Einführung in die Theoretische Informatik

28.04.2023

Bemerkung 2.17 Sei L eine Sprache über einem Alphabet Σ.

(i) L ist genau dann entscheidbar, wenn $\mathbb{1}_L$ berechenbar ist.

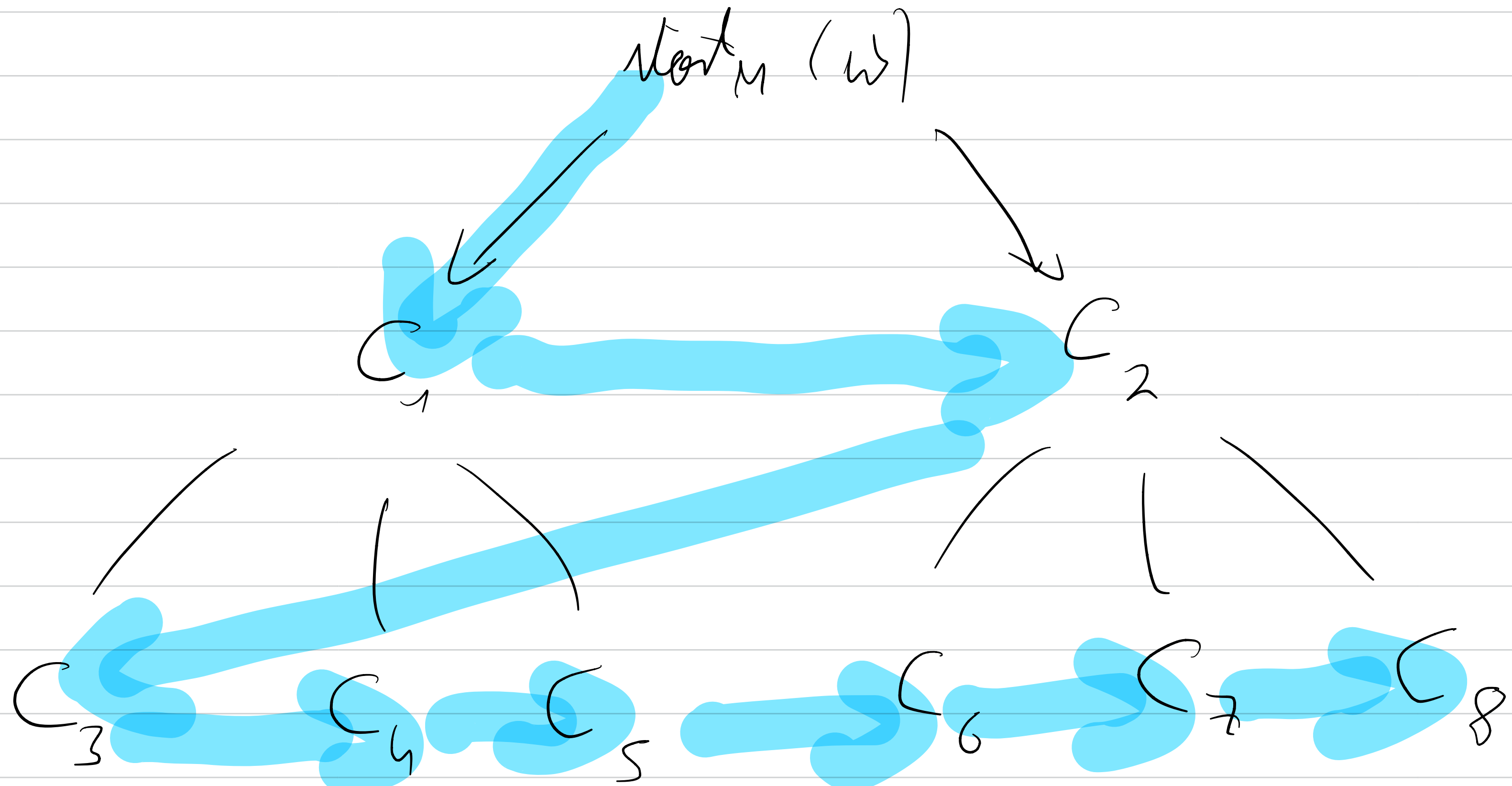
(ii) L ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn χ_L partiell berechenbar ist.

