积分学笔记

李徐鑫

2018 年 4 月 19 日

目录

0.1 前言

本笔记按照微分学以及积分学分成两篇，按照张筑生教授的《数学分析新讲》作为主线。

编这本笔记的时候，其实蛮纠结选什么书作为笔记的主线的，一开始想选择菲赫金戈尔茨的《微积分学教程》作为主线，但是菲砖果然是菲砖，名不虚传，里面有太多的东西去理解了，所以出于时间的考虑，以及个人的能力的限制，我选择了张筑生教授的《数学分析新讲》系列作为笔记的主线。张筑生教授是我非常敬佩的一位先生，他放弃了太多的太多的功名利禄，为的只是我国的数学基础事业能够更上一层楼，太多的感人的事迹我在此也不便一一叙述，希望大家有时间可以在网上搜索一下张筑生教授，也最好读一读张教授的书，真的是会收益匪浅。但是由于张教授的课本较为抽象，看到一半的时候换成了菲赫金哥尔茨的《数学分析教程》，这本书较《微积分学教程》为简单，与其他分析教材相比省略了数学分析教材之中的一些较为现代的东西，换来了更为直观的感受。过程之中对于其他书籍也略有涉及，也不一一展示了。

作为一名商科的学生，在传统的眼光之中是不需要太过于熟练掌握关于数学的知识点的，但是时代在变化，商科的学生也不应该仅仅满足于商科的内容，而是应该接触新的专业的知识，大数据时代，人工智能横行的世纪，我认为人工智能与财务领域的结合是未来的潮流，区块链技术带来的金融行业的改革也正在悄然的发生，遂做下了这本笔记，日后便于时常复习。

0.1.1 记号

0.1.2 参考书目

- 《数学分析新讲》-张筑生
- 《数学分析》-Rudin
- 《数学分析教程》-史济怀
- 《微积分五讲》-龚昇
- 《数学分析》-王学武，郭林
- 《Thomas' Calculus 13th》
- 《数学分析教程》-菲赫金哥尔茨

第一章　原函数以及不定积分

1.1　原函数以及不定积分的概念

定义 1.1 设函数 f 在区间 I 上面有定义。如果函数 F 在 I 上连续，在 I^0[1] 上可导，且满足条件

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I^0$$

或者

$$dF(x) = f(x)dx, \qquad \forall x \in I^0$$

那么我们就说 F 是 f 的一个原函数。

定理 1.1.1 设函数 f 在区间 I 上面有定义，如果函数 *F(x)* 是函数 f 的一个原函数，那么对于 $\forall C \in E$ 函数

$$F(x) + C$$

也是函数 f 的原函数。并且 f 的任何原函数都能够表示成为这种形式

定义 1.2 设函数 f 在区间 I 上面有定义，如果函数 *F(x)* 是函数 f 的一个原函数，则函数簇

$$F(x) + C$$

表示 f 的一切原函数。我们把这个函数簇，叫做函数 $f(x)$ 的不定积分或者叫做微分形式 $f(x)dx$ 的不定积分，记做

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

在这里，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 被称为被积表达式，而 $\int$ 则是表示不定积分的符号。

[1]这个符号不大认识，猜测应该是指开区间的意思

根据定义我们有

$$(\int f(x)dx)' = f(x), \qquad d(\int f(x)dx) = f(x)dx$$

因此，在允许一个任意常数的意义之下，求不定积分这一个运算恰好是求导或者是求微分的逆运算。[2]

定理 1.1.2 *如果 $F(x)$ 以及 $G(x)$ 分别是函数 $f(x)$ 以及 $g(x)$ 的原函数，那么有*

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

(嘿，刚刚打完脚注就看见这个定理，由于是线性算子，所以说和其他的线性运算结合都是线性运算)

1.1.1 积分表

- $\int 0\mathrm{d}x = C$
- $\int 1\mathrm{d}x = x + C$
- $\int x^a\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
- $\int x^{-1}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = ln|x| + C$
- $\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x = ln|x-a| + C$
- $\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$
- $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{lna} + C$
- $\int cosx\mathrm{d}x = sinx + C$
- $\int sinx\mathrm{d}x = -cosx + C$
- $\int \frac{1}{cos^2x}\mathrm{d}x = tgx + C$
- $\int \frac{1}{sin^2x}\mathrm{d}x = -ctgx + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = arctgx + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x = ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C$

[2]类比线性代数之中的逆矩阵，而且求导和求不定积分都是**线性算子**

- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = arcsinx + C$
- $\int \mathrm{d}x = C$
- $\int \mathrm{d}x = C$
- $\int \mathrm{d}x = C$
- $\int \mathrm{d}x = C$
- $\int \mathrm{d}x = C$

1.2 换元积分法

引理 1.2.1 如果

$$dG(u) = g(u)\mathrm{d}u$$

那么把 u 换成可微函数 $u = u(v)$ 我们仍然有

$$dG(u(v)) = g(u(v))du(v)$$

这就是说从

$$\int g(u)du = G(u) + C$$

可以得到

$$\int g(u(v))du(v) = G(u(v)) + C$$

1.2.1 第一换元法

采用这一种方法来计算 $\int f(x)\mathrm{d}x$, 就要把被积表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 写成两个因式的乘积，前一个因式形状如 $g(u(x))$，后一个因式形状如 $du(x)$, 如果我们求得:

$$\int g(u)\mathrm{d}u = G(u) + C$$

那么

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int g(u(x))du(x) = G(u(x)) + C$$

在具体解决题目的时候，我们不需要每次都写出代表中间变量的符号 u，只要在心目中把 $u(x)$ 当作一个整体来看待就可以了。一般的我们有以下公式

$$\int g(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int g(ax+b)\mathrm{d}(ax+b) \tag{1.1}$$

$$\int g(x^k)x^{k-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int g(x^k)\mathrm{d}x^k \tag{1.2}$$

$$\int \frac{g(lnx)}{x}\mathrm{d}x = \int g(lnx)\mathrm{d}(lnx) \tag{1.3}$$

1.2.2 第二换元法

采用这种方法计算不定积分的时候，我们做适当的变数替换 $x = \psi(t)$，这里的函数 $\psi(t)$ 在区间 I 上严格单调并且连续，在这个区间的内部可导，并且导数不等于零。如果我们求得

$$\int f(\psi(t))\mathrm{d}\psi(t) = G(t) + C$$

那么在式子之中作变数替换 $t = \psi^{-1}(x)$ 就得到

$$\int f(x)\mathrm{d}x = G(\psi^{-1}(x)) + C$$

提示

对于涉及 $\sqrt{a^2 - x^2}$ 或者 $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ 的被积函数，有时候我们可以引入一个辅助的" 角变量"t 作为参量。

- 对于涉及 $\sqrt{a^2 - x^2}$ 的被积函数，可以令 $x = acost$ 或者令 $x = asin$t
- 对于涉及 $\sqrt{a^2 + x^2}$ 的被积函数，可以令 $x = atgt$ 或者令 $x = actg$t
- 对于涉及 $\sqrt{x^2 - a^2}$ 的被积函数，可以令 $x = asect$ 或者令 $x = acosect$

1.2.3 分部积分

求不定积分的另一种的方法是乘积微分公式

$$\mathrm{d}(u(x)v(x)) = v(x)\mathrm{d}u(x) + u(x)\mathrm{d}v(x)$$

我们把这个公式改写为

$$u(x)\mathrm{d}v(x) = \mathrm{d}(u(x)v(x)) - v(x)\mathrm{d}u(x)$$

由此得到

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\mathrm{d}u(x)$$

这就是分部积分的公式。在应用的时候，可以不必引入新的记号 u 和 v，只需要在心中默念哪一个式子是 $u(x)$，把那一个式子当作 $v(x)$

1.3 * 有理函数的积分

有理函数的微分一定是有理函数 [3], 但是作为求导的逆运算的不定积分，却没有这样的性质，不少的初等函数的原函数不再是初等函数，但是一个不定积分不能用初等函数来表示，绝不意味着不定积分不存在，相反，任何连续函数 $f(x)$ 都存在有原函数。

1.3.1 有理分式函数

$$f(x) = P(x)/Q(x)$$

这里的 P(x) 以及 Q(x) 都是实系数的多项式，利用多项式的带余除法，我们总可以把这个有理分式写出以下的形式

$$P(x)/Q(x) = P_0(x) + P_1(x)/Q(x)$$

这里的 $P_0(x)$ 和 $P_1(x)$ 也是实系数的多项式，其中 $P_1(x)$ 的次数低于 $Q(x)$ 的次数。多项式的不定积分是已经知道的，所以我们只需要讨论真分式 $P_1(x)/Q(x)$ 的不定积分。为了记号简单起见，不妨假设 $f(x) = P(x)/Q(x)$ 就已经是即约的真分式，即假设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是互素的实系数多项式，P(x) 的次数低于 Q(x) 的次数。

在实数范围内，一个多项式的不可约因式只可能是一次的或者是二次的。设 Q(x) 的不可约因式分解如下：

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1}...(x-a_r)^{k_r} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{k_1} \cdots (x^2+p_sx+q_s)^{k}$$

这里的 a_i 是实数，$x^2+p_jx+q_j \quad (j=1,...,s)$ 是不可约的实系数二次三项式。代数学中有这样的定理

定理 1.3.1 如上所属的真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，可以唯一的表示为以下的形状的简单

[3]有理函数是通过多项式的加减乘除得到的函数。在数学中，理性函数是可以由有理分数定义的任何函数，即代数分数，使得分子和分母都是多项式。

分式之和:

$$\sum_{i=1}^{r}(\frac{A_i}{x-a_i}+\frac{A_i'}{(x-a_i)^2}\cdots+\frac{A_i^{k_i-1}}{(x-a_i)^{k_i}})+ \tag{1.4}$$
$$\sum_{j=1}^{s}(\frac{M_jx+N_j}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{M_j'x+N_j'}{(x^2+p_jx+q_j)^2}+\cdots+\frac{M_j^{(k_j-1)}x+N_j^{(k_j-1)}}{(x^2+p_jx+q_j)^{k_j}})$$

这里的 A 以及 M，N 都是实常数。该定理之中的分解式，通常就叫做真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的简单分式分解或者部分分式分解。

证明：0.99999....=1 我们使用反证法证明：假设 $0.99999....\neq 1$

记 I=0.99999....= $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-0.1^n$

那么存在一个量使得 $1-I=P$, 且 $P\neq 0$

但是 $\lim\limits_{n\to+\infty} P=0.1^n=0$

所以不存在这样的一个量 P，所以假设不成立。证毕。

1.4 某些可有理化的被积表达式

- $R(sinx, cosx)\mathrm{d}x$
- $R(x, \sqrt{a^2+bx+c})\mathrm{d}x$
- $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+\beta}{\nu x+\delta}})$
- $x^\lambda(a+bx^\mu)^\nu$

在这一节，我们用 $R(u,v)$ 表示变元 u 和 v 的多项式。(即有变元 u,v 和实数经过有限次加法以及乘法运算生成的式子)

1.4.1 $R(sinx, cosx)dx$

被积表达式 $R(sinx, cosx)dx$ 可以通过变元替换

$$tan\frac{x}{2}=t,\text{即}x=2arc\mathrm{tan}t$$

实现有理化。事实上，我们有

$$sinx=2tan\frac{x}{2}cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$cosx = (1 - tan^2\frac{x}{2})cos^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

于是得到了

$$R(sinx, cosx)\mathrm{d}x = R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

变元替换

$$tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2arctant$$

这种替换叫做万能替换。所谓的万能指的是，任何三角函数的有理式均能够用这种变换实现有理化。(一般来说，万能变换都不是最简单的变换，我们要发现题目的结构，进而选择出最合适的方法。针对一般的通法也是这样的情况，通法是最容易想到的方法，但是往往不是最简便，最直接的方法)

1.4.2 $R(x, \sqrt{a^2+bx+c})\mathrm{d}x$

我们有

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a} = \pm[\sqrt{|a|}(x + \frac{b}{a})]^2 \pm (\sqrt{|c - \frac{b^2}{4a}|})^2$$

通过替换

$$u = \sqrt{|a|}(x + \frac{b}{a})$$

可以将 $\sqrt{a^2+bx+c}$ 化简成为以下三种形式之一

$$\sqrt{u^2+\lambda^2}, \quad \sqrt{u^2-\lambda^2}, \quad \sqrt{-u^2+\lambda^2}$$

被开方的式子恒负的情况我们可以不考虑，我们把 $R(x, \sqrt{a^2+bx+c})\mathrm{d}x$ 转化为：

$$R_1(u, \sqrt{u^2+\lambda^2})\mathrm{d}u, \quad R_2(u, \sqrt{u^2-\lambda^2})\mathrm{d}u$$
$$R_3(u, \sqrt{-u^2+\lambda^2})\mathrm{d}u$$

对于这三种情况，分别令

$$u = \lambda tant \qquad u = \lambda sect \qquad u = \lambda sint$$

就可以将被积表达式转化为三角函数的有理式。再使用第一种情况的手续就能够完成最后的有理化的进程。

1.4.3 $R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+\beta}{\nu x+\delta}})\mathrm{d}x$

如果 $a\delta-\beta\nu=0$ 我们可以假设[4]

$$\frac{a}{\nu}=\frac{\beta}{\delta}=\lambda$$

那么

$$R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+\beta}{\nu x+\delta}})\mathrm{d}x=R(x,\sqrt[n]{\lambda})\mathrm{d}x$$

它本身就已经是有理式。因此不妨设

$$a\delta-\beta\nu\neq 0$$

在被积表达式之中作替换

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+\beta}{\nu x+\delta}}$$

即

$$x=\frac{\delta t^n-\beta}{a-\nu t^n}$$

我们得到

$$\mathrm{d}x=\frac{n(a\delta-\beta\nu)t^{n-1}}{(a-\nu t)^2}\mathrm{d}t$$

于是 $R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+\beta}{\nu x+\delta}})\mathrm{d}x$ 有理化成为

$$R(\frac{\delta t^n-\beta}{a-\nu t^n},t)\frac{n(a\delta-\beta\nu)t^{n-1}}{(a-\nu t)^2}\mathrm{d}t$$

本段的讨论也适用于 $\nu=0$ 的情况 (这个时候不妨假设 $\delta=1$)，我们指出：对于

$$R(x,\sqrt[n]{ax+\beta})\mathrm{d}x$$

可以做替换 $t=\sqrt[n]{ax+\beta}$

---

[4]这里的 $a\delta-\beta\nu=0$ 如果从线性代数的眼光来看，有点像二阶矩阵求行列式，跟着接下来的步骤，会发现这说明列向量不是 Linear independent 的，说明其行列式为 0。这就同时说明了存在线性相关的列向量则行列式为 0

1.4.4 二项型微分形式 $x^{\lambda}(a+bx^{\mu})^{\nu}$

这里设 $a,\beta \in R,\lambda,\mu,\nu \in Q$，并且设 a,β,μ,ν 都不等于 0。与上述情况不同，这里有可能在根号里面套着另外一个根号。我们为了消除根号的嵌套，我们作变换

$$x^{\mu} = t \qquad \text{即} x = t^{\frac{1}{\mu}}$$

于是

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu} t^{\frac{1}{\mu}-1} \mathrm{d}t$$

所讨论的微分表达式也可以换成没有根号嵌套的形式

$$\begin{aligned} x^{\lambda}(a+bx^{\mu})^{\nu}\mathrm{d}x &= t^{\frac{\lambda}{\mu}}(a+\beta t)^{\nu}\frac{1}{\mu}t^{\frac{1}{\mu}-1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\mu}t^{\frac{\lambda+1}{\mu}-1}(a+\beta t)^{\nu}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\mu}t^{\frac{\lambda+1}{\mu}-1+\nu}(\frac{a+\beta t}{t})^{\nu}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

如果 $\frac{\lambda+1}{\mu} \in Z$，或者 $\frac{\lambda+1}{\mu}+\nu \in Z$，或者 $\nu \in Z$ 那么这里的情况就属于上一个阶段讨论过的情况。

切比雪夫证明了除了上述情况，二项形式的微分式子都不能积分成为有限的形式。

第二章　定积分

2.1　定义以及初等形式

定积分的概念的精确化，是黎曼 (Riemann) 的贡献，所以人们又把这种积分叫做黎曼积分。这一节我们就是讨论这一个重要的概念。

首先，对于所涉及的术语以及记号做一些说明，所谓闭区间的一个分割，就是说，插入到 a 以及 b 之间的有限个分点

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

这些分点把 [a,b] 分成 m 个闭的子区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{m-1}, x_m]$$

我们把

$$|P| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_m\}$$

叫做分割 P 的模[1]。在分割 P 的每一个闭子区间之上任意选取一点

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \cdots, m$$

我们把这样的 m 个点 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$, 叫做分割 P 之中的一组标志点，并且约定用单独一个字母 ξ 来表示它们

设函数 f 在闭区间 [a,b] 上有定义。对于在其中的任意一个分割

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

以及相应于这分割的任意一组标志点 ξ, 可以做和数

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \Delta x_i$$

[1] 模这种东西，在线性代数之中一般叫做范数

我们把这样的和数叫做函数 f 在闭区间 [a,b] 上的积分和 (或者叫做黎曼和)。

如果闭区间的 [a,b] 的分割的序列 $\{P^n\}$ 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}|P^n|=0$$

我们就说该序列是一个 **无穷细分割序列**。

定义 2.1 设函数 f 在闭区间 *[a,b]* 上有定义，如果存在实数 I，使得对于任意无穷细分割序列 $\{P^n\}$，不论相应于每个分割 P^n 的标志点组 ξ^n 如何选择，都有

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(f,P^n,\xi^n)=I$$

那么我们就说函数 f 在 *[a,b]* 上可积，并且把 I 称为函数 f 在 *[a,b]* 上的定积分，记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sigma(f,P^n,\xi^n)=I$$

这里的 $\int$ 叫做积分号，$f(x)\mathrm{d}x$ 叫做被积表达式，a 和 b 叫做积分限 *(*a 叫做下限，b 叫做上限*)*[2]

我们还可以用 $\varepsilon=\delta$ 方式来重新叙述积分和的极限的定义

定义 2.2 设函数 f 在闭区间 *[a,b]* 上有定义，$I\in R$，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要 $|P|<\delta$，不论相应的标志点组 ξ 如何选择，总有

$$|\sigma(f,P^n,\xi^n)-I|<\varepsilon$$

那么我们就说函数 f 在区间 *[a,b]* 可积，并且把 I 叫做函数 f 在区间 *[a,b]* 上的积分，记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{|p|\to 0}\sigma(f,|P|,\xi)=I$$

这两个定义是等价的定义

定理 2.1.1 *(积分的线性)* 设函数 f 以及 g 在 *[a,b]* 上可积，$\lambda\in R$，则函数 $f+g$ 以及函数 λf 也都在 *[a,b]* 上可积，并且

$$\int_a^b(f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b\lambda f(x)\mathrm{d}x=\lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

[2]我原本以为定积分和不定积分的积分号是不一样的积分号，但是其实是没有区别的，这里的积分号与会计学里面的借贷记帐法的借和贷一样，仅仅是表示一个记号

下面的引理指出了函数可积点一个必要条件

引理 2.1.1 *设函数 f 在 [a,b] 上可积，那么 f 在 [a,b] 上有界。*

证明 使用反证法。由于:

$$\lim_{|p|\to 0} \sigma(f,|P|,\xi) = I$$

所以对于 $\varepsilon = 1 > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $|P| < \delta$，不论相应的标志点组 ξ 怎么选择，都有

$$|\sigma(f,|P|,\xi)| \le |\sigma(f,|P|,\xi) - I| + |I| < 1 + |I|$$

我们选定这样的一个分割 P，假设 f 在 [a,b] 上无界，那么至少存在分割 P 的一个闭的子区间 $[x_{j-1}, x_j]$, 使得 f 在这个闭子区间上面是无界的，我们这样来选取 ξ: 先任意选定

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \qquad \forall i \ne j$$

然后选择 $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ 来满足以下条件

$$|f(\xi_j)|\Delta x_j > |\sum_{i\ne j} f(\xi_i)\Delta x_i| + 1 + |I|$$

对于这样选取的 ξ 就有

$$\begin{aligned}
1 + |I| &> |\sigma(f,P,\xi)| \\
&= |\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i| \\
&\ge |f(\xi_j)|\Delta x_j - |\sum_{i\ne j} f(\xi_i)\Delta x_i| \\
&> 1 + |I|
\end{aligned}$$

这一个矛盾说明了所做的假设不能成立，我们使用反证法证明了其必须有界。

定理 2.1.2 *(积分的可加性) 设 $a < b < c$, 如果函数 f 在 [a,b] 以及 [b,c] 上都可积，那么它在 [a,c] 上也可积*

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

定理 2.1.3 *(积分的单调性)* 设 $a < b$，函数 f 以及 g 在区间 *[a,b]* 上面可积，并且满足

$$f(x) \leq g(x), \qquad \forall x \in [a,b]$$

则一定有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(提示：构造新函数 $f(x) - g(x)$)

定理 2.1.4 *(积分中值定理)* 设 $a < b$，函数 f 在 *[a,b]* 上可积 *(于是 f 在 [a,b] 上有界)*。如果

$$m \leq f(x) \leq M, \qquad \forall x \in [a,b]$$

那么

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

特别的，如果 f 在 *[a,b]* 上连续，那么存在 $c \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$$

(提示：利用单调性易证)

