Aus dem Fixpunktsatz kann man leicht das Rekursionstheorem folgern, das es anschaulich erlaubt während der Konstruktion einer part. berech. part. Fkt anzunehmen den Index der fertig definierten Fkt zu kennen. Auf Programmebene bedeutet das, dass es möglich ist ein Programm so zu schreiben, dass der fertige Quellcode im Programm zur Verfügung steht (ohne diesen irgendwo, zum Beispiel vom Speicherort des Quellcodes, ein zu lesen).

Satz 3.22 (Rekursionstheorem, Stephen Cole Kleene, 1938)

Für alle part. berech. part. Fkt $\varphi: \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ gibt es ein $e \in \mathbb{N}_0$ mit $\Phi_e(x) = \varphi(e,x) \quad \forall x \in \mathbb{N}_0$.

Korollar 3.23

Es gibt ein $e \in \mathbb{N}_0$ mit $\Phi_e(x) = e \quad \forall x \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Sei $\Psi : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ die part. berech. part Fkt mit $\Psi(e,x) = e$ $\forall e,x \in \mathbb{N}_0$. Gemäß Satz 3.22 gibt es nun ein $e \in \mathbb{N}_0$ mit

$\Phi_e(x) = \Psi(e,x) = e \quad \forall x \in \mathbb{N}_0$ ☐

Beweis von Satz 3.22

Sei e_φ ein Index von φ. Gemäß S^m_n-Theorem gibt es eine berechenbare Funktion $s_1 : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $\Phi_{s_1(e_\varphi, e)}(x) = \varphi(e,x) \quad \forall x \in \mathbb{N}_0$. Sei $s(e) := s_1(e_\varphi, e) \; \forall e \in \mathbb{N}_0$.

Nach dem Fixpunktsatz hat die Fkt s einen Fixpunkt e_{fix} mit

$$\Phi_{e_{fix}}(x) = \Phi_{s(e_{fix})}(x) = \Phi_{s_1(e_\varphi, e_{fix})}(x) = \varphi(e_{fix}, x) \quad \forall x \in \mathbb{N}_0.$$

☐

Für Programme bedeutet dies die Existenz von sogenannten Quines.

Dies sind Programme, die ihren eigenen Quellcode ausgeben (ohne diesen vom Speicherort zu lesen). Unsere Resultate zeigen, dass für hinreichend komplexe Programmiersprachen immer Quines existieren.

Eine weitere Konsequenz aus dem Fixpunktsatz ist die Einsicht, dass jede nicht triviale Programmiereigenschaft unentscheidbar ist.

Definition 3.24 (Indexmenge)

Eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}_0$ heißt Indexmenge, wenn $e \in I \Leftrightarrow e' \in I$ für alle $e, e' \in \mathbb{N}_0$ mit $\Phi_e = \Phi_{e'}$ gilt.

Satz 3.25 (Satz von Rice, Henry Gordon Rice, 1951)

Ist I eine Indexmenge $\emptyset \neq I \neq \mathbb{N}_0$, so ist I nicht entscheidbar.

Beweis: Sei $e_0 \notin I$, $e_1 \in I$ und sei $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ die Funktion mit $f(e) = e_0$ $\forall e \in I$ und $f(e) = e_1$ $\forall e \in \mathbb{N}_0 \setminus I$. (Ist I entscheidbar, dann ist f offensichtlich berechenbar)

$\forall e \in \mathbb{N}_0$ gilt $f(e) \in I \iff e \notin I$ und da I eine Indexmenge ist ist somit $\Phi_{f(e)} \neq \Phi_e$. Die Fkt f hat also keinen Fixpunkt.

Wäre I entscheidbar, so hätte f aber einen Fixpunkt nach dem Fixpunktsatz. $\square$