Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Einführung in die Theoretische Informatik - Script

https://github.com/C0d3Crush/ITH-Script Feedback:
Lukas.Dzielski@stud.uni-heidelberg.de

May 22, 2023

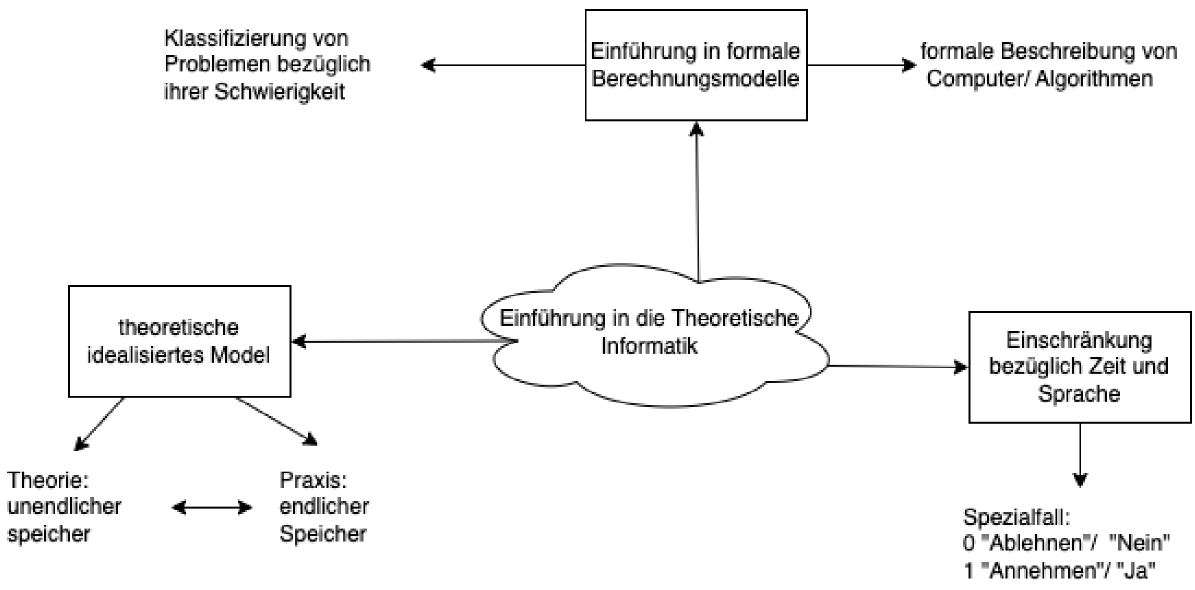

Figure 1: Überblick theoretische Informatik

1 Grundlagen

1.1 Notationen und begriffe

- $\mathbb{N}$ bezeichnet die $\{1, 2, 3\}$
- $\mathbb{N}_0$, sei $[n]$ = {1,...,n} und $[n]_0$ = {0, 1, ...,n}
- Für eine Menge A und n$\in \mathbb{N}$ ist $A^n = \{(a_1, \ldots, a_n)$: $a_1, \ldots\ a_n \in$ A$\}$
- Für n $\in \mathbb{N}$ ist eine n-äre partielle funktion $\varphi : A^n \rightsquigarrow B$ eine Funktion mit dom(φ) $\supseteq A^n$ und Im(φ) $\subseteq$ B. Für a_1, ..., $a_n \in$ A bedeuted $\varphi(a_1, ..., a_n)\downarrow$, dass $(a_1, ..., a_n) \in$ dom(φ) gilt und $\varphi(a_1, ..., a_n)\uparrow$ bedeutet, dass $(a_1, ..., a_n) \notin$ dom(φ). Statt $\varphi(a_1, ..., a_n)\uparrow$ schreiben wir auch $\varphi(a_1, ..., a_n) = \uparrow$. Die partielle Funktion φ ist total, wenn dom(φ) = A^n gilt.
- Eine lineare Ordnung, auch totale Ordnung, auf einer Menge A ist eine Relation $\leq \subseteq A^n$m sodass die folgende Eigenschaften erfüllt sind. (wie für Relationen üblich verwenden wir hier Infixntation, schreiben also für a,b $\in$ A den Ausdruck a $\leq$ b anstatt (a,b) $\in \leq$):
  (i) a $\leq$ a $\forall$ a $\in$ A (Reflexivität)
  (ii) a $\leq$ b $\wedge$ b $\leq$ a $\Rightarrow$ a = b $\forall$a,b $\in$ A (Antisymetrie)
  (iii) a $\leq$ b, b $\leq$ c $\Rightarrow$ a $\leq$ c $forall$a,b,c $\in$ A (Transitiität)
  (iv) a $\leq$ b $\vee$ b $\leq$ a $\forall$a,b $\in$ A (Totalität)

