组有无穷多解. 由以上变换结果知，原方程组的同解方程组是

$\begin{cases}x_1-x_3-2x_4=1\\x_2+x_3-2x_4=-1\end{cases}$，于是得一般解$\begin{cases}x_1=x_3+2x_4+1\\x_2=-x_3+2x_4-1\end{cases}$

从而通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ ……………………………10 分

16、解答：二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\4 & 3\end{pmatrix}$

解特征方程$|\lambda I-A|=0$得其特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=7$ ……………………2 分

当$\lambda_1=-1$时，齐次线性方正组$-I-A=\begin{pmatrix}-4 & -4\\-4 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$,

其通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$（$k_1$为任意实数），

因此$\lambda_1=-1$的特征向量$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$（$k_1\neq 0$）………………4 分

当$\lambda_2=7$时，齐次线性方正组$7I-A=\begin{pmatrix}4 & -4\\-4 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}$,

其通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$（$k_2$为任意实数），

因此$\lambda_2=7$的特征向量$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$（$k_2\neq 0$）…………………6 分

取$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，将其正交标准化为$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

令$P=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，..8 分

则正交变换$x=Py$可将二次型化为标准形$f=-y_1^2+7y_2^2$................10 分

17、解答：由于A的 3 个特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=-2,\lambda_3=1$

因此$B=2A^2-2A+3I$的三个特征值分别为

$2\lambda_1^2-2\lambda_1+3=3$，$2\lambda_2^2-2\lambda_2+3=15$，$2\lambda_3^2-2\lambda_3+3=3$...................4 分

B的行列式为所有特征值的乘积$|B|=3\times15\times3=135$............................6 分

B的迹为所有特征值的和$trace(B)=3+15+3=21$.............................8 分

由于A为实对称矩阵，因此$B=2A^2-2A+3I$也是实对称矩阵，从而可以对角化，即存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}BP=\Lambda=\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 15 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

由于乘可逆矩阵不改变矩阵的秩，因此$rank(B)=rank(\Lambda)=3$..........10 分

五、证明题（本大题共 1 小题，共 6 分）

18、证明：假设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$线性相关，则存在不全为零的数$k_1,k_2,k_3,k_4,k$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4+k\beta=0$..2 分

若$k=0$，则k_1,k_2,k_3,k_4不全为零，并且$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$，于是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，矛盾！..4 分

若$k\neq0$，则$\beta=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\frac{k_2}{k}\alpha_2-\frac{k_3}{k}\alpha_3-\frac{k_4}{k}\alpha_4$，即$\beta$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示，矛盾！

因此$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$线性无关...6 分