2017-2018 学年第 2 学期线性代数答案与评分标准

一. 选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

B　D　C　D　A

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

6. -1　　7. 40　　8. $\frac{1}{2}(A-I)$　　9. $\frac{1}{4}$　　10. $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$

三、计算题（本大题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分）

11. 解：$3A-2B=\begin{pmatrix}9 & 6 & 7\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}$ --------4 分

$AB^T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -7 & 8\end{pmatrix}$ --------8 分

12. 解：原式$=\begin{vmatrix}x+a+b+c & b & c\\ x+a+b+c & x+b & c\\ x+a+b+c & b & x+c\end{vmatrix}$ --------2 分

$=(x+a+b+c)\begin{vmatrix}1 & b & c\\ 1 & x+b & c\\ 1 & b & x+c\end{vmatrix}$ --------4 分

$=(x+a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & x\end{vmatrix}$ --------6 分

$=(x+a+b+c)x^2$ --------8 分

13. 解：$(A,I)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$---3 分

$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\div(-1)]{r_1\div(-1),\ r_2\div(-1)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1\end{pmatrix}$---6 分

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -2 & -1 & -1\end{pmatrix}$ -------8 分

四、解答题（本大题共 5 小题，满分 41 分）

14. 解：$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 5 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 0 & -3/2\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ --------4 分

因此向量组的秩$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$ --------6 分

向量组的一个极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ --------8 分

$\alpha_4=\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{3}{2}\alpha_2$ --------9 分

15. 解：$(A,b)\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 0 & -5 & 1 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1\end{pmatrix}$

因此，当$a=1$时，方程组有解. --------3 分

对应齐次方程组的基础解系为

$$\xi_1=\left(\frac{3}{5},\quad \frac{1}{5},\quad 1,\quad 0\right)^T，\xi_2=(0,\quad 1,\quad 0,\quad 1)^T$$ --------6 分

$Ax=b$的一个特解为$\left(\frac{2}{5},\quad -\frac{1}{5},\quad 0,\quad 0\right)^T$ --------8 分

因此原方程组的通解为

$x=\left(\frac{2}{5},\quad -\frac{1}{5},\quad 0,\quad 0\right)^T+k_1\left(\frac{3}{5},\quad \frac{1}{5},\quad 1,\quad 0\right)^T+k_2(0,\quad 1,\quad 0,\quad 1)^T$ --------10 分

16. 解：（1）$\|\alpha-\beta\|=\sqrt{4^2+(-1)^2+4^2+(-14)^2}=\sqrt{229}$ --------2 分

（2）$[\alpha,\beta]=6\times2+(-2)\times(-1)+2\times(-2)+(-10)\times4=-30$ --------4 分

(3) $\theta=\frac{2}{3}\pi$ --------6 分

17. 解：（1）二次型对应的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ --------2 分

（2）特征多项式为$|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-2)^2$，从而特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$$ --------5 分

（3）二次型的标准型为 $f=2y_1^2+2y_2^2$ --------7 分

（4）正惯性指标为 2 --------9 分

18. 证：由于$\xi_1,\xi_2\cdots\cdots\xi_{n-r}$为对应齐次线性方程组$AX=0$的基础解系，因此$\xi_1,\xi_2\cdots\cdots\xi_{n-r}$线性无关。 --------2 分

反证：设$\xi_1,\xi_2\cdots\cdots\xi_{n-r},\eta$线性相关，则$\eta$可由$\xi_1,\xi_2\cdots\cdots\xi_{n-r}$线性表示，

即：$\eta=\lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_r\xi_r$ --------4 分

因为齐次线性方程组解的线性组合还是齐次线性方程组解，故η必是$AX=0$的解。这与已知条件η为$AX=b\ (b\neq0)$的一个解相矛盾。

由上可知，$\xi_1,\xi_2\cdots\cdots\xi_{n-r},\eta$线性无关。 --------7 分