2015 线性代数试卷 A 答案和评分标准

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. A 2. C 3. B 4. B 5. D

二、**填空题**（本大题共5小题，每小题4分，满分20分）

6. -1 7. $\dfrac{2}{3}\pi$ 8. 24 9. -1 10. $x_2^2+2x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

11.(**满分 7 分**)

解：原式=$3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}$ ......3 分

$=3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}$ ......5 分

$=-3$ ......7 分

12.（**满分 8 分**）

解: $(A,E)=\begin{pmatrix}2&-3&1&1&0&0\\4&-5&2&0&1&0\\5&-7&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-3&1&1&0&0\\4&-5&2&0&1&0\\1&-2&1&0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&0&-1&1\\4&-5&2&0&1&0\\2&-3&1&1&0&0\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&-2&1&0&-1&1\\0&3&-2&0&5&-4\\0&1&-1&1&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&0&-1&1\\0&1&-1&1&2&-2\\0&3&-2&0&5&-4\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&-2&1&0&-1&1\\0&1&-1&1&2&-2\\0&0&1&-3&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&0&3&0&-1\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&-1&2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&2&-1\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&-1&2\end{pmatrix}$, ...6 分

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-2&1&0\\-3&-1&2\end{pmatrix}$ ......8 分

13.（满分 8 分）

解: 第一个年龄组的 x_n 个生物, 经过 10 年龄为 $[10, 20)$, 由于存活率是 50%, 所以 10 天后, 第二个年龄组的生物个数 $y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$. ......2 分

同理第二个年龄组的 y_n 个生物, 经过 10 天年龄为 $[20, 30)$, 由于存活率是 25%, 故 $z_{n+1} = \frac{1}{4}y_n$. 而第三个年龄组的 z_n 个生物, 经过 10 天全部死亡. ......4 分

第二个年龄组的 y_n 个生物, 在这 10 天当中繁殖的新生命有 $2y_n$ 个, 其年龄是 $[10, 20)$, 第三个年龄组的 z_n 个生物, 在这 10 天中繁殖的新生命有 $\frac{3}{2}z_n$ 个, 所以 $x_{n+1} = 2y_n + \frac{3}{2}z_n$ ......6 分

因此有

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2y_n + \frac{3}{2}z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{4}y_n \end{cases}$$

用矩阵乘法表示

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

于是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$ 8分

四、解答题

14.（满分 9 分）

解: 方程组的增广矩阵

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\1&2&3&3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$ ......2 分

可知 $r(\bar{A})=r(A)=2<4$，方程组有无穷多解 ......4 分

由同解方程组 $\begin{cases}x_1=-1+x_3+x_4\\x_2=1-2x_3-2x_4\end{cases}$

求出方程组的一个特解 $\eta^*=(-1,1,0,0)^T$,

导出组的一个基础解系为 $\xi_1=(1,-2,1,0)^T,\xi_2=(1,-2,0,1)^T$ ......7 分

从而方程组的通解为

$\eta^*+c_1\xi_1+c_2\xi_2=(-1,1,0,0)^T+c_1(1,-2,1,0)^T+c_2(1,-2,0,1)^T$

(c_1,c_2 为任意常数） ......9 分

15.（满分 9 分）

解:

$$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=\begin{pmatrix}-1&1&3&0\\2&2&2&4\\0&0&2&0\\1&5&0&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&3&0\\0&4&8&4\\0&0&2&0\\0&6&3&6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&-3&0\\0&1&2&1\\0&0&1&0\\0&2&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-3&0\\0&1&2&1\\0&0&1&0\\0&0&-3&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&-3&0\\0&1&2&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

......5 分

向量组的秩是 3， ......7 分

一个极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. ......9 分

16. **(满分 9 分)**.

解　由 $AX+E=A^3+X$,得 $(A-E)X=A^3-E$ ......2 分

又由 $A-E=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ 可逆 ......5 分

由 $(A-E)X=A^3-E$,可得 $(A-E)X=(A-E)(A^2+A+E)$

两边左乘 $(A-E)^{-1}$,得到 ......7 分

$$X=A^2+A+E=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&0&1\\1&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&3\\3&2&1\\1&3&3\end{pmatrix}$$ ......9 分

17.（**满分 9 分**）

解　二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$$ ......2 分

求得 A 的特征值为 $\lambda_1=2$,　$\lambda_2=\lambda_3=4$ ......4 分

对应于 λ_1，　λ_2，　λ_3 的标准正交特征向量分别为

$\gamma_1=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$ ，$\gamma_2=(1,0,0)^T$，　$\gamma_3=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$ ......6 分

于是　$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ 是一个正交矩阵，且满足 ......8 分

$$P^{-1}AP=P^TAP=\begin{pmatrix}2&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$$

所以取正交变换 $x=Py$

f　可化为　$f(x)=2y_1^2+4y_2^2+4y_3^2$ ......9 分

五、证明题

18.（**满分 6 分**）

证　由于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，故存在不全为零的常数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$$ ......2 分

其中必有 $k_1\neq 0$ 。否则，如果 $k_1=0$，则上式化为 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

其中 k_2,k_3 不全为零，由此推出 α_2,α_3 线性相关，与向量组中任意两个向量都线性无关的条件矛盾 .....4 分

类似地，可证明 $k_2\neq 0,k_3\neq 0$ ......6 分