華南農業大學
South China Agricultural University

第十一讲 矩阵方程

矩阵数字特征的关系

2.19 矩阵方程

2.24 矩阵的数字特征

2.25 数字特征相同的一类矩阵—相似矩阵

一、矩阵方程

三类矩阵方程的求解：

（1） $AX = B$（A可逆）的解为$X = A^{-1}B$；

（2） $XA = B$（A可逆）的解为$X = BA^{-1}$；

（3） $AXB = \mathrm{C}$（A，B可逆）的解为$X = A^{-1}CB^{-1}$。

其中矩阵A和矩阵B都可逆。

一、矩阵方程

用逆矩阵法解矩阵方程，可能需要计算以下两类矩阵：

$$A^{-1}B \text{ 和 } BC^{-1}$$

（1）直接法：先算逆矩阵，再算乘积.

（2）初等变换法（证明略）：

$$\begin{pmatrix} C \\ \cdots \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} I \\ \cdots \\ BC^{-1} \end{pmatrix}$$

注意 计算 A^{-1}B 也可以用初等行变换!

一、矩阵方程

例1.1 求解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

解 矩阵方程记为 $AXB=C$，因为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,\ |B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

先要判断A，B可逆

所以，矩阵 A、B 都可逆

在原方程两边同时左乘 A^{-1}，右乘 B^{-1}，得

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

一、矩阵方程

练习： 设矩阵 X 满足 $X\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，求 X 。

解 $$X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

考虑用初等列变换的方法求解此矩阵方程。

二、矩阵数字特征之间的关系

定义2.24.1 矩阵的行列式、秩和特征值称为矩阵的三类数字特征。 P 86

本节研究三类数字特征之间的关系。

定理 2.24.1 设n阶方阵A的全部特征值是λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_n，则

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

二、矩阵数字特征之间的关系

定理 2.24.2 设 A 是 n 阶方阵，则下列命题等价：

（1）$|A| \neq 0$；

（2）A 的行向量组线性无关；

（3）A 的列向量线组性无关；

（4）$rankA = n$；

（5）A 的所有特征值 λ_1，$\lambda_2, \cdots$，λ_n 非零；

（6）A 可逆。

二、矩阵数字特征之间的关系

推论 2.24.2 设 A 是 n 阶方阵，则下列命题等价：

同问题2.24.3

（1）$|A|=0$；

（2）A 的行向量组线性相关；

（3）A 的列向量线组性相关；

（4）$rankA < n$；

（5）A 的特征值 λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_n 至少有一个为零；

（6）A 不可逆。

三、数字特征相同的一类矩阵——相似矩阵

定义 2.25.1 设 A，B 是两个 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$

则称 A 与 B 相似，记为 $A\sim B$，可逆矩阵 P 称为相似变换矩阵。

基本性质

(1) 反身性 $A\sim A$。

(2) 对称性 $A\sim B$，则 $B\sim A$。

(3) 传递性 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$。

一般地，满足自反性、对称性、传递性这三个性质的关系称为等价关系。方阵的相似关系就是一种等价关系，两个相似矩阵有着许多相同的性质.

相似矩阵的性质2.25.1　若n阶方阵A和B相似

1. 具有相同的特征多项式和特征值。 $P^{-1}AP=B$

$$|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|$$

$$=|P^{-1}||\lambda I-A||P|=|\lambda I-A|$$

2. $|A|=|B|$

3. $Tr(A)=Tr(B)$

4. $R(A)=R(B)$

P

三、数字特征相同的一类矩阵——相似矩阵

例2 设 $A=\begin{pmatrix}22 & 31\\ y & x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ 相似，求 x, y.

解 $A \sim B$

$$\therefore tr(A)=tr(B),\ |A|=|B|$$

$$\therefore \begin{cases} 22+\boldsymbol{x}=1+4 \\ 22\boldsymbol{x}-31\boldsymbol{y}=4-6 \end{cases}$$

解得 $\boldsymbol{x}=-\mathbf{17}, \boldsymbol{y}=-\mathbf{12}.$

(1、P87例题2.25.1
2、P92填空题第9，11小题)

P

三、数字特征相同的一类矩阵——相似矩阵

相似性质应用举例

问 $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 是否相似?

分析：显然I与B有相同的特征值1, 1,

任取可逆矩阵P,

$$P^{-1}IP=P^{-1}P=I\neq B$$

$\therefore A,$ B不相似

注意：相同的特征值 $\underset{\not\longrightarrow}{\longleftarrow}$ 相似.

