

Contents

1	Turingmaschine	3
1.1	Definition (Turingmaschine, Alan Turing, 1936)	3
1.2	Definition (Konfiguration)	4
1.3	Definition (Nachfolgekonfiguration)	4
1.4	Definition (Rechnung)	4
1.5	Bemerkung	4
1.6	Definition (total)	4
1.7	Definition (akzeptierte Sprache)	5
1.8	Definition (entscheidbar)	5
1.9	Definition (rekursiv aufzählbar)	5
1.10	Bemerkung	5
1.11	Bemerkung	5
1.12	Bemerkung	5
1.13	Definition (Ausgabe)	5
1.14	Definition (berechnete Funktion)	5
1.15	Definition (partiell berechenbar)	6
1.16	Definition (charakteristische Funktion, partielle charakteristische Funktion)	6
1.17	Bemerkung	6
1.18	Bemerkung (normiert)	6
1.19	Bemerkung	7
1.20	Church- Turing- These	7



Turingmachine

A Turing machine is like a wise old person, sitting at an endless table, playing a complex game. They have a magical pen that reads and writes on the game board. They follow strict rules, do not move from their spot, but the table mysteriously moves back and forth. Their concentration is deep and calm as they perform a complex ballet of reading, writing, and state-changing.

- ChatGPT

Berechenbarkeit

1 Turingmaschine

Wir betrachte das folgende, sehr bekannt, berechnungsmodell. Anschaulich lässt es sich wie folgt beschreiben.

- Es gibt einen "Speicher" \rightsquigarrow k unendlich lange Arrays(**Bänder**)
- Es gibt einen "Arbeitsspeicher" \rightsquigarrow eine endliche Menge von Zuständen, die die Maschine einnehmen kann
- Für jedes Band gibt es einen Schreib- und Lesekopf
- Jeder Schritt ist wie folgt:
Abhängig von Zustand und gelesenen Symbol, Schreiben die Köpfe genau ein Symbol, bewegen sich nun maximal eine Position und der Zustand der Maschine wird geändert.
- Stellt die Maschine ihr schrittweises Arbeiten ein, so wird die Ausgabe entweder den Zustand entnommen oder von einem der Bänder in geeigneter Weise abgelesen.

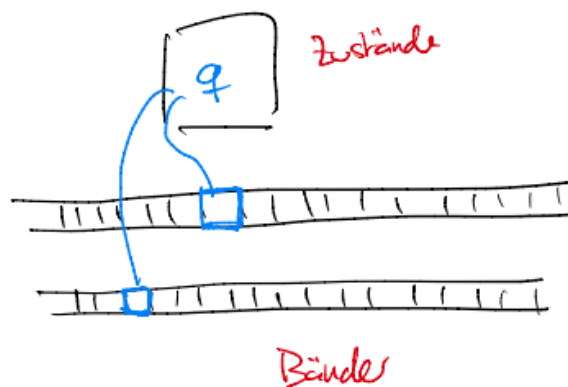


Figure 1: Turingmaschine.

1.1 Definition (Turingmaschine, Alan Turing, 1936)

Sei $k \in \mathbb{N}$ eine **k-Band-Turingmaschine** kurz k-TM, ist ein Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$. Dabei ist:

- Q eine endliche Menge, **Zustandsmenge**
- Σ das **Eingabealphabet**, ein Alphabet $\square \notin \Sigma$
- Γ das **Bandalphabet**, ein Alphabet mit $\Sigma \subseteq \Gamma$ und $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$
- $\Delta \subseteq Q \times \Gamma^k \rightarrow \subseteq Q \times \Gamma^k \times L, S, R^k$ die **Übergangsrelation**
- $s \in Q$ der **Startzustand**
- $F \subseteq Q$ die Menge der **akzeptierenden Zustände**

Das Symbol \square heißt **Blank**. Die Elemente von Δ heißen **Instruktionen**. Für eine Instruktion $(q_1, a_1, \dots, a_k, q', a'_1, \dots, a'_k, B_1, \dots, B_k)$ **Anweisungsteil**. Die TM M ist eine **deterministische k-Band Turingmaschine**, kurz k-DTM, wenn es $\forall b \in Q \times \Gamma^k$ höchstens eine Instruktion $i \in \Delta$ mit Bedingungsteil b .