1.2 Alphabet, Wörter und Sprachen

Eingaben und Ausgaben in unseren Berechnungsmodellen werden wörter genannt, wobei wir beliebige Zeichenketten als Wörter zulassen.

1.2.1 Definition (Alphabet)

Ein Alphabet ist eine nichtleere endliche Menge Σ. Das Alphabet Σ wird $|\Sigma|$- är bezeichnet. Die Elemente von Σ heißen Buchstaben oder Symbole.

1.2.2 Definition (Wörter)

Ein Wort über einem Alphabet Σ ist eine endliche Folge von Symbolen aus Σ. Die Länge eines Wortes w ist |w|. Für i $\in$ |w| bezeichnet w(i) das i-te Element von w und für Symbole $a_1, \cdots, a_n \in \Sigma$ bezeichnet $a_1, \cdots, a_n$ das Wort w der Länge n mit w(i) das i-te Element von w und für Symbole $a_1, \cdots, a_n \in \Sigma$ bezeichnet $a_1, \cdots, a_n$ das Wort w der Länge n mit w(i) = a_i $\forall$i$\in$ $[n]$. Das Wort der Länge 0 heißt leeres Wort und wird λ bezeichnet. Ein Wort der länge 1 wird mit dem Symbol w(1) identifiziert.

1.2.3 Definition (Binäraphabet, Binärwörter)

Das Alphabet $\{0, 1\}$ heißt Binäralphabet. Die Wörter über dem Binäralphabet heißen Binärwörter.

1.2.4 Sprache

Eine **Sprache** ist eine Menge von Wörter über einem gemeinsahmen Alphabet Σ. Einige einfache grundlegenden Sprachen sind die folgenden.

1.2.5 Definition

Die Menge Aller Wörter über Σ wird mit Σ^* bezeichnet. Für n $\in \mathbb{N}_0$ setzen wir:

$\Sigma^{\leq n}$:= $\{$w $\in \Sigma^*$: |w| $\leq$n$\}$

$\Sigma^{=n}$:= $\{$w $\in \Sigma^*$: |w| =n$\}$

$\Sigma^{\geq n}$:= $\{$w $\in \Sigma^*$: |w| $\geq$n$\}$

Σ^+ := $\Sigma^{\leq 1}$

1.2.6 Definition (Verkettung)

Für Wörter w_1, w_2 ist die verkettung $w_1 \circ w_2$, auch $w_1 w_2$, von w_1 und w_2 ist definiert durch:

$$w_1 \circ w_2 := w_1 \cdots w_1(|w_1|) w_2 \cdots w_2(|w_2|)$$

Für ein Wort w und n $\in \mathbb{N}_0$ ist w^k induktiv definiert durch w^n := λ falls n = 0 und w^n := $w^{n-1} \circ w^n$ falls n $\geq$ 1. Für eine Sprachen L_1, L_2 sei durch $L_1 \circ L_1$, auch $L_1 L_2$ definiert durch

$$L_1 \circ L_1 := \{w_1 w_2 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$$

Für eine Sprache L und und n $\in \mathbb{N}_0$ ist L^n moduliert definiert durch $L^n = \{\lambda\}$ falls n = 0 und L^n := L $\cdot$ L^{n-1} falls n $\geq$ 1. Zudem sei $L^* := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} L^n$. Für ein Wort w und eine Sprache L sei wL :=$\{$w$\}\circ$L und Lw := L$\circ$ $\{$w$\}$.

