5. Reguläre Sprachen

Wir verschieben den Fokus von endl. Automaten auf die Klasse der von diesen erkannten Sprachen. Dabei spielen endl. Automaten weiterhin eine wichtige Rolle. Wegen Satz 4.11 beschränken wir uns auf det. endl. Autom.

Sei A DEA. Die Menge der zulässigen Eingaben Σ^* ist unendlich groß, die Menge der Zustände Q ist aber endlich. Zwangsläufig wird A also das Einlesen verschiedener Eingaben im gleichen Zustand abschließen (und somit gleich behandeln). Dies führt zum Begriff der A-Äquivalenz.

Definition 5.1 (Äquivalenzrelation)

Sei A eine Menge. Eine Äquivalenzrelation auf A ist eine Relation $\sim \subseteq A^2$, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind (wie bei Relationen üblich verwenden wir Infixnotation.)

(i) $a \sim a \quad \forall a \in A$ (Reflexivität)

(ii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a \quad \forall a, b \in A$ (Symmetrie)

(iii) $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c \quad \forall a, b, c \in A$ (Transitivität).

Die Äquivalenzklasse eines Elementes $a \in A$ bezüglich $\sim$ ist die Menge $[a]_\sim := \{a' \in A : a' \sim a\}$. Der Index von $\sim$ ist die Kardinalität der Menge $A/_\sim := \{[a]_\sim : a \in A\}$ falls diese endl. ist und ∞ andernfalls.

Definition 5.2 (A-Äquivalenz)

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein DEA mit erw. Übergangsfkt $\delta^*: Q \times \Sigma \to Q$.

Die A-Äquivalenz ist die Relation $\sim_A$ auf Σ^* mit

$$u \sim_A v \iff \delta^*(s,u) = \delta^*(s,v) \qquad \forall u,v \in \Sigma^*.$$

Bemerkung 5.3

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein DEA.

(i) Die A-Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.

(ii) Der Index von $\sim_A$ ist höchstens $|Q|$.

(iii) Es gilt $L(A) = \bigcup_{w \in L(A)} [w]_{\sim_A}$.

Definition 5.4 (Rechtskongruenz)

Sei Σ ein Alphabet. Eine Rechtskongruenz auf Σ^* ist eine Äquivalenzrelation $\sim \subseteq (\Sigma^*)^2$ mit $u \sim v \Rightarrow uw \sim vw \quad \forall u, v, w \in \Sigma^*$.

Proposition 5.5

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein DEA. Die A-Äquivalenz $\sim_A$ ist eine Rechtskongruenz auf Σ^*.

<u>Beweis:</u> Seien $u, v, w \in \Sigma^*$ mit $u \sim_A v$. Dann gilt

$$\delta^*_{\det, A}(s, uw) = \delta^*_{\det, A}(\delta^*_{\det, A}(s, u), w) = \delta^*_{\det, A}(\delta^*_{\det, A}(s, v), w)$$

$$= \delta^*_{\det, A}(s, vw). \qquad \text{(hier benutzen wir Bem 4.3 und 4.5)}$$

Damit gilt $uw \sim_A vw$.

$\square$

Zu jedem DEA A gibt es also eine dazugehörige Rechtskongruenz $\sim_A$ auf Σ^* mit endl. Index, so dass $L(A)$ die Vereinigung von Äquivalenzklassen von $\sim_A$ ist. Tatsächlich gilt auch die Umkehrung: Ist L die Vereinigung von Äquivalenzklassen einer Rechtskongr. $\sim$ mit endl. Index, so gibt es einen DEA A mit $L(A) = L$.

<u>Definition 5.6</u>

Sei Σ ein Alphabet und L Vereinigung von Äquiv.-klassen einer Rechtskongr. $\sim$ auf Σ^* mit endl. Index. Es bezeichne

$$A_{\sim,L} := \left(\Sigma^*/_{\sim}, \Sigma, \Delta, [\lambda]_\sim, \{[w]_\sim : w \in L\} \right)$$

den DEA mit $\delta_{det, A_{\sim,L}}\left([w]_\sim, a\right) = [wa]_\sim \quad \forall w \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$.