2.2 微积分基本定理

2.2.1 牛顿-莱布尼兹公式 (微积分第一定理)

定理 2.2.1 *(牛顿-莱布尼兹公式)*，假设函数 f 在闭区间 *[a,b]* 连续. 如果存在函数 F, 它在 *[a,b]* 连续，在 *(a,b)* 可导，并且满足

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in (a,b)$$

那么函数 f 在 *[a,b]* 上面可积，并且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

证明 考察 [a,b] 的一个任意分割

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

根据朗格朗日中值定理，我们容易得到

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^{m}(F(x_i) - F(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{m} F'(\eta_i)(x_i - x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{m} f(\eta_i)\Delta x_i \\ &= \sigma(f, P, \eta) \end{aligned}$$

由于函数 f 在 [a,b] 上的一致连续性，对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得只要

$$u, v \in [a, b], \qquad |u - v| < \delta$$

所以我们有

$$|f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

于是，当 $|P| < \delta$ 的时候，相对于这分割的任意标志点组 ξ，都有

$$\begin{aligned} |\sigma(f, P, \xi) - (F(b) - F(a))| &= |\sigma(f, P, \xi) - \sigma(f, P, \eta)| \\ &= |\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{m} f(\eta_i)\Delta x_i| \\ &\le \sum_{i=1}^{m} |f(\xi_i) - f(\eta_i)|\Delta x_i \\ &\le \frac{\varepsilon}{b - a}\sum_{i=1}^{m} \Delta x_i \\ &= \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

这就证明了函数 f 在区间 [a,b] 可积，并且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

为了书写方便，我们引入记号

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

在上述定理的条件下，定积分的计算归结于求原函数-不定积分。为了求不定积分，我们又可以使用换元积分以及分部积分。我们把以上所说的手续概括成直接处理定积分的换元积分法以及分部积分法，以便于后续的使用。

定义 2.3 *如果函数 $\varphi(t)$ 在开区间的 (a,b)，每一点可导，并且导函数 $\varphi'(t)$ 在 (a,b) 连续，那么我们就说函数 $\varphi(t)$ 在开区间连续可微，或者说 $\varphi(t)$ 在 (a,b) 上是 C^1 类函数。*

定义 2.4 *如果函数 $\varphi(t)$ 在闭区间的 [a,b]，每一点可导，并且导函数 $\varphi'(t)$ 在 [a,b] 连续，那么我们就说函数 $\varphi(t)$ 在闭区间连续可微，或者说 $\varphi(t)$ 在 [a,b] 上是 C^1 类函数。*

注记 下面的一种定义的一个等价说法是：设函数 $\varphi(t)$ 在闭区间 [a,b] 上有定义，如果存在一个开区间 (A,B)⊃[a,b] 以及在这个开区间上连续可微的函数 $\phi(t)$，使得

$$\varphi(t) = \phi(t), \qquad \forall t \in [a,b]$$

那么我们就说函数 $\varphi(t)$ 在 [a,b] 连续可微，或者说函数 $\varphi(t)$ 在 [a,b] 上是 C^1 类函数

定理 2.2.2 *定积分的换元法：设函数 $\varphi(t) \in [a,b].\varphi(a) = a, \varphi(b) = b, \varphi((a,b)) \supset (a,b)$，如果函数 f 在 [a,b] 上连续，那么*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

还能写成更容易记忆的形式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi(t)$$

定理 2.2.3 *(定积分的分部积分公式) 设函数 $u, v \in C^1[a,b]$，则*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

还可以写成容易记忆的形式

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x)$$

2.2.2 将定积分看成是积分上限的函数 (微积分第二定理)

为了方便起见，不管是 a<b 或者是 a>b, 我们都用记号 [a,b] 来表示介于 a,b 之间的所有实数的集合，并且称之为闭区间。

引理 2.2.1 *假设函数 f 在 [a,b] 可积，并且假设*

$$|f(x)| \leq K, \forall x \in [a,b]$$

则

$$|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x| \leq K|b-a|$$

证明 先假设 a<b, 由于

$$-K \leq f(x) \leq K, \quad \forall x \in [a,b]$$

可以得到

$$-K(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq K(b-a)$$

即

$$|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x| \leq K|b-a|$$

不妨再看看 $a > b$ 的时候, 这个时候有

$$|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x| = |\int_b^a f(x)\mathrm{d}x| \leq K|a-b| = K|b-a|$$

假设 f 在 [a,b] 可积, 则对于任何的 $x \in [a,b]$ 可以定义

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

(这里为了避免与积分上限混淆，选择了 t 作为积分变元，而这里的 t 仅仅是作为一个哑变量) 换句话说，我们可以将定积分看成是积分上限的函数。

利用这种思想，我们可以利用微积分第二定理来证明微积分第一定理.

证明 假设 F 以及 G 都是 f 的原函数，且 $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 那么我们有

$$F(b) - F(a) = (G(b) + C) - (G(a) + C) = G(b) - G(a)$$

由于

$$G(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \quad G(a) = 0$$

所以

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

定理 2.2.4 设函数 f 在 $[a,b]$ 可积，那么函数

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 $[a,b]$ 连续

证明 可积函数是有界的，假设

$$|f(t) \leq K, \quad \forall t \in [a,b]$$

对于任意的 $x_0 \in [a,b]$, 我们有

$$\phi(x) - \phi(x_0)| = |\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t| \leq K|x - x_0|$$

这就证明了 ϕ 在 x_0 的连续性

定理 2.2.5 假设函数 f 在 $[a,b]$ 可积，$x_0 \in [a,b]$。如果 f 在 x_0 点处连续，那么函数

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 x_0 点可导，而且

$$\phi'(x) = f(x_0)$$

证明 由于函数 f 在 x_0 处连续，那么对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得只要

$$|t - x_0| < \delta$$

就有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

于是，只要

$$x \in [a,b], \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

就有

$$
\begin{aligned}
&|\frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)| \\
&=|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{d}t-f(x_0)| \\
&=|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}[f(t)-f(x_0)]\mathrm{d}t| \\
&=\frac{1}{|x-x_0|}|\int_{x_0}^{x}[f(t)-f(x_0)]\mathrm{d}t| \\
&\leq\frac{1}{|x-x_0|}\cdot\varepsilon|x-x_0|=\varepsilon
\end{aligned}
$$

这就证明了

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$$

同时，我们也可以使用类似的方法证明: 对于 $a<b$ 的情况，如果函数 f 在闭区间 [a,b] 可积，在 a 点右连续 (在 b 点左连续)，那么函数

$$\phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

就在 a 点的右侧可导 (在 b 点点左侧可导)，并且

$$\phi'_+(a)=f(a)\qquad\phi'_-(b)=f(b)$$

因此，如果函数 f 在闭区间连续，那么函数

$$\phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

就在闭区间 [a,b] 连续可微，并且

$$\phi'(x)=f(x),\quad\forall x\in[a,b]$$

对于以积分下限为变元的函数

$$\psi(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=-\int_b^x f(t)\mathrm{d}t$$

也有相应的结果。只要 f 在 [a,b] 可积，这样的函数就在 [a,b] 连续，如果 f 在 $x_0\in(a,b)$ 连续 (在 a 点右连续，在 b 点左连续) 那么 ψ 就在 x_0 处可导 (在 a 点右可导，或者在 b 点左可导)，并且

$$\psi'(x_0)=-f(x_0)$$

$$\psi'_+(a) = -f(a), \qquad \psi'(b)_- = -f(b)$$

因此，如果函数 f 在闭区间 [a,b] 上面连续，那么函数 ψ 就在闭区间 [a.b] 上连续可微, 并且

$$\psi'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

2.3 定积分的几何运用

2.3.1 平面图形的面积

介于直线 $x = a, x = b, y = 0$ 以及曲线 $y = f(x)$ 之间的图形的面积可以表示为定积分

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

我们把微分式子 $f(x)\mathrm{d}x$ 叫做 **面积微元**，它代表底是 $\mathrm{d}x$ 高是 $f(x)$ 的一个微小的矩形的面积，积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 实际上是这样的小矩形的面积之和的极限。

如果函数 $f(x)$ 以及 $g(x)$ 在 [a,b] 上可积，并且满足条件

$$f(x) \geq g(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

那么介于直线 $x = a, x = b, y = 0$ 以及曲线 $y = f(x)$ $y = g(x)$ 之间的图形的面积可以表示为定积分

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$$

这里的面积微元是 $(f(x) - g(x))\mathrm{d}x$

2.3.2 极坐标

假设给定了由极坐标表示的曲线

$$r = r(\theta), \qquad \alpha \leq \beta$$

我们来求这曲线以及射线 $\theta = \alpha$ 和 $\theta = \beta$ 所围成的图形的面积。先来看看最简单的情况：$r(\theta) = R$ 是一个常值函数，就是说这一个曲线是一段圆弧，这时候显然有

$$S = \frac{1}{2}R^2(\beta - \alpha)$$

再来看看一般的情况，对于角度的变换范围 $[\alpha, \beta]$ 作一个分割

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n = \beta$$

并且取

$$\omega_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i], i = 1, 2, \cdots, n$$

于是，夹在射线 $\theta = \theta_{i-1}, \theta = \theta_i$ 以及曲线 $r = r(\theta)$ 之间的图形的面积可以近似的表示为

$$\frac{1}{2} r^2(\omega_i) \Delta\theta_i$$

这里的

$$\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$$

整个图形的面积近似的表示成为

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\omega_i) \Delta\theta_i$$

让 $\max\Delta\theta_i \to 0$ 我们得到

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) \mathrm{d}\theta$$

我们将微分式 $\frac{1}{2} r^2(\theta) \mathrm{d}\theta$ 叫做极坐标表示的 **面积微元**，它表示夹角为 $\mathrm{d}\theta$, 半径为 $r(\theta)$ 的一个微小扇形的面积。积分 $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) \mathrm{d}\theta$ 可以看成是这样的微小扇形的面积之和的极限

2.3.3 曲线的弧长

考察 OXY 平面上的参数曲线 γ:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad \alpha \leq \beta$$

这里的 $x(t)$ 以及 $y(t)$ 都是 C^1 类函数，为了求曲线 γ 的弧长，我们用一组分点把 $[\alpha, \beta]$ 分成若干小段:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$$

相应的，曲线 γ 也就被分成了若干段的曲线弧。把每一个小段的曲线弧的两端用一条直线段连接起来，得到 γ 的一条内接折线，其长度为

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))}$$

根据拉格朗日定理，这内接折线的长度又可以表示为

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i'))^2} \Delta t_i$$

这里的 $\tau, \tau' \in (t_{i-1}, t_i, \Delta_i = t_i - t_{i-1}$。我们看见，折线长的这一个表示很像以下的积分和

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i'))^2} \Delta t_i$$

下面，我们证明，当 $\lambda = max \Delta t_i \to 0$ 的时候应该有

$$|\rho - \sigma| \to 0$$

因而

$$\lim_{\lambda \to 0} \rho = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \mathrm{d}t$$

这个极限就是应该是曲线的弧长 s，即

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \mathrm{d}t$$

现在，我们来证明

$$\lim_{\lambda \to 0} |\rho - \sigma| = 0$$

为此我们需要使用这个不等式[3]

$$|\sqrt{A^2 + B^2} - \sqrt{A^2 + C^2} \leq |B - C|$$

对于 $A = x'(\tau_i), A = y'(\tau_i), C = y'(\tau_i')$，运用上述不等式, 我们有

$$|\rho - \sigma| \leq \sum_{i=1}^{n} |y'(\tau_i) - y'(\tau_i')| \Delta t_i$$

由于 $y'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 的一致连续性，对于任意的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得 $\lambda < \delta$ 时有

$$|y'(\tau_i) - y'(\tau_i')| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}$$

这时候就有

$$|\rho - \sigma| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}(\beta - \alpha) = \varepsilon$$

[3]利用分母有理化 + 放缩可以获得

至此，我们证明了

$$\lim_{\lambda\to 0}\rho = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t$$

对于 C^1 类的参数曲线

$$x=x(t),\qquad y=y(t),\qquad \alpha\le t\beta$$

我们有弧长公式

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t$$

这里的表达式 $\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t$ 被称为参数表示曲线的 **弧微元**。

对于显式表示的 C^1 类的曲线，

$$y=y(t),\qquad \alpha\le t\beta$$

我们有弧长公式

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{(1^2+(y(x))^2}\mathrm{d}x$$

对于极坐标表示的 C^1 类曲线

$$r=r(\theta),\qquad \alpha\le t\beta$$

可以改的成参数形式之后再进行表示

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta$$

2.4 定积分存在的一般条件

我们将定积分定义为极限

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{|p|\to 0}\sigma(f,|P|,\xi)=I$$

本节就来探讨这样的极限的存在条件，在第一节之中我们已经指出来了，如果要使得上述极限存在，函数 f 必须在 [a,b] 上是有界的。这是定积分存在的一个必要条件，接下来我们在 f 有界的前提之下进行进一步的探讨。对于 [a,b] 的一个分割

$$P: a=x+0<x_1<\cdots<x_n+b$$

函数 f 在每一个子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上具有有穷的下确界以及上确界

$$m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x), \qquad M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$$

我们记

$$\omega_k = M_k - m_k$$

为了方便起见，引入记号

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

以及

$$\omega = M - m$$

定义 2.5 *我们分别把和数*

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

称为函数 f 关于分割 P 的下和以及上和

由于对于下和和上和的研究是法国数学家达布 (Darboux) 倡议的，所以这样的和数又叫做达布和 (达布上和和达布下和)

我们注意到，函数 f 关于分割 P 的一切积分和 (黎曼和)$\sigma(f,P,\xi)$ 都介于达布上和和达布下和之间

$$L(f,P) \le \sigma(f,P,\xi) \le U(f,P)$$

还容易看出，对于任意给定的分割 P，应该有

$$\inf_{\xi} \sigma(f,P,\xi) = L(f,P)$$

$$\sup_{\xi} \sigma(f,P,\xi) = U(f,P)$$

这里的 $\inf_\xi, \sup_\xi$ 分别表示对于一切可能的 ξ 取 $\sigma(f,P,\xi)$ 的下确界以及上确界。

引理 2.4.1 对于 *[a,b]* 的一个分割

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

和由 P 添加一个分点 $x‘ \in [x_{k-1}, x_k]$ 而形成的分割 $P‘$，我们有

$$(1) L(f,P) \le L'(f,P) \le L(f,P) + \omega|P|$$

$$(2) U(f,P) \ge U'(f,P) \ge U(f,P) - \omega|P|$$

证明 下和 $L(f,P)$ 以及 $L(f,P')$ 的不同之处仅仅在于前者的项

$$m_k(x_k - x_{k-1})$$

被代之以

$$m'_k(x' - x_{k-1}) + m''_k(x_k - x')$$

这里的

$$m'_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x']} f(x), \quad m''_k = \inf_{x \in [x', x_k]} f(x)$$

因而

$$\begin{aligned} L(f,P') - L(f,P) &= m'_k(x' - x_{k-1}) + m''_k(x_k - x') - m_k(x_k - x_{k-1}) \\ &= (m'_k - m_k)(x' - x_{k-1}) + (m''_k - m_k)(x_k - x') \end{aligned}$$

但是显然有

$$m_k \le \begin{matrix} m'_k \\ m''_k \end{matrix} \le M_k$$

所以

$$\begin{aligned} 0 &\le L(f,P') - L(f,P) \\ &\le (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\le (M - m)|P| = \omega|P| \end{aligned}$$

这就证明了结论 (1)

$$L(f,P) \le L(f,P') \le L(f,P) + \omega|P|$$

至于结论 (2) 也可以用类似的方法证明，或者可以使用关系式

$$U(f,P) = -L(-f,P)$$

从结论 1 推出。

推论 2.4.0.1 设分割 P' 是由分割 P 添加 l 个分点而成，则

$$(1)L(f,P) \leq L(f,P') \leq L(f,P) + l\omega|P|$$

$$(2)U(f,P) \geq U'(f,P) \geq U(f,P) - l\omega|P|$$

引理 2.4.2 设 P_1, P_2 是 *[a,b]* 的任意两个分割，则有

$$L(f,P_1) \leq U(f,P_2)$$

证明 以 P' 表示有 P_1 的分点以及 P_2 的分点合在一起做的分割，则有

$$L(f,P_1) \leq L(f,P') \leq U(f,P') \leq U(f,P_2)$$

以下我们记

$$\overline{I} = \inf_P L(f,P), \quad \underline{I} = \sup_P L(f,P)$$

这里的 $\inf\limits_P L(f,P), \sup\limits_P L(f,P)$ 表示分别对于 [a,b] 的一切可能分割 P 取 $L(f,P)$ 的下确界以及 $U(f,P)$ 上确界，$\overline{I}, \underline{I}$ 分别叫做 f 在 [a,b] 上面的达布上积分以及达布下积分。由上述引理可知

$$\overline{I} \geq \underline{I}$$

引理 2.4.3 我们有

$$(1)\lim_{|P|\to 0} L(f,P) = \underline{I}$$

$$(2)\lim_{|P|\to 0} U(f,P) = \overline{I}$$

证明 因为

$$\underline{I} = \sup_P L(f,P)$$

所以对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在一个分割

$$P_0 : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_l = b$$

使得

$$\underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,P_0) \leq \underline{I}$$

下面我们指出，只要分割满足

$$|P| < \delta = \frac{\varepsilon}{2l\varepsilon + 1}$$

(这里的 l 是 P_0 的分点个数) 就有

$$\underline{I} - \varepsilon < L(f, P) \leq \underline{I}$$

事实上，如果把由 P_0 以及 P 的分点合在一起做成的分割记为 P'，那么

$$\begin{aligned}\underline{I} &\geq L(f, P)\\ &\geq L(f, P') - l\omega|P|\\ &\geq L(f, P) - l\omega|P|\\ &> \underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \underline{I} - \varepsilon\end{aligned}$$

以上的讨论，已经证明了

$$\lim_{|P|\to 0} L(f, P) = \underline{I}$$

同理可以证明

$$\lim_{|P|\to 0} U(f, P) = \overline{I}$$

现在我们来讨论有界函数 f 在有界闭区间 [a,b] 可积的充分必要条件。

定理 2.4.1 *设 $a, b \in R$, 函数 f 在闭区间 [a,b] 有定义并且有界，则以下三条件互相等价:*

(1) 对于任何 $\varepsilon > 0$，存在 [a,b] 的分割 P，使得

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

(2) 函数 f 在 [a,b] 上的达布下积分以及达布上积分相同

$$\underline{I} = \overline{I}$$

(3) 函数 f 在 [a,b] 可积.