Wir folgen der Konventrion, dass $\bullet^n$ und $\bullet^*$ stärker binden als 0;?? für Wörter u, v gilt also uv = u $\circ$ (v^n). Insbesondere gilt auch ab^n = a(b^n) für Symbole a, b eines Alphabets Σ.

1.2.7 Definition (Präfix, Infix, Suffix)

Seiene u, v Wörter.

(i) u ist Präfix von v, kurz u $\sqsubseteq$v, falls es ein Wort w gibt ,sodass $uw = v$.

(ii) u ist Infix von v falls es Wörter w_1, w_1 gibt sodass v = $w_1 u w_2$

(iii) u ist Suffic von v, falls es ein Wort w gibt, sodass $v = wu$.

1.2.8 Definition (präfixfrei)

Eine Sprache heißt **präfixfrei**, wenn $u \sqsubseteq v \Rightarrow u = v \forall u, v \in L$.

1.2.9 Definition (Homomorphismus)

Für Sprache L und M heißt eine Funktion $\varphi : L \to M$ **Homomorphismus von Sprachen**, wenn $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v) \forall u, v \in L$ gilt.

1.2.10 Definition (Längenlexikographische Ordnung)

Ist Σ ein Alphabet und $\leq$ eine lineare Ordnung auf Σ, so ist die zu $\leq$ gehörige **längenlexikographische Ordnung** $\leq_{llex}$ auf Σ^* die lineare Ordnung für die $u \leq_{llex} v$genau dann für zwei verschiedene $u, v \in \Sigma^*$ gilt, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

- $|u| < |v|$
- $|u| = |v|$ und ist $i \in [|u|]$ minimal mit $u(i) \neq v(i)$m so gilt $u(i) \leq v(i)$.

Bemerkung: Oft gehen wir von einer impliziten Ordnung auf Σ aus. Ist $\Sigma = a_1, \cdots, a_n$ so gilt $a_1 \leq \cdots \leq a_n$

1.2.11 Bemerkung

Sei Σ ein Alphabet $\forall w \in \Sigma^*$ ist $v \in \Sigma^* : v \leq_{llex} w$ endlich. Dies erlaubt es uns für ein Alphabet Σ die Wörter über Σ in längenlexilographischen Reihenfolge $w_1, w_2, \cdots$ zu betrachten, wobei wir w_i für $i \in \mathbb{N}$ als kleinstes Element von $\Sigma^*/w_1, \cdots, w_{i-1}$ gewählt sei. Wir identifizieren oft $\mathbb{N}_0$ mit $0, 1^*$ indem wir $i \in \mathbb{N}_0$ mit in die längenlexilographische Reihenfolge $(i+1)$-ten Wort $w_{i+1} \in 0, 1^*$ identifiziernen.

$\mathbb{N}_0$	0	1	2	3
$\{0,1\}^*$	λ	0	1	00

1.2.12 Definition

Es bezeichnet $bin : \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}^*$ die Funktion, für die $bin(i)$ das in längenlexikographischer Reihenfolge (i+1)-te Binärwort ist $\forall i \in \mathbb{N}_0$

1.2.13 Bemerkung

$\forall i \in \mathbb{N}_0$ ist $1bin(i)$ die Binärdarstellung von i+1. Umgekehrt ist $\forall w \in 0, 1^*$ das $(2^{|w|} + \sum_{i \in [|w|]} w(i) 2^{|w|-i})$-te Binärwort.