



Automaten und Grammatiken

Imagine you're in a city with a limited number of locations (like a park, library, cafe, etc.). You can move from one place to another following specific paths (like roads). The paths you take depend on some rules, like the time of the day, or the type of ticket you have. The places you can reach with these rules represent different states in a finite automaton, and the rules themselves act like the transition function.

- ChatGPT

1 Endliche Automaten

Wir wollen Turingmaschinen nun stark einschränken. Wir betrachten ein Modell, das im wesentlichen ohne Speicher zurechtkommt (=TM ohne Band \rightarrow brauchen es nur für die Eingabe). Der Ausgabemechanismus kennt nur Akzeptanz und Nichtakzeptanz.

Als TM kann der wie folgt realisiert werden:

- Es ist nur ein Band erlaubt.
- Bei jedem Rechenschritt bewegt sich der Kopf nach rechts. Ob und wie die Felder des Bandes dabei überschrieben werden spielt dann keine Rolle, denn der Kopf kann nie zurück bewegt werden; wir legen aber fest, dass Symbole nicht überschrieben werden. Die Symbole der Bandalphabet Γ neben denen des Eingabealphabets Σ und des \square Symbols ?? hat ?? spielen keine Rolle. Wir legen hier $\Gamma = \Sigma \cup \{\square\}$ fest.
- Beim Einlesen des ersten \square Symbols muss die Rechnung der Maschine enden. Wir soll die Rechnung nicht vor dem Einlesen des ersten \square Symbols enden.

Die ?? bedeutet, dass wir DM $M = (Q, \Sigma \cup \{\square\}, \delta, s, F)$ die nur Instruktionen der Form (q, a, q', a, R) mit $q \in Q$ und $a \in \sigma$ hat. Dies sind nun stark eingeschränkte TM. Wir wählen eine äquivalente Form, die als endliche Automaten bezeichnet werden.

1.1 Definition (Endliche Automaten)

Ein endlicher Automat, kurz EA, ist ein Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Dabei ist

- Q eine endliche Menge, der Zustandsmenge;
- Σ das Eingabealphabet;
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ die Übergangsrelation, eine relation, so dass es für alle $q \in Q$ und $a \in \Sigma$ ein $q' \in Q$ mit $(q, a, q') \in \Delta$;
- $s \in Q$ der Startzustand;
- $F \subseteq Q$ die Menge der akzeptierten Zustände.

Der endliche Automat A ist ein deterministischer endlicher Automat, kurz DEA, wenn es $\forall (q, a) \in Q \times \Sigma$ genau ein q' gibt mit $(q, a, q') \in \delta$. Im Sinne der obigen Betrachtung entspricht ein EA $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ der 1-TM $M_A = (Q, \Sigma, \dots) \rightsquigarrow$ Band spielt keine wesentliche Rolle, Zustände mit gerade gelesenen Symbol bilden die Konfigurationen.

1.2 Definition (Übergangsfunktion eines EA)

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein EA. Die Übergangsfunktion von A ist die Funktion

$S_A : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ mit $S_A(q, a) = \{q' \in Q : (q, a, q') \in \delta\} \forall q \in Q, a \in \Sigma$.

Die erweiterte Übergangsfunktion von A ist die Funktion

$\delta_A^*(q, a) : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ mit $S_A^*(q, \lambda) = \{q\}$ und $\delta_A^*(q, aw) = \bigcup_{q' \in \delta_A^*(q, a)} \delta_A^*(q', w) \forall q \in Q, a \in \Sigma \text{ und } w \in \Sigma^*$.

Für $Q_0 \subseteq Q$ und $w \in \Sigma^*$ schreiben wir $\delta_A^*(Q_0, w)$ statt $\bigcup_{q \in Q_0} \delta_A^*(q, w)$.

1.3 Definition (Übergangsfunktion eines EA)

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein EA. Die **Übergangsfunktion** von A ist die Funktion $\delta_A : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ (=Potenzmenge von Q) mit $\delta_A(q, a) = \{q' \in Q : (q, a, q') \in \Delta\} \forall q \in Q, a \in \Sigma$ **erweiterte Übergangsfunktion** von A ist die Funktion $\delta_A^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ $\delta_A^*(q, \lambda) = \{q\}$ und $\delta_A^*(q, aw) = \bigcup_{q' \in \delta_A(q, a)} \delta_A^*(q', w) \forall q \in Q, a \in \Sigma$ und $w \in \Sigma^*$. Für $Q_0 \subseteq Q$ und $w \in \Sigma^*$ schreiben wir $\delta_A^*(Q_0, w)$ statt $\bigcup_{q \in Q_0} \delta_A^*(q, w)$. Für einen EA $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$, mit entsprechender TM $M_A = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta', s, F)$, $q \in Q$ und $w \in \Sigma^*$ ist $\delta_A^*(s, w)$ die Menge der Zustände, die sich als erste Komponente der Konfiguration einer Rechnung von M_A zur Eingabe w ergeben.

1.4 Bemerkung

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein EA

- (i) $\forall q \in Q$ und $a \in \Sigma$ gilt $\delta_A^*(q, a) = \delta_A(q, a)$.
- (ii) Ist A ein DEA, $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $w \in \Sigma^*$, und $|\delta_A^*(q, w)| = 1$??.
- (iii) Seien $u, v \in \Sigma^* \forall q \in Q$ gilt $\delta_A^*(q, uv) = \delta_A^*(\delta_A^*(Q_0, u), v)$.

