



Reguläre Sprachen

A regular language can be thought of as a collection of sentences in a secret code. This secret code has a set of rules that determine which sentences are valid. You can think of it like a secret handshake, where only certain movements are allowed to be performed in a particular order.

- ChatGPT

1 Reguläre Sprachen

1.1 Definition (Äquivalenzrelation)

Sei A eine Menge. Eine Äquivalenzrelation auf A ist eine Relation $\sim \subseteq A^2$, so dass die folgende Eigenschaft erfüllt sind. (wie bei Relationen üblich verwenden wir Infixnotation)

- (i) $a \sim a \forall a \in A$ (Reflexivität)
- (ii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a \forall a, b, c \in A$ (Symmetrie)
- (iii) $a \sim b, b \sim c \rightarrow a \sim c$ (Transitivität)

Die **Äquivalenzklasse** eines Elements $a \in A$ bezüglich \sim ist die Menge $[a] := \{a' \in A : a' \sim a\}$. Der **Index** von \sim ist die Kardinalität der Menge $A/\sim := \{[a] : a \in A\}$ falls diese endlich ist und ∞ andernfalls.

1.2 Definition (A-Äquivalenz)

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein DEA mit erweiterter Übergangsfunktion $\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$. Die A-Äquivalenz ist die Relation \sim_A auf Σ^* ...

1.3 Bemerkung

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ eine DEA.

- (i) Die A-Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.
- (ii) Der Index von \sim_A ist höchstens $|Q|$.
- (iii) Es gilt $L(A) = \bigcup_{w \in L(A)} [w]_{\sim_A}$.

1.4 Definition (Rechtskongruenz)

Sei Σ ein Alphabet. Eine Rechtskongruenz auf Σ^* ist eine Äquivalenzrelation $\sim \subseteq (\Sigma^*)^2$ mit $u \sim v \Rightarrow uw \sim vw \forall u, v, w \in \Sigma^*$.

1.5 Proposition

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein DEA. Die A-Äquivalenz \sim_A ist eine Rechtskongruenz auf Σ^* .

Beweis: Seien $u, v, w \in \Sigma^*$ mit $u \sim_A v$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \delta_{det,A}^*(s, uw) &= \delta_{det,A}^*(\delta_{det,A}^*(s, u), w) = \delta_{det,A}^*(\delta_{det,A}^*(s, v), w) \\ &= \delta_{det,A}^*(s, vw). \end{aligned} \text{ (hier benutzen wir Bem 4.3 und 4.5)}$$

Dann gilt $uw \sim_A vw$. \square Zu jedem DEA A gibt es also eine dazugehörige Rechtskongruenz \sim auf Σ^* mit endlichem Index so dass $L(A)$ die Vereinigung von Äquivalenzklasse von \sim_A ist. Tatsächlich gilt auch die Umkehrung: Ist L die Vereinigung von Äquivalenzklasse einer Rechtskongruenz \sim mit endlichem Index, so gibt es einen DEA A mit $L(A) = L$

1.6 Definition

Sei Σ eine Alphabet und L Vereinigung von Äquivalenzklasse einer Rechtskongruenz \sim auf Σ^* mit endlichem Index. Es bezeichne

$$A_{\sim,L} := (\Sigma_{\sim}, \Sigma, \Delta, [\lambda]_{\sim}, [w]_{\sim} : w \in L)$$

den DEA mit $\delta_{det,A_{\sim,L}}([w]_{\sim}, a) = [wa]_{\sim} \forall w \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$. Die Wohldefiniertheit von $\delta_{det,A_{\sim,L}}$ ergibt sich daraus, dass \sim eine Rechtskongruenz ist. Um uns davon zu überzeugen, dass $L(A_{\sim,L}) = L$ gilt betrachten wir zunächst die Arbeitsweise von $A_{\sim,L}$.

1.7 Lemma

Sei Σ ein Alphabet, L Vereinigung von Äquivalenzklassen einer Rechtskongruenz \sim auf Σ^* mit endlichem Index und sei $\delta^* : \Sigma_{/\sim}^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma_{/\sim}^*$ die erweiterte Übergangsfunktion von $A_{\sim,L}$. Dann gilt $\delta^*([\lambda]_{\sim}, w) = [w]_{\sim} \forall w \in \Sigma^*$. **Beweis** Wir verwenden vollständige Induktion über $|w|$. Es gilt $\delta^*([\lambda]_{\sim}, \lambda) = [\lambda]_{\sim}$. Sei nun $w \in \Sigma^+$...

1.8 Satz

Sei L die Vereinigung von Äquivalenzklasse einer Rechtskongruenz \sim mit endlichem Index. Es gibt $L(A_{\sim,L}) = L$. **Beweis:** Sei Σ das Alphabet, so dass \sim eine Rechtskongruenz auf Σ^* ist. Sei $\delta^* : \Sigma_{/\sim}^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma_{/\sim}^*$ die erweiterte Übergangsfunktion von $A_{\sim,L}$ und sei $w \in \Sigma^*$. Aus Lemma 5.7 folgt

$$\begin{aligned} w \in L(A_{\sim,L}) &\Leftrightarrow \delta^*([\lambda]_{\sim}, w) \in [v]_{\sim} : v \in L \\ &\Leftrightarrow [w]_{\sim} \in [v]_{\sim} : v \in L \\ &\Leftrightarrow \exists v \in L : [w]_{\sim} = [v]_{\sim} \\ &\Leftrightarrow \exists v \in L : w \sim v \\ &\Leftrightarrow w \in L \end{aligned}$$

...

1.9 Korollar

Eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn sie die Vereinigung von Äquivalenzklassen einer Rechtskongruenz mit endlichem Index ist. **Beweis:** Folgt aus Bemerkung 5.3, Proposition 5.5 und Satz 5.8 \square

Betrachten man nur deterministische endliche Automaten ohne unerreichbare Zustände, so entsprechen diese bis auf Unbenutzung von Zuständen sogar den Rechtskongruenzen mit endlichem Index zusammen mit Vereinigung von Äquivalenzklassen dieser.

1.10 Definition(erreichbar)

Sei Σ ein Alphabet. Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein EA mit erweiterter Übergangsfunktion δ^* . Ein Zustand $q \in Q$ heißt erreichbar in A wenn es ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit $q \in \delta^*(s, w)$ gilt.

1.11 Definition(isomorph)

Sei $A_i = (Q_i, \Sigma, \Delta_i, s_i, F_i)$ für $i \in 1, 2$ ein EA mit Übergangsfunktion δ_i . Die endlichen Automaten A_1 und A_2 sind **isomorph**, kurz $A_1 \cong A_2$, wenn es eine Projektion $f : Q_1 \rightarrow Q_2$ gibt, sodass folgendes gilt:

- (i) $f(s_1) = s_2$
- (ii) $\delta_2(f(q_1), a) = f(\delta_1(q_1), a)$