Definition 2.18 (normiert) Eine 1-DTM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ heißt normiert, wenn $Q = \{0, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, $\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma = \{\square, 0, 1\}$, $s = 0$, $F = \{s\}$

—

Alle TMs mit Eingabealphabet $\{0,1\}$ lassen sich mit folgenden Schritten in eine normierte TM mit gleicher erkannter Sprache und gleicher berechneter Funktion umwandeln.

- Von Nichtdeterminismus zu Determinismus: Eine DTM kann die Rechnungen einer nichtdeterministischen TM parallel im Sinne von abwechselnd schrittweise durchführen um schließlich das Verhalten der simulierten TM zu imitieren. Dies entspricht einer Breitensuche im Rechnungsbaum.



- Von mehreren Bändern zu einem Band: Intuitiv können k Bänder auf einem Band simuliert werden, indem die Felder des einen Bandes in k-Teilfelder unterteilt werden, die jeweils die gleichen Bandalphabetbuchstaben wie zuvor als Beschriftung zulassen und es zudem erlauben zu markieren, dass der simulierte Kopf des simulierten Bandes dort steht.

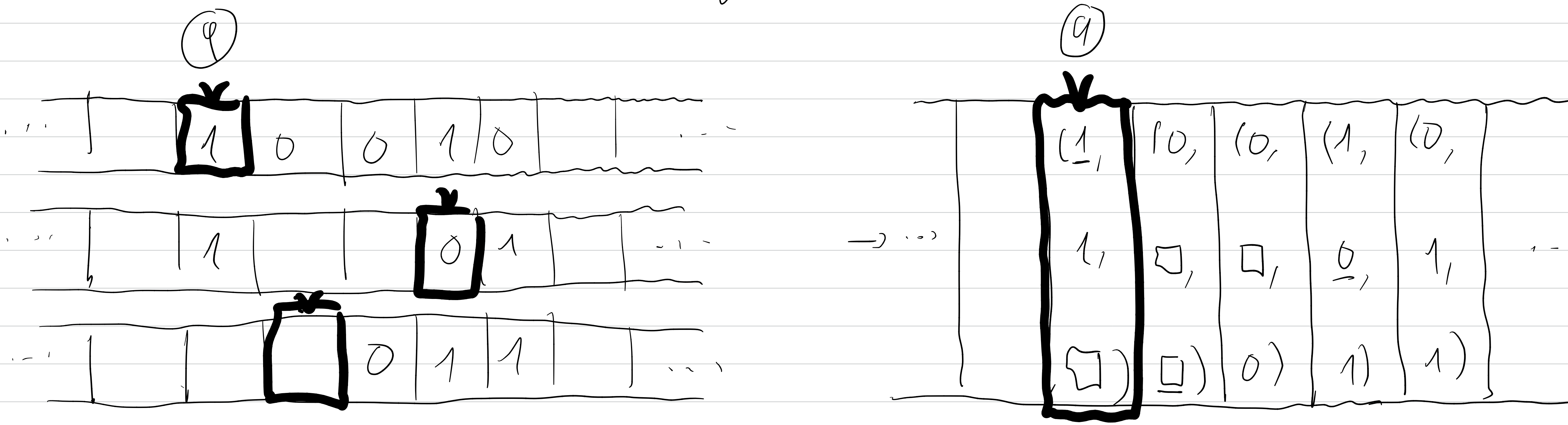
Eine dieser Idee folgende Konstruktion wird als Spurentechnik bezeichnet.

Formal: Übergang vom Bandalphabet Γ zu

$$\left(\left(\Gamma \cup \{\underline{a} : a \in \Gamma\}\right)^k \setminus \{\square\}^k\right) \cup \{\square\}$$