P

三、数字特征相同的一类矩阵——对角化

定义 2.25.2 对 n 阶方阵 A，如果存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则称 A 与对角矩阵相似，或称 A **可对角化**。

P

三、数字特征相同的一类矩阵——对角化

方阵可对角化得充分必要条件

定理2.25.1 n 阶矩阵A能相似于对角矩阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量。

***A* 能否与对角阵 Λ 相似取决于**
***A* 是否有 *n* 个线性无关的特征向量**

P

证明: 必要性

$\because A$与对角阵$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$相似

$\therefore$存在一个n阶可逆阵$P = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，使

（P的列向量 ξ_i线性无关）

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda,$$

即$$A(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$(A\xi_1, A\xi_2, \cdots, A\xi_n) = (\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, \ldots, \lambda_n\xi_n)$$

$$\Rightarrow A\xi_i = \lambda_i\xi_i \ (i = 1, 2, \cdots, n),$$

即ξ_i是对应于特征值λ_i的n个线性无关特征向量。

P

充分性

反之设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的特征值,对应的特征向量为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$线性无关.

构造$P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$（注：P可逆），$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$,则

$$\boxed{AP}=(A\xi_1,A\xi_2,\cdots,A\xi_n)=(\lambda_1\xi_1,\lambda_2\xi_2,\cdots,\lambda_n\xi_n)$$

$$=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=\boxed{P\Lambda}$$

$\Rightarrow P^{-1}AP=\Lambda, A$与对角矩阵$\Lambda$相似。

P

三、数字特征相同的一类矩阵——对角化

定理2.25.1的意义

（1）指出n阶方阵可对角化的充要条件.

（2）若某n方阵A可对角化，则存在可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP=\Lambda$$

$P=(\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\ \xi_n)$

恰为

“n个线性无关特征向量ξ_i”

按列排成的可逆阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

恰为“ξ_i依次对应的全体特征值（含重数）”排成的对角阵

例4 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，已知A可对角化即有

与课后作业2类似

$P^{-1}AP=\Lambda$，其中$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}5&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$，求$A^{100}$.

解 由$P^{-1}AP=\Lambda$可得$A=P\Lambda P^{-1}$，于是

$$\boldsymbol{A^{100}=P\Lambda P^{-1}\ P\Lambda P^{-1}\ P\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1}}$$

$$\boldsymbol{=P\ \Lambda^{100}\ P^{-1}}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5^{100}&&\\&(-1)^{100}&\\&&(-1)^{100}\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\-1&2&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5^{100}+2&5^{100}-1&5^{100}-1\\5^{100}-1&5^{100}+2&5^{100}-1\\5^{100}-1&5^{100}-1&5^{100}+2\end{pmatrix}$$

三、数字特征相同的一类矩阵——对角化

推论2.25.2

（1）若A有 n 个互异的特征值，则 A与对角阵相 似。

（2）如果 k **重特征值**正好对应 k **个线性无关**的特征向量，则可对角化。

反之不真

若A 有重特征值，不能马上断言A 是否与对角阵相似，

这时要看重根对应的特征向量.

三、数字特征相同的一类矩阵——对角化

n 阶实对称矩阵A**对角化步骤**如下:

(1) 求出特征方程 $|\lambda I - A| = 0$ 的所有不同的实根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，

其中 λ_i 为 A 的 r_i 重特征值 $(i = 1, 2, \cdots, m)$;

(2) 对每一特征值 λ_i，解齐次线性方程组 $(\lambda_i I - A)x = 0$,

求得它的一个基础解系 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$;

(3) 利用施密特正交化方法，把 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir_i}$ 正交化，

然后单位化，得到正交单位向量组 $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \cdots, \beta_{ir_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$;

(4) 记 $P = (\beta_{11}, \beta_{12}, \cdots, \beta_{1r_1}, \beta_{21}, \beta_{22}, \cdots, \beta_{2r_2}, \cdots, \beta_{m1}, \beta_{m2}, \cdots, \beta_{mr_m})$，则 P

为正交矩阵，使

$$P^{-1}AP = \Lambda = \mathrm{diag}(\overbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}^{r_1}, \overbrace{\lambda_2, \cdots, \lambda_2}^{r_2}, \cdots, \overbrace{\lambda_m, \cdots, \lambda_m}^{r_m})$$

注意 矩阵Λ的主对角线元素 λ_i 的重数为 $r_i (i = 1, 2, \cdots, m)$，

且排列顺序相对应。

六、作业

P89 作业2.25 1，2

预习3.1-3.3

观看视频3.1-3.3