线性代数答案与评分标准

2016-2017 学年第 2 学期

一. 选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. C
2. D
3. C
4. B
5. D

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

6. -2
7. -2
8. 24
9. 0
10. $t > n$.

三、计算题

11. (满分 8 分)

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

…………………………2 分

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

…………………………5 分

$$A^T B - 2A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

…………………………8 分

12.（满分 7 分）

$$D=\begin{vmatrix}8&8&8&8\\1&5&1&1\\1&1&5&1\\1&1&1&5\end{vmatrix}$$ ……………………2 分

$$=8\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&5&1&1\\1&1&5&1\\1&1&1&5\end{vmatrix}$$ ……………………4 分

$$=8\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&4&1&1\\0&0&4&1\\0&0&0&4\end{vmatrix}$$ ……………………6 分

$=8\times1\times4\times4\times4=512$ ……………………7 分

13.　（满分 8 分）

$A_{11}=0$，　$A_{21}=0$，$A_{31}=-1$

$A_{12}=0$，　$A_{22}=-1$，$A_{32}=2$

$A_{13}=-1$，　$A_{23}=2$，$A_{33}=-1$ ……………………2 分

$$A^*=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&2\\-1&2&-1\end{pmatrix},$$ ……………………4分

$$|A|=\begin{vmatrix}3&2&1\\2&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1$$，所以 ……………………6分

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}$$ ……………………8分

四、解答题

14. (满分 10 分)

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\-1&0&2&0\\2&2&1&3\\1&2&1&1\end{pmatrix}$$

………2 分

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

--------------6 分

可见$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一个极大无关组。

--------------8 分

$$\alpha_4=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$$

--------------10 分

15. (满分 10 分)

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\2&3&1&1&1\\1&0&2&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&2&2&5\\0&1&-1&-1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ---- **3 分**

$\begin{cases}x_1+2x_3+2x_4=0\\x_2-x_3-x_4=0\end{cases}$ **基础解系为** $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ ------ **6 分**

$\begin{cases}x_1+2x_3+2x_4=5\\x_2-x_3-x_4=-3\end{cases}$ **令** $x_3=x_4=0$，**得一特解：** $\eta=\begin{pmatrix}5\\-3\\0\\0\end{pmatrix}$ ---- **8 分**

故原方程组的通解为：

$$\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2=\begin{pmatrix}5\\-3\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$，**其中** $k_1,k_2\in R$ ------ **10 分**

（此题结果表示不唯一）

16. (满分 8 分)

(1) α与β距离为$\sqrt{(1-1)^2+(1-1)^2+(2-2)^2+(1-1)^2+(1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$

………………3 分

(2) $\langle\alpha,\beta\rangle=1\times1+1\times1+2\times2+1\times1+1\times0+0\times1=7$

$\|\alpha\|=\sqrt{8}$ ，$\|\beta\|=\sqrt{8}$

所以$\cos\theta=\dfrac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|\|\beta\|}=\dfrac{7}{8}$ ………………6 分

(3)（自由发挥，酌情给分）

余弦距离比欧氏距离度量文本相似性更好。欧氏距离度量的是空间各点的绝对距离，与各个点所在的位置坐标直接相关；而余弦距离度量的是空间向量的夹角，更加体现在方向上的差异。词频向量的余弦距离更能体现文本的相似性。而且，分量都非负的向量之间的余弦距离的值范围在$(0,1)$ ，可以转化为相似度的百分比，$\dfrac{7}{8}=87.5\%$ 可以表示两句话的相似度为87.5%

………………8 分

17. (满分 7 分)

$$A=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}&4\end{pmatrix};$$ ………………4 分

因为$|A|\neq0$，所以$R(A)=2$；即二次型f的秩为 2. ………………7 分

18. (满分 7 分)

由$A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=0$得

$A\beta_1=A(\alpha_1+2\alpha_2)=0$， $A\beta_2=A(2\alpha_1+\alpha_2)=0$

可知β_1，β_2也是方程组$Ax=0$的解。 ………………2 分

设有常数k_1 ，k_2使得

$k_1\beta_1+k_2\beta_2=0$，则

$k_1(\alpha_1+2\alpha_2)+k_2(2\alpha_1+\alpha_2)=0$ ………………4 分

整理得

$(k_1+2k_2)\alpha_1+(2k_1+k_2)\alpha_2=0$

由于α_1,α_2线性无关，得到$\begin{cases}k_1+2k_2=0\\2k_1+k_2=0\end{cases}$，推出$k_1=k_2=0$………………6 分

因此，β_1，β_2线性无关。 ………………7 分