1.5 Definition (Übergangsfunktion eines DEA)

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein DEA. Auch die Funktion $\delta_{det, A} : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ mit $\delta_A(q, a) = \{\delta_{det, A}(q, a)\} \forall q \in Q$ und $a \in \Sigma$ wird auch **Übergangsfunktion** von A genannt. Analoges gilt für $\delta_{det, A}^*(Q_0, w)$ statt $\bigcup_{q \in Q_0} \{\delta_{det, A}^*(q, w)\}$.

1.6 Bemerkung

Ist $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein DEA, so gelten Bemerkung 4.3 (i) und (iii) auch wenn δ_A durch $\delta_{det, A}$ und δ_A^* durch $\delta_{det, A}^*$ ersetzt wird.

1.7 Bemerkung

Sei Q eine endliche Menge, Σ ein Alphabet, $s \in Q$, und $F \subseteq Q$.

- (i) \forall Funktionen $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ gibt es genau einen EA $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ mit $\delta_A = \delta$.
- (ii) \forall Funktionen $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ gibt es genau einen $\delta_{det, A} = \delta$.

1.8 Definition (akzeptierte Sprache)

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein EA. Die Sprache $L(A) := \{w \in \Sigma^* : \delta_A^*(s, w) \cap F \neq \emptyset\}$ ist die **akzeptierte Sprache** von A.

1.9 Definition (regulär)

Eine Sprache L heißt **regulär** wenn es einen EA A mit $L(A) = L$ gibt. Wir schreiben REG für die Klasse der regulären Sprachen. Zu jedem Zeitpunkt während der Verbindung der Eingabe durch einen endlichen Automaten hängt der restliche Bearbeiter immer nur vom gegenwärtigen Zustand und dem noch einzulesenden Teil der Eingabe ab, nicht aber wie bei TM im allgemeinen von vergangenen Bandmanipulationen. Interpretiert man die Eingabe als von einer äußeren Quelle kommend, so ist der Zustand des Automaten also allein durch seinen Zustand gegeben und der nächste Zustand hängt nur vom zugeführten Symbol ab. Daher bietet sich eine Darstellung eines EA durch ein Übergangsdiagramm oder eine sogenannte Übergangstabelle an.

1.10 Beispiel

Sei $A := (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \Delta, q_0, \{q_1\})$ mit $\Delta = \{(q_0)\}$ Übergangsdiagramm und übergangstabelle von sehen wie folgt aus:

Zustand/Symbol	0	1
q_0	q_0	q_1
$q_1, *$	q_1	q_0

[Hier muss noch ein Übergangsdiagramm hin!]

Übergangsdiagramm:

Für jeden Zustand gibt es einen Kreis. Zustände in F bekommen einen Doppelkreis. Für $(q, a, q') \in \Delta$ für einen Pfeil von dem Kreis von q zu dem Kreis von q' mit der Beschreibung a . Zusätzlich gibt es einen Pfeil (ohne Beschriftung) aus dem "Nichts" zum Kreis des Startzustandes.

Ähnlich wie bei allgemeinen und normierten TM bleibt die Klasse der akzeptierten Sprachen gleich wenn man nur deterministisch endliche Automaten zulässt. Um dies zu beweisen führen wir den Potenzautomaten ein.

1.11 Definition (Potenzautomaten)

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein EA. der Potenzautomat von A ist der DEA $P_A = (2^Q, \Sigma, \Delta', \{s\}, \{P \subseteq Q : P \cap F \neq \emptyset\})$ mit $\delta_{det, P_A}(Q_0, a) = \bigcup \dots$

1.12 Satz

Eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn es eine DEA A mit $L(A) = L$ gibt.

Beweis:

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein EA mit Potenzautomat P_A . Es genügt zu zeigen, dass $L(A) = L(P_A)$. Hierfür genügt es zu zeigen, dass:

$$\delta_{det, P}^* = \delta_A^*(s, w) \forall w \in \Sigma^*$$

Denn damit folgt

$$\begin{aligned} w \in L(P_A) &\Leftrightarrow \delta_{P_A}^*(\{s\}, w) \cap \{P \subseteq Q : P \cap F \neq \emptyset\} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \delta_{det, P_A}^*(\{s\}, w) \cap F \neq \emptyset \\ &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \delta_A^*(\{s\}, w) \cap F \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow w \in L(A) \end{aligned}$$

Wir zeigen (*) mittels vollständiger Induktion über $|w|$. Es gilt $\delta_{det, P_A}^*(\{s\}, \lambda) = \delta_A^*(s, \lambda)$. Sei $w \in \Sigma^+$ mit $\delta_{det, P_A}^*(\{s\}, v) = \delta_A^*(s, v) \forall v \in \Sigma^{\leq |w|-1}$. Nun zeigen wir (*). Sei $va := w$ mit $a \in \Sigma$ und $|v| = |w| - 1$.

$$\begin{aligned} \delta_{det, P_A}^*(\{s\}, w) &\stackrel{\text{Bem 4.5}}{=} \delta_{det, P_A}^*(\delta_{det, P_A}^*(\{s\}, v), a) \\ &\stackrel{\text{Ind. hyp}}{=} \delta_{det, P_A}^*(\delta_A^*(s, v), a) \\ &= \bigcup_{q \in \delta_{det, A}^*} \delta_A(q, a) \\ &= \delta_A^*(\delta_A^*(s, v), a) \\ &= \delta_A^*(s, va) \\ &= \delta_A^*(s, w) \end{aligned}$$