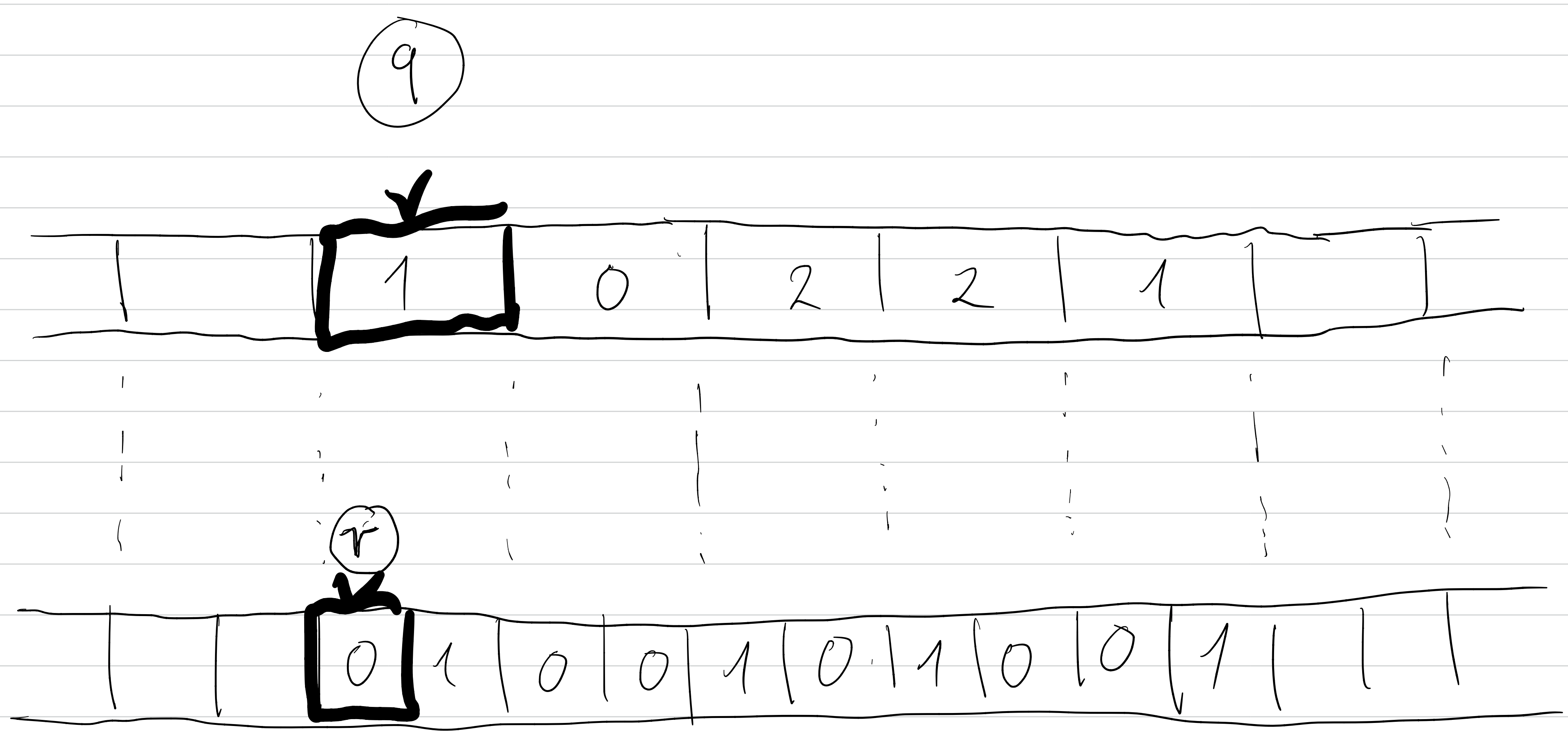
wobei $\underline{a} \notin \Gamma$ für $a \in \Gamma$. Hierbei bedeute $\underline{a}$, dass das simulierte Feld mit a beschriftet ist und dass dort der simulierte Kopf steht.

Weiter spielt $\square$ die Rolle des k-Tupels $(\square, \ldots, \square)$ um der Tatsache gerecht zu werden, dass alle Felder zu Beginn mit $\square$ beschriftet sind.



- Von beliebigen Bandalphabet zu $\{\square, 0, 1\}$: Andere Bandalphabete können bei einem Alphabetwechsel zum Bandalphabet $\{\square, 0, 1\}$ simuliert werden, indem mehrere nebeneinander liegende Felder verwendet werden um ein Symbol des vorigen Bandalphabets durch ein Binärwort zu beschreiben.

Die TM liest stets nur ein Feld, es wird dabei also nötig sein die Zustandsmenge so zu erweitern, dass angrenzende Felder im Zustand gespeichert werden können.



Bemerkung 2.19. Sei $L \subseteq \{0,1\}^*$ eine Sprache und sei $\varphi: \{0,1\}^* \rightsquigarrow \{0,1\}^*$ eine partielle Funktion.

(i) L ist genau dann entscheidbar, wenn L akzeptierte Sprache einer totalen normierten TM ist.