证明 我们按照下列顺序进行证明”(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1)”

1、(1) $\Rightarrow$ (2) 由于

$$0 \leq \overline{I} - \underline{I} \leq U(f, P) - L(f, P)$$

所以条件 (1) 蕴含着

$$0 \le \overline{I} - \underline{I} < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

由此我们可以得到

$$\underline{I} = \overline{I}$$

2、(2) $\Rightarrow$ (3), 记 $I = \underline{I} = \overline{I}$ 我们有

$$\lim_{|P|\to 0} L(f,P) = \lim_{|P|\to 0} U(f,P) = I$$

又因为

$$L(f,P) \le \sigma(f,P,\xi) \le U(f,P)$$

所以

$$\lim_{|P|\to 0} \sigma(f,|P|,\xi) = I$$

3、(3) $\Rightarrow$ (1) 按照可积性的定义，存在极限

$$\lim_{|P|\to 0} \sigma(f,|P|,\xi) = I$$

于是，对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得只要 $|P| < \delta$ 就有

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \le L(f,P) \le U(f,P) \le I + \frac{\varepsilon}{3}$$

由此得到

$$U(f,P) - L(f,P) \le \frac{2\varepsilon}{3} \le \varepsilon$$

注记　从上述的定理的证明可以看出: 对于在 [a,b] 可积函数 f，应该有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \overline{I} = \underline{I}$$

我们接下来把上述定理改写称为更容易应用的形式. 为此，首先介绍一些符号，对于 [a,b] 的分割

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

我们记

$$\Omega(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$$

这里的

$$\omega_i = M_i - m_i$$

显然有

$$\Omega(f,P) = U(f,P) - L(f,P)$$

因而

$$\lim_{|P|\to 0} \Omega(f,P) = \overline{I} - \underline{I}$$

采用这样的记号，我们把上述定理改写如下

定理 2.4.2 *设 $a,b \in R$, 函数 f 在闭区间 [a,b] 上有定义并且有界，则以下的三条件互相等价*

(1) 对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 [a,b] 的分割 P, 使得

$$\Omega(f,P) < \varepsilon$$

(2) $\lim\limits_{|P|\to 0} \Omega(f,P) = 0$

(3)f 在 [a,b] 可积

例题 证明黎曼函数可积

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{如果 } x = \dfrac{p}{q}(q>0) \text{ 是既约分数} \\ 0 & \text{如果 x 是无理数} \end{cases}$$

我们来证明函数 R 在任意的闭区间 [a,b] 可积。

证明 设 ε 是任意正数。考察闭区间 [a,b] 之中的所有的既约分数 $\frac{p}{q}(q>0)$，我们可以断定，在这些既约分数之中，至多只有有限多个可以使得

$$\frac{1}{q} \geq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

把这有限多个既约分数记为

$$r_1, \cdots, r_l$$

取 [a,b] 的分割 P, 使得

$$|P| < \frac{\varepsilon}{4l}$$

对于这个分割 P, 我们把 $\Omega(R,P)$ 分成两个部分

$$\Omega(R,P)=\sum_i{}'\omega_i\Delta x_i+\sum_i{}''\omega_j\Delta x_j$$

其中 $\sum_i{}'\omega_i\Delta x_i$ 涉及的子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 不含邮任何一个 r_k，而 $\sum_i{}''\omega_j\Delta x_j$ 涉及的子区间 $[x_{j-1},x_j]$ 含有 r_k，因为 $\sum_i{}''$ 的加项不超过 2l 个，所以

$$\begin{aligned}\Omega(R,P)&=\sum_i{}'\omega_i\Delta x_i+\sum_i{}''\omega_j\Delta x_j\\&<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_i{}'\Delta x_i+\sum_i{}''\Delta x_j\\&<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+2l|P|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

这就证明了黎曼函数的可积性。

2.5 可积函数类

我们可以利用上一节推导的充分必要条件考察可积函数类。将指出：这类函数对于相加，相乘以及取绝对值的运算等是封闭的。还将指出：任何连续的函数或者是担待哦的函数都属于可积函数类。我们看到了可积函数类的范围是很广泛的。

引理 2.5.1 假设函数 φ 在区间 J 上面有定义，我们记

$$M(\varphi)=\sup_{x\in J}\varphi(x),\qquad m(\varphi)=\inf_{x\in J}\varphi(x)$$

$$\omega(\varphi)=M(\varphi)-m(\varphi)$$

则有

$$\sup_{x',x''\in J}|\varphi(x')-\varphi(x'')|=\omega(\varphi)$$

证明 对于 $\omega(\varphi)=M(\varphi)-m(\varphi)=0$ 的情况，显然有

$$\sup_{x',x''\in J}|\varphi(x')-\varphi(x'')|=0=\omega(\varphi)$$

以下设 $\omega(\varphi)=M(\varphi)-m(\varphi)>0$

对于任何的 $x', x'' \in J$ 显然有

$$\left.\begin{matrix}\varphi(x') - \varphi(x'') \\ \varphi(x'') - \varphi(x')\end{matrix}\right\} \le M(\varphi) - m(\varphi) = \omega(\varphi)$$

因而

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \le \omega(\varphi)$$

另一方面，对于任何的 $0 < \varepsilon < \omega(\varphi)$ 存在 $x', x'' \in J$ 满足条件

$$\varphi(x') > M(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} > m(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2} > \varphi(x'')$$

于是

$$\varphi(x') - \varphi(x'') > M(\varphi) - m(\varphi) - \varepsilon = \omega(\varphi) - \varepsilon$$

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| > \omega(\varphi) - \varepsilon$$

通过以上的讨论，我们已经证明了

$$\sup_{x', x'' \in J} |\varphi(x') - \varphi(x'')| = \omega(\varphi)$$

定理 2.5.1 *假设函数 $f(x)$ 以及 $g(x)$ 在 [a,b] 上可积，λ 是一个常数，那么*

(1)$f(x) + g(x)$ 在 [a,b] 上可积

(2)$\lambda f(x)$ 在 [a,b] 上可积

(3)$|f(x)|$ 在 [a,b] 上可积

(4)$f(x)g(x)$ 在 [a,b] 上可积

(5) 如果存在常数 $d > 0$, 使得

$$|f(x)| \ge d, \quad \forall x \in [a, b]$$

那么 $\frac{1}{f(x)}$ 在 [a,b] 上可积

证明 由于结论 (1),(2) 在之前已经证明，这里仅仅对于之后的内容进行证明

(3) 由于

$$\begin{aligned}\omega(|f|) &= \sup_{x', x'' \in J} ||f(x')| - |f(x'')|| \\ &\le \sup_{x', x'' \in J} |f(x')| - |f(x'')| \\ &= \omega_i(f)\end{aligned}$$

所以有 $\Omega(|f|,P)\le\Omega(f,P)$

利用这个关系，根据可积性的充分必要条件，我们可以得到结论 (3)

(4) 可积函数必定是有界的，所以我们可以假设

$$|f(x)|\le K,\quad |g(x)|\le L,\quad \forall x\in[a,b]$$

对于任何 $x',x''\in J_i$, 应该会有

$$\begin{aligned}&|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|\\&=|(f(x')-f(x''))g(x')+f(x'')(g(x')-g(x''))|\\&\le L|f(x')-f(x'')|+K|g(x')-g(x'')|\end{aligned}$$

于是

$$\omega_i(fg)\le L\omega_i(f)+K\omega_i(g)$$

所以

$$\Omega(fg,P)\le L\Omega(f,g)+K\Omega(g,P)$$

根据这个我们可以得到结论 (4)

(5) 我们有

$$\begin{aligned}\omega_i(\frac{1}{f})&=\sup_{x',x''\in J}|\frac{1}{f(x')}-\frac{1}{f(x'')}|\\&=\sup_{x',x''\in J}|\frac{f(x'')-f(x')}{f(x')f(x'')}|\\&\le\frac{1}{d^2}\sup_{x',x''\in J}|f(x')-f(x'')|\\&=\frac{1}{d^2}\omega_i(f)\end{aligned}$$

于是

$$\Omega(\frac{1}{f},P)\le\frac{1}{d^2}\Omega(f,P)$$

根据此可以得到结论 (5)

定理 2.5.2 假设 $[a,b]$ 是 $[\widetilde{a},\widetilde{b}]$ 的任意闭的子区间。如果函数 f 在 $[\widetilde{a},\widetilde{b}]$ 可积，那么也在 $[a,b]$ 可积。

证明 对于任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $[\widetilde{a}, \widetilde{b}]$ 的分割 $\widetilde{P}$, 满足

$$\Omega(f, \widetilde{P}) = U(f, \widetilde{P}) - L(f, \widetilde{P}) < \varepsilon$$

给 $\widetilde{P}$ 添加分点，$\Omega(f, \widetilde{P})$ 不会增加，不妨假设 $\widetilde{P}$ 的分点之中已经包括了 a,b 两点。$\widetilde{P}$ 在 $[a, b]$ 之中的分点给出 $[a, b]$ 的一个分割，我们把这个分割记做 P, 那么显然有

$$\Omega(f, P) \leq \Omega(f, \widetilde{P}) < \varepsilon$$

这就证明了函数 f 在 $[a, b]$ 可积。

定理 2.5.3 假设函数 f 在闭区间 $[a.b]$ 上面有定义并且单调，那么 f 在 $[a, b]$ 上面可积。

证明 假设 f 是单调上升的，对于任意的 $\varepsilon > 0$ 我们可以取

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}$$

只要 [a,b] 的分割

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

满足

$$|P| < \delta$$

就有

$$\begin{aligned}\Omega(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i &< \delta \sum_{i=1}^{n} \omega_i \\ &= \delta \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &\delta[f(b) - f(a)] < \varepsilon\end{aligned}$$

这就证明了 f 的可积性

定理 2.5.4 假设函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 连续，则 f 在 $[a, b]$ 可积

证明 因为函数 f 在闭区间 [a,b] 一致连续，所以对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $x', x'' \in [a, b]$ $|x' - x''| < \delta$, 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

考察 [a,b] 的任意分割

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

只要 $|P| < \delta$ 就有

$$\omega_i = M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad i = 1, \cdots, n$$

对于这样的 P 就有

$$\begin{aligned}
\Omega(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon
\end{aligned}$$

定理 2.5.5 假设函数 f 在 $[a,b]$ 有界，并且除去有限个间断点之外，在其他的各点都连续，那么函数 f 在 $[a,b]$ 可积。

证明 假设 f 的间断点是 $c_1, c_2, \cdots, c_l$ 对于任意的事先给定的充分小的 $\eta > 0$ 取 l 个开区间

$$J_k = (c_k - \eta, c_k + \eta) \quad k = 1, \cdots, l$$

这些开区间覆盖住了全体间断点，在 [a,b] 减去 $J_1, j_2, \cdots J_l$ 所剩下的有限个闭子区间上，函数 f 是一致连续的。所以存在 $\delta > 0$，使得只要

$$x', x'' \in [a,b]/(\bigcup_{k=1}^{l} J_k), \quad |x' - x''| < \delta$$

就有

$$|f(x') - f(x'')| < \eta$$

取 [a,b] 的分割 P, 使得

$$|P| < \min\{\delta, \eta\}$$

在分割 P 的各个闭的子区间内，至多有总长度不超过 $4l\eta$ 的一些子区间能够与某个 J_k 相交。我们把和数 $\Omega(f,P)$ 分成两个部分

$$\Omega(f, P) = \sum_{i}' \omega_i \Delta x_i + \sum_{j}'' \omega_j \Delta x_j$$

其中第一个部分 $\sum\limits_i{}' \omega_i \Delta x_i$ 所涉及的子区间 $[x_{i-1}, x_j]$ 不与任何的 J_k 相交，第二部分的 $\sum\limits_j{}'' \omega_j \Delta x_j$ 所涉及的每一个子区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 都与某一个 J_k 相交，对于第一部分，应该有 $\omega_i < \eta$，对于第二部分，应该有 $\sum\limits_j{}'' \omega_j \Delta x_j < 4l\eta$，于是

$$\begin{aligned}\Omega(f,P) &= \sum_i{}' \omega_i \Delta x_i + \sum_j{}'' \omega_j \Delta x_j \\ &< \eta \sum_i{}' \Delta x_i + \omega \sum_j{}'' \Delta x_j \\ &\le \eta(b-a) + \omega \cdot 4l\eta \\ &= [(b-a) + 4l\omega]\eta\end{aligned}$$

对于任何事先给定的 $\varepsilon > 0$ 我们可以选取 η, 使得

$$0 < \eta < \frac{\varepsilon}{b-a+4l\omega}$$

对于这样的 η，按照上述手续选取的 P 就能够满足

$$\Omega(f,P) < [(b-a)+4l\omega]\eta < \varepsilon$$

这也就证明了 f 在 [a,b] 上面可积

最后我们指出：改变函数 f 在有限个点处的函数值并不影响 f 的可积性，也不影响积分的值。

定理 2.5.6 *设函数 g 以及函数 f 都在闭区间 [a,b] 上面有定义；并且假设除去在有限个点 $c_1, c_2, \cdots, c_l$ 之外，g, f 的函数值都相同，即*

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b]/\{c_1, \cdots, c_l\}$$

如果 f 在 [a,b] 可积，那么 g 也在 [a,b] 可积，并且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

证明 记

$$K = \max\{|g(c_1) - f(c_1)|, \cdots, |g(c_l) - f(c_l)|\}$$

假设 P 是 [a,b] 的任意的分割，那么这分割的各个闭的子区间之中，至多有 2l 个能够含有某个 c_k 于是

$$|\sigma(g,P,\xi)-\sigma(f,P,\xi)|\leq 2lK|P|$$

由此可知：当 $|P|\to 0$ 时候，$|\sigma(g,P,\xi)-\sigma(f,P,\xi)|$ 有相同的极限值。

第三章　含参变元的积分

3.1　基本理论

3.1.1　一致趋于极限函数

假设在一般情形函数 $f(x,y)$ 于二维集合 $\mathcal{M}=\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ 之内有定义，这里的 $\mathcal{X}$ 以及 $\mathcal{Y}$ 分别表示着变量 x 以及变量 y 可以取值的集合，而 $\mathcal{Y}$ 有一个聚点比如说有限数 y_0.

定义 3.1 如果对于函数 $f(x,y)$ 来说，在 $y\to y_0$ 的时候存在一个有限的极限函数

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)$$

并且对于任何的一个数字 $\varepsilon>0$ 可以找到这样的一个与 x 无关的数 $\delta>0$，使得对于 $\mathcal{X}$ 之中的所有的 x 值, 在 $|y-y_0|<\delta$ 的时候恒有 $|f(x,y)=\varphi(x)|<\varepsilon$ 那么我们称函数 $f(x,y)$ 对于区域 $\mathcal{X}$ 之中的 x 一致的趋于极限函数 $\varphi(x)$

不难将这个定义改写成 y_0 为非正常数如 $+\infty$ 的情形: 在此只要把 $|y-y_0|<\delta$ 这样的不等式改写成 $y_0>\Delta$ 这样的不等式，

我们之前讨论过，一致收敛的充要条件是收敛性原理的所谓一致实现，对于一般的情形也可以这样做，即假设 y_0 有限的话:

定理 3.1.1 要函数 $f(x,y)$ 在 $y\to y_0$ 的时候有极限函数，并且对于区域 $\mathcal{X}$ 内的 x 一致的趋向于它，则其必要而充分的条件是要对于每一个数 $\varepsilon>0$ 恒存在一个与 x 无关的数字 $\delta>0$，使得对于 $\mathcal{X}$ 内的一切 x 值恒成立不等式

$$|f(x,y')-f(x,y)|<\varepsilon$$

只要

$$|y-y_0|<\delta,\quad |y'-y_0|<\delta$$

3.2 含参变量的正常积分

我们将被积函数从一元函数推广到二元函数-含参变量积分。

假设 $f(x,y)$ 是定义在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上面的二元函数，当 x 在 $[a,b]$ 上面确定某一个值的时候，函数 $f(x,y)$ 则是定义在 $[c,d]$ 上面的以 y 为自变量的某一个一元函数，如果此时 $f(x,y)$ 在 $[c,d]$ 上面可积，那么其积分值是 x 的定义在区间 $[a,b]$ 上的函数，记为

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \quad x\in[a,b]$$

一般的来说，假设 $f(x,y)$ 是定义在区域 $D=\{(x,y)|a\le x\le b, c(x)\le y\le d(x)\}$ 上的二元函数，其中的 $c(x),d(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上面的连续函数，如果对 $[a,b]$ 上面的每一个固定的 x 值，函数 $f(x,y)$ 作为 y 的函数在闭区间 $[c(x),d(x)]$ 上可积，那么其积分值是 x 的定义在区间 $[a,b]$ 上的函数，记做

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

这里使用积分的形式对于两个函数进行了定义，通常把这两个函数称为定义在 $[a,b]$ 上的含参量 x 的正常积分，或者是简称含参量积分。

下面可以讨论一波含参量积分的连续性，可微性以及可积性。

定理 3.2.1 假设二元函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上面连续，那么函数

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

在 $[a,b]$ 上面连续

定理 3.2.2 如果二元函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)|a\le x\le b, c(x)\le y\le d(x)\}$ 上面连续，其中的 $c(x),d(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上面的连续函数，则函数

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y,\quad x\in(a,b)$$

在 $[a,b]$ 上面连续

定理 3.2.3 如果二元函数 $f(x,y)$ 以及偏导数 $f_x'(x,y)$ 在矩形区域 $D = [a,b]\times[c,d]$ 上面都连续，那么函数

$$I(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

在 $[a,b]$ 上面可微，并且

$$I'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

证明 对于任意的 $x \in [a,b]$ 以及充分小的 Δx, 有 $x+\Delta x \in [a,b]$，于是

$$\frac{I(x+\Delta x)-I(x)}{\Delta x} = \int_c^d \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\mathrm{d}y$$

根据函数 $f(x,y)$ 以及 $f_x'(x,y)$ 在 D 上面连续，以及微分中值定理，对于 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，只要 $|\Delta x|<\delta$, 那么

$$|\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} - f_x'(x,y)| = |f_x'(x+\theta\Delta x,y) - f_x'(x,y)| < \varepsilon$$

其中的 $\theta \in (0,1)$，于是

$$|\frac{\Delta I(x)}{\Delta x} - \int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y| \le \int_c^d |\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} - f_x'(x,y)|\mathrm{d}y < \varepsilon(d-c)$$

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \int_c^d f_x'(x,y)\mathrm{d}y$$

所以

$$I'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

定理 3.2.4 如果二元函数 $f(x,y)$ 以及 $f_x'(x,y)$ 在区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上面连续，$c(x), d(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上面并且其值含于 $[c,d]$ 的可微函数，那么函数

$$F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y, \quad x\in[a,b]$$

在 $[a,b]$ 上面可微，并且

$$F'(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f_x'(x,y)\mathrm{d}y + f(x,d(x))d'(x) - f(x,c(x))c'(x)$$

定理 3.2.5 如果函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上面连续，并且函数 $I(x),J(y)$ 分别在 $[a,b],[c,d]$ 可积，那么

$$\int_a^b I(x)\mathrm{d}x=\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}y\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$\int_c^d J(y)\mathrm{d}y=\int_c^d[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x]\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}y$$

上面的两个积分式二元函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上面的二重积分。

$$\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}y$$

3.3 含参量的反常积分

假设 $f(x,y)$ 是定义在无界区域 $D=\{(x,y)|a\le x\le b,c\le y<+\infty\}$ 上面的二元函数，对于任意的 $x\in[a,b]$，反常积分

$$\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

都收敛，那么他的值是 x 的在 $[a,b]$ 上取值的函数，我们记这个函数为 $I(x)$，即

$$I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y,\quad x\in[a,b]$$

那么我们就称这个式子为定义在 $[a,b]$ 上面的含参量 x 的无穷限反常积分，或者就简称是含参量的反常积分，x 是参变量。

我们引入含参量的反常积分的一致收敛的概念

定义 3.2 如果含参量反常积分 $\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 以及函数 $I(x)$ 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总是存在 $M>0$，使得当 $d>M$ 的时候，对于一切的 $x\in[a,b]$ 都有

$$|\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y-I(x)|<\varepsilon$$

即

$$|\int_d^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y<\varepsilon$$

则称含参量反常积分在 $[a,b]$ 一致收敛于 $I(x)$，或者简称含参量反常积分在 $[a,b]$ 上面一致收敛。

如果含参量无穷积分 $\int_c^\infty f(x,y)\mathrm{d}y$ 在区间 $[a,b]$ 上面不存在通用的 $M>0$，那么就是非一致收敛，我们将一致收敛以及非一致收敛使用 $\varepsilon - M$ 语言重新叙述一遍

一致收敛：$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall d > M, \forall x \in [a,b]$ 有 $|\int_d^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y| < \varepsilon$

非一致收敛:$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall M > 0, \exists d_0 > M, \exists x_0 \in [a,b]$ 有 $|\int_{d_0}^\infty f(x_0,y)\mathrm{d}y| \geq \varepsilon_0$

3.4 欧拉积分

3.4.1 Γ 函数

函数 $\Gamma(\alpha)$ 可以写成是如下两个积分的和

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x = I(\alpha) + J(\alpha)$$

当 $\alpha \geq 1$ 的时候，$I(\alpha)$ 是正常积分，当 $0 < \alpha < 1$ 的时候，$I(\alpha)$ 是一个无界函数反常积分，我们易知其收敛，当 $\alpha > 0$ 的时候，$J(\alpha)$ 是一个无穷限的反常积分，我们易知其收敛。所以，当 $\alpha > 0$ 的时候，含参量积分 $\Gamma(\alpha)$ 收敛，即 $\Gamma(\alpha)$ 的定义域是 $(0, \infty)$

第四章 First-Order Differential Equations

4.1 微分方程概述

许多的自然规律的陈述，涉及到量的变化率应该满足的制约关系，这种关系的数学表达式就应该是含有导数的方程-微分方程。

微分方程的阶数就是它所含的未知函数的导数的最高阶数，最简单的一阶微分方程是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t)$$

求解这样的方程，等价于求函数 $f(t)$ 的原函数。我们看见上述方程的一般解应该是

$$x = \int f(t)\mathrm{d}t + C$$

那我们现在来看看最简单的 n 阶方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} = f(t)$$

它等于说 $\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}$ 是 $f(t)$ 的原函数，即

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} = \int f(t)\mathrm{d}t + C_1$$

这个与原方程类似，但是阶数降低了，逐次做下去，最后我们可以得到一般解[1]

$$x = \int \cdots \int f(t)\mathrm{d}t \cdots \mathrm{d}t + C_1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + C_{n-1}t + C_n$$

[1]有 n 个积分号连续的相乘

含有未知函数的导数的方程称为微分方程，如果一个函数用来替换掉微分方程之中的未知函数能够使得该方程成为恒等式，那么我们就说这个函数是微分方程的一个解。微分方程的解的一般表达式称为该方程的一般解或者是通解。一个 n 阶方程含有 m 个任意的常数，满足一定的具体条件的确定的解叫做特解。[2]

4.2 Solutions, Slope Fields, and Euler's Method

4.2.1 General First-Order Differential Equations and Solutions

定义 4.1 *A first-order differential equation is an equation*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) \qquad (1)$$

in which f(x, y) is a function of two variables defined on a region in the xy-plane. The equation is of first order because it involves only the first derivative dy>dx (and not higher-order derivatives). We point out that the equations

$$y' = f(x, y) \quad and \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y = f(x, y)$$

A solution of Equation (1) is a differentiable function y = y(x) defined on an interval I of x-values (perhaps infinite) such that

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = f(x, y(x))$$

on that interval. That is, when y(x) and its derivative y (x) are substituted into Equation (1), the resulting equation is true for all x over the interval I. The general solution to a first-order differential equation is a solution that contains all possible solutions. The general solution always contains an arbitrary constant, but having this property doesn't mean a solution is the general solution. That is, a solution may contain an arbitrary constant without being the gen- eral solution. Establishing that a solution is the

[2] 在线性代数之中，通解类似于 Special solution，而特解类似于 Particular solution

general solution may require deeper results from the theory of differential equations and is best studied in a more advanced course.

