



Berechenbarkeit

Predictability is like knowing the path a river takes. The river starts at its source and flows down to the sea. Along the way, it may turn, twist, and divide, but it always follows the path of least resistance due to gravity. Knowing the terrain allows us to predict where the river will go.

- ChatGPT

1 Berechenbarkeit

Konvention: Sprechen wir von einer $e \in \mathbb{N}_0$ oder $(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{N}_0^n$ wobei $n \in \mathbb{N}$ als Eingabe für eine TM oder Ausgabe einer TM, so bedeutet dies, dass die Eingabe bzw. Ausgabe $\text{bin}(e)$ bzw. $(\text{bin}(e_1), \dots, \text{bin}(e_n))$ ist. Dies erlaubt es über partiell berechenbare Funktionen $\Phi : \mathbb{N}_0^n \rightsquigarrow \mathbb{N}_0$ wobei $n \in \mathbb{N}$ zu sprechen und $L \subseteq \mathbb{N}_0$ als Sprache über $\{0, 1\}$ aufzufassen.

1.1 Definition (Code)

Wir betrachten die Funktion code (mit geeignetem Definitionsbereich) und Zielmenge $\{0, 1\}^*$, für die folgendes gilt. Zunächst gelte

$$\text{code}(L) = 10 \quad \text{code}(S) = 00 \quad \text{code}(R) = 01$$

Für eine Instruktion $I = (q, a, q', a', B) \in \mathbb{N}_0 \times \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \{0, 1\} \times \{L, S, R\}$ einer normierten TM sei

$$\text{code}(I) = 0^{|\text{bin}(q)|} 1 \text{bin}(q) a 0^{|\text{bin}(q')|} 1 \text{bin}(q') a' \text{code}(B)$$

Für eine endliche Menge $\Delta \subseteq \mathbb{N}_0 \times \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \{0, 1\} \times \{L, S, R\}$ von Instruktionen einer normierten TM und $i \in [|\Delta|]$ sein $\text{code}_i(\Delta)$ dann ein längenlexikographische Ordnung i-te Wort in $\{\text{code}(I) : I \in \Delta\}$ und sei

$$\text{code}(\Delta) = \text{code}_1(\Delta), \dots, \text{code}_{|\Delta|}(\Delta)$$

Für eine normierte TM $M = (\{0, \dots, n\}, \{0, 1\}, \{\square, 0, 1\}, \Delta, 0, \{0\})$ sei

$$\text{code}(M) = 0^{|\text{bin}(n)|} 1 \text{bin}(n) \text{code}(\Delta)$$

der **Code** von M . Relevant ist hierbei dass es eine geeignete effektive Codierung von Turingmaschinen durch Binärwörter gibt, so dass folgendes gilt

- Jede normierte TM hat einen Code
- Keine zwei verschiedene normierten TMs haben den gleichen Code.
- Die Sprache der Codes von Turingmaschinen ist entscheidbar
- Codes können eine geeignete Repräsentation der durch sie codierten TMs umgewandelt werden, die es insbesondere erlauben die codierten TMs effektiv zu simulieren.
- geeignete Repräsentationen von TMs können effektiv in ihre Codes umgewandelt werden.

1.2 Definition (standardaufzählung)

Sei $\hat{w}_0, \hat{w}_1, \dots$ die Aufzählung aller Codes normierter TMs in längenlexikographischer Ordnung. Für $e \in \mathbb{N}_0$ sei M_e die durch \hat{w}_e codierte TM und für $n \in \mathbb{N}$ sei $\Phi_e^n : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ die von M_e berechnete n-äre partielle Funktion. Für $n \in \mathbb{N}$ heißt die Folge $(\Phi_e^n)_e \in \mathbb{N}$ **standardaufzählung** der n-ären partiell berechenbaren Funktionen. Für $n \in \mathbb{N}$ und eine partiell berechenbare n-äre Funktion $\varphi : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ heißt jede Zahl $e \in \mathbb{N}_0$ mit $\Phi_e^n = \varphi$ **Index** von φ .

