Automaten und Grammatiken

1 Endliche Automaten

Wir wollen Turingmahinen un stark einschränken. wir betrahten ein Modell, das im wesentlichen ohne speicher zurechtkommt (=Tm ohne band $\longrightarrow$ brauchen es nur für die Eingabe). Der Ausgabemechanismus kennt nur Akzeptanz und Nichtakzeptanz.

Als TM kann der wie folgt realisiert werden:

- Es ist nur ein Band erlaubt.
- Bei jedem Rechenschritt bewegt sich der Kopf nach rechts. Ob und wie die Felder des Bandes dabei überschreiben werden spielt dann keine Rolle, denn der Kopf kann nie zurück bewegt werden; wir lehen aber fest, dass Symbole nicht überschrieben werden. Die Symbole die des Bandalphabet Γ neben denen des Eingabealphabets Σ und des □ Symbols ?? hat ?? spielen keine Rolle. Wir legen hier Γ = Σ∪ {□} fest.
- Beim Einlesen des ersten □ Symbols muss die Rechnung der Machine enden. Wir soll die Rechnung nicht vor dem Einlesen des ersten □ Symbols enden.

??Die?? bedeutet, dass wir DM M = (Q, Σm Σ∪{□}), δ, s, F) die nur Instruktionen der Form (q, a, q', a, R) mit q ∈ Q und a ∈ σ hat. Dies sind nun stark eingeschränkte TM. Wir wählen eine äquivalente Form, die als endliche Automaten bezeichnet werden.

1.1 Definition (Endliche Automaten)

Ein endicher Automat, kurz EA, ist ein Tupel A = (Q, Σ, δ, s, F). Dabei ist

- Q eine endliche Menge, der Zustandsmenge;
- Σ das Eingabealphabet;
- Δ ⊆ Q x σ x Q die Übergangsrelation, eine relation, so dass es für alle q ∈ Q und a∈ σ ein q' $/in$ Q mit (q, a, q');
- s ∈ Q der Startzustand;
- F ⊆ die Menge der akzeptierten Zustände.

er endliche Automat A ist ein deterministischer endlicher Automa, kurz DEA, wenn es ∀ (q,a) ∈ Q x σ genau ein q' gibt mit (q,a,q') ∈ δ. Im Sinne der obigen Betrachtung entspricht ein EA A = (Q, Σm Δ, s, F) der 1-TM M_a = (Q, σ, ...) $\rightsquigarrow$ Band spielt keine wesentliche Rolle, Zustände mir gerade gelesenen Symbol bilden die Konfiurationen.

1.2 Definition (Übergangsfunktion eines EA)

Sei A = (Q, σ, Δ,s,F) ein EA. Die Übergangsfunktion von A ist die Funktion
S_A : Q x Σ → 2^Q mit S_A(q, a) = {q' ∈ Q: (q, a, q')∈ δ} ∀q ∈ Q a ∈ σ.
Die erweiterte Übergangsfunktion von A ist die Funktion
δ_A^* (q,a): Q x Σ* → 2^Q mit S_A^*(q,λ) = {q} und $\delta_A^*(q,aw)$ $\bigcup_{q' \in \delta_A^*(q,a)}$ δ_A^*(q', w) ∀q ∈ Q a∈ Σ und w∈ Σ*.
Für Q_0 ⊆ Q und w ∈ Σ* schreiben wir $\delta_A^*(Q_0, w)$ statt $\bigcup_{q \in Q_0}$ δ_A^* (q, w).

1.3 Definition (Übergangsfunktion eines EA)

Sei A = (Q, Σ, Δ, s, F) ein EA. Die **Übergangsfunktion** von A ist die Funktion $\delta_A : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ (=Potenzmenge von Q) mit δ_A(q,a) = {q'∈ Q : (q, a, q')∈ Δ} ∀q ∈ Q, a∈ Σ **erweiterte Übergangsfunktion** von A ist die Funktion $\delta_A^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ $\delta_A^*(q, \lambda) = \{q\}$ und $\delta_A^*(q, aw) = \bigcup_{q' \in \delta_A(q,a)} \delta_A^*(q', w)$ ∀q∈Q a∈ Σ und w∈ Σ^*. Für $Q_0 \subseteq Q$ und w ∈ Σ^* schreiben wir δ_A^* (Q_0, w) statt $\bigcup_{q \in Q_0} \delta_A^*(q,w)$. Für einen EA A = (Q, Σ, Δ, s, F) ,mit entsprechnder TM M_A = (Q, Σ, Γ, Δ', s, F), q ∈ Q und w ∈ Σ^* ist δ_A^*(s,w) die Menge der zustände, die sich als erst Komp.?? der ubtem?? Konfig einer Rechnung von M_A zur Eingabe zu ergeben.

1.4 Bemerkung

Sei A = (Q, Σ, Δ, s, F) ein EA

(i) ∀ q ∈ Q und a∈ Σ gilt δ_A^*(q,a) = δ_A(q, a).

(ii) Ist A ein DEA, q ∈ Q, a ∈ Σ und w ∈ Σ^*, und $|\delta_A^*(q,w)| = 1$??.

(iii) Seien u,v ∈ Σ^* ∀ q ∈ Q gilt δ_A^*(q, uv) = $\delta_A^*(\delta_A^*(Q_0, u), v)$.