As was the case in finding antiderivatives, we often need a particular rather than the general solution to a first-order differential equation y = f(x, y). The particular solution satisfying the initial condition $y(x_0) = y_0$ is the solution y = y(x) whose value is y0 when$x = x_0$. Thus the graph of the particular solution passes through the point (x_0, y_0) in the xy-plane. A first-order initial value problem is a differential equation y = f(x, y) whose solution must satisfy an initial condition $y(x_0) = y_0$.

4.2.2 Euler' s Method

If we do not require or cannot immediately find an exact solution giving an explicit for- mula for an initial value problem y = f(x, y), $y(x_0) = y_0$, we can often use a computer to generate a table of approximate numerical values of y for values of x in an appropriate interval. Such a table is called a numerical solution of the problem, and the method by which we generate the table is called a **numerical method**.

Given a differential equation $dy/dx = (x, y)$ and an initial condition y(x) = y , we can approximate the solution y = y(x) by its linearization

$$L(x) = y(x_0) + y\ (x_0)(x - x_0) \quad or \quad L(x) = y_0 + (x_0, y_0)(x - x_0).$$

The function L(x) gives a good approximation to the solution y(x) in a short interval about x_0.The basis of Euler's method is to patch together a string of linearizations to approximate the curve over a longer stretch. Here is how the method works.

We know the point (x_0, y_0) lies on the solution curve. Suppose that we specify a new value for the independent variable to be $x_1 = x_0 + dx$. (Recall that $dx = \Delta x$ in the definition of differentials.) If the increment dx is small, then

$$y_1 = L(x_1) = y_0 + (x_0, y_0)dx$$

is a good approximation to the exact solution value$y = y(x_1)$. So from the point(x_0, y_0), which lies exactly on the solution curve, we have obtained the point (x_1, y_1), which lies very close to the point $(x_1, y(x_1))$ on the solution curve

Using the point (x_1, y_1) and the slope (x_1, y_1) of the solution curve through (x_1, y_1), we take a second step. Setting $x_2 = x_1 + dx$, we use the linearization of the solution curve through (x_1, y_1) to calculate

$$y_2 = y_1 + (x_1, y_1)dx$$

This gives the next approximation (x_2, y_2) to values along the solution curve $y = y(x)$.Continuing in this fashion, we take a third step from the point (x_2, y_2) with slope (x_2, y_2) to obtain the third approximation

$$y_3 = y_2 + (x_2, y_2)dx$$

and so on. We are literally building an approximation to one of the solutions by following the direction of the slope field of the differential equation.

4.3 First-Order Linear Equations

A first-order linear differential equation is one that can be written in the form

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

where P and Q are continuous functions of x. Equation (1) is the linear equation's stan- dard form. Since the exponential growth>decay equation $dy/dx = ky$.can be put in the standard form

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - ky = 0$$

we see it is a linear equation with $P(x) = -k$ and $Q(x) = 0$. Equation (1) is linear(in y)because y and its derivative dy>dx occur only to the first power, they are not multiplied together, nor do they appear as the argument of a function.

4.3.1 Solving Linear Equations

We solve the equation

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

by multiplying both sides by a positive function y(x) that transforms the left-hand side into the derivative of the product $v(x)\cdot y$. We will show how to find y in a moment, but first we want to show how, once found, it provides the solution we seek.

Here is why multiplying by $v(x)$ works:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y &= Q(x) \\
v(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)v(x)y &= v(x)Q(x) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v(x)\cdot y) &= Q(x) \\
v(x)\cdot y &= \int v(x)Q(x)\mathrm{d}x \\
y &= \frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)\mathrm{d}x \qquad (2)
\end{aligned}$$

Equation(2) expresses the solution of Equation(1) in terms of the functions v(x) and Q(x). We call v(x) an integrating factor for Equation(1) because its presence makes the equation integrable.

Why doesn't the formula for P(x) appear in the solution as well? It does, but indi- rectly, in the construction of the positive function y(x). We have

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(vy) &= v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + Pvy \\
v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + Pvy \\
y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= Pvy
\end{aligned}$$

This last equation will hold if

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= Pv \\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= P\mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}v}{v} &= \int P\mathrm{d}x \\
\ln v &= \int P\mathrm{d}x \\
e^{\ln v} &= e^{\int P\mathrm{d}x} \\
v &= e^{\int P\mathrm{d}x} \qquad (3)
\end{aligned}$$

Thus a formula for the general solution to Equation (1) is given by Equation (2), where y(x) is given by Equation (3). However, rather than memorizing the formula, just remember how to find the integrating factor once you have the standard form so P(x) is correctly identified. Any antiderivative of P works for Equation (3).

To solve the linear equation $y' + P(x)y = Q(x)$, multiply both sides by the inte- grating factor v(x) = $e^{\int P \mathrm{d}x}$ dx and integrate both sides.

When you integrate the product on the left-hand side in this procedure, you always obtain the product v(x)y of the integrating factor and solution function y because of the way v is defined.

In solving the linear equation,we integrated both sides of the equation after multiplying each side by the integrating factor. However, we can shorten the amount of work by remembering that the left-hand side always integrates into the product $v(x) \cdot y$ of the integrating factor times the solution function.It means that

$$v(x)y = \int v(x)Q(x)\mathrm{d}x$$

We need only integrate the product of the integrating factor y(x) with Q(x) on the right- hand side and then equate the result with y(x)y to obtain the general solution.Nevertheless, to emphasize the role of y(x) in the solution process, we sometimes follow the complete procedure.

4.4 Applications

4.4.1 Motion with Resistance Proportional to Velocity

In some cases it is reasonable to assume that the resistance encountered by a moving object, such as a car coasting to a stop, is proportional to the object's velocity. The faster the object moves, the more its forward progress is resisted by the air through which it passes. Picture the object as a mass m moving along a coordinate line with position function s and velocity y at time t. From Newton's second law of motion, the resisting force opposing the motion is

$$Force = \text{mass} \times \text{acceleration} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

If the resisting force is proportional to velocity, we have

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv \quad or \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m}v$$

This is a separable differential equation representing exponential change. The solution to the equation with initial condition $y = y_0$ at t = 0 is

$$y = y_0 e^{-(k/m)t}$$

第五章　广义积分

5.1　广义积分的概念

在之前的章节之中，我们讨论了作为积分的和的极限的定积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{|p|\to 0} \sigma(f, |P|, \xi) = I$$

为了构造积分和，就要限制积分区间 $[a, b]$ 是有界的；为了积分和具有有穷的极限，我们又必须限制被积函数是有界的。

而广义积分将会讨论在无界区间上面的积分 (具有无穷积分限度的积分-简称无穷限积分) 以及无界函数的积分 (瑕积分).

5.1.1　具有无穷积分限度的积分

定义 5.1 设函数 f 在 $[a, \infty)$ 有定义；并且对于任何的 $H > a$，这函数在 $[a, H]$ 可积，如果存在有穷极限

$$\lim_{H\to\infty} \int_a^H f(x)\mathrm{d}x$$

那么我们就说函数 f 在 $[a, \infty)$ 广义可积，或者说无穷限积分 $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并且把上述极限值定义为广义积分的值，记做

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{H\to\infty} \int_a^H f(x)\mathrm{d}x$$

不收敛的积分称为发散积分,如果上述极限为 ∞,那么我们也说积分 $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 发散于 ∞ 记做

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \infty$$

我们还有一种定义

定义 5.2 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，如果存在 c，使得积分

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x, \qquad \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，那么我们就说积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并且定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

为了证明定义的合理性，我们需要指出其定义的积分值并不依赖于 c 的选择，事实上，如果 $\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，那么对于任何 $c' \in (-\infty,+\infty)$ 都有

$$\int_{c'}^{H} f(x)\mathrm{d}x = \int_{c'}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{H} f(x)\mathrm{d}x$$

因而 $\int_{c'}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛，并且

$$\int_{c'}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{c'}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

同样，如果 $\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并且

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c'} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c'}^{c} f(x)\mathrm{d}x$$

我们可以得到

$$\int_{-\infty}^{c'} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c'}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

注记 按照定义，为了考察函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 的可积性，我们必须检验以下的两个极限是否存在并且有限：

$$\lim_{H\to+\infty}\int_{c}^{H} f(x)\mathrm{d}x\text{以及}\lim_{H'\to-\infty}\int_{H'}^{c} f(x)\mathrm{d}x$$

此处的极限过程 $H\to+\infty, H'\to-\infty$ 是相互独立的，我们实际是检验以下的极限是否存在并且有限。

$$\lim_{H\to+\infty H'\to-\infty}\int_{-H}^{H} f(x)\mathrm{d}x$$

如果仅仅考虑其在对称区间 $[-H,H]$ 的积分的极限

$$\lim_{H\to+\infty}\int_{-H}^{H} f(x)\mathrm{d}x$$

那么我们就定义了另一种在较弱的意义下的收敛性，如果上述极限存在并且有限，那么我们就说广义积分 $\int_{\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 在柯西主值的意义下收敛，并且吧上述极限值称为广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的柯西主值，记为

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{H\to+\infty}\int_{-H}^{H} f(x)\mathrm{d}x$$

5.1.2 瑕积分

我们现在来看看某些无界函数的积分，我们主要考虑下面两种典型，以及可以归结到这两种的更加一般的情形。

情况一

函数 f 在 $[a,b)$ 有定义，并且对于任何的 $0<\eta<b-a$, 这个函数在 $[a,b-\eta]$ 常义可积。对于这种情况，函数 f 只可能在 b 点的临近无界，如果 f 在 b 点邻近无界，那么我们就说 b 是 f 的一个瑕点。

情况二

函数 f 在 $(a,b]$ 有定义，并且对于任何的 $0<\eta<b-a$，这个函数在 $[a+\eta,b)$ 常义可积。对于这种情况，a 是可能的瑕点。

定义 5.3 *假设函数 f 在 $[a,b)$ 有定义，并且对于任何的 $0<\eta<b-a$, 这个函数在 $[a,b-\eta]$ 常义可积。如果存在有穷的极限*

$$\lim_{\eta\to0^+}\int_{a}^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x$$

那么我们就说 f 在 $[a,b)$ 上面广义可积，或者说积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并且将上述极限值定义为广义积分的极限，即定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to0^+}\int_{a}^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x$$

注记 关于在下限 a 处具有瑕点的函数 f 的广义积分，可以使用类似的方法进行定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to0^+}\int_{a+\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

定义 5.4 假设 $a<c<b$，函数 f 在 $[a,c)$ 以及 $(c,b]$ 有定义，并且设对于任何的 $0<\eta<c-a,0<\eta'<b-c$，这个函数在 $[a,c-\eta]$ 以及 $[c+\eta',b]$ 常义可积，如果积分

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \quad 以及 \quad \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，那么我们就说广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并且定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

注记 按照定义，为了考察有唯一的瑕点的 $c\in(a,b)$ 的函数 f 在 $[a,b]$ 的广义可积性，必须检验以下的两个极限是否存在并且有极限:

$$\lim_{\eta\to 0^+}\int_a^{c-\eta} f(x)\mathrm{d}x以及\lim_{\eta\to 0^+}\int_{c-\eta}^b f(x)\mathrm{d}x$$

这里的两个极限过程 $\eta\to 0^+$ 以及 $\eta'\to 0^+$ 是两个彼此独立的过程，如果仅仅考虑 $c-\eta$ 以及 $c+\eta$ 从 c 的两侧对称的趋近于 c 的情况，仅仅检验是否存在有穷的极限

$$\lim_{\eta\to 0^+}\int_a^{c-\eta} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\eta\to 0^+}\int_{c-\eta}^b f(x)\mathrm{d}x$$

那么就定义了另一种在较弱的意义之下的收敛性-柯西主值的意义下的收敛性，这时候我们把上述极限值称为广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的柯西主值，记做

$$VP\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to 0^+}(\int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta}^b)f(x)\mathrm{d}x$$

5.1.3 牛顿莱布尼兹公式的推广

如果把牛顿莱布尼兹公式推广到广义积分的情形

定理 5.1.1 假设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上面有定义并且连续，而函数 F 是 f 在 $[a,\infty)$ 的原函数，如果存在极限

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)(记做\ F(+\infty))$$

那么就有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty)-F(a) = F(x)|_a^{+\infty}$$

证明 对于任意 $H > a$，我们有

$$\int_a^H f(x)\mathrm{d}x = F(H) - F(a)$$

让 $H \to +\infty$ 取极限，我们得到

$$\lim_{H\to+\infty}\int_a^H f(x)\mathrm{d}x = \lim_{H\to+\infty} F(H) - F(a)$$

即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(a) = F(x)|_a^{+\infty}$$

注记 对于积分

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x \quad 以及 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

也有相应的牛顿-莱布尼兹公式，其证明与定理 4.1.1 类似，这里就不再重复了，仅仅陈述结论：

设函数 f 在 $(-\infty, b]$ 连续，函数 F 是 f 在 $(-\infty, b]$ 的原函数，如果存在极限

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty)$$

那么

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(-\infty) = F(x)|_{-\infty}^b$$

假设函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上面连续，函数 F 是 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上面的原函数，如果存在极限

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty) \quad 和 \quad \lim_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty)$$

并且 $F(+\infty)$-$F(+\infty)$ 有意义 (即这两个玩意不是同号无穷大)，那么

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(-\infty) = F(x)|_{-\infty}^{+\infty}$$

关于暇积分，我们也有相应的莱布尼兹公式，例如对于以 b 点为瑕点的积分，我们有

定理 5.1.2 假设函数 f 在 $[a,b)$ 上面连续，函数 F 是 f 在 $[a,b]$ 的原函数，如果存在极限

$$\lim_{x\to b^-} F(x) = F(b^-)$$

那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a)$$

对于广义积分 (无穷限积分以及暇积分)，也有分部积分公式。

定理 5.1.3 假设 $u, v \in C'[a,+\infty)$, 则

$$\int_a^{+\infty} u(x)\mathrm{d}xv(x) = u(x)v(x)|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v(x)\mathrm{d}u(x)$$

(这就是说：如果上式右端的式子有意义，那么上式左端也有意义，并且等于右端的值)

对于常义积分的换元公式取极限可以得到广义积分的换元公式。同样的，对于以上限为瑕点的积分，我们有

定理 5.1.4 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 连续，函数 $x = \phi(t)$ 在 $[\alpha,\beta)$ 有连续导数。如果 $\phi'(t) > 0, \forall t \in (\alpha,\beta), \phi((\alpha,\beta)) \subset (a,b)$,$\phi(\alpha) = a, \phi(\beta^-) = b$, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$$

(这就是说：如果上式右端的式子有意义，那么上式左端也有意义，并且等于右端的值)

5.2 广义积分的收敛原理以及推论

根据定义，广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

是下面的函数当 $H \to +\infty$ 的时候的极限

$$\psi(H) = \int_a^H f(x)\mathrm{d}x$$

依据关于函数极限的收敛原理，这个极限存在并且有穷的充分必要条件是：对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\Delta > 0$, 使得只要 $H' \geq H > \Delta$, 就有

$$|\psi(H) - \psi(H')| < \varepsilon$$

我们把这个陈述为:

无穷限积分的收敛原理: 广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

收敛的充分必要条件是: 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\Delta > 0$, 使得只要 $H' \geq H > \Delta$, 就有

$$|\int_H^{H'} f(x)\mathrm{d}x| < \varepsilon$$

利用这个收敛原理，我们很容易得到以下的比较判别法则

无穷限积分的比较判别法 假设函数 $f(x)$ 以及 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有定义, 在任何的闭的子区间 $[a, H]$ 上面常义可积，并且对于充分大的 Δ 满足不等式

$$|f(x)| \leq g(x), \quad \forall x \in [\Delta, +\infty]$$

如果积分

$$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$$

收敛，那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

也收敛。

证明 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\Delta' > \Delta$, 使得只要 $H' \geq H > \Delta'$, 就有

$$\int_H^{H'} g(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$$

对于这样的 H' 以及 H, 自然也有

$$\begin{aligned} |\int_H^{H'} f(x)\mathrm{d}x| &\leq \int_H^{H'} |f(x)|\mathrm{d}x \\ &\leq \int_H^{H'} g(x)\mathrm{d}x < \varepsilon \end{aligned}$$

推论 5.2.0.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有定义,在其任何的闭的子区间 $[a, H]$ 上面常义可积，如果积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛。

定义 5.5 如果广义积分 $|\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x|$ 收敛,那么我们就说广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛。如果广义积分 $|\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x|$ 发散，但是广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，那么我们就说广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛，

虽然我们涉及的都是无穷上限的积分，但是类似的结果如果对于无穷下限的积分以及双无穷限度的积分都成立。同时对于暇积分也有类似的结论。

暇积分的收敛原理

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 有定义，在其任何的闭的子区间 $[a,b-\eta]$ 上面常义可积，那么暇积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是：对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$, 使得只要 $0<\eta'<\eta<\delta$，就有

$$|\int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)\mathrm{d}x|<\varepsilon$$

暇积分的比较判别法

设函数 $f(x)$ 以及 $g(x)$ 在区间 $[a,b)$ 有定义，那么在其任何的闭的子区间 $[a,b-\eta]$ 常义可积，并且在 b 点邻近满足不等式

$$|f(x)|\leq g(x),\quad \forall x\in[b-\delta,b)$$

如果暇积分 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，那么暇积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛。

推论 假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 有定义，在其任何的闭的子区间 $[a,b-\eta]$ 常义可积，如果积分 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，那么积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛。

定义 5.6 如果暇积分 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，那么我们就说暇积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，如果暇积分 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散，但是暇积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，那么我们就说暇积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛。

5.3 广义积分的收敛性的一些判别方法

5.3.1 无穷限度积分收敛性的判别方法

我们在之前讨论了无穷限积分的比较判别法：假设函数 $f(x)$ 以及 $g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 有定义，在其任何的闭的子区间 $[a,H]$ 常义可积，并且对于

充分大的 Δ 满足不等式

$$|f(x)| \leq g(x), \quad \forall x \in [\Delta, +\infty)$$

如果积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛。

具体的取 $g(x) = \frac{C}{x^p}$ 作为比较的标准，我们得到了以下的判别方法。

定理 5.3.1 假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 有定义，在其任何闭的子区间 $[a, H]$ 上面常义可积。

(1) 如果存在 $\Delta > a, p > 1, C > 0$, 使得

$$|f(x)| \leq \frac{C}{x^p}, \quad \forall x \geq \Delta$$

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

绝对收敛。

(2) 如果存在 $\Delta > a, p \leq 1, C > 0$，使得

$$|f(x)| \geq \frac{C}{x^p}, \quad \forall x \geq \Delta$$

那么积分

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$$

发散。

为了对于充分大的 x，比较 $|f(x)|$ 以及 $\frac{C}{x^p}$，我们考察以下比值的极限情况。

$$\frac{|f(x)|}{\frac{1}{x^p}} = x^p|f(x)|$$

推论 5.3.1.1 假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 有定义，那么在其任何的闭的子区间 $[a, H]$ 常义可积，并且存在极限

$$\lim_{x \to +\infty} x^p|f(x)| = B$$

则有

(1) 如果 $p > 1, B < +\infty$, 那么

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$$

收敛。

(2) 如果 $p \leq 1, B > 0$，那么

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$$

发散

上述定理只适用于判别积分时候绝对收敛，为了判别条件收敛性，我们需要另外的一些法则。

定理 5.3.2 *(狄利克雷判别法)* 设函数 f, g 在区间 $[a, +\infty)$ 有定义，在其任何的闭的子区间 $[a, H]$ 上面常义可积，如果

(1) 存在 $\Delta > a$，使得 f 在 $[\Delta, +\infty)$ 上面是单调的，并且

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

(2) 存在 $K \geq 0$, 使得

$$|\int_a^H g(x) \mathrm{d}x| \leq k, \forall H \geq a$$

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) g(x) \mathrm{d}x$$

收敛。

证明 对于充分大的 H 以及 $H' > H$, 我们来估计

$$|\int_H^{H'} f(x) g(x) \mathrm{d}x$$

根据第二中值定理

$$\int_H^{H'} f(x) g(x) \mathrm{d}x = f(H) \int_H^{\xi} g(x) \mathrm{d}x + f(H') \int_{\xi}^{H'} g(x) \mathrm{d}x$$

于是

$$|\int_H^{H'} f(x) g(x) \mathrm{d}x| = |f(H)|| \int_H^{\xi} g(x) \mathrm{d}x| + |f(H')|| \int_{\xi}^{H'} g(x) \mathrm{d}x|$$

由于

$$
\begin{aligned}
|\int_H^{\xi} g(x)\mathrm{d}x| &= |\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x - \int_a^H g(x)\mathrm{d}x \\
&\le |\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x| + |\int_a^H g(x)\mathrm{d}x| \\
&\le 2K
\end{aligned}
$$

同样有

$$|\int_{\xi}^{H'} g(x)\mathrm{d}x| \le 2K$$

我们就可以得到

$$|\int_H^{H'} f(x)g(x)\mathrm{d}x| \le 2K(|f(H)| + |f(H')|)$$

但是

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

所以对于任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\Delta \ge \Delta$, 使得只要

$$H' > H > \Delta'$$

就有

$$|\int_H^{H'} f(x)g(x)| \le 2K(|f(H)| + |f(H')|) < \varepsilon$$

这就证明了积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

的收敛性。

定理 5.3.3 *(阿贝尔判别法)* 设函数 f 以及 g 在区间 $[a,+\infty)$ 有定义，在其任何的闭的子区间 $[a,H]$ 常义可积，如果

(1) 存在 $\Delta > a$,使得 f 在 $[\Delta,+\infty)$ 单调并且有界. (2) 积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

