$(u_1, v_1) = (T(u_1'), T(v_1')) = p.$ $\square$

**Lemma 3.17** Für jedes Alphabet $\Sigma$ mit $|\Sigma| \geq 2$ gilt $H_{\text{ein}} \leq_m MPCP_{\{\square, 0, 1, *, \#, +\}}$

Beweisskizze. Wir suchen eine effektive Transformation, die jede natürliche Zahl $e$ auf eine Instanz $(p_e, I_e)$ des modifizierten Postschen Korrespondenzproblems über $\{\square, 0, 1, *, \#, +\}$ abbildet, so dass $M_e(\lambda)\downarrow$ genau dann gilt, wenn $(p_e, I_e)$ lösbar ist.
Sei $e \in \mathbb{N}_0$. Sei $Q$ die Zustandsmenge und $\Delta$ die Übergangsrelation von $M_e$.
Es gelte also $M_e = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, 1, F)$ für $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{\square, 0, 1\}$, $s = 0$, $F = \{0\}$.

Für eine Instanz $(p, I)$ des modifizierten Postschen Korrespondenzproblems über einem Alphabet bezeichnen wir eine Folge $p = (u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)$ für die $u_1 \ldots u_n \sqsubseteq v_1 \ldots v_n$ oder $v_1 \ldots v_n \sqsubseteq u_1 \ldots u_n$ gilt als partielle Lösung von $(p, I)$.
Wir wollen $(p_e, I_e)$ so wählen, dass partielle Lösungen von $(p_e, I_e)$ partiellen Rechnungen von $M_e$ entsprechen. Dabei codieren wir eine Konfiguration $(q, w, p) \in Q \times (\Gamma^*) \times \mathbb{N}_0$ von $M_e$ durch das Wort

$$\mathrm{code}(q,w,p) := \# w(1) \ldots w(p-1) * \mathrm{bin}(q) * w(p) \ldots w(|w|) \#.$$

Im Wesentlichen wollen wir erreichen, dass es genau dann für ein Wort $w$ eine partielle Lösung $(u_1,v_1), \ldots, (u_n,v_n)$ von $(P_e, I_e)$ mit $w = v_1 \ldots v_n$ gibt, wenn $w$ Präfix der Konkatenation $\mathrm{code}(C_1) \ldots \mathrm{code}(C_n)$ der Codes der Konfigurationen einer partellen Rechnung $C_1, \ldots, C_n$ von $M_e$ bei Eingabe $\lambda$ ist.

Eine solche partielle Lösung soll genau dann zu einer Lösung von $(P_e, I_e)$ vervollständigt werden können, wenn die durch $w$ beschriebene partielle Rechnung mit einer Stoppkonfiguration endet, also eine Rechnung ist.

Dann ist $(P_e, I_e)$ genau dann lösbar, wenn die Rechnung von $M_e$ zur Eingabe $\lambda$ endlich ist.

Für $q \in Q$ sei $\hat{q} := * \mathrm{bin}(q) *$

Als Startpaar sehen wir

nur da, damit eine Komp. nicht leer ist

$$P_e = (0,\ 0\#\ast\ \ast\square\#).$$

Wir beschreiben nun die Konstruktion von $I_e$.

Für jede Instruktion $(q, a, q', a', L) \in \Delta$ fügen wir folgende Paare ein

$$(\#\hat{q}a,\ \#\hat{q}'\square a'),\quad (\square\hat{q}a,\ \hat{q}'\square a'),\quad (0\hat{q}a,\ \hat{q}'0a'),\quad (1\hat{q}a,\ \hat{q}'1a')$$

Für jede Instr. $(q, a, q', a', S)$ fügen wir das Paar

$$(\hat{q}a,\ \hat{q}'a')$$ ein.

Für jede Instr. $(q, a, q', a', R)$ fügen wir die Paare

$$(\hat{q}a\#,\ a'\hat{q}'\square\#),\quad (\hat{q}a\square,\ a'\hat{q}'\square),\quad (\hat{q}a0,\ a'\hat{q}'0),\quad (\hat{q}a1,\ a'\hat{q}'1)$$ ein.

Weiter, um unveränderte Infixe kopieren zu können fügen wir die Paare

$$(\#, \#), \quad (0,0), \quad (1,1), \quad (\square, \square)$$ ein.

Nun brauchen wir noch Paare, die bei Terminierung der TM zu einer validen Instanz der MPCP-Instanz führen.