1.5 Definition (Übergangsfunktion eines DEA)

Sei A = (Q, Σ, Δ, s, F) eine DEA. Auch die Funktion $\delta_{det,A}$: $Q \times \Sigma \rightarrow Q$ mit $\delta_A(q,a) = \{\delta_{det,A}(q,a)\}$ ∀ q ∈ Q und a ∈ Σ wird auch **Übergangsfunktion** von A gennant. Analoges gilt für $\delta_{det,A}^*$(Q_0, w) statt $\bigcup_{q \in Q_0} \{\delta_{det,A}^*(q,w)\}$.

1.6 Bemerkung

Ist A = (Q, Σ, Δ, s, F) ein DEA, so gelten Berkung 4.3 (i) und (iii) auch wenn δ_A durch $\delta_{det,A}$ und δ_A^* durch $\delta_{det,A}^*$ ersetzt wird.

1.7 Bemerkung

Sei Q eine endliche Menge, Σ ein Alphabet, s∈ Q, und F⊆ Q.

(i) ∀ Funktionen $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ gibt es genau einen EA A = (Q, Σ, Δ, s, F) mit $\delta_A = \delta$.

(ii) ∀ Funktionen $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ gibt es genau einen $\delta_{det,A} = \delta$.

1.8 Definition (akzeptierte Sprache)

Sei A = (Q, Σ, Δ, s, F) ein EA. Die Sprache L(A) := {w ∈ Σ^* : δ_A^*(s, w)∩ F ≠ ∅} ist die **akzeptierte Sprache** von A.

1.9 Definition (regulär)

Eine Sprache L heißt **regulär** wenn es einen EA A mit L(A) = L gibt. Wir schreiben REG für die Klasse der regulären Sprachen. Zu jedem Zeitpunkt während der Verbindung der Eingabe durch einen endlichen Automaten höngt der restliche Bearbeitung immer nur vom gegewärtigen Zustand und dem noch einzulesenden Teil der Eingabe ab, nicht aber wie bei TM im allgemeinen von vergangenen Bandmanipulation. Interpretiert man die Eingabe als von einer äußeren Quelle kommend, so ist der Zustand des Automaten also allein durch seinen Zustand gegeben und der nächste Zustand hängt nur vom Zugeführten Symbol ab. Daher bietet sich eine Darstellung eines EA durch ein Übergangsdiagramm oder eine sogenannte Übergangstabelle an.

1.10 Beispiel

Sei A := ($\{q_0, q_1\}$, $\{0, 1\}$, Δ, q_0, $\{q_1\}$) mit $\Delta = \{(q_0)\}$ Übergangsdiagramm und übergangstabelle von sehen wie folgt aus:

Zustand/Symbol	**0**	**1**
q_0	q_0	q_1
q_1, *	q_1	q_0

[Hier muss noch ein Übergangsdiagramm hin!]

Übergangsdiagramm:

Für jeden Zustand gibt es einen Kreis. Zustände in F bekommen einen Doppelkreis. Für (q, a, q') $\in \Delta$ für einen Pfeil von dem Kreis von q zu dem Kreis von q' mit der Beschreibung a. Zusätzlich gibt es einen Pfeil (ohne Beschriftung) aus dem "Nichts" zus deom Kreis des Starzustandes.

Ähnlich wie bei allgemeinen und normierten TM bleibt die Klasse der akzeptierten Sprachen glich wenn man nur deterministisch endliche Automaten zulässt. Um dies zu beweisen führen wir den Potentautomaten ein.

1.11 Definition (Potenzautomaten)

Sei A = (Q, Σ, Δ, s, F) ein EA. der Potenzautomat von A ist der DEA P_A = (2^Q, Σ, Δ', $\{$s$\}$, $\{$P$\subseteq$Q : P$\cup$F $\neq \varnothing$ $\}$) mit $\delta_{det}, P_A(Q_0, a) = \bigcup \ldots$

1.12 Satz

Eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn es eine DEA A mit L(A) = L gibt.

Beweis:

Sei A = (Q, Σ, Δ, s, F) ein EA mit Potenzautomat P_A. Es genügt zu zeigen, dass L(A) = L(P_A). Hierfür genügt es zu zeigen, dass:

$$\delta^*_{det,P} = \delta^*_A(s,w) \forall w \in \Sigma^* (*)$$

Denn damit folgt

$$\begin{aligned} w \in L(P_A) &\Leftrightarrow \delta^*_{P_A}(\{s\},w) \cap \{P \subseteq Q : P \cap F \neq \varnothing\} \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \delta^*_{det,P_A}(\{s\},w) \cap F \neq \varnothing \\ &\underset{(*)}{\Leftrightarrow} \delta^*_A(\{s\},w) \cap F \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow w \in L(A) \end{aligned}$$

Wir zeigen (*) mittels vollständiger Induktion über |w|. Es gilt δ^*_{det,P_A}($\{$s$\}$, λ) = δ^*_A(s, λ). Sei w $\in \Sigma^+$ mit $\delta^*_{det,A}$($\{$s$\}$, v) = δ^*_A(s, v) $\forall$ v $\in \Sigma^{\leq |w|-1}$. Nun zeigen wir (*) Sei va := w mit a $\in \Sigma$ und |v| = |w| - 1.

$$\begin{aligned} \delta^*_{det,P_A}(\{s\},w) &\underset{\text{Bem 4.5}}{=} \delta^*_{det,P_A}(\delta^*_{det,P_A}(\{s\},v),a) \\ &\underset{\text{Ind. hyp}}{=} \delta^*_{det,P_A}(\delta^*_{det,P_A}(\{s\},v),a) \\ &= \bigcup_{q \in \delta^*_{det,A}} \delta_A(q,a) \\ &= \delta^*_A(\delta^*_A(s,v),a) \\ &= \delta^*_A(s,va) \\ &= \delta^*_A(s,w) \end{aligned}$$