也收敛。

第六章　曲线积分

6.1　第一型线积分

假设我们取一个任意的" 点函数"$f(M) = f(x, y)$，它沿着一条有长度的连续平面曲线 (K) 被给定，并且我们将曲线分成弧段 (弧元素)，A_iA_{i+1}，在每一段上面各任取一个点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$, 而算出这些点上面的函数值 $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$ 并且组成总和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \sum_{i=0}^{i-1} f(\xi_i, \eta_i)\sigma_i$$

这也是一种积分和。

这个和在 $\lambda = \max \sigma_i$ 趋向于 0 的时候的有限极限称为是函数 $f(M) = f(x, y)$ 沿着曲线或者是道路 (K) 的第一型线积分而表示成

$$\int_{(K)} f(M)\mathrm{d}s = \int_{(K)} f(x, y)\mathrm{d}s$$

(这里的 s 是曲线的弧长，而 ds 象征着长度元素 σ_i)

我们同理可以建立空间曲线 (K) 的积分概念

$$\int_{(K)} f(M)\mathrm{d}s = \int_{(K)} f(x, y, z)\mathrm{d}s$$

6.1.1　将曲线积分化成是寻常的定积分

我们假设在曲线 (K) 上面的两个可能方向之中任意的选择一个方向，如此趋向上面的每一个点 M 的位置可以通过弧长 $s = AM$ 来决定，这里的弧长是由点 A 算起的，于是曲线 (K) 可以通过参变方程来表示如下

$$x = x(s), \qquad y = y(s)$$

那么沿着曲线各点给定的函数 $f(x,y)$ 就可以化成是变量 s 的复合函数 $f(x(s),y(s))$

如果以 s_i 表示和弧 AB 上面所选择的分点 A_i 相应的弧的值，那么显然的 $\sigma_i = s_{i+1} - s_i = \Delta s_i$，以 $\bar{s}_i$ 来表示觉得点 M_i 的 s 值，显然的 $s_i \le \bar{s}_i \le s_{i+1}$，于是可以看出线积分之中的积分和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\bar{s}_i),y(\bar{s}_i))\Delta s_i$$

也就是寻常的定积分之中的积分和，如此我们立即有[1]

$$\int_{(K)} f(M)\mathrm{d}s = (R)\int_0^s f(x(s),y(s))\mathrm{d}s \qquad (1)$$

而由一个积分的存在就可以推断另外一个积分的存在。

特别的，在函数 $f(M)$ 连续的时候，这个积分显然是存在的，我们也就假定所谈论的函数总是连续的。

我们现在假定曲线 (K) 由任意的参变方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (t_0 \le t \le T)$$

给出，而函数 φ,ψ 连同其导函数 φ',ψ' 都连续；此外我们假设曲线上面没有重合的点，于是该曲线显然是有长度的，如果弧 $s = AM = s(t)$ 随着参变量 t 一起增大, 那么

$$s'(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\phi(t)]^2}$$

在 (1) 式子的右边的积分之中做变量替换，立即得出

$$\int_{(K)} f(M)\mathrm{d}s = (R)\int_{t_0}^T f(\varphi(t),\phi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\phi(t)]^2}\mathrm{d}t$$

如此，要计算第一型的线积分，我们必须要在被积函数之中将变量 x 以及 y 都代以坐标的参变式，同时 ds 也代以弧长微分的参变形式。

如果在参变量 t 增大的时候，弧 AM 变小，那么只要改成弧 MB，我们就可以一样的得出上述公式。总而言之，无论曲线的参变式如何，这里的积分下限一定要小于积分上限。

在曲线由显示方程

$$y = y(x)$$

[1](R) 表示的是积分理解为通常的黎曼积分

给出的情况，公式 (4) 变成

$$\int_{(K)} f(M)\mathrm{d}s = (R)\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\mathrm{d}x$$

这个关系式还可以去另外的一种形式，在函数 $y(x)$ 以及其导函数 $y'(x)$ 都连续的假设之下曲线 (K) 在每一点上面都有一定的与 y 轴不平行的切线，如果我们以 α 表示切线与 x 轴的夹角，我们有

$$\tan\alpha = y'(x) \qquad ,|\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}$$

所以

$$\int_{(K)} f(M)\mathrm{d}s = \int_a^b \frac{f(x,y(x))}{|\cos\alpha|}\mathrm{d}x$$

在特例，由于显然

$$\int_{(K)} \mathrm{d}s = S$$

于是

$$S = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\cos\alpha}$$

上述公式是由形式变换得出的，如果将曲线的弧长定义为外切的折线全长的极限，则在曲线以显式给出的时候这个定义可以直接导出上述公式.

6.2 第二型线积分

现在来讨论实际上更加重要的第二型线积分的概念

定义 6.1 *假设给定了一个简单的曲线 (AB)，并且沿着该曲线我们给定了一个函数 $f(x,y)$，将该曲线使用 $A_i(x_i,y_i)$ 各个点分成是 n 段而在每一个 A_iA_{i+1} 上面任意取一点 $M_i(\xi_i,\eta_i)$，并且像之前一样的算出该点上面得到函数值 $f(M_i)=f(\xi_i,\eta_i)$，但是此值这次不是乘以弧 A_iA_{i+1} 之长而是乘以此弧在坐标轴上面的投影，比如说，x 轴上面的投影 $x_{i+1}-x_i=\Delta x_i$ 然后组成积分和。*

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$$

这个和在 $\mu=\max A_i\bar{A}_{i+1}$ 趋于 0 的时候 1 有限极限就叫做按照 $f(M)\mathrm{d}x$ 按照曲线或者道路 (AB) 的 (第二型) 线积分并且使用符号表示为

$$I = \int_{(AB)} f(M)\mathrm{d}x = \int_{(AB)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

同样的，将 $f(M_i)$ 的值乘以弧 A_iA_{i+1} 在 y 轴上面的投影 Δy_i, 并且组成和式

$$\sigma^* = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta y_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i$$

他的极限我们就称为是 $f(M)\mathrm{d}y$ 的第二型线积分

$$I^* = \int_{(AB)} f(M)\mathrm{d}y = \int_{(AB)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

如果曲线定义了两个函数 $P(M) = P(x,y)$ 以及和 $Q(M) = Q(x,y)$ 并且存在积分

$$\int_{(AB)} P(M)\mathrm{d}x = \int_{(AB)} P(x,y)\mathrm{d}x$$

$$\int_{(AB)} Q(M)\mathrm{d}y = \int_{(AB)} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

则他们的和也叫做线积分 *(一般形式)* 而令

$$\int_{(AB)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{(AB)} P(x,y)\mathrm{d}x + \int_{(AB)} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

我们现在来比较一下两个线性积分的定义，两个定义除了明显的相似之处之外有很重要的差异，这我们再一次的指出: 在第一型积分里面组成积分和的时候，函数值 $f(M_i)$ 是乘以弧段 A_iA_{i+1} 的长 $\sigma_i = \Delta s_i$；而在第二型里面则 $f(M_i)$ 的值是乘以该线段在 x 轴或者是在 y 轴上面的投影 $\Delta x_i(\Delta y_i)$

由于第二型线积分的积分方向取决于投影的方向，所以

$$\int_{(AB)} P(x,y)\mathrm{d}x = -\int_{(BA)} P(x,y)\mathrm{d}x$$

同理我们可以获得三维或者更高维度的线积分。

6.2.1 第二型线积分的存在以及计算

假设曲线 $(K) = (AB)$ 由参变方程

$$x = \varphi(t) \qquad y = \psi(t)$$

给出，由于 φ, ψ 是连续的，并且参变量 t 由 α 变换到 β 的时候曲线即依照 A 到 B 的方向描出，沿着曲线 (AB) 的函数 $f(x,y)$ 也假设是连续的。同时

我们还假设 φ, ψ 的导数都存在并且连续，如果在这么苛刻的条件下面线积分就存在，并且下列等式成立 (我们这里利用 x 的举例子)

$$\int_{(AB)} f(x,y)\mathrm{d}x = (R)\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

如此，要计算线积分，需在被积函数之中将其变量的 x 以及 y 都代入其参变表达式之中。

6.2.2 两种线积分的关系

我们来考虑一条光滑的简单曲线 (K)=(AB) 并且取弧 s=AM 作为参变量而将他使用方程式

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

表示出来，函数 $x(s), y(s)$ 都有连续的导函数 $x'(s), y'(s)$，如果以 α 表示切线与 x 轴所成的夹角，切线指向弧增长的一边，那么我们知道

$$\cos\alpha = x'(s), \quad \sin\alpha = y'(s)$$

如果按照曲线 (K) 给定了一个连续函数 $f(M) = f'(x,y)$, 我们逐步的有

$$\begin{aligned}\int_{(K)} f(M)\mathrm{d}x &= \int_0^S f(x(s),y(s))x'(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^S f(x(s),y(s))\cos\alpha\mathrm{d}s = \int_{(K)} f(M)\cos\alpha\mathrm{d}s\end{aligned}$$

我们这样就把第二型的线积分化成了第一型的线积分。

同理可得

$$\int_{(K)} f(M)\mathrm{d}y = \int_{(K)} f(M)\sin\alpha\mathrm{d}s$$

如果沿着曲线 (K) 给定了两个连续的函数 $P(M) = P(x,y)$ 以及 $Q(M) = Q(x,y)$, 那么

$$\int_{(K)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{(K)} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\mathrm{d}s$$

我们需要注意的是，在所有的这些公式的里面的角 α 都是按照切线的相应于曲线 (K) 本身方向的那个方向来进行计算，如果改变曲线的方向，不但是左边的积分变号，并且是由于切向的方向的改变 α 也要改变 $\pm\pi$, 从而右边的积分变号。

显然，所推导的公式对于一些光滑曲线的拼接也仍然适用，只要对于每一段光滑曲线都写出相应的公式并且逐个的加起来即可。

第七章　重积分

7.1　二重积分的概念与性质

7.1.1　计算柱体的体积

引出重积分的概念的实际问题与引出定积分的情形十分相像，柱体的体积问题引出了二重积分的概念。

假设我们看一个立体 (V), 它的上面以曲面

$$z = f(x, y)$$

为界，而侧面为柱面，其母线平行于 z 轴，下面以 xy 平面上的一个平面图形 P 作为底。现在来求体积 V。

为了解决这个问题，我们采用积分学之中的将所求部分化成元素的方法，取每一个部分的近似值，加在一起并且取极限，为了求出各个柱体的体积，我们在每个小区域 (P_i) 内任意的取一个点 (ξ_i, η_i). 如果把每一个柱体细条就近似于看作是一个以 z 坐标 $f(\xi_i, \eta_i)$ 的真正的柱形体，各个柱形的体积就近似的等于

$$f(\xi_i, \eta_i)P_i$$

这里的 P_i 表示的是图形 P_i 的面积，这样的话该立体的体积就可以近似的

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)P_i$$

提高精确度的方法就是缩小 P 的面积，那么在极限的情况下这个等式就是精确的，如此

$$V = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)P_i$$

所提的问题也就解决了。

这种形式的极限就是函数 $f(x,y)$ 在区域 P 上面的二重积分，表示为

$$\iint\limits_{P} f(x,y)\mathrm{d}P$$

于是上面的体积就是

$$V=\iint\limits_{P} f(x,y)\mathrm{d}P$$

如此，二重积分就是把简单的定积分的概念直接推广到了二元函数的情况。

7.1.2 化二重积分为累次积分

我们假设在 xy 平面上面的区域 P 是一个由两条曲线

$$y=y_0(x),\qquad y=Y(x)\quad (a\le x\le b)$$

以及两条纵坐标线 $x=a,x=b$ 所围成的曲线梯形，y 的变化区间是

$$[y_0(x_0),Y(x_0)]$$

本身也与 x_0 有关，如此

$$Q_(x_0)=\int_{y_0(x_0)}^{Y(x_0)} f(x_0,y)\mathrm{d}y$$

最后我们得出

$$V=\iint\limits_{P} f(x,y)\mathrm{d}P=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_0(x_0)}^{Y(x_0)} f(x_0,y)\mathrm{d}y$$

7.1.3 二重积分的定义

定义 7.1 假设在区域 (P) 内定义了一个函数 $f(x,y)$，将区域 P 使用曲线网划分成有限多个小区域 P_i，其面积为 P_i，(比较简单的是设想这些小的区域是联通的，但是也不排除其非联通的可能性)，在第 i 个小区域 P_i 任意取一个点 (ξ_i,η_i)，将这点上的函数值 $f(\xi_i,\eta_i)$ 乘以相应的小区域的面积 P_i，并且将这类的乘积累加起来，所得的总和

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)P_i$$

我们就称为函数 $f(x,y)$ 在区域 P 内的积分和。

以 λ 表示小区域 P_i 内的直径的最大值者，于是在 $\lambda \to 0$ 的时候，积分和 σ 的有限极限

$$I = \lim \sigma$$

就叫做是函数 $f(x,y)$ 在区域 P 之中的二重积分并表示为记号

$$I = \iint\limits_P f(x,y)\mathrm{d}P$$

有积分的函数称为可积函数。

7.1.4 二重积分的存在条件

被积函数必然是有界的，事实上如其不然，那么将区域 P 以任意的给定的方法分成小区域的时候，可以凭借点的选择使得积分和任意变大，这样就不能存在有限的极限 I 了。

所以我们考虑一直函数 $f(x,y)$ 的可积分条件的时候就预先说明其为有界的

$$m \le f(x,y) \le M$$

与一元函数的情况类似，我们也适合引入达布和的概念

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i P_i, \qquad S = \sum_{i=1}^{n} M_i P_i$$

这里的 m_i, M_i 分别是函数 $f(x,y)$ 在区域 P_i 之中的下确界以及上确界。

在区域的一定的划分之下，无论点 (ξ,η) 如何选取，恒有

$$s \le \sigma \le X$$

但是适当的选择这些点可以使得 $f(\xi_i,\eta_i)$ 的值任意的接近于 m_i(或者 M_i), 同时总和 σ 可以任意的接近于 s 或者 S, 如此达布下和以及达布上和分别为对应于区域的统一划分的积分和的上确界以及下确界。

其次，建立确界

$$I_* = \sup\{s\}, \qquad I^* = \inf\{S\}$$

的存在，并且有

$$s \le I_* \le I^* \le S$$

最后我们类似于一维的状况有

定理 7.1.1 *如果要使得二重积分的存在，其充要条件是*

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0$$

或者写成

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i P_i=0$$

这里的 ω_i 就是函数 $f(x,y)$ 在小区域 P_i 之中的摆幅 (M_i-m_i)

7.1.5 可积函数以及二重积分的性质

定理 7.1.2 *如果将一个区域 P 之中的可积函数 $f(x,y)$ 沿着该区域之中的某个面积为 0 的曲线 L 上一任意的方式改变其函数值 (条件是改变之后该函数仍然保持有界)，仍然可以得到一个在 P 之中可积分的函数，并且其积分就是 $f(x,y)$ 的积分。*

证明时写出原来与之后的积分和，他们的查边只在于碰到曲线 L 的那些区域的项，这些面积在 $\lambda\to 0$ 的时候趋向于 0，由此可以断言两个积分和趋向于同一个极限。

还有与定积分类似的结论并不赘述了，只需记住二重积分的理念仍然是线性的即可

7.1.6 对于区域的微分法则

我们来看一个平面区域 P 以及其中所包含的小区域 p。假设所有的区域都是可以求积的，如果对于区域 P 的每一个小区域 p 都有一个一定的数字

$$\phi=\phi(p)$$

与之对应，则由此我们对于那些 p 定义了一个 *区域函数*。

如果将这些区域 p 分解成为互不交叠的部分

$$p=p'+p''$$

的时候，恒有

$$\phi(p)=\phi(p')+\phi(p'')$$

则区域函数 $\phi(p)$ 我们称为可加的。

假设在可求积区域 P 之中给定了一个可积分点函数 $f(M)=f(x,y)$; 于是它在该区域的任何小区域 p 之中也同样可以积分，如此积分

$$\phi(p)=\iint_{p} f(x,y)\mathrm{d}P$$

也是区域 p 的函数。

现在来讨论" 函数 $\phi(p)$ 对于区域的微分法"。假设 M 是区域 p 的一个定点，而 p 是包含该点的小区域，那么比率

$$\frac{\phi(p)}{p}$$

其中 p 是区域 p 的面积，在区域 p 的直径趋向于 0 的时候的有限极限称为函数 $\phi(p)$ 在点 M 区域的导数，这里的 $f(x,y)$ 是一个在区域 P 上面连续的函数，接下来证明一个积分在点 M 对于区域的导数就是这个被积函数在该点的函数值，即

$$f(M)=f(x,y)$$

事实上，取一个在导数定义之中所说的区域 p，那么按照中值定理，有:

$$\phi(p)=f(\bar{x},\bar{y})\cdot p$$

这里的 $(\bar{x},\bar{y})$ 是区域 p 之中的某一点，如果区域 p 的直径无限趋于 0，点 $(\bar{x},\bar{y})$ 就无限的趋于 (x,y), 按照连续性有

$$\frac{\phi(p)}{p}=f(\bar{x},\bar{y})\rightarrow f(x,y)$$

这便是我们所要求证的。

7.2 二重积分的计算

7.2.1 把矩形区域上的二重积分化成累计积分

定理 7.2.1 如果对于定义在矩形 P=$[a,b;a,d]$ 内的函数 $f(x,y)$ 存在二重积分

$$\iint_{P} f(x,y)\mathrm{d}P$$

而且对于在 $[a,b]$ 的每一个常数值 x 存在单积分

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

那么也存在累次积分

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

并且等式

$$\iint\limits_P f(x,y)\mathrm{d}P=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

证明 将确定矩形 P 的区间 $[a,b]$ 以及 $[c,d]$ 使用分点

$$x_0=a<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b$$

$$y_0=c<y_1<\cdots<y_k<y_{k+1}<\cdots<y_m=d$$

分成一小段，于是矩形 P 分割成一些小矩形

$$P_{i,k}=[x_i,x_{i+1};y_k,y_{k+1}]$$

由 $m_{i,k}$ 以及 $M_{i,k}$ 表示函数 $f(x,y)$ 在矩形 $P_{i,k}$ 之中的下确界以及上确界，如此对于矩形之中的所有的点有

$$m_{i,k}\le f(x,y)\le M_{i,k}$$

在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 内任意固定 x 的值 $x=\xi_i$，并且对于 y 由 y_k 到 y_{k+1} 进行积分，可以得到:

$$(m_{i,k})\Delta y_k\le\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i,y)\mathrm{d}y\le(M_{i,k})\Delta y_k$$

这里的 $\Delta y_k=y_{k+1}-y_k$，对于 y 的积分是存在的，因为我们早已经假设单积分存在，我们把这种不等式进行一个求和

$$\sum_{k=0}^{m-1}(m_{i,k})\Delta y_k\le I(\xi_i)=\int_c^d f(\xi_i,y)\mathrm{d}y\le\sum_{k=0}^{m-1}(M_{i,k})\Delta y_k$$

我们再使用 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ 遍乘此不等式的各端并且对于指标 i 由 0 到 n-1 进行求和，可以得到

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i\sum_{k=0}^{m-1}(m_{i,k})\Delta y_k\le\sum_{i=0}^{n-1}I(\xi_i)\Delta x_i\le\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i\sum_{k=0}^{m-1}(M_{i,k})\Delta y_k$$

在上式的中间我们得到了函数 $I(x)$ 的积分和，而两头无非是二重积分的达布和 s 与 S，事实上，由于 $\Delta x_i \Delta y_k$ 是矩形 $P_{i,k}$ 的面积 $P_{i,k}$，我们就可以导出

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} (m_{i,k}) \Delta y_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} (m_{i,k}) \Delta x_i \Delta y_k = \sum_{i,k} (m_{i,k}) P_{i,k} = s$$

同理可以推出

$$s \leq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i \leq S$$

如果现在令所有的 Δx_i 以及 Δy_k 同时趋于零，由于二重积分存在，两个达布和就趋于该积分为极限，所以

$$\lim \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i = \iint\limits_P f(x,y) \mathrm{d}P$$

所以二重积分同时也就是函数 $I(x)$ 的积分

$$\iint\limits_P f(x,y) \mathrm{d}P = \int_a^b I(x) \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y) \mathrm{d}y$$

这就是我们要证明的，同理由于 x 和 y 是轮换对称的，x 和 y 的位置改变也不影响结论。

7.2.2 化曲线区域上面的二重积分为累次积分

我们现在来考虑一个区域 P，其上下以两个连续曲线

$$y = y_O(x)$$

$$y = Y(x)$$

为界，两侧以两个纵坐标线 $x = a, x = b$ 为界，我们有如下定理

定理 7.2.2 如果对于定义于区域 P 之中的函数 $f(x,y)$ 存在二重积分

$$\iint\limits_P f(x,y) \mathrm{d}P$$

并且对于 $[a,b]$ 之中的每一个固定的 x 值存在单积分

$$I(x) = \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y) \mathrm{d}y$$

那么也存在累次积分

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

并且等式

$$\iint\limits_P f(x,y)\mathrm{d}P = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

证明 我们可以将区域 P 包含在一个矩形 R 之中，令

$$c = \min_{a \le x \le b} y_0(x), \qquad d = \max_{a \le x \le b} Y(x)$$

并且定义一个新的函数 $f^*(x,y)$, 其点在区域 P 之中的值是与 $f(x,y)$ 相同，在 P 之外的部分为 0。显然这个函数是满足可以我们的定理 5.2.1 的，所以等式成立。