1.2 Definition (Konfiguration)

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ eine k-TM. Eine **Konfiguration** von M ist ein Tupel

$$C = (q, w_1, \dots, w_k, p_1, \dots, p_k) \in Q \times (p^*)^k \times \mathbb{N}^k$$

Die **Startkonfiguration** von M zur Eingabe $(u_1, \dots, u_n) \in (\Sigma^*)^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, ist die Konfiguration

$$Start_M(u_1, \dots, u_n) = (s, u_1 \sqcup u_2 \sqcup \dots \sqcup u_n, \square, \dots, 1, \dots, 1)$$

Die Konfiguration C ist eine **Stoppkonfiguration** von M , wenn es keine Instruktion $i \in \Delta$ mit Bedingungssteil $(q, w_1(p_1), \dots, w_k(p_k))$ gibt.

1.3 Definition (Nachfolgekongfiguration)

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ eine k-DTM. Für Konfiguration $C = q_1, w_1, \dots, w_k, p_1, \dots, p_k$ und $C' = q'_1, w'_1, \dots, w'_k, p'_1, \dots, p'_k$ von M ist die Konfiguration C' Nachfolgekongfiguration von C , wenn es eine Instruktion

$$(q, w_1(p_1), \dots, w_k(p_k), a'_1, a'_k, B_1, \dots, B_k) \in \Delta$$

gibt, sodass

$$w'_i = \begin{cases} \square a'_i w_i(2) \dots w_i(|w_i|), & \text{falls } p_i = 1 \text{ und } B_i = L \\ w_i \dots w_i(|w_i| - 1) a'_i \square, & \text{falls } p_i = |w_i| \text{ und } B_i = R \\ w_i \dots w_i(p_i - 1) a'_i w_i(p_i + 1) \dots w_i(|w_i|), & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$p'_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } p_i = 1 \text{ und } B_i = L \\ p_i - 1, & \text{falls } p_i \geq 2 \text{ und } B_i = L \\ p_i, & \text{falls } B_i = S \\ p_i + 1, & \text{falls } B_i = R \end{cases}$$

$\forall i \in [k]$ gelten.

Es bezeichnen \rightarrow_M die Relation auf der Menge der Konfiguration von M , sodass $C \rightarrow_M C'$ falls C, C' Konfig von M sind wobei C' eine Nachfolgekongfiguration von C ist.

1.4 Definition (Rechnung)

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ eine k-DTM. Eine **endliche partielle Rechnung** von M ist eine endliche Folge C_1, \dots, C_n von Konfig von M mit $C_i \rightarrow_M C_{i+1} \forall i \in [n-1]$. Eine **unendliche partielle Rechnung** von M ist eine unendliche Folge C_1, C_2, \dots von Konfiguration von M mit $C_1 \rightarrow_M C_{1+i} \forall i \in \mathbb{N}$. Eine **Rechnung von M zur Eingabe** $(w_1, \dots, w_n) \in (\Sigma^*)^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$) ist eine endliche partielle Rechnung $start_M = C_1, \dots, C_m$ bei der C_m eine Stoppkonfiguration von M oder eine unendliche partielle Rechnung $start_M(w_1, \dots, w_n) = C_1, C_2, \dots$

1.5 Bemerkung

Ist M eine k-DTM, so gilt es $\forall n \in \mathbb{N}$ und $(w_1, \dots, w_n) \in (\Sigma^*)^n$ genau eine Rechnung zur Eingabe (w_1, \dots, w_n) .

1.6 Definition (total)

Eine k-DTM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ **terminiert** bei Eingabe $(w_1, \dots, w_n) \in (\Sigma^*)^n$ wenn die Rechnung von M zur Eingabe (w_1, \dots, w_n) endlich ist. Eine k-TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ ist **total**, wenn $\forall n \in \mathbb{N}$ und $(w_1, \dots, w_n) \in (\Sigma^*)^n$ alle Rechnungen von M zur Eingabe (w_1, \dots, w_n) endlich sind.