Die Wohldefiniertheit von $\delta_{det, A_{\sim,L}}$ ergibt sich daraus, dass $\sim$ eine Rechtskongr. ist.

Um uns davon zu überzeugen, dass $L(A_{\sim,L}) = L$ gilt betrachten wir zunächst die Arbeitsweise von $A_{\sim,L}$.

Lemma 5.7

Sei Σ ein Alphabet, L Vereinigung von Äquiv.-klassen einer Rechtskongr. $\sim$ auf Σ^* mit endl. Index und sei $\delta^* : \Sigma^*/_\sim \times \Sigma^* \to \Sigma^*/_\sim$ die erw. Übergangsfkt von $A_{\sim,L}$. Dann gilt $\delta^*([\lambda]_\sim, w) = [w]_\sim \; \forall w \in \Sigma^*$.

Beweis: Wir verwenden vollst. Ind. über $|w|$.

Es gilt $\delta^*([\lambda]_\sim, \lambda) = [\lambda]_\sim$.

Sei nun $w \in \Sigma^+$ mit $\delta^*([\lambda]_\sim, v) = [v]_\sim \quad \forall v \in \Sigma^{\leq |w|-1}$. Es genügt zu zeigen, dass $\delta^*([\lambda]_\sim, w) = [w]_\sim$.

Sei $va = w$ mit $a \in \Sigma$.

Dann gilt $\delta^*([\lambda]_\sim, w) = \delta^*(\delta^*([\lambda]_\sim, v), a) = \delta^*([v]_\sim, a) = [va]_\sim = [w]_\sim$.

$\square$

Satz 5.8

Sei L die Vereinigung von Äquiv.-klassen einer Rechtskongr. $\sim$ mit endl. Index.

Es gilt $L(A_{\sim,L}) = L$.

Beweis: Sei Σ das Alphabet, so dass $\sim$ eine Rechtskongr. auf Σ^* ist.

Sei $\delta^*: \Sigma^*/_\sim \times \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*/_\sim$ die erw. Übergangsfkt

von $A_{\sim,L}$ und sei $w \in \Sigma^*$. Aus Lemma 5.7 folgt

$$w \in L(A_{\sim,L}) \iff \delta^*([\lambda]_\sim, w) \in \{[v]_\sim : v \in L\}$$

$$\iff [w]_\sim \in \{[v]_\sim : v \in L\}$$

$$\iff \exists v \in L: [w]_\sim = [v]_\sim$$

$$\iff \exists v \in L: w \sim v$$

$$\iff w \in L$$

$\square$

Korollar 5.9

Eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn sie die Vereinigung von Äquiv.-klassen einer Rechtskongr. mit endl. Index ist.

Beweis: Folgt aus Bem 5.3, Prop. 5.5 und Satz 5.8 $\square$

Betrachtet man nur det. endl. Automaten ohne unerreichbare Zustände, so entsprechen diese bis auf Umbenennung von Zuständen sogar den Rechtskongr. mit endl. Index zusammen mit Vereinigungen von Äquivalenzklassen dieser.

Definition 5.10 (erreichbar)

Sei Σ ein Alphabet. Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein EA mit erw. Übergangsfkt δ^*. Ein Zustand $q \in Q$ heißt erreichbar in A wenn es ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit $q \in \delta^*(s, w)$ gibt.

Definition 5.11 (isomorph)

Sei $A_i = (Q_i, \Sigma, \Delta_i, s_i, F_i)$ für $i \in \{1,2\}$ ein EA mit Übergangsfkt δ_i.

Die endl. Automaten A_1 und A_2 sind isomorph, kurz $A_1 \cong A_2$, wenn es eine Bijektion $f: Q_1 \to Q_2$ gibt, so dass Folgendes gilt:

(i) $f(s_1) = s_2$

(ii) $\delta_2(f(q_1), a) = f(\delta_1(q_1, a)) \quad \forall q_1 \in Q_1,\ a \in \Sigma$

(iii) $f(F_1) = F_2$.