2.5.2023

Einführung in die Theoretische Informatik

Konvention: Ergibt sich n aus dem Kontext, so schreiben wir auch Φ_e statt $\Phi_e^{(n)}$

Bemerkung 3.3: Für $n \in \mathbb{N}$ und eine partiell berechenbare n-äre partielle Funktion $\varphi: \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ gibt es unendlich viele Indizes von φ.

Definition 3.4 ($\mathcal{U}$) Es bezeichne $\mathcal{U}$ die normierte TM, die bei Eingabe $(e, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ wobei $n \in \mathbb{N}$ die normierte TM M_e bei Eingabe $(x_1, \dots, x_n)$ simuliert und falls diese terminiert die Ausgabe der Simulation ausgibt.

Definition 3.5 (universell) Eine DTM U heißt universell, wenn es für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle partiell berechenbaren Funktionen $\varphi: \mathbb{N}_0^n \rightsquigarrow \mathbb{N}_0$ ein $e \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass

$$U(e, x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Bemerkung 3.6. Die TM $\mathcal{U}$ ist universell, denn für $e \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathcal{U}(e, x_1, \dots, x_n) = \Phi_e(x_1, \dots, x_n).$$

$(x, y) \mapsto x^y$

$\cancel{x} \mapsto 2^y$

$(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ partiell berechenbar

$\leadsto \quad (y_1, \dots, y_n) \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ partiell berechenbar

Satz 3.7 (s_n^m-Theorem). Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ existiert eine berechenbare Funktion $s_n^m : \mathbb{N}_0^{m+1} \to \mathbb{N}_0$ mit

$$\Phi_e^{m+n}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = \Phi^n_{s_n^m(e, x_1, \dots, x_m)}(y_1, \dots, y_n)$$

für alle $e, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Fixiere $m \in \mathbb{N}$. Betrachte die DTM S, die bei Eingabe $(e, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{N}_0^{m+1}$ wie folgt verfährt.

- zunächst bestimmt S den Code von M_e
- der Code von M_e wird dann in einen Code einer normierten TM M umgewandelt, die zunächst $x_1 \square \dots \square x_m \square$ neben die Eingabe schreibt, dann den Kopf auf das erste Feld des beschriebenen Bandteils bewegt und dann wie M_e arbeitet.
- Es wird bestimmt an welcher Stelle der Standardaufzählung der Code von M auftaucht und diese Stelle wird ausgegeben.

Sei s_n^m die von S berechnete $(m+1)$-äre partielle Funktion. Dann ist s_n^m eine Funktion wie gewünscht.

Es gibt überabzählbar viele Binärsprachen, denn:

Betrachte Aufzählung von Binärsprachen $L_1, L_2, \ldots$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{1}_{L_0}(0) & \mathbb{1}_{L_0}(1) & \mathbb{1}_{L_0}(2) & \mathbb{1}_{L_0}(3) & \ldots \\
\mathbb{1}_{L_1}(0) & \mathbb{1}_{L_1}(1) & \mathbb{1}_{L_1}(2) & \mathbb{1}_{L_1}(3) & \ldots \\
\mathbb{1}_{L_2}(0) & \mathbb{1}_{L_2}(1) & \mathbb{1}_{L_2}(2) & \mathbb{1}_{L_2}(3) & \ldots
\end{array}$$

L mit $\mathbb{1}_L(i) = \begin{cases} 0 & \mathbb{1}_{L_i}(i) = 1 \\ 1 & \mathbb{1}_{L_i}(i) = 0 \end{cases}$ wird nicht aufgezählt

---

Definition 3.8 (diagonales Halteproblem). Die Menge $H_{diag} := \{e \in \mathbb{N}_0 : \Phi_e(e)\downarrow\}$ heißt diagonales Halteproblem

Proposition 3.9 Das diagonale Halteproblem ist rekursiv aufzählbar.

Beweis. Die OTM, die bei Eingabe $e \in \mathbb{N}_0$ wie $\mathcal{U}$ bei Eingabe (e, e) arbeitet, aber bei terminieren 1 statt der Ausgabe von $\mathcal{U}$ ausgibt berechnet die partielle charakteristische Funktion von H_{diag}. Die partielle Funktion $\chi_{H_{diag}}$ ist also partiell berechenbar.