在边界较为复杂的情况下，我们通常将区域 P 分割成有限个组成部分，再对于每一个部分分别进行积分。

7.3 格林公式

定义 7.2 假设 $L(AB)$ 是一个平面曲线，如果曲线的起点 A 以及终点 B 重合，我们就称 $L(AB)$ 是闭合曲线。我们常常把在闭曲线 $L(AB)$ 上面的积分表示为[1]

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

如果积分曲线是一个闭曲线，曲线上面的任意的点都既可以看成是起点又可以看成是终点，由于路径的方向不同，我们会产生两条路径，为了明确是哪条路径我们给出闭曲线的正向以及负向。

首先介绍平面的单连通区域的概念。

定义 7.3 假设 D 是一个平面区域，如果 D 之内的任意的闭曲线的包围的部分都包含在 D 之中，那么我们称 D 为 **单连通区域**，否则称为是 **复联通区域**。

通俗的说，单连通区域里面不含有” 洞”，而复连通区域之内有” 洞”。

[1]我们通常还将线积分的积分号写成是 $\oint$ 的形式

定义 7.4 假设平面区域 D 由闭曲线 L 围成，当观察者在区域 D 外面，沿着 L 行走的时候，区域在观察者的左边，那么我们就称行走的方向是闭合曲线 L 的正向，反之是曲线的负向。

7.3.1 格林公式的推导

我们来建立一个表示二重积分以及线积分之间的重要公式。

假设区域 D 是一个曲边梯形区域 (SRQP)，其边界线由曲线

$$(PQ) \quad y = y_0(x)$$

$$(SR) \quad y = Y(x)$$

以及两条平行与 y 轴的线段所构成，我们假设在区域 D 之中给了一个函数 $P(x,y)$，它连同其导函数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 都是连续的。

按照之前的公式进行对于二重积分的计算

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

我们可以得出

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y$$

这里的内层积分很容易就可以通过原函数 $P(x,y)$ 算出：

$$\int_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y = P(x,y)|_{y=y_0(x)}^{y=Y(x)} = P(x,Y(x)) - P(x,y_0(x))$$

如此

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b P(x,Y(x))\mathrm{d}x - \int_a^b P(x,y_0(x))\mathrm{d}x$$

后面的两个积分都可以写成是线积分的形式，事实上，按照前段的公式可以看出

$$\int_a^b P(x,Y(x))\mathrm{d}x = \int_{(SR)} P(x,y)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b P(x,y_0(x))\mathrm{d}x = \int_{(PQ)} P(x,y)\mathrm{d}x$$

所以由此我们有

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b P(x,Y(x))\mathrm{d}x - \int_a^b P(x,y_0(x))\mathrm{d}x$$

$$= \int_{(SR)} P(x,y)\mathrm{d}x - \int_{(PQ)} P(x,y)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{(SR)} P(x,y)\mathrm{d}x + \int_{(QP)} P(x,y)\mathrm{d}x$$

为了考虑全边界线的积分，我们还添加积分

$$\int_{(PS)} P(x,y)\mathrm{d}x, \quad \int_{(RQ)} P(x,y)\mathrm{d}x$$

它们显然是 0，由于线段 PS, RQ 是与 x 轴垂直的，我们得到了

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{(PS)} P(x,y)\mathrm{d}x + \int_{(SR)} P(x,y)\mathrm{d}x + \int_{(RQ)} P(x,y)\mathrm{d}x + \int_{(QP)} P(x,y)\mathrm{d}x$$

这个等式的右边是沿着区域 D 的闭的界线 L 全部取得积分，但是其方向是负的方向，按照沿着闭路线积分表示法的规定，我们可以把公式添上一个负号即可，即：

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{(L)} P(x,y)\mathrm{d}x$$

事实上，这个公式对于较为复杂的区域也是同样成立的，只要假设图形 D 可以使用平行于 y 轴的直线分成有限多个上述那种曲边梯形，对于每一个这样的题型分别写出想我们刚刚推导出来的公式而将这些等式的两边加起来，左边是一个二重积分，展布在全部的区域 D 上面，右边则是沿着所有的各部分的界线所取的诸积分之和，但是右边可以化成一个沿着界线 L 的积分，因为每一条辅助线段上面的积分都是 0.

同样的我们可以建立公式

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$$

这里假设在区域 D 上面的函数 Q 连同其偏导数都连续，在此先取一个曲边梯形 (D)，它以曲线

$$(PS) : x = x_0(y)$$

$$(QR) : x = X(y)$$

以及两条平行于 x 轴的片段 (PQ) 以及 (SR) 为界，然后该公式也可以像前面一样的推广到用平行于 x 轴的直线分成又像个这种曲边梯形的区域。

最后，如果区域 (D) 同时满足两种情形的条件，我们既可以划分成有限个第一类型的提醒，又可以彼此无关的分成有限个第二类型的梯形。假设 P,Q 函数以及其导数 $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ 都是连续的。我们根据以上的公式

$$\int_{(L)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_{(D)} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

7.4 线积分以及积分道路无关的积分

定义 7.5 假设 G 是一个区域，A 以及 B 是 G 内的任意的两点，L_1, L_2 是 G 内的任意的两条连接 A, B 的分段光滑的曲线。如果

$$\int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{L_2} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

那么我们就称曲线积分

$$\int_{L} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

在 G 内与路径无关，否则称与路径有关。

如果我们的第二类的曲线积分与路径无关，那么我们对于任意的由相同的起点以及重点的曲线 L_1, L_2 有

$$\int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{L_2} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

等价于

$$\int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y - \int_{L_2} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

或者是

$$\oint_{L_1+L_2^-} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

这里的 $L_1 + L_2^-$ 是有向闭曲线，因此，在 G 内的积分与路径无关等价于沿着 G 内的任何闭曲线的曲线积分为 0.

定理 7.4.1 假设二元函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 以及 $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在单连通区域上面连续，下面的四个命题是等价的

- 曲线积分 $\int_{(L)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(xy)\mathrm{d}y$ 与路径无关，仅仅与起点以及终点有关。
- 在 G 内存在一个函数 $u(x,y)$，使得 $\mathrm{d}u(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$
- $\forall(x,y) \in G, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$
- 对于 G 内的任意光滑或者逐段光滑的闭曲线 L，有 $\oint_{(L)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$

证明 先证明 (1)→ (2), 假设 (x_0, y_0) 是 G 内一个固定的点，(x,y) 是 G 内的任意一个点，由于曲线积分与路径无关，仅仅与起点以及终点有关，所以从 (x_0, y_0) 到 (x,y) 的任意的曲线积分可以写成是

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

下面证明 $u(x,y)$ 具有命题 (2) 之中所要求的性质

$$\begin{aligned}
u(x+\Delta x, y) - u(x,y) &= \int_{(x_0,y_0}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y + \\
&\quad \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

已知 $P(x,y)$ 在 G 内连续，于是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x,y) - u(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(x+\theta\Delta x, y) = P(x,y)$$

同理可以证明

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

所以

$$\mathrm{d}u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

接下来证明 (2)→(3) 由全微分的公式我们可以知道，$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$, 于是有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

由于 $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 G 里面连续，所以二阶混合偏导数连续，因此

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

接下来 (3)→(4)　对于 G 内的任意的光滑或者逐段光滑的闭曲线 L，应用格林公式我们有

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

其中 D 是由 L 的围成的闭区域。

最后的 (4)→(1)　由于 G 内的曲线积分与路径无关，等价于沿着 G 内的任何的闭的曲线积分为 0，于是结论显然成立。

7.4.1 全微分形式求原函数

定义 7.6 *如果在某区域上面的 $\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，那么我们就称 $u(x,y)$ 是 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 的原函数。*

定理 7.4.2 *如果二元函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 以及 $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在单连通区域上面连续，那么 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 存在原函数的充要条件是*

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

并且满足下列两点

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y\mathrm{d}y$$

是 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 的一个原函数。以及

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=u(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}=u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1)$$

其中的 (x_0,y_0) 是 G 内的某一点，$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 是 G 内的任意两点。

我们通过上述定理可以知道，如果：$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 存在一个原函数，那么积分与路径无关。于是为了计算原函数，我们可以使用路径 $(x_0,y_0)\to$

$(x,y_0)\to(x,y)$，从而我们有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y+\int_{(x,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

由于 x 与 y 具有轮换对称性，那么其实采用两种路径的结果是一样的.

但是采用这种公式方法求解原函数，前提是他们的偏导数相同，否则未必可以得到原函数。对于一些全微分来说，并非是最简单的方法，我们介绍分组凑微分的方法来求原函数。

分组的具体方法是将仅仅含有 x 的项分成一组，仅仅含有 y 的项分成一组，即含有 x 又含有 y 的两项分成一组。(这个需要观察)

7.5 二重积分的变量替换

7.5.1 平面区域的变换

假设给定了两个平面，一个带有一组直角坐标系 x,y，另一个带有同样的坐标轴 ξ,η ，我们设想在这两个平面上面有两个有界闭区域: 在 xy 平面上有一个区域 (D) 而在 $\xi-\eta$ 平面上面有一个区域 (Δ).

每一个区域的界线或者边界我们都假设是逐段光滑的简单曲线，区域 (D) 的界线以 (S) 表示，(Δ) 的以 Σ 来表示。

假设在区域 (Δ) 之内给了一组连续函数

$$f(x)=\begin{cases}x=x(\xi,\eta)\\y=y(\xi,\eta)\end{cases}$$

它给区域 (Δ) 内的每一个点 (ξ,η) 配以一个 (D) 内的相应的点 (x,y)，并且 (D) 内没有一个点被漏掉，每一个这样的点都至少与 (Δ) 之内的 (ξ,η) 相应。

如果 (Δ) 之中的不同的点 (ξ,η) 都相应于 (D) 之中的不同的点 (x,y)，如此每一点 (x,y) 都相应于一个点 (ξ,η)，那么上述的分段函数 ξ,η 单值的

解出：变量 ξ,η 也是区域 (D) 内的 x,y 的单值函数

$$f(x)=\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$$

如此，在区域 (D) 以及 (Δ) 之间建立了一种相互的单值的或者一对一的关系，也可以说上述第一个公式实现了区域 (Δ) 到区域 (D) 之中的变换，第二个公式实现了区域 (D) 到区域 (Δ) 的逆变换。[2]。

我们还假设第一个分段函数不但自身连续，而且还在 (Δ) 之中有一阶连续偏导数，于是函数行列式

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{vmatrix}$$

也在区域 (Δ) 内是 ξ,η 的连续函数，我们认为这个行列式永远不等于 0，所以按照连续性保持固定的正负号，这假设之后会发挥重要的作用。

如果在区域 (Δ) 内取一个逐段光滑的曲线 (Λ), 那么根据变换，它可以变成区域 (D) 内的一条相同的曲线 (L)

事实上，假设曲线 (Λ) 的方程是

$$\xi=\xi(t),\qquad \eta=\eta(t)$$

并且我们可以认为函数 $\xi(t),\eta(t)$ 有不同时等于 0 的连续导函数，将这些函数代入变换的公式里面，我们可以得到相应的曲线 (L) 的参变方程

$$x=x(\xi(t),\eta(t))=x(t)$$

$$y=y(\xi(t),\eta(t))=y(t)$$

不难看出，这些函数存在连续的导函数

$$x'(t)=\frac{\partial x}{\partial \xi}\xi'(t)+\frac{\partial x}{\partial \eta}\eta'(t)$$

$$y'(t)=\frac{\partial y}{\partial \xi}\xi'(t)+\frac{\partial y}{\partial \eta}\eta'(t)$$

他们也不能同时等于 0，如此在曲线 (L) 上面没有奇点。

事实上如果不然，由于其行列式 $\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$ 不等于 0，可以推导出 ξ',η' 同时等于 0，这与假设矛盾。

[2]这个东西用线性代数的角度来理解会更好，基坐标的变化矩阵

7.5.2 以曲线坐标表示面积

我们假设 xy 平面上面给定了一个区域 (D)，其由一逐段光滑的简单界线 (S) 所包围，假设公式建立了这个区域与 ξ,η 平面上面由类似界线 (Σ) 所围成的区域 (Δ) 的一一对应关系。

我们保留之前的所有的关于该区域变换的假设，并且还假设在区域 (Δ) 内的函数存在连续的二阶混合偏导数。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial\eta\partial\xi}$$

在这些假设下面我们是要把 xy 平面上面的一个区域的面积 D 表示为展布在 $\xi-\eta$ 平面上面区域 (Δ) 的二重积分。

我们由

$$D=\int_{(S)} x\mathrm{d}y$$

这个以沿着区域 (D) 的界线 (S) 所取的线积分表示成面积 D 的公式出发。

之后的变换步骤如下：先利用界线的参变方程由线积分转化为寻常积分，然后将此定积分转化为线积分，但是现在的定积分已经是沿着区域 (Δ) 的界线 (Σ) 取的了，最后使用格林公式将所得到的线积分转化成为区域 (Δ) 内的二重积分。

但是在实现这些步骤的时候，我们需要的是界线 (S) 的参变方程，既然以后我们想要过渡到界线 (Σ), 不如就由这界线的方程出发，如前段所示

$$\xi=\xi(t),\qquad \eta=\eta(t)$$

$$x=x(\xi(t),\eta(t))=x(t)$$

$$y=y(\xi(t),\eta(t))=y(t)$$

正是因为这条曲线在 xy 平面上面相应于界线 (Σ)，t 的变化界限为 $[\alpha,\beta]$，按照线积分的公式，我们可以得到

$$D=\int_\alpha^\beta x(t)y'(t)\mathrm{d}t$$

或者

$$D=\int_\alpha^\beta x(\xi(t),\eta(t))[\frac{\partial y}{\partial\xi}\xi'(t)+\frac{\partial y}{\partial\eta}\eta'(t)]\mathrm{d}t$$

我们将这个积分与沿着界线 (Σ) 正向所取的线积分

$$\int_{(\Sigma)} x(\xi,\eta)(\frac{\partial y}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi+\frac{\partial y}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta)$$

对比，如果想要把这个线积分按照寻常的法则转化成为寻常的定积分，你妈我们必须要使用曲线 (Σ) 参变方程之中的函数 $\xi(t),\eta(t)$ 来代替 ξ,η，而回到之前的积分。

当然，在这种情况下，我们的变换是正方向给出的，但是其实是可以沿着负方向给出的积分

$$\pm\int_{(\Sigma)} x\frac{\partial y}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi+x\frac{\partial y}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta$$

最后将所得的线积分转化成为二重积分，我们利用格林公式

$$\int_{(\Sigma)} P(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi+QP(\xi,\eta)\mathrm{d}\eta=\iint\limits_{(\Delta)}(\frac{\partial Q}{\partial \xi}-\frac{\partial P}{\partial \eta})\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

这里我们令

$$P(\xi,\eta)=x\frac{\partial y}{\partial \xi},\quad Q(\xi,\eta)=x\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

由于

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi}=\frac{\partial x\partial y}{\partial \xi\partial \eta}+x\frac{\partial^2 y}{\partial \eta\partial \xi}$$
$$\frac{\partial P}{\partial \eta}=\frac{\partial x\partial y}{\partial \xi\partial \eta}+x\frac{\partial^2 y}{\partial \eta\partial \xi}$$

由于 y 的二阶混合偏导数彼此相同，所以

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi}-\frac{\partial P}{\partial \eta}=\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$$

并且我们得出公式

$$D=\pm\iint\limits_{(\Delta)}\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

由于在所做的假设之下，行列式

$$J(\xi,\eta)=\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$$

在区域 (Δ) 内保持一定的正负号，所以积分也有同一正负号，但是积分前面还有一个双重号 $\pm$，这两个正负号是一致的，所以我们最后得到的显然是绝对值

$$D=\iint\limits_{(\Delta)}|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\iint\limits_{(\Delta)}J(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

积分号下面的式子

$$|J(\xi,\eta)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = |\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

我们通常称为是曲线坐标系之中的面积元素，例如我们曾经看见在化为极坐标的时候函数行列式等于 r，所以极坐标的面积元素是 $r\mathrm{d}r\theta$

第八章　曲面积分

8.1　双侧曲面

8.1.1　曲面的参变表示法

我们之前谈到过空间之中的曲线的参变表示法

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

如此曲线之上的点的位置就由一个在某个区间内变化的参变量 t 的值所确定，在显式方程之中

$$z = f(x, y)$$

所给出的曲面上决定的点的位置我们已经牵扯到两个参变量，即横坐标 x 以及纵坐标 y，在一般的情况里面，参变量是两个任意的变量 u, v, 而曲面的参变表达式就成为了三个方程

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

这里函数 φ, ψ, χ 都在参变量 u, v 平面的上的某个区域 Δ 之中有定义并且连续。

重要的是这一种情况：曲面之中的每一个点都仅仅能够一堆参变值来得出，如此的上述方程在曲面的点以及；平面区域 (Δ) 的点之间建立了一种一一对应关系；这样的曲面我们叫做，简单曲面，在此我们假设区域 (Δ) 以及曲面都由简单的闭界线所谓，他们必须按照上述公式彼此对立。

参变量 u, v 称为是相应点的曲线坐标，如果在方程 (3) 之中固定一个曲线坐标的值，比如说，令 $u = u_0$，则显然得到了一条曲线的方程。

$$x = \varphi(u_0, v), \quad y = \psi(u_0, v), \quad z = \chi(u_0, v)$$

这样的一个曲线的所有的点都落在该曲面上面，让 u_0 的值变化，则得到一整族这样的 u 曲线，同样，固定一个值 $v=v_0$, 也就得到该曲面上面的一条曲线

$$x=\varphi(u,v_0),\quad y=\psi(u,v_0),\quad z=\chi(u,v_0)$$

这种 v 曲线也组成一个区县族，所有的这些曲线都叫做曲线的坐标线，如果是简单的曲面，那么通过其任何一点都恰好有每一族的一条坐标线。

我们现在来考虑上述函数不仅仅连续而且在区域 (Δ) 之中具有一阶的连续导函数，并且来考虑函数矩阵

$$\begin{pmatrix}\varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u\\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v\end{pmatrix}$$

假设对于决定曲面上面的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的参变量的值 (u_0,v_0), 在上述矩阵之中，至少有一个二阶行列式不等于零。

我们在简单曲面上面任意的选择一个非奇点 $M(x,y,z)$，于是如刚才所见，在其某一个邻域内的该曲面可以使用某一种显式方程来给出，所以在点 M 上面有切面，这个切面的方程可以写成是[1]

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

的形式，这里的系数待定。

如果在曲面方程之中将 v 固定为与所选择的点 M 相异的值，那么得出通过此点的 (v) 曲线的方程，此曲线在点 M 的切线可以由方程

$$\frac{X-x}{x'_u}=\frac{Y-y}{y'_u}=\frac{Z-z}{z'_u}$$

表示出来，同样固定 u 也可以得到另一个通过点 M 的坐标线，该点有切线

$$\frac{X-x}{x'_v}=\frac{Y-y}{y'_v}=\frac{Z-z}{z'_v}$$

由于这两点都在平面上面, 所以[2]

$$Ax'_u+By'_u+Cz'_u=0$$

$$Ax'_v+By'_v+Cz'_v=0$$

[1]我们习惯使用大写的字母表示流动坐标，以区分曲面上面的定点，即小写的字母

[2]此处使用了和比定理的思想

这样的情形系数 A, B, C 应该与矩阵

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

的二阶行列式成比例，通常不妨假设他们等于这些行列式，如此不妨总认为

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

8.1.2 曲线的侧

我们来建立曲线的侧这样一个之后很重要的概念。

定义 8.1 *我们考虑一个曲面 (S)，不论其封闭与否，而假设其每点上都有一个一定的切面，其位置随着切点而连续变化。*

8.2 曲面的面积

曲面的面积的概念以及曲线的长的概念有相似之处，我们已经定义了弧之长为内接折线的周长在其所有的各边之长趋于 0 的时候的极限，在曲面的情形我们自然会考虑其中内接多边形并且定义曲面面积为该多边形面积在各面直径趋于 0 的时候的极限。但是这种方法在 19 世纪末已经被施瓦兹证明是有问题的，我们给出另外一种方法。

我们有一个显式方程

$$z = f(x, y)$$

所给的曲面 (S) 这一个情形开始。假设 x, y 在 xy 平面上面的正方区域 (D) 内变化，并且 z 在这个趋于里面有连续偏导数

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

我们使用 (零面积) 曲线网将区域 (D) 分成元素

$$(D_1), (D_2), (D_3), \cdots, (D_n)$$

并且来考虑其中的一个元素 (D_i)，如果在这个小分域的边界上面作为准线来建立一个柱面，其母线平行于 z 轴，那么它在曲面 (S) 上面切出一个元素 (S_i)，在 (D_i) 取任意的一点 $P_i(x_i, y_i)$，而在曲面 (S) 上面的一个相应点

$M(x_i, y_i, z_i)$ 处做一个切面。上面所说的柱面也在切面上面切一个元素图形 (T_i)，它的面积 T_i 可以看成是面积元素 (S_i) 的近似值。

如此，所有的这种面积之和

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

可以看成是曲面 (S) 的面积的近似值，我们将这曲面的面积 S 定义为当所有的元素 (S_i) 的直径趋向于 0 的时候也就是所有的平面元素 (D_i) 趋于 0 的时候，上列式子的极限

$$S = \lim \sigma = \lim \sum_{i=1}^{n} T_i$$

现在不难证明，S 可以表示为二重积分

$$S = \iint_{(D)} \frac{1}{|\cos \nu|} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里的 ν 表示的是曲线的法线以及 z 轴间的角。