(ii) L ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn L akzeptierte Sprache einer normierten TM ist.

(iii) φ ist genau dann partiell berechenbar, wenn φ berechnete Funktion einer normierten TM ist.

Church-Turing-These Berechenbarkeit auf einer Turingmaschine entspricht intuitiver Berechenbarkeit.

3. Berechenbarkeit

Konvention: Sprechen wir von $e \in \mathbb{N}_0$ oder $(e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{N}_0^n$ wobei $n \in \mathbb{N}$ als Eingabe für eine TM oder Ausgabe einer TM, so bedeutet dies, dass die Eingabe bzw. Ausgabe $\text{bin}(e)$ bzw. $((\text{bin}(e_1), \ldots, \text{bin}(e_n))$ ist.

Dies erlaubt es über partiell berechenbare Funktionen $\varphi : \mathbb{N}_0^n \rightsquigarrow \mathbb{N}_0$ wobei $n \in \mathbb{N}$ zu sprechen und $L \subseteq \mathbb{N}_0$ als Sprache über $\{0,1\}$ aufzufassen.

Definition 3.1 (Code) Wir betrachten die Funktion code (mit geeignetem Definitionsbereich) und Zielmenge $\{0,1\}^*$, für die folgendes gilt. Zunächst gelte

$$\text{code}(L) = 10 \qquad \text{code}(S) = 00 \qquad \text{code}(R) = 01.$$

Für eine Instruktion

$$I = (q, a, q', a', B) \in \mathbb{N}_0 \times \{0,1\} \times \mathbb{N}_0 \times \{0,1\} \times \{L, S, R\}$$

einer normierten TM sei

$$\mathrm{code}(I) = 0^{|\mathrm{bin}(q)|}\, 1\, \mathrm{bin}(q)\, a\, 0^{|\mathrm{bin}(q')|}\, 1\, \mathrm{bin}(q')\, a'\, \mathrm{code}(B).$$

Für eine endliche Menge

$$\Delta \subseteq \mathbb{N}_0 \times \{0,1\} \times \mathbb{N}_0 \times \{0,1\} \times \{L, S, R\}$$

von Instruktionen einer normierten TM und $i \in [|\Delta|]$ sei $\mathrm{code}_i(\Delta)$ das in längenlexikographischer Ordnung i-te Wort in $\{\mathrm{code}(I) : I \in \Delta\}$ und sei

$$\mathrm{code}(\Delta) = \mathrm{code}_1(\Delta) \dots \mathrm{code}_{|\Delta|}(\Delta)$$

Für eine normierte TM $M = (\{0, \dots, n\}, \{0,1\}, \{\square, 0, 1\}, \Delta, 0, \{0\})$ sei

$$\mathrm{code}(M) = 0^{|\mathrm{bin}(n)|}\, 1\, \mathrm{bin}(n)\, \mathrm{code}(\Delta)$$

der Code von M.

Relevant ist hierbei dass es eine geeignete effektive Codierung von Turingmaschinen durch Binärwörter gibt, so dass folgendes gilt.

- Jede normierte TM hat einen Code
- Keine zwei verschiedenen normierten TMs haben den gleichen Code
- Die Sprache der Codes von Turingmaschinen ist entscheidbar
- Codes können in geeignete Repräsentationen der durch sie codierten TMs umgewandelt werden, die es insbesondere erlauben die codierten TMs effektiv zu simulieren.

- geeignete Repräsentationen von TMs können effektiv in ihre codes umgewandelt werden.

Definition 3.2 (Standardaufzählung). Sei $\hat{w}_0, \hat{w}_1, \ldots$ die Aufzählung aller Codes normierter TMs in längenlexikographischer Ordnung.

Für $e \in \mathbb{N}_0$ sei M_e die durch $\hat{w}_e$ codierte TM und für $n \in \mathbb{N}$ sei $\Phi_e^n : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ die von M_e berechnete n-äre partielle Funktion.

Für $n \in \mathbb{N}$ heißt die Folge $(\Phi_e^n)_{e \in \mathbb{N}_0}$ Standardaufzählung der n-ären partiell berechenbaren Funktionen.

Für $n \in \mathbb{N}$ und eine partiell berechenbare n-äre partielle Funktion $\varphi : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ heißt jede Zahl $e \in \mathbb{N}_0$ mit $\Phi_e^n = \varphi$ Index von φ.