Die partielle Funktion $\chi_{H_{diag}^c}$ ist nicht partiell berechenbar, denn:

Betrachte Standardaufzählung

$$\begin{array}{cccc}
\Phi_0(0) & \Phi_0(1) & \Phi_0(2) & \Phi_0(3) \\
\Phi_1(0) & \Phi_1(1) & \Phi_1(2) & \Phi_1(3) \\
\Phi_2(0) & \Phi_2(1) & \Phi_2(2) & \Phi_3(3) \\
\Phi_3(0) & \Phi_3(1) & \Phi_3(2) & \Phi_3(3)
\end{array}$$

φ mit $\varphi(i) = \begin{cases} \uparrow & \Phi_i(i)\downarrow \\ 1 & \Phi_i(i)\uparrow \end{cases}$ wird nicht aufgezählt

Satz 3.10. Das diagonale Halteproblem ist nicht entscheidbar.

Beweis. Angenommen H_{diag} wäre entscheidbar. Dann wäre die partielle charakteristische Funktion φ von H_{diag}^c ($= \mathbb{N}_0 \setminus H_{diag}$) partiell berechenbar, es gäbe also einen Index $e \in \mathbb{N}_0$ von φ. Es folgte

$$e \in H_{diag}^c \Leftrightarrow \varphi(e)\downarrow \Leftrightarrow \Phi_e(e)\downarrow \Leftrightarrow e \in H_{diag} \Leftrightarrow e \notin H_{diag}^c.$$

Dies ist ein Widerspruch.

Definition 3.11 (m-Reduktion). Für eine Sprache A über einem Alphabet Σ und eine Sprache B über einem Alphabet Γ ist A genau dann many-one-reduzierbar, auch m-reduzierbar, auf B, kurz $A \leq_m B$, wenn es eine berechenbare Funktion

$f: \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt, so dass

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$$

für alle $w \in \Sigma^*$ gilt.

Gelten $A \leq_m B$ und $B \leq_m A$, so sind A und B many-one-äquivalent auch m-äquivalent, kurz $A \equiv_m B$.

Bemerkung 3.12 (i) $\leq_m$ ist transitiv

(ii) Gilt $A \leq_m B$ für Sprachen A und B und ist B entscheidbar, so ist auch A entscheidbar.

(iii) Alle entscheidbaren Sprachen L mit $\emptyset \neq L \neq \mathbb{N}_0$ sind m-äquivalent.

Satz 3.13. Das initiale Halteproblem $H_{init} = \{e \in \mathbb{N}_0 : \Phi_e(0)\downarrow\}$ ist nicht entscheidbar.

Idee: suche $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $\Phi_e(e)\downarrow \Leftrightarrow \Phi_{f(e)}(0)\downarrow$

Wähle f, so dass $\Phi_{f(e)}(x) = \Phi_e(e)$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$

Beweis: Sei $\Psi: \mathbb{N}_0^2 \rightsquigarrow \mathbb{N}_0$ mit $\Psi(e,x) = \Phi_e(e)$ für alle $e, x \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist Ψ partiell berechenbar. Sei e_0 ein Index von Ψ und $s: \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ gemäß s^m_n-Theorem so gewählt, dass $\Phi_{e_0}(e,x) = \Phi_{s(e_0,e)}(x)$ für alle $e, x \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Sei $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f(e) = s(e_0, e)$ für alle $e \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist f berechenbar.

Für alle $e \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$e \in H_{diag} \Leftrightarrow \Phi_e(e)\downarrow \Leftrightarrow \Psi(e,0)\downarrow \Leftrightarrow \Phi_{e_0}(e,0)\downarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi_{s(e_0,e)}(0)\downarrow \Leftrightarrow \Phi_{f(e)}(0)\downarrow \Leftrightarrow f(e) \in H_{init}.$$

Es gilt also $H_{diag} \leq_m H_{init}$, da H_{diag} nicht entscheidbar ist, ist damit H_{init} nicht entscheidbar.

Gegeben: Endlich viele Typen von Spielsteinen mit jeweils zwei beschrifteten Feldern:

oberes Feld, unteres Feld

Beschriftungen sind nichtleere Wörter über einem Alphabet.

Spielsteine sind vom gleichen Typ, wenn die beiden oberen Felder gleich beschriftet sind und die beiden unteren Felder gleich beschriftet sind.

Es gibt von jedem Typ beliebig viele Steine.

Gesucht: Können ein oder mehrere (aber endlich viele) Spielsteine so nebeneinander gelegt werden, dass sich oben und unten von links nach rechts gelesen das gleiche Wort ergibt?

0111	1	0	0	1
0	01	1	000	011

→

0111	0	0	0	0	1
0	1	1	1	000	01