1.7 Definition (akzeptierte Sprache)

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ eine k-TM. Eine Stoppkonfiguration $(q, w_1, \dots, w_k, p_1, \dots, p_k)$ von M ist **akzeptierend**, wenn $q \in F$. Die **akzeptierte Sprache** $L(M)$ von M ist die Sprache über dem Alphabet Σ so dass $w \in L(M)$ gilt, wenn es eine endliche Rechnung C_1, \dots, C_n von M zur Eingabe w gibt, bei der C_n eine akzeptierende Stoppkonfiguration von M ist.

Hinweis: Für nicht deterministische TM heißt das insbesondere, dass es für die Wörter w in der akzeptierten Sprache nur mindestens **eine** im einer akzeptierten Stoppkonfiguration endende endliche Rechnung zur Eingabe w geben muss. Für Wörter w , die nicht in $L(M)$ sind, sind **alle** rechnungen von M zur Eingabe am Ende nicht in einer akzeptierten Stoppkonfiguration oder unendlich.

1.8 Definition(entscheidbar)

Eine Sprache L ist genau dann **entscheidbar**, wenn es eine totale k-TM M mit $L(M) = L$ gibt. Wir schreiben **REC** für die Klasse der entscheidbaren Sprachen. Der Begriff entscheidbar für Sprachen ergibt sich hier daraus, dass effektiv entschieden werden kann ob eine gegebene Eingabe in der Sprache liegt oder nicht. Insbesondere steht dies voraus, dass Eingabe, die nicht in der Sprache liegen effektiv als nicht in der Sprache liegend erkannt werden.

Begriff: effektiv \leadsto eine TM erledigt dies in endlicher Zeit. Da sich der durch TM formatierte Berechenbarkeitsbegriff, also die Formalisierung dessen was effektiv durchführbar ist, auch äquivalent durch rekursive Funktion definieren lässt, werden entscheidbare Sprachen auch als rekursiv bezeichnet.

1.9 Definition(rekursiv aufzählbar)

Eine Sprache L ist genau dann **rekursiv aufzählbar**, wenn es eine k-TM mit akzeptierten Sprache L gibt. Wir schreiben **RE** für die Klasse der rekursiv aufzählbaren Sprachen. Die Aufzählbarkeit leitet sich daraus ab, dass es für eine rekursiv aufzählbare Sprache L über einem Alphabet Σ möglich ist effektive Verfahren anzugeben, die die Wörter von L aufzählen, also dass eine endlich oder unendliche Aufzählung von $A = w_1, w_2, \dots$ mit $w_1, w_2, \dots = L$ existiert.

1.10 Bemerkung

Jede entscheidbare Sprache ist rekursiv aufzählbar.

1.11 Bemerkung

Alle endlichen Sprachen sind entscheidbar.

1.12 Bemerkung

Eine Sprache L über einem Alphabet Σ ist genau dann entscheidbar, wenn L und $L^c := (\Sigma^*)/L$ rekursiv aufzählbar sind.

1.13 Definition (Ausgabe)

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ eine k-TM und $C = (q, w_1, \dots, w_k, p_1, \dots, p_k)$ eine Konfiguration von M. Die Ausgabe $out_M(C)$ von M bei Konfiguration C ist das Präfix $w \sqsubseteq w_1(p_1), \dots, w_1(|w_1|)$ maximale Länge mit $w \in (\Gamma/\square)^*$.

1.14 Definition (berechnete Funktion)

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ eine k-DTM und $n \in \mathbb{N}$. Die von M berechnete **n-äre partielle Funktion** Φ_M ist die partielle Funktion $\Phi_M : (\Sigma^*)^n \rightsquigarrow (\Gamma/\square)^*$, so dass $\forall (w_1, \dots, w_n) \in (\Sigma^*)^n$ folgendes gilt:

1. Ist die Rechnung von M zur Eingabe (w_1, \dots, w_n) die endliche Rechnung C_1, \dots, C_M , so gilt $\Phi_M(w_1, \dots, w_n) = out_M(C_M)$.
2. Ist die Rechnung von M zur Eingabe (w_1, \dots, w_n) unendlich, so gilt $\Phi_M(w_1, \dots, w_n) \uparrow$

Für $w_1, \dots, w_n \in \Sigma^*$ schreiben wir statt $\Phi_M(w_1, \dots, w_n)$ auch $M(w_1, \dots, w_n)$.