Konvention:

Ergibt sich n aus dem Kontext, so schreiben wir auch Φ_e statt Φ_e^n

1.3 Bemerkung

Für $n \in \mathbb{N}$ und eine partiell berechenbare n-äre partielle Funktion $\Phi : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ gibt es unendlich viele Indizes von Φ .

1.4 Definition (U)

Es bezeichnet U die normierte TM, die bei Eingabe $(e, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ wobei $n \in \mathbb{N}$ die normierte TM \mathcal{M}_e bei Eingabe (x_1, \dots, x_n) simuliert und falls diese terminiert die Ausgabe der Simulierten ausgibt.

1.5 Definition (Universell)

Eine DTM U heißt **Universell**, wenn es für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle partiell berechenbaren Funktionen $\varphi : \mathbb{N}_0^n \rightsquigarrow \mathbb{N}_0$ eine $e \in \mathbb{N}$, so dass

$$U(e, x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

1.6 Bemerkung

Die TM U ist universell, denn für $e \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$U(e, x_1, \dots, x_n) = \Phi_e(x_1, \dots, x_n)$$

$$(x, y) \mapsto x^y$$

$$y \mapsto 2^y$$

$$(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \text{ partiellberechenbar}$$

$$\rightsquigarrow (y_1, \dots, y_m) \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \text{ partiellberechenbar}$$

1.7 Satz (s_n^m - Theorem)

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ existiert eine berechenbare Funktion $s_n^m : \mathbb{N}_0^{m+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit

$$\Phi_e^{m+1}(x_1 \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = \Phi_{s_n^m(e, x_1, \dots, x_m)}^n(y_1, \dots, y_n)$$

$\forall e, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{N}_0$

Beweis. Fixiere $m \in \mathbb{N}$. Betrachte die DTM S, die bei Eingabe $(e, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{N}_0^{m+1}$ wie folgt vorfhrt.

- Zunächst bestimmt S den Code von \mathcal{M}_e
- der Code von \mathcal{M}_1 wird dann in einen Code einer normierten TM \mathcal{M} umgewandelt, die zunächst $x_1 \square \dots \square x_m \square$ neben die Eingabe schreibt, dan den Kopf auf das erste Feld des beschriebenen Bandteilsbewegt und dann wie \mathcal{M}_1 arbeitet.
- Es wird bestimmt an welcher Stelle der Standardaufzählung der Code von auftaucht und diese Stelle wird ausgegeben.

Sei s_n^m die von S berechnete $(m+1)$ -re partielle Funktion. Dann ist s_n^m eine Funktion wie gewünscht. Es gibt überabzählbar viele Binrsprachen, denn: Betrachte Aufzählung von Binrsprachen L_1, L_2, \dots

$$L \text{ mit } \mathbb{1}_L(i) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mathbb{1}_{L_i}(i) = 1 \\ 1, & \text{wenn } \mathbb{1}_{L_i}(i) = 0 \end{cases}$$

□

$\mathbb{1}_{L_0}(0)$	$\mathbb{1}_{L_0}(1)$	$\mathbb{1}_{L_0}(2)$	$\mathbb{1}_{L_0}(3)$
$\mathbb{1}_{L_1}(0)$	$\mathbb{1}_{L_1}(1)$	$\mathbb{1}_{L_1}(2)$	$\mathbb{1}_{L_1}(3)$
$\mathbb{1}_{L_2}(0)$	$\mathbb{1}_{L_2}(1)$	$\mathbb{1}_{L_2}(2)$	$\mathbb{1}_{L_2}(3)$

Standardaufzählung

1.8 Definition (diagonales Halteproblem)

Die Menge $H_{diag} := \{e \in \mathbb{N}_0 : \Phi_e(e) \downarrow\}$ heißt **diagonales Halteproblem**.

