

华南农业大学期末考试试卷 (A 卷)

2016-2017 学年第 2 学期

考试科目: 线性代数

考试类型: (闭卷) 考试

考试时间: 120 分钟

学号_____姓名_____年级专业_____

题号	一	二	三	四	总分
得分					
评阅人					

试卷说明:

A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, A^{-1} 表示矩阵 A 的逆矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, I 表示单位矩阵, (α, β) 表示向量 α, β 的内积.

请直接在本试卷上作答。答案写在草稿纸上无效。

得分	
----	--

一. 选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分) 在每小题的选项中, 只有一项符合要求, 把所选项前的字母填在题中括号内

1. 设 A, B 为任意同阶方阵, 则必有()

- (A) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (B) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$
(C) $(A+I)^2 = A^2 + 2A + I$ (D) $(AB)^2 = A^2B^2$

2. 已知 A, B, C 均为 n 阶可逆阵, $AB = BA$, $AC = CA$, 则 $ABC =$ ()

- (A) ACB (B) CAB
(C) CBA (D) BCA

3. 设 4 阶矩阵 A 的所有元素均为 4, 则 4 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中解向量的个数为 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 已知 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & -2a_2 \\ b_1 + b_2 & -2b_2 \end{vmatrix} = 2$, 则 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$ ()

- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

5. 设 n 阶矩阵 A 满足 $|2I - 3A| = 0$, 则 A 必有一个特征值 $\lambda =$ ()

- (A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

得分	
----	--

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分)

6. 设向量组 $\alpha_1 = (k, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, -2, 1)^T, \alpha_3 = (1, 1, -2)^T$ 线性相关, 则 $k =$ _____.

7. 设 3 元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的增广矩阵 经初等行变换可化为

$$(A, b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & (k-1)(k+2) & k-1 \end{pmatrix}$$

若该方程组无解, 则 $k =$ _____.

8. 若 3 阶矩阵 A 与 B 相似, 矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则行列式 $|B^{-1} - I| =$ _____.

9. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是正交矩阵, 则 $a + b =$ _____.

10. 设 n 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 $1, 2, \dots, n$, 则使 $tI - A$ 为正定矩阵的数 t 取值范围是_____.

得分	
----	--

三、计算题

11. (满分 8 分) 已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

求 $A^T B - 2A$.

12. (满分 7 分) 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

13. (满分 8 分) 已知 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^* 及 A^{-1} .

得分	
----	--

四、解答题

14. (满分 10 分) 设向量组

$$\alpha_1 = (1, -1, 2, 1)^T,$$

$$\alpha_2 = (1, 0, 2, 2)^T,$$

$$\alpha_3 = (0, 2, 1, 1)^T,$$

$$\alpha_4 = (1, 0, 3, 1)^T,$$

求该向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组, 并将其余向量通过该最大线性无关组表示出来.

15. (满分 10 分) 求下线性方程组的通解 (要求用它的一个特解和对应的齐次线性方程组的基础解系所表示).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

16. (满分 8 分) 华农的本科毕业论文开始进行查重了。论文查重基于文本相似度, 那么如何计算两个文本的相似程度? 一个简单的方法是通过文本中的词出现的频率构造向量, 比如要比较下面两句话的相似度:

- 1) 我/爱/线性代数, 线性代数/很/有用。
- 2) 我/爱/线性代数, 线性代数/很/容易。

两句话共出现了 {我、爱、线性代数、很、有用、容易} 共 6 个词, 第一句话里 “线性代数” 出现 2 次, “容易” 出现 0 次, 其它出现 1 次, 用 6 维向量描述为 $(1, 1, 2, 1, 1, 0)$, 记为 α , 类似地, 第二句话用向量描述为 $(1, 1, 2, 1, 0, 1)$, 记为 β .

试计算:

- (1) 向量 α 与 β 的距离(欧氏距离);
- (2) 向量 α 与 β 的夹角余弦 (称为余弦距离)
- (3) 你认为欧氏距离和余弦距离度量上面两句话的相似性哪个更好一些, 说明理由.

17. (满分 7 分) 求二次型 $f = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 的矩阵 A , 并求 f 的秩.

18. (满分 7 分) 设 α_1, α_2 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 证明 $\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\beta_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ 也是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系。