$\leadsto$ $\forall q \in Q \ \forall a \in \{\square, 0, 1\}$ für die es keine Instruktion $(q, a, q', a', B)$ gibt, fügen wir das Paar $(\hat{q}a, ta)$ hinzu und auch

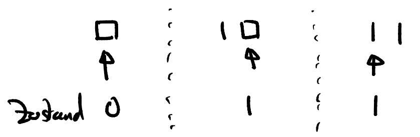
$$(t\square, t), \quad (t0, t), \quad (t1, t)$$

$$(\square t, t), \quad (0t, t), \quad (1t, t)$$

$$(\#t\#0, 0).$$

Dies beschreibt die Konstruktion von $(p_e, I_e)$. Wir verzichten auf die einfache aber aufwändige Verifikation, dass $M_e$ genau dann bei Eingabe $\lambda$ terminiert, wenn $(p_e, I_e)$ lösbar ist.

$\square$




**Beispiel.** Sei $e \in \mathbb{N}_0$ mit $M_e = (\{0,1\}, \{0,1\}, \{\square, 0, 1\}, \Delta, 0, \{0\})$, wobei

$$\Delta = \{(0, \square, 1, 1, \mathrm{R}), (1, \square, 1, 1, \mathrm{L})\}.$$

Mit der Notation aus dem Beweis von Lemma 3.17 gilt dann

$$p_e = \left[\frac{0}{0\#\star\star\square\#}\right] \quad \text{und} \quad I_e = \left\{ \begin{array}{c} \left[\frac{0}{0\#\star\star\square\#}\right], \\ \left[\frac{\#}{\#}\right], \left[\frac{\square}{\square}\right], \left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{1}{1}\right], \\ \left[\frac{\star\star\square\square}{1\star0\star\square}\right], \left[\frac{\star\star\square0}{1\star0\star0}\right], \left[\frac{\star\star\square1}{1\star0\star1}\right], \left[\frac{\star\star\square\#}{1\star0\star\square\#}\right], \\ \left[\frac{\square\star0\star\square}{\star0\star\square1}\right], \left[\frac{0\star0\star\square}{\star0\star01}\right], \left[\frac{1\star0\star\square}{\star0\star11}\right], \left[\frac{\#\star0\star\square}{\#\star0\star\square1}\right], \\ \left[\frac{\star\star0}{\dagger}\right], \left[\frac{\star\star1}{\dagger}\right], \left[\frac{\star0\star0}{\dagger}\right], \left[\frac{\star0\star1}{\dagger}\right], \\ \left[\frac{\dagger\square}{\dagger}\right], \left[\frac{\dagger0}{\dagger}\right], \left[\frac{\dagger1}{\dagger}\right], \\ \left[\frac{\square\dagger}{\dagger}\right], \left[\frac{0\dagger}{\dagger}\right], \left[\frac{1\dagger}{\dagger}\right], \\ \left[\frac{\#\dagger\#0}{0}\right] \end{array} \right\}.$$

Eine Lösung von $(p_e, I_e)$ lässt sich wie folgt darstellen.

$$\left[\frac{0}{0\#\star\star\square\#}\right]\left[\frac{\#}{\#}\right]\left[\frac{\star\star\square\#}{1\star0\star\square\#}\right]\left[\frac{\#}{\#}\right]\left[\frac{1\star0\star\square}{\star0\star11}\right]\left[\frac{\#}{\#}\right]\left[\frac{\#}{\#}\right]\left[\frac{\star0\star1}{\dagger}\right]\left[\frac{1}{1}\right]\left[\frac{\#}{\#}\right]\left[\frac{\#}{\#}\right]\left[\frac{\dagger1}{\dagger}\right]\left[\frac{\#}{\#}\right]\left[\frac{\#\dagger\#0}{0}\right]$$

## Satz 3.19

Für jedes Alphabet $\Sigma$ mit $|\Sigma| \geq 2$ ist $PCP_\Sigma$ nicht entscheidbar.

Beweis: Mit Lemma 3.15, 3.16 und 3.17 folgt

$$H_{init} \leq_m MPCP_{\{\Box, 0, 1, *, \#, \dagger\}} \leq_m PCP_{\{\Box, 0, 1, *, \#, \dagger\}} \leq_m PCP_\Sigma$$

und damit $H_{init} \leq_m PCP_\Sigma$. Folglich ist $PCP_\Sigma$ nicht entscheidbar, da $H_{init}$ nicht entscheidbar ist. $\square$

## 3.2 Fixpunktsatz, Rekursionstheorem und Satz von Rice

Wir beschäftigen uns nun mit weiteren Konsequenzen der Standardaufzählung von TM.