Proposition 1.8.1. *Das diagonale Halteproblem ist rekursiv aufzählbar.*

Beweis. Die DTM, die bei Eingabe $e \in \mathbb{N}_0$ wie U bei Eingabe (e, e) arbeitet, aber bei terminieren 1 statt der Ausgabe von U ausgibt berechnet die partielle charakteristische Funktion von H_{diag} . Die partielle Funktion $\chi_{H_{diag}}$ ist also partiell berechenbar. Die partielle Funktion $\chi_{H_{diag}^c}$ ist nicht partiell berechenbar, dann: Betrachte Standardaufzählung \square

$\Phi_{L_0}(0)$	$\Phi_{L_0}(1)$	$\Phi_{L_0}(2)$	$\Phi_{L_0}(3)$
$\Phi_{L_1}(0)$	$\Phi_{L_1}(1)$	$\Phi_{L_1}(2)$	$\Phi_{L_1}(3)$
$\Phi_{L_2}(0)$	$\Phi_{L_2}(1)$	$\Phi_{L_2}(2)$	$\Phi_{L_2}(3)$

Standardaufzählung

$$\varphi \text{ mit } \varphi(i) = \begin{cases} \uparrow, & \text{wenn } \Phi_i(i) \downarrow \\ \downarrow, & \text{wenn } \Phi_i(i) \uparrow \end{cases} \text{ Wird nicht aufgezählt.}$$

1.9 Satz

Das diagonale Halteproblem ist nicht entscheidbar.

Beweis. Angenommen H_{diag} wäre entscheidbar. Dann wäre die partielle charakteristische Funktion φ von $H_{diag}^c = \mathbb{N}_0 / H_{diag}$ partiell berechenbar, es gäbe also ein Index $e \in \mathbb{N}_0$ von φ . Es folge

$$e \in H_{diag}^c \Leftrightarrow \varphi(e) \downarrow \Leftrightarrow \Phi_e(e) \downarrow \Leftrightarrow e \in H_{diag} \Leftrightarrow e \notin H_{diag}^c$$

Die ist ein Widerspruch. \square

1.10 m-Reduktion

Für eine Sprache A über einem Alphabet Σ und eine Sprache B über einem Alphabet Γ ist A genau dann **many-one-reduzierbar**, auch **m-reduzierbar**, auf B , kurz $A \leq_m B$, wenn es eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ gibt so dass

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$$

$\forall w \in \Sigma^*$ gilt. Gelten $A \leq_m B$ und $B \leq_m A$, so sind A und B **many-one-äquivalent** auch **m-äquivalent**, kurz $A =_m B$.

1.11 Bemerkung

- (i) \leq_m ist transitiv.
- (ii) Gilt $A \leq_m B$ für Sprachen A und B und ist B entscheidbar, so ist auch A entscheidbar.
- (iii) Alle entscheidbaren Sprachen L mit $\emptyset \neq L \neq \mathbb{N}_0$ und m -äquivalent.

1.12 Satz

Das **initiale Halteproblem** $H_{init} = \{e \in \mathbb{N}_0 \mid \Phi_e(0) \downarrow\}$ ist nicht entscheidbar.

Idee:

suche $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $\Phi_e(e) \downarrow \Leftrightarrow \Phi_{f(e)}(0) \downarrow$ Wähle f so dass $\Phi_{f(e)}(x) = \Phi_e(e) \forall x \in \mathbb{N}_0$

Beweis. Sei $\psi : \mathbb{N}_0^2 \rightsquigarrow \mathbb{N}_0$ mit $\psi(e, x) = \Phi_e(e) \forall e, x \in \mathbb{N}_0$. Dann ist ψ partiell berechenbar. Sei e_0 ein Index von ψ und $s : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ gilt.

Sei $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $f(e) = s(e_0, e) \forall e \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist f berechenbar.

$\forall e \in \mathbb{N}_0$ gilt.

$$e \in H_{diag} \Leftrightarrow \Phi_e(e) \downarrow \Leftrightarrow \psi(e, 0) \downarrow \Leftrightarrow \Phi_{e_0}(e, 0) \downarrow \Leftrightarrow \Phi_s(e_0, e)(0) \downarrow \Leftrightarrow \Phi_{f(e)}(0) \downarrow$$

□