1.15 Definition (partiell berechenbar)

Für Alphabet Σ, Γ und eine partielle Funktion $\Phi : \Sigma^* \rightsquigarrow \Gamma^*$ ist Φ **partiell berechenbar**, wenn es eine $k \in \mathbb{N}$ gibt und eine k -DTM M mit $\Phi_M = \Phi$ gibt. Ist Φ_{total} und partiell berechenbar, so ist Φ berechenbar. Wir schreiben **RF** für die Klasse der partiellen Funktionen.

Mittels der Induktivität von \mathbb{N}_0 und $0, 1^*$ können so auch partielle Funktionen, die von oder nach \mathbb{N}_0 abbilden als (partielle) berechenbare Funktion bezeichnet werden. Beispielsweise ist eine partielle Funktion $\Phi : \mathbb{N}_0 \rightsquigarrow \mathbb{N}_0$ dennoch genau dann partiell berechenbar, wenn die partielle Funktion $bin \circ \Phi \circ bin^{-1}$ partiell berechenbar ist. Gewissermaßen verfügen die hier definierten TM über zwei Ausgabemechanismen. Die Ausgabe im engeren Sinne in Definition 2.13 und das Ablesen von Akzeptanz anhand des schließlich erreichten Zustands in Definition 2.7. Im Sinne der folgenden Bemerkung wäre der zweiten Fall nicht notwendig, allerdings ist dies ein wichtiger Spezialfall.

1.16 Definition (charakteristische Funktion, partielle charakteristische Funktion)

Sei L eine Sprache über dem Alphabet Σ

- (i) Die **charakteristische Funktion** von L als Sprache über Σ ist die Funktion $\mathbb{1}_L : \Sigma \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathbb{1}_L = 1 \ \forall w \in L$ und $\mathbb{1}_L(u) = 0 \ \forall w \in \Sigma^*/L$.
- (ii) Die **partielle charakteristische Funktion** von L als Sprache über Σ ist die partielle Funktion $x_L : \Sigma^* \rightsquigarrow \{1\}$ mit $x_L(w) = 1 \ \forall w \in L$ und $x_L(w) \uparrow \ \forall w \in \Sigma^*/L$.

1.17 Bemerkung

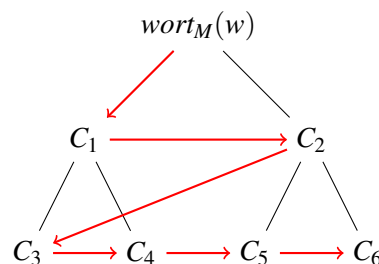
Sei L eine Sprache über einem Alphabet Σ .

- (i) L ist genau dann entscheidbar, wenn $\mathbb{1}_L$ berechenbar ist.
- (ii) L ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn x_L partiell berechenbar ist.

1.18 Bemerkung (normiert)

Eine 1-DTM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ heißt **normiert**, wenn $Q = 0, \dots, n$ für eine $n \in \mathbb{N}_0$, $\Sigma = 0, 1$, $\Gamma = \square, 0, 1$, $s = 0$, $F = s$. Alle TMs mit Eingabealphabet $0, 1$ lassen sich mit folgenden Schritten in eine normierte TM mit gleicher erkannter Sprache und gleicher berechneter Funktion umwandeln.