$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ Standardaufzählung

$\Phi_{\Phi_e(0)}, \Phi_{\Phi_e(1)}, \Phi_{\Phi_e(2)}, \ldots$ andere Aufzählungen

$\shortparallel$

$\Phi_{f(0)}, \Phi_{f(1)}, \Phi_{f(2)}, \ldots$

**Definition 3.20** (Fixpunkt)

Ein Fixpunkt einer berechenbaren Fkt $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ist ein $e \in \mathbb{N}_0$ mit $\Phi_{f(e)} = \Phi_e$.

Satz 3.21 (Fixpunktsatz, Hartley Rogers jr., 1967)

Alle berechenbaren Fkt $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ haben einen Fixpunkt.

Beweis: $\forall e, x \in \mathbb{N}_0$ mit $\Phi_e(x)\uparrow$ sei $\Phi_{\Phi_e(x)}: \mathbb{N}_0 \rightsquigarrow \mathbb{N}_0$ die part. berech. part. Fkt mit $\mathrm{dom}(\Phi_{\Phi_e(x)}) = \emptyset$.

Sei $\psi: \mathbb{N}_0^2 \rightsquigarrow \mathbb{N}_0$ die part. berech. part. Fkt mit $\psi(e,x) = \Phi_{\Phi_e(e)}(x)$,

Sei $e_\psi$ ein Index von $\psi$.

Gemäß $S^m_n$-Theorem (Satz 3.7) ex. eine berechenbare Fkt $s_1^1: \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $\Phi_{s_1^1(e_\psi, e)}(x) = \psi(e,x)$. $\forall e, x \in \mathbb{N}_0$. Sei $h: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ die berechnb. Fkt mit $h(e) := s_1^1(e_\psi, e)$. Dann gilt

$$\Phi_{h(e)}(x) = \Phi_{s_1^1(e_\psi, e)}(x) = \psi(e,x) = \Phi_{\Phi_e(e)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{N}_0$$

also gilt

$$\Phi_{h(e)} = \Phi_{\Phi_e(e)} \qquad (*)$$

Sei $e_{f \circ h}$ ein Index der berech. Fkt $f \circ h$ und $e_{fix} := h(e_{f \circ h})$.

$$\Phi_{f(e_{fix})} = \Phi_{f(h(e_{f \circ h}))} = \Phi_{\Phi_{e_{f \circ h}}(e_{f \circ h})} \overset{(*)}{=} \Phi_{h(e_{f \circ h})} = \Phi_{e_{fix}}.$$

Folglich ist $e_{fix}$ ein Fixpunkt von $f$. $\square$

Solche Fixpunkte wie oben sind „semantische" Fixpunkte und kein „syntaktischen" Fixpunkte.

Aus dem Fixpunktsatz kann man leicht das Rekursionstheorem folgern, das es anschaulich erlaubt während der Konstruktion eines part. berech. part. Fkt anzunehmen den Index der fertig definierten Fkt zu kennen. Auf Programmebene bedeutet das, dass es möglich ist ein Programm so zu schreiben, dass der fertige Quellcode im Programm zur Verfügung steht (ohne diesen irgendwo, zum Beispiel vom Speicherort des Quellcodes, ein zu lesen).

<u>Satz 3.22</u> (Rekursionstheorem, Stephen Cole Kleene, 1938)

Für alle part. berech. part. Fkt $\varphi : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ gibt es ein $e \in \mathbb{N}_0$ mit $\Phi_e(x) = \varphi(e,x) \quad \forall x \in \mathbb{N}_0$.

## Korollar 3.23

Es gibt ein $e \in \mathbb{N}_0$ mit $\Phi_e(x) = e \quad \forall x \in \mathbb{N}_0$.

**Beweis:** Sei $\Psi : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ die part. berech. part Fkt mit $\Psi(e,x) = e$ $\forall e, x \in \mathbb{N}_0$. Gemäß Satz 3.22 gibt es nun ein $e \in \mathbb{N}_0$ mit

$\Phi_e(x) = \Psi(e,x) = e \quad \forall x \in \mathbb{N}_0$. $\square$