事实上，如果 ν_i 就是相应于点 M_i 的 ν 的值，则平面图形 $(T_i), (D_i)$ 的面积之间由这样的关系

$$D_i = T_i \cdot |\cos \nu_i|$$

由此有

$$T_i = \frac{1}{|\cos \nu_i|} \cdot D_i$$

总和

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\cos \nu_i|} \cdot D_i$$

是二重积分的积分和，因此在上述的极限过程之中趋于该积分为其极限，这就是所求证的。

8.2.1 一般情况下面的曲面面积

现在我们来考虑一个由参变方程所给出的曲面 (S), 假设 M 是上面的一点，并且在这个点上面，存在曲面 (S) 上面的一个部分 (s), 它围绕着点 M，并且具有下列的性质：

- 曲面 (s) 可以使用显式方程给出

- 如果以 (δ) 表示 uv 平面上面的区域 (Δ) 的相应部分，则在 (δ) 内行列式 $C \neq 0$

这对于曲面的每个点 M 都是对的，只是在该点异于 0 的也可以是行列式 A 或者 B，这时候上面的显式方程就相应的换成了另外一种形状的显式方程。

$$x = h(y, z) \qquad y = g(z, x)$$

由此推知，整个曲面 (S) 可以分解称为有限个像 (s) 那样的片段。我们依据前面的定义来详细叙述 (s) 的面积的计算。

如果 (d) 是 (s) 在 xy 的平面上面的投影，那么我们知道他的面积

$$s = \iint_{(d)} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\cos\nu|}$$

由于区域 (d) 之中的点一级区域 (δ) 的点之中有一一对应的关系，由于方向余弦

$$|\cos\nu| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

故结果得出

$$s = \iint\limits_{(\delta)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

值得注意的是，这个式子是对于 A, B, C 对称的，其中完全没有反映出我们假设了行列式 C 在 (δ) 内异于 0 以及曲面 (s) 系由显式方程所表达出的这些情况，在不同的可能假设下得出同样的结果, 现在将全曲面 (S) 的面积 (S) 定义为其各个部分 (s) 的面积 (s) 的总和，把所有的上述等式加起来，得到最后的公式

$$S = \iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

显然这个与曲面 (S) 的划分方法无关。

> 说是说显然，我们还是证明比较好.
>
> 假设由变域为 (Δ) 的参变量 u, v 转化为变域 $(\bar{\Delta})$ 的参变量 $\bar{u}, \bar{v}$,
> 变换公式
>
> $$u = U(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = V(\bar{u}, \bar{v})$$
>
> 在这二区域之间建立了一一对应的关系。

若是给最后的公式另外一种形式，我们将原矩阵

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

乘以其转置矩阵，并且取行列式，会发现其就等于 $A^2+B^2+C^2$, 通常令

$$x'^2_u+y'^2_u+z'^2_u=E \qquad x'_ux'_v+y'_uy'_v+z'_uz'_v=F$$

$$x'^2_v+y'^2_v+z'^2_v=G$$

这就是所谓的高斯曲面系数，在微分几何之中很重要，在这样的表示法之下，我们有

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2$$

如此公式可以写成是

$$S=\iint_{(\Delta)}\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

8.3 第一型的曲面积分

第一型的曲线积分是二重积分的自然推广，正如第一型的线积分以及简单的定积分的关系一样。

我们是这样建立推广的：假设在某一段逐段光滑的界限所包围的双侧光滑曲面 (S) 的点上面定义了一个函数 $f(M)=f(x,y,z)$. 我们使用一个任意的逐段光滑曲线网将曲面 (S) 分成了 (S_i) 各个部分，在每一个 (S_i) 之中各任意的取出一点 $M_i(x_i,y_i,z_i)$，在这一点上面算出函数值

$$f(M_i)=f(x_i,y_i,z_i)$$

并且乘以相应的曲面部分的面积而做所有的这种乘积的和

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(M_i)S_i=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i)S_i$$

它与之前考虑的许多的和一样，称为积分和。

这个和在所有部分 (S_i) 的直径趋向于 0 的时候的有限极限就叫做函数 $f(M)=f(x,y,z)$ 沿着曲面 (S) 的第一型的面积分，而且表示成

$$\iint\limits_{(S)}f(M)\mathrm{d}S=\iint\limits_{(S)}f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

这里的 $\mathrm{d}S$ 象征着元素面积 S_i

8.3.1 化成寻常的二重积分

我们仅限于简单而光滑的曲面 (S) 的情况

对于任何在曲面 (S) 的点上连续的函数 $f(x,y,z)$ 上述积分恒存在，并且下列等式成立

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\mathrm{d}S = (R)\iint\limits_{(\Delta)} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

如此将第一型的面积分化成寻常的二重积分，只要将诸坐标 x,y,z 改写成其参变表达式，而面积元素 $\mathrm{d}S$ 换成其曲线坐标式就好了。

如果曲线 (S) 由显式方程

$$z = z(x,y)$$

所给出，那么公式可以改写成为

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\mathrm{d}S = (R)\iint\limits_{(D)} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里的 (D) 表示的是曲面 (S) 在 xy 平面上面的投影。

由于[3]

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{1}{|\cos\nu|}$$

所以公式可以写成是

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\mathrm{d}S = (R)\iint\limits_{(D)} f(x,y,z(x,y))\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\cos\nu|}$$

我们至今一直假设积分所展布的曲面 (S) 是简单而光滑的，我们的结果不难搬到又像个这种片段所组成的曲面的一般的情况。

8.4 第二型的面积分

定义 8.2 *我们来考虑一个光滑的或者是逐段光滑的双侧曲面 (S) 并且取定其两侧之中的任何一侧，我们已经知道这就等价于在曲面上面选取一个确定的定向，为了简单起见，我们先假设曲面是由显式方程*

$$z = z(x,y)$$

[3] ν 如惯例表示成为曲面法线以及 z 轴的角

所给出，而点 *(x,y)* 在 xy 平面上一个由逐段光滑界线所围成的区域 *(D)* 内变化，于是我们可以在曲面的上侧或者是下侧取一个。如果将曲面分成了许多的元素而将每一个相应的定向的元素射影到 xy 平面上面，那么该元素的界线的环形方向就决定了射影的界线的环形方向。现在假设在所给的曲面 *(S)* 的点上面定义了一个函数 $f(M) = f(x, y, z)$，使用逐段光滑的曲线网将曲面分成了许多元素 (S_i)

而在每一个元素 (S_i) 内各取一点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$, 然后算出函数值 $f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$, 并且乘以元素 (S_i) 在 xy 平面上面的射影的面积 D_i, 最后算出总和。

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)D_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)D_i$$

此和在所有的小区域 (S_i) 的直径区域 *0* 的时候的有限极限就叫做

$$f(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的展布在曲面 (S) 所选定的一侧上的第二型面积分，并且使用记号

$$I = \iint_{(S)} f(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

表示

改变坐标轴的地位，我们可以把曲面的元素射影到其他的两个平面上面，得到其他的两个面积分。

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z, \qquad \iint_{(S)} f(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

在现实的应用之中我们常常会遇见将这几个形式的积分合并在一起

$$\iint_{(S)} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里的 P, Q, R 是 (x, y, z) 的函数，定义在曲面 (S) 的点上面。

8.4.1 化成寻常的二重积分

我们假设函数 f 在曲面 (S) 上的各个点都是连续的

由显式方程给出

$$z=z(x,y)$$

这里的函数 z 连同其偏导数

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}$$

都是连续的。

我们换成

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z(x_i,y_i))D_i$$

这不难认出就是寻常的二重积分

$$(R)\iint_{(D)}f(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的积分和。

取极限我们就确定了上述积分的存在同时建立了等式

$$\iint_{(D)}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{(D)}f(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

现在不难来建立两种面积分之间的关系，我们将 ν 看成是锐角，而将函数 $f(x,y,z)$ 换成了 $f(x,y,z)\cos\nu$, 则有

$$\iint_{(D)}f(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{(S)}f(x,y,z)\mathrm{d}S\cos\nu$$

即

$$\iint_{(S)}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{(S)}f(x,y,z)\mathrm{d}S\cos\nu$$

若是母线平行于 z 轴的柱面的一部分

那么其元素均有零射影，如此

$$\iint_{(S)}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

前两种均有

可以将上面的公式加起来证明一般的情况成立。

类似的公式也可以对其他的面积分给出，我们给出一般的公式

$$\iint_{(S)}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{(S)}(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)\mathrm{d}S$$

如果是以参变式给出的

我们可以将上公式右边的积分连带左边的积分化为寻常的二重积分，展布在参变量的变域 (Δ) 上面。

我们选定曲面的一侧，并且由此在它上面定了向，如果区域 (Δ) 的界线 (Λ) 的正向唤醒相应于界线 (L) 的正向环形，那么方向余弦

$$\cos\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \cos\mu = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \cos\nu = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

来决定，另一方面，在变换为依照参变量 u, v 的二重积分的时候，面积元素 $\mathrm{d}S$ 应该替换成为

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

最后得出

$$\iint_{(S)} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{(D)} (AP+BQ+CR)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

8.4.2 斯托克斯公式

我们来推导一个联系面积分以及线积分之间的公式，也就是格林公式的推广。

假设包含在曲面 S 本身于其内部的某一个空间区域之内给定了一个函数 $P(x,y,z)$，它连同其偏导数都在该区域内连续，于是成立公式

$$\int_{(L)} P\mathrm{d}x = \iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

而界线 (L) 的环行方向就相应于曲面 (S) 的右边那个积分所展布之侧。

首先我们将沿着曲线 (L) 的线积分变成沿着曲线 (Λ) 的积分

$$\int_{(L)} P\mathrm{d}x = \int_{(\Lambda)} P(\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v)$$

这个等式不难验证：采用曲线 (Λ) 的参变表示法

$$u = u(t) \quad v = v(t)$$

由此曲线 (L) 也可以表示成为参变式

$$x = x(u(t), v(t)), \qquad y = y(u(t), v(t)), \qquad z = z(u(t), v(t))$$

于是两个积分化成了同一个依照参变量 t 的寻常积分

$$\int_{\alpha}^{\beta} P\cdot(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}t$$

我们使用格林公式于右边的积分

$$\int_{(\Lambda)} P(\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v)=\iint_{(\Delta)}\{\frac{\partial}{\partial u}(P\frac{\partial x}{\partial v})-\frac{\partial}{\partial u}(P\frac{\partial x}{\partial u})\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

由于这个被积式展开之后成为了

$$\iint_{(D)}\{\frac{\partial P}{\partial z}B-\frac{\partial P}{\partial y}C\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

按照之前的公式，我们可以将其变成面积分

$$\iint_{(S)}\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

恰好沿着曲面所选定的一侧来积分，如此完成了斯托克斯公式的证明。

但是我们这个公式是对于简单的光滑曲面来建立的，但是也可以推广到逐段光滑的曲线所围成的逐片光滑的曲面的一般情形，只要写出每一段的公式然后相加即可。

通过转化字母的方法，我们还可以得出两个类似的等式

$$\int_{(L)} Q\mathrm{d}y=\iint_{(S)}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x-\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

$$\int_{(L)} R\mathrm{d}z=\iint_{(S)}\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}y-\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

相加

$$\int_{(L)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=$$
$$\iint_{(S)}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}y\mathrm{d}x+(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}z\mathrm{d}y+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

这个等式就叫做斯托克斯公式，如果取 xy 平面上面的平面区域 (D) 作为曲面 (S) 的一片，从而 $z=0$, 则得出格林公式。

8.4.3 斯托克斯公式对于空间线积分的研究

假设在开区域之内给定了三个函数 P,Q,R，他们连同其导函数都是连续的。

8.5 三重积分

8.5.1 三重积分的概念

假设给定了一个充满质量的立体 V，并且在每一个点 $M(x,y,z)$ 上面都已知质量的分布密度

$$\rho=\rho(M)=\rho(x,y,z)$$

要决定该立体的全质量 m。

我们要解决这个问题当然还是从我们之前的思路出发，将立体 V 分成是 n 个部分，并且在每一个部分之中都取一个点，近似的认为在每一个部分之中其密度是常数，并且我们近似的认为就等于所选的那一点上的密度，于是这部分的质量可以近似的表现出来，那么我们做一个求和，显然可以求出立体的全质量，如果在各个部分的直径都趋于 0 的情况下，极限情形的公式是精确的，如此问题就解决了。

我们在物理之中常常会看见这些积分，他们叫做三重积分，我们通常记做

$$m=\iiint\limits_{(V)}\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$$

对于三重积分，我们有类似的结论，例如线性以及中值定理性。

8.5.2 三重积分的计算

我们类似的也是要化成重数较低的积分所组成的累次积分，假设函数 $f(x,y,z)$ 在所考虑的区域内连续，由此保证了所有以下接触到的积分都存在，那么我们先说这个情况，函数 $f(x,y,z)$ 的积分展布的立体是一个长方体

$$(T)=[a,b;c,d;e,f]$$

它在 yz 平面上的射影是一个矩形

$$(R)=[c,d;e,f]$$

于是我们首先有

$$\iiint\limits_{(T)}f(x,y,z)\mathrm{d}T=\int_a^b\mathrm{d}x\iint\limits_{(R)}f(x,y,z)\mathrm{d}R$$

然后再讲其中的二次积分换成是累次积分，如此就可以将三重积分的计算化成三个单次积分的累次计算

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)\mathrm{d}T = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d \mathrm{d}y \int_e^f f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

总而言之，与二重积分的性质类似。

8.5.3 奥斯特罗格拉茨基公式

在二重积分的理论之中我们熟悉了一个联系平面上的二重积分以及区域边界上面的线积分的格林公式，在三重积分之中与此公式类似的公式就是奥斯特罗格拉茨基公式，它将空间区域上面的三重积分与该区域边界面上的面积分联系起来。

我们来考虑一个立体 (V)，他的边界是光滑曲面

$$(S_1) \quad z = z_0(x,y)$$

$$(S_2) \quad z = Z(x,y)$$

以及一个柱面 (S_3) 这个柱面的母线，平行于 z 轴，准线即为 xy 平面上的那段光滑曲线 (K)，它包围着区域 (D)，即立体 (V) 在 xy 平面上面的投影。

假设在区域 (V) 之内定义了一个函数 $R(x,y,z)$, 它连同其导数 $\frac{\partial R}{\partial z}$ 在全区域 (V) 上面以及其边界上面都是连续的，所以成立下列公式

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{(S)} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里的 (S) 是包围该立体的曲面，而右边的积分式展布在他的外侧的。

事实上

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{(D)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z$$

如果考虑面积分的话，按照之前的公式

$$\iint_{(D)} R(x,y,Z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{(D)} R(x,y,z_0(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$\iint_{(S_2)} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{S_1} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里的积分第一个展布在曲面 (S_2) 的上侧，第二个展布在曲面 (S_1) 的下侧，这个等式在其右边添加一个展布在 (S_3) 外侧的积分

$$\iint_{(S_3)} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

之后仍然成立，由于所添加的积分是 0，将三个面积分合成一个，我们就可以得到

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{(S)} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这就是奥斯特罗格拉茨基公式的一个特例。

格林公式，斯托克斯公式，奥斯特罗格拉茨基公式可以使用这样的一种思想进行统一：他们都是将展布与某集合形象上的积分使用边界上面的积分来表示，格林积分是二维空间上的情况，斯托克斯公式属于二维但是是”弯曲”的空间的情况，奥斯特罗格拉茨基公式属于三维空间的情形，对于一维的场景就是我们的牛顿莱布尼茨公式了

不难理解，上述公式可以分解为所研究过的类型的更加广大的一类立体，也可以证明上述公式对于任何的逐片光滑的曲面包围得到的立体都是成立的。我们同样的也有下列的公式

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{(S)} P\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{(S)} Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

这里的函数 P,Q 连同其导函数 $\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y}$ 都是在区域 (V) 里面连续的。

我们将三个公式加在一起就可以得到了〈一般的奥斯特罗格拉茨基公式〉

$$\iiint_{(V)} (\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iint_{(S)} P\mathrm{d}x\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}y + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其将展布在闭曲面的外侧一般形式的第二型面积分表示为该曲面所包含的立体上的三重积分。

如果引入第一型的面积分，我们可以获得奥斯特罗格拉茨基公式的另外一个有用而且容易记忆的形式

$$\iiint_{(V)} (\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iint_{(S)} (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu)\mathrm{d}S$$

这里的 λ,μ,ν 是曲线 (S) 的外法线以及各个坐标轴所成之角。

8.5.4 三重积分的变量替换

我们关于平面区域的变换的想法可以很自然的转移到空间区域上面来。

假设有一个空间，其中有直角坐标系 xyz, 另外有一个坐标系 $\xi\eta\zeta$，我们来考虑空间之中的两个闭区域 (D) 以及 (Δ)，分别为曲面 (S) 以及 (Σ) 所包围，我们假设这些界面是逐片光滑的，也假设这两块区域之间有着相互单值并且连续的关系，我们用以下的公式表示出

$$f(x)=\begin{cases} x=x(\xi,\eta,\zeta) \\ y=y(\xi,\eta,\zeta) \\ z=z(\xi,\eta,\zeta) \end{cases}$$

同时曲面 (Σ) 以及 (S) 上的点必须彼此对应。

假设函数在区域 (Δ) 里面有连续偏导数，于是函数行列式

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}$$

也是 (Δ) 内的连续函数，这里我们也认为这个行列式永远异于 0.

第九章　场论以及向量函数

9.1　向量代数

9.1.1　向量积

我们从空间之中的两个非零向量 u, v 开始，如果 u, v 不是平行的，那么他们就决定了一个平面，用右手法则选择一个垂直于平面的单位向量，我们把向量积 $u \times v$ 定义为如下的向量

定义 9.1

$$u \times v = (|u||v|\sin\theta)n$$

与点积不一样，向量积是一个向量，由于这个原因，它也被称为是 u, v 的叉积，并且仅仅适用于空间之中的向量，向量 $u \times v$ 同时垂直于 u, v，因为他是单位向量 n 的纯量倍数。

有一种直接从两个向量的分量计算的叉积的方法，这个方法广泛的应用于高中的初等数学之中计算法向量的夹角，突然想到这个事情勾起了笔者的往事，高中的时候使用这个方法来做立体几何的时候无往而不利，可见提前掌握一些知识对于低阶段的学习还是很有帮助的。

转矩

我们对于扳手施加力 F 来转动螺栓的时候，产生的作用于螺栓的转矩驱动螺栓前进，转矩的大小取决于力作用在扳手上面多元的的地方。

9.2 空间之中的向量值函数以及物体的运动

9.2.1 向量函数以及其导数

当质点在整个时间区间 I 之内经过空间移动的时候，我们将质点的坐标看成是定义在 I 上面的函数

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), t \in l$$

点集 $\{(x, y, z) | x = f(t), y = g(t), z = h(t)\}$ 构成了空间之中的曲线，称为质点的路径。

但是空间之中的曲线也可以使用向量的形式来表示：从原点到质点在时间 t 的位置 $P(f(t), g(t), h(t))$ 的向量

$$r(t) = OP = f(t)i + g(t)j + h(t)k$$

是质点的位置向量，函数 f, g, h 是位置向量的分量函数，我们把质点的路径想象成是在时间区间 I 之中由 r 描绘的曲线。上述方程将 r 定义为在区间 I 上面的实变量 t 的向量函数，实值函数称为纯量函数，以便将他们与向量函数区别开来，r 的分量是 t 的纯量函数，向量值函数的定义域是它的分量的公共定义域。

我们接下来定义向量值函数的极限

定义 9.2 令 $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ 是一个向量函数，L 是一个向量，如果对于每一个数 $\varepsilon > 0$，存在一个对应的数字 $\delta > 0$ 使得对于所有的 t 有

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |r(t) - L| \leq \varepsilon$$

就是说 r 当 t 趋近 t_0 的时候有极限 L，并且记做

$$\lim_{t \to t_0} r(t) = L$$

如果 $L = L_1 i + L_2 j + L_3 k$，那么当

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L_1, \quad \lim_{t \to t_0} g(t) = L_2, \quad \lim_{t \to t_0} h(t) = L_3$$

的时候恰好可以证明 $\lim_{t \to t_0} r(t) = L$

那么我们如一元函数的导数一般来推出向量值函数的导数，我们如极限的推导一般，采用”分治”的思想

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\Delta r}{\Delta t}=[\lim_{t\to t_0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}]i+[\lim_{t\to t_0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}]j+[\lim_{t\to t_0}\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}]k$$
$$=[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}]i+[\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}]j+[\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}]k$$

总的来说，不管是链式法则亦或是乘法法则等，都满足一元函数的状况，只不过同样的采用了”分治”的思想即可。

9.2.2 向量函数的积分

如果在 I 上面的每一个点都有 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}t=r$, 可微的向量函数 $R(t)$ 称为是向量函数 $r(t)$ 在区间 I 上面的原函数。r 在 I 上面的所有的原函数的集合是 r 在 I 上面的不定积分。

定义 9.3 向量函数 $r(t)$ 关于 t 的不定积分是 r 的所有原函数的集合，使用 $\int r(t)\mathrm{d}t$ 来表示，如果说 $R(t)$ 是 $r(t)$ 的任意的原函数，那么

$$\int r(t)\mathrm{d}t=R(t)+C$$

具体的积分方法同样的采用分治的思想。

9.2.3 空间之中的弧长

定义 9.4 光滑的曲线

$$r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$$

当 t 从 $t=a$ 到 $t=b$ 的时候的长度是

$$L=\int_a^b\sqrt{[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}]^2+[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}]^2+[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}]^2}\mathrm{d}t$$

上述公式里面的平方根里面的数字是 $|v|$, 即速度向量 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 的长度，这样我们可以使用稍微简单一点的形式写出曲线长度的公式

定理 9.2.1 *(弧长公式)*

$$L=\int_a^b|v|\mathrm{d}t$$

If we choose a base point P(t0) on a smooth curve C parametrized by t, each value of t determines a point $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$on C and a "directed distance"

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |v(\tau)| \mathrm{d}\tau$$

measured along C from the base point .This is the arc length function we defined for plane curves that have no z-component. If $t > t0$, s(t) is the distance along the curve from $P(t_0)$ to P(t). If$t < t0$, s(t) is the negative of the distance. Each value of s determines a point on C, and this parametrizes C with respect to s. We call s an arc length parameter for the curve. The parameter's value increases in the direction of increasing t. We will see that the arc length parameter is particularly effective for inves- tigating the turning and twisting nature of a space curve.