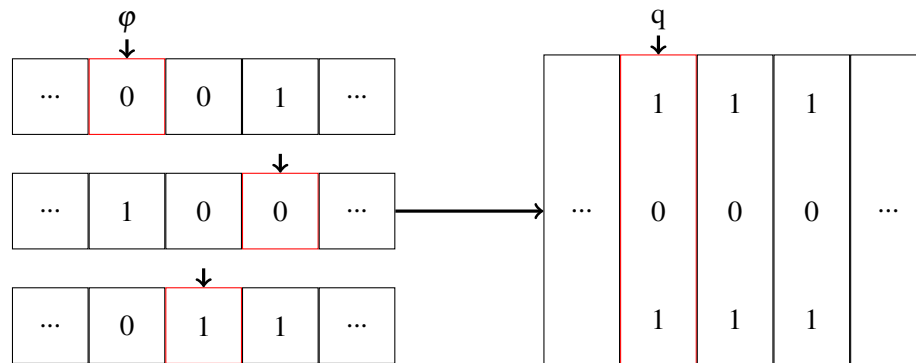
- Von Nichtdeterminismus zu Determinismus: Eine DTM kann die Rechnungen einer nichtdeterministischen TM parallel im Sinne von abwechselnd schrittweise durchführen um schließlich das Verhalten der simulierten TM zu ???. Dies entspricht einer **Breitensuche im Rechnungsbaum**.



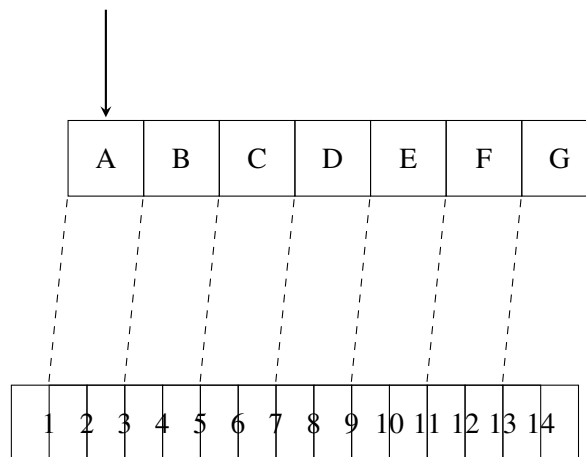
- Von mehreren Bändern zu einem Band: Intuitiv können k Bänder auf ein Band simuliert werden, indem die Felder des einen Bandes in k -teilerfelder unterteilt werden, die jeweils die gleiche Bandalphabetbuchstaben wie zuvor als Beschreibung zulassen und es zudem erlaubt zu markieren, dass der simulierte Kopf des simulierten Bandes dort steht. Eine dieser Idee folgende Konstruktion wird als **Spurenteknik** bezeichnet. Formal: Übergang vom Bandalphabet Γ zu

$$((\Gamma \cup \underline{a} : a \in \Gamma)^k / \square^k) \cup \square$$

wobei $\underline{a} \notin \Gamma$ für $a \in \Gamma$. Hierbei bedeutet \underline{a} , dass das simulierte Feld mit a beschriftet ist und dass dort der simulierte Kopf steht. Weiter spielt \square die Rolle des k -Tupels $(\square, \dots, \square)$ um der Tatsache gerecht zu werden, dass alle Felder zu Beginn mit \square beschriftet sind.



- Von beliebigen bandalphabet zu $\{\square, 0, 1\}$: Andere bandalphabet können bei einem **Alphabete-
twechsel** zum Bandalphabet $\{\square, 0, 1\}$ simuliert werden um ein Symbol des vorherigen Bandalphabets durch ein Binärwort zu beschreiben. Die TM liest stets nur ein Feld, es wird dabei also nötig sein die Zustandsmenge so zu erweitern, dass angrenzende Felder im Zustand gespeichert werden können.



1.19 Bemerkung

Sei $L \subseteq \{0, 1\}^*$ eine Sprache und sei $\Phi : \{0, 1\}^* \rightsquigarrow \{0, 1\}^*$ eine partielle Funktion.

- L ist genau dann entscheidbar, wenn L akzeptierte Sprache einer totalen normierten TM ist.
- L ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn L akzeptierte Sprache einer normierten TM ist.
- Φ ist genau dann partiell berechenbar, wenn Φ berechnete Funktion einer normierten TM ist.

1.20 Church- Turing- These

Berechenbarkeit auf einer Turingmaschine entspricht intuitiver Berechenbarkeit.