定理 9.2.2

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2} \mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} |v(\tau)| \mathrm{d}\tau$$

We use the Greek letter t ("tau") as the variable of integration in upper Equation because the letter t is already in use as the upper limit.

If a curve r(t) is already given in terms of some parameter t and s(t) is the arc length function given by upper Equation , then we may be able to solve for t as a function of s: t = t(s). Then the curve can be reparametrized in terms of s by substituting for t: r = r(t(s)). The new parametrization identifies a point on the curve with its directed distance along the curve from the base point.

9.2.4 Curvature and Normal Vectors of a Curve

9.3 Integrals and Vector Fields

9.3.1 Vector Fields and Line Integrals: Work, Circulation, and Flux

Vector Fields

Suppose a region in the plane or in space is occupied by a moving fluid, such as air or water. The fluid is made up of a large number of particles, and at any instant of time, a particle has a velocity v. At different points of the region at a given (same) time, these velocities can vary. We can think of a velocity vector being attached to each point of the fluid representing the velocity of a particle at that point. Such a fluid flow is an example of a vector field.

Generally, a vector field is a function that assigns a vector to each point in its domain. A vector field on a three-dimensional domain in space might have a formula like

$$F(x, y, z) = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + P(x, y, z)k$$

The field is continuous if the component functions M, N, and P are continuous; it is dif- ferentiable if each of the component functions is differentiable. The formula for a field of two-dimensional vectors could look like

$$F(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j$$

We encountered another type of vector field in previous .The tangent vectors T and normal vectors N for a curve in space both form vector fields along the curve. Along a curve r(t) they might have a component formula similar to the velocity field expression

$$v(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$$

If we attach the gradient vector ∇ of a scalar function f(x, y, z) to each point of a level surface of the function, we obtain a three-dimensional field on the surface. If we attach the velocity vector to each point of a flowing fluid, we have a three-dimensional field defined on a region in space.

9.4 Gradient Fields

The gradient vector of a differentiable scalar valued function at a point gives the direction of greatest increase of the function. An important type of vector field is formed by all the gradient vectors of the function. We define the gradient field of a differentiable function $f(x, y, z)$to be the field of gradient vectors.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

At each point (x, y, z), the gradient field gives a vector pointing in the direction of greatest increase of f, with magnitude being the value of the directional derivative in that direction. The gradient field is not always a force field or a velocity field.

9.5 Line Integrals of Vector Fields

we defined the line integral of a scalar function $f(x, y, z)$ over a path C. We turn our attention now to the idea of a line integral of a vector field F along the curve C. Such line integrals have important applications in studying fluid flows, and electrical or gravitational fields.

Assume that the vector field $F = M(x, y, z)i+N(x, y, z)j+P(x, y, z)k$has continuous components.and that the curve C has a smooth parametrization $r(t) = g(t)i + h(t)j + k(t)k, a \leq t \leq b$. the parametrization r(t) defines a direction (or orientation) along C which we call the forward direction. At each point along the path C. the tangent vector $T = dx/ds = v/|v|$ is a unit vector tangent to the path and pointing in this forward direction.Intuitively, the line integral of the vector field is the line integral of the scalar tangential component of F along C. This tangential component is given by the dot product

$$F \cdot T = F \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

定义 9.5 *Let F be a vector field with continuous components defined along a smooth curve C parametrized by r(t),*$a \leq t \leq b$*. Then the line integral of*

F along C is

$$\int_C F \cdot T\mathrm{d}s = \int_C (F \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s})\mathrm{d}s = \int_C F \cdot \mathrm{d}x$$

We evaluate line integrals of vector fields in a way similar to how we evaluate line integrals of scalar functions.

第十章　数项级数

10.1　基本概念

定义 10.1 设给定一个无穷的数列

$$a_1, a_2, ...a_n, ...$$

由这些数字组成的记号

$$a_1 + a_2 + ... + a_n, ...$$

叫做一个无穷级数，而这各数叫做级数的一般项，这些数字的和也常常利用求和的符号写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

这里的序号 n 依次的取从 *1* 到 ∞ 的一切整数值。

而令

$$A = a_1 + a_2 + ... + a_n, ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

这个时候，如果这个级数具有有限的和的话，那么我们就称其为 **收敛级数**，反之称之为 **发散级数**

定理 10.1.1 如果在级数之中舍弃前 m 项，我们得到一个级数

$$a_{m+1} + a_{m+2}, ... + a_{m+k} + ... = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

我们把这个称为是级数 m 项之后的余项。如果余项收敛，那么原级数收敛；反之如果原级数收敛，则余项也会收敛。

所以我们得到了几个推论

推论 10.1.1.1 *在一个级数的开头舍弃有限多的项，或者增加一些新的项都不会影响到该级数的收敛性。*

推论 10.1.1.2 *收敛级数的一般项 a_n 必然趋向于 0。(但是要注意这只是一个级数收敛的必要条件，这个条件如果都不满足的话，那么级数必然发散)*

10.2 正项级数的收敛性

10.2.1 正项级数收敛性的条件

假设

$$a_1 + a_2 + ... + a_n, ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{10.1}$$

是一个正项级数，即 $a_n \geq 0$ 那么显然有

$$A_{n+1} \geq A_n$$

也就是说 A_n 是关于 n 的增函数，由单调函数的极限定理，我们立刻可以得出下列关于正项级数的基本定理。

定理 10.2.1 *正项级数必然有和；此和在其部分和有上界的时候是有限的(因此该级数也就收敛)，在相反的情况之下该和是无限的。*

正项级数的所有实用的收敛和发散的检验法都是建立在这个简单的定理上面，但是只有在很少的情况下可以使用这种方法来直接应用它来判断级数的收敛性。

10.2.2 级数的比较定理

定理 10.2.2 *假设给了两个正项级数*

$$a_1 + a_2 + ... + a_n, ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (A)$$

$$b_1 + b_2 + ... + b_n, ... = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (B)$$

如果从某一项开始，不等式 $a_n \leq a_m$ 恒成立，那么由级数 (B) 的收敛性可以推出级数 (A) 的收敛性。或者反之。

定理 10.2.3 如果极限

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = K \quad (0 \leq K \leq \infty)$$

存在，那么在 $K < \infty$ 的时候，由级数 *(B)* 的收敛性可以推出级数 *(A)* 的收敛性。或者反之。

定理 10.2.4 如果

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

由级数 *(B)* 的收敛性可以推出级数 *(A)* 的收敛性。或者反之。

10.2.3 柯西检验法以及达朗贝尔检验法

将所给的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

与各种的已知收敛或者发散的标准级数进行比较，这种比较判别法也是可以以另外一种的可以说是更为系统的方式来进行。

柯西检验法

定理 10.2.5 我们给定级数 A 一个式子

$$\alpha_n = \sqrt[n]{a_n}$$

如果在 n 充分大的时候不等式

$$\alpha_n \leq q$$

成立，而 q 是一个小于一的常数，那么该级数收敛，如果由某项之后有

$$\alpha_n \geq 1$$

那么该级数发散。

或者我们会以一种极限的方式给出

我们假设，α_n 一式有极限 (有限或者无限)

$$\lim \alpha_n = \alpha$$

于是在 $\alpha < 1$ 的时候该级数收敛，而 $\alpha > 1$ 的时候该级数发散。如果 $\alpha < 1$，那么我们取一个正数 ε, 小于 $1 - \alpha$, 如此也有 $\alpha + \varepsilon < 1$, 按照极限的定义，对于 $n > N$ 即将会有

$$\alpha - \varepsilon < \alpha_n < \alpha + \varepsilon$$

$\alpha + \varepsilon$ 一个数字就是上述公式中的 q 的作用，所以该级数收敛。

如果 $\alpha > 1$ 而有限，那么取 $\varepsilon = \alpha - 1$，如此 $\alpha - \varepsilon = 1$，对于充分大的 n 值这次将有 $\alpha_n > 1$, 所以该技术发散，在 $\alpha = \infty$ 的时候也有类似的效果。

如果 $\alpha = 1$ 那么这个检验方法无效。

达朗贝尔检验法

对于所给的级数，我们来看这个比率

$$\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

如果在 n 充分大的时候，不等式

$$\alpha_n \leq q$$

成立，而 q 是一个小于 1 的常数，那么该级数收敛，如果由某项之后有

$$\alpha_n \geq 1$$

那么该级数发散。

但是，比较方便的采用这个方法的极限形式：

假设比率 α_n 有极限 (有限或者是无限)

$$\lim \alpha_n = \alpha$$

于是在 $\alpha < 1$ 的时候该级数收敛，而在 $\alpha > 1$ 的时候该级数发散。

这个检验方法在 $\alpha = 1$ 的时候也不能得出任何的结论

10.2.4 拉比检验法

在上述的检验法不能够给出答案的情况之下，不得不采取一些复杂的检验法，他们建立在被检验级数与别的几何级数的收敛”慢”，或者说发散的”慢”的时候的标准级数的对比上面。

我们讨论一种拉比检验法，其实质是将所给的级数与调和级数作比较，这个时候我们考虑一个式子

$$\alpha_n = n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n})$$

拉比检验法 如果 n 充分大的时候，不等式

$$\alpha_n \geq r$$

成立，而且 r 是一个大于一的常数，那么该级数收敛，如果某项之后的

$$\alpha_n \leq 1$$

那么该级数发散

如此在 n 充分大的时候，我们有

$$n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) \geq r > 1$$

现在我们在 $(1, r)$ 之间任意的选择一个数字 s，因为按照一个已知的极限关系

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})^s}{-\frac{1}{n}} = s$$

那么我们对于充分大的 n 将有

$$\frac{(1-\frac{1}{n})^s}{-\frac{1}{n}} = s < r$$

所以

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < (1 - \frac{1}{n})^s$$

这个不等式也可以写成是

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < (\frac{n-1}{n})^s = \frac{\frac{1}{n^s}}{\frac{1}{(n-1)^s}}$$

右边我们有收敛级数的两个相邻项的比，使用定理 8.2.4 我们可以证明原级数的收敛性。

若某项之后

$$n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}) \leq 1$$

由此立即可得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n-1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$$

我们利用定理 8.2.4 可以立即得出原来的级数发散的结论。

我们有时候也通过极限的形式来应用拉比检验法

$$\lim \alpha_n = \alpha$$

于是在 $\alpha > 1$ 的时候该级数收敛，而在 $\alpha < 1$ 的时候该级数发散。

如果将达朗贝尔检验法以及拉比检验法进行比较，我们可以看出后者明显要牛逼一点。

10.2.5 麦克劳林-柯西积分检验法

假设所给的级数有这样的形式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

这里的 $f(n)$ 是某个函数在 $x = n$ 的时候的值，这个函数在 $x \geq 1$ 的时候有定义，我们还假设这个函数是连续的，正的，并且是单调下降的。

我们来看 $f(x)$ 的任何一个原函数

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$$

由于他的导函数 $F'(x) = f(x) > 0$，那么 $F(x)$ 随着 x 的增大而增大，并且在 $x \to \infty$ 的时候有一个极限 L(有限或者是无限)，按照这两种的不同的情况建立了下面的收敛以及发散的检验方法。

定理 10.2.6 ***(积分检验法)*** *上述级数在原函数 $F(x)$ 的极限 L 有限的时候收敛，在 L 无限的时候发散。*

很显然的，对于任何一个原函数来说都是一样的，由于两个原函数之间仅仅相差一个常数

我们令

$$F(x) = \int_1^x f(x)\mathrm{d}x$$

既然函数 $f(x)$ 是一个单调的，那么对于 $n \le x \le n+1$ 来说，有

$$a_{n+1} = f(n+1) \le f(x) \le f(n) = a_n$$

如此也有

$$a_{n+1} \le \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \le a_n$$

对于级数

$$\sum_{n+1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$$

其第 n 部分的和是

$$\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = F(n+1)$$

显然的这个级数的收敛还是发散取决于 L 是有限或者是无限，在 L 有限的时候，按照" 比较定理"，具有较小的项的级数 $\sum_{n+1}^{\infty} a_{n+1}$ 收敛，从而上述级数收敛，反之，$L = \infty$ 的时候具有较大项的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，自然是发散的。

第十一章　函数序列以及函数级数

11.1　一致收敛性

我们假设给定一个序列，其元素是同一变量 x 的函数

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$$

确定在变量的一个变域 $\mathcal{X} = \{x\}$，假设对于 $\mathcal{X}$ 之中的每一个 x 值这个序列都有一个有限的极限，它既然完全的由 x 所决定，则也是 $\mathcal{X}$ 之中的 x 的函数

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

它称为是函数 $f_n(x)$ 的极限函数。

第十二章　傅立叶级数

我们可以使用简单的周期函数，一个正弦型的量 $A\sin(\omega t+\alpha)$, 这里的 ω 是频率，它与周期 T 的关系是

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

我们由这类简单的周期函数可以组成比较复杂的周期函数，我们将不同的频率 (如 $2\omega, 3\omega$) 的正弦型量相加，可以得到一个新的周期函数，但是其周期仍然为 T。

我们提出一个相反的问题：给定一个周期为 T 的函数 φ, 可不可以将其表示为有限个或者无限个不同频率的正弦型的量的和呢，对于很大一部分的函数，这个答案是肯定的。对于这类函数，我们成立”三角级数展开式”

$$\varphi(t)=A_0+\sum_{i=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\alpha_n)$$

其中的 A_i 是常数，对于每一个这种函数都有其特殊的值，而频率 ω 则由周期给出。

在几何的意义上面看，周期函数的图像可以通过一系列的正弦型的曲线叠加而得到。组成该展开式的各个正弦量我们叫做函数 $\varphi(t)$ 的调和分量或者简称调和素。分解周期函数为调和素的方法我们称为调和分析。

对于由标准周期的函数，展开式可以化简成为这种情况

$$f(x)=A_0+\sum_{i=1}^{\infty}A_n\sin(nx+\alpha_n)$$

使用二角和的正弦公式将此级数的各项展开，令

$$A_n\sin\alpha_n=a_n,\quad A_n\cos\alpha_n=b_n$$

那么三角展开式得到最后的形式如下

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

这个形式的展开式就是我们今后要研究的，这里的周期为 2π 的角 x 的函数终于表示成为了 x 的倍角的余弦以及正弦表达式。

12.1 欧拉-傅里叶方法

为了确定一个周期为 2π 的已知函数 $f(x)$ 是否能够有三角展开式，要由确定的一组系数出发，我们指出一种决定系数的方法。

我们今后假设函数 $f(x)$ 是在区间 $[-\pi,\pi]$ 内连续或者逐段连续的的。

假设展开式成立，并且将它由 $-\pi$ 到 π 逐项积分。如此可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=2\pi a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x]$$

不难看出中括号内的积分值都是 0，我们最后得出

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$$

要决定系数 a_m 的值，我们要先假设三角展开式成立，将其两边乘以 $\cos mx$ 而在同个区间内逐项积分起来

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\mathrm{d}x=$$

$$a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\mathrm{d}x]$$

我们使用积化和差公式, 当 $m\neq n$ 时

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(n+m)x+\sin(n-m)x]\mathrm{d}x=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n+m)x+\cos(n-m)x]\mathrm{d}x=0$$

并且还有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2mx}{2}\mathrm{d}x=\pi$$

如此求和号之下的各个积分全部都化成了 0，只有以 a_m 为系数的那个积分除外，所以这个系数我们就可以确定

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\mathrm{d}x$$

同样的乘以 $]sinmx$，就可以确定出正弦前面的系数

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\mathrm{d}x$$

求出 a_n, b_n 的方法称为欧拉-傅里叶公式，用这些公式计算出的系数叫做所给函数的傅里叶系数，由此组成的三角级数我们称为傅里叶级数。

12.1.1 正交函数系

两个在区间 $[a,b]$ 内有定义的函数 $\varphi(x)$ 以及 $\psi(x)$, 如果其乘积由等于 0 的积分

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x = 0$$

那么我们就称为在该区间内是正交的，假设有一个函数系 $\{\varphi_n(x)\}$, 每个函数在区间 $[a,b]$ 内有定义并且连续或者至少逐段连续的，如果该系内的函数两两正交。

$$\int_a^b \varphi_n(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad m \neq n$$

那么我们就称其为一个正交函数系，再次我们恒假设

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\mathrm{d}x = \lambda_n > 0$$

在满足 $\lambda_n = 1$ 的时候这个系称为是正规的，如果不满足，在需要的时候可以将其表示为函数系 $\langle\{\frac{\varphi(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\}$ 这就显然是一个正规的了 $\rangle$。

这里的操作手法，以及命名的方式，都与线性代数之中的将矩阵规范正交化类似

假设在区间 $[a,b]$ 内给了任意的一个正交系 $\{\varphi_n(x)\}$, 我们要来将定义在 $[a,b]$ 内的函数展开为下列形式的函数 φ 的级数。

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots$$

要决定展开式的系数，我们先假设这样子的展开的是可能的，然后仿照上面的那个特例的手续来进行，将展开式的两边乘以 $\varphi_m(x)$，然后在逐项积分。

接下来的处理手法类似于前段的对于傅里叶系数的求解。不难得出

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x$$

如果一个级数的系数由上述公式所确定，那么称为所给函数的 (广义傅里叶级数)，其系数称为对于函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 的 (广义) 傅里叶系数。

12.2　函数的傅里叶级数展开式

12.2.1　狄利克雷积分

假设 $f(x)$ 是连续函数或者是逐段连续函数，其周期为 2π, 我们算出下列常数

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos mu\mathrm{d}u,\quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin mu\mathrm{d}u$$

并且用来组成该函数的傅里叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx + b_m\sin mx)$$

易知，如果函数有周期 2π，如此沿着长 2π 的区间的积分

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(u)\mathrm{d}u$$

的值与 α 无关。

要研究上述级数在任意的定点 $x = x_0$ 的形状，我们做出其部分和

$$s_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx_0 + b_m\sin mx_0)$$

的方便的表达式，将 a_m, b_m 换成积分式，将常数 $\cos mx_0, \sin mx_0$ 移到积分号的下面

$$\begin{aligned} s_n(x_0) =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\mathrm{d}u + \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\pi}f(u)[\cos mu\cos mx_0 + \sin mu\sin mx_0]\mathrm{d}u \\ =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\{\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos m(u - x_0)\} \end{aligned}$$

我们有恒等式

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos m\alpha &= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\{\sin\frac{\alpha}{2}+\sum_{m=1}^{n}[\sin(m+\frac{1}{2})\alpha-\sin(m-\frac{1}{2})\alpha]\} \\
&= \frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

我们使用它来变换积分号下面的式子，终于得出

$$
s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2\sin\frac{u-x_0}{2}}\mathrm{d}u
$$

这个积分通常称为狄利克雷积分。

因为我们在这里处理的 u 的函数周期为 2π，按照之前说过的话积分区间可以换成是任意的长的区间。例如 $[x_0-\pi,x_0+\pi]$：

$$
s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi}f(u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2\sin\frac{u-x_0}{2}}\mathrm{d}u
$$

使用替换 $t=u-x_0$ 将此积分变成

$$
s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x_0+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\mathrm{d}t
$$

然后将这个积分分拆成为两个：$\int_0^\pi+\int_{-\pi}^0$，并且将第二个积分改变其变量的正负号而化归同一区间 $[0,\pi]$；于是得到傅里叶级数的最后表达式如下

$$
s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\mathrm{d}t
$$

这样的问题就可以化简成为是研究这个含参变量 n 的积分的性状了，现在我们不能使用积分号下取极限的办法，所以我们要对于其进行系统的研究。

12.2.2 局部化原理

引理 12.2.1 假设函数 $g(t)$ 在某个有限的区间 $[a,b]$ 连续或者是逐段连续，那么

$$
\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\sin pt\mathrm{d}t=0
$$

或者将 $\sin pt$ 换成是 $\cos pt$ 也有类似的结论

这样子我们很显然可以得出一个结论，那就是逐段连续函数的傅里叶系数 a_m, b_m 在 $m \to \infty$ 的时候趋于 0。很显然的，由于越来越多的 m，为了取有限值当然要傅里叶系数趋于 0。

第二个推论就是所谓的局部化原理。

我们任意取一个正数 $\delta < \pi$, 将