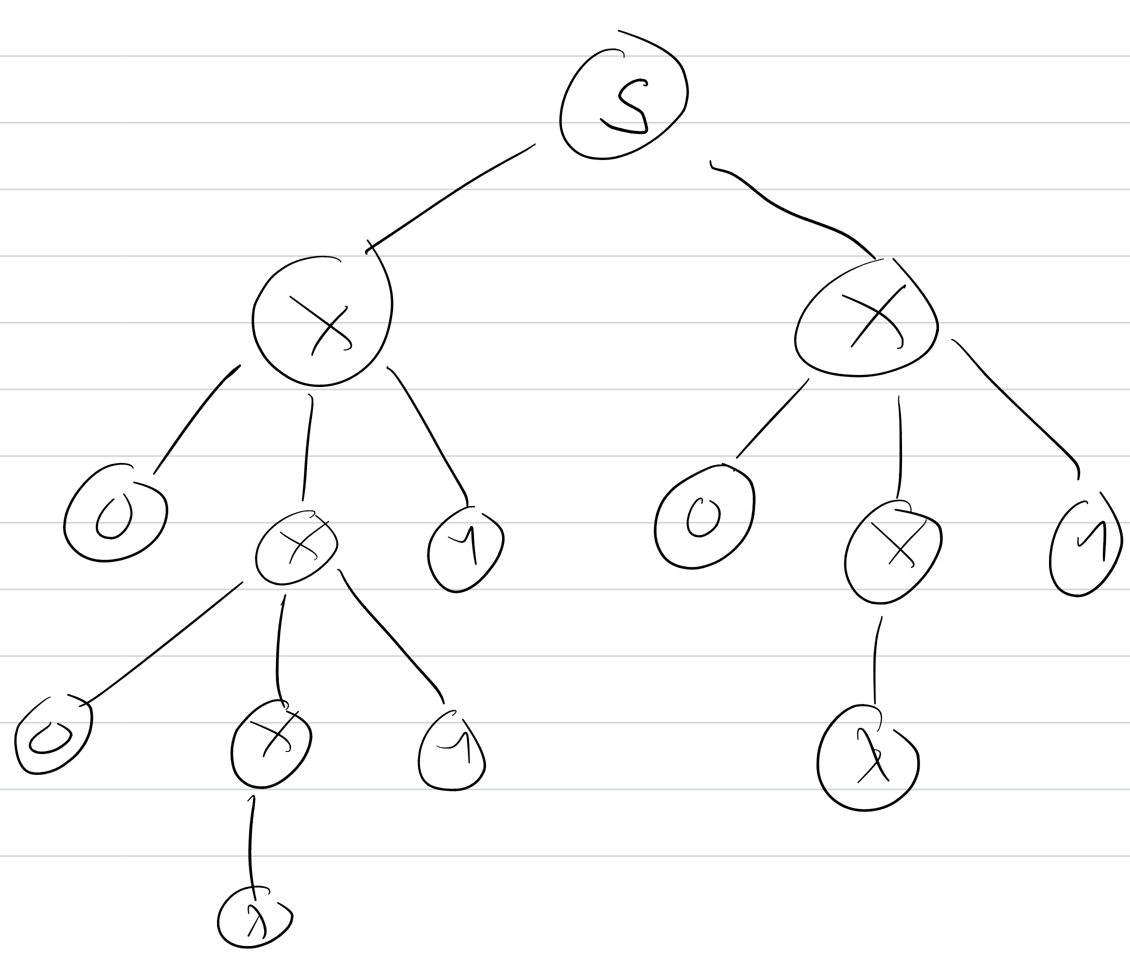
Schreiben wir $\leq$ für eine lineare Ordnung, so bedeute $u<v$ für Elemente u, v, dass $u \leq v$ und $u \neq v$ gelten.

Betrachte $G = (\{S, X\}, \{0,1\}, P, S)$ mit

$$P = \{S \to XX, \quad X \to 0X1, \quad X \to \lambda\}.$$

Betrachte Ableitung $S, XX, X0X1, 0X10X1, 0X101, 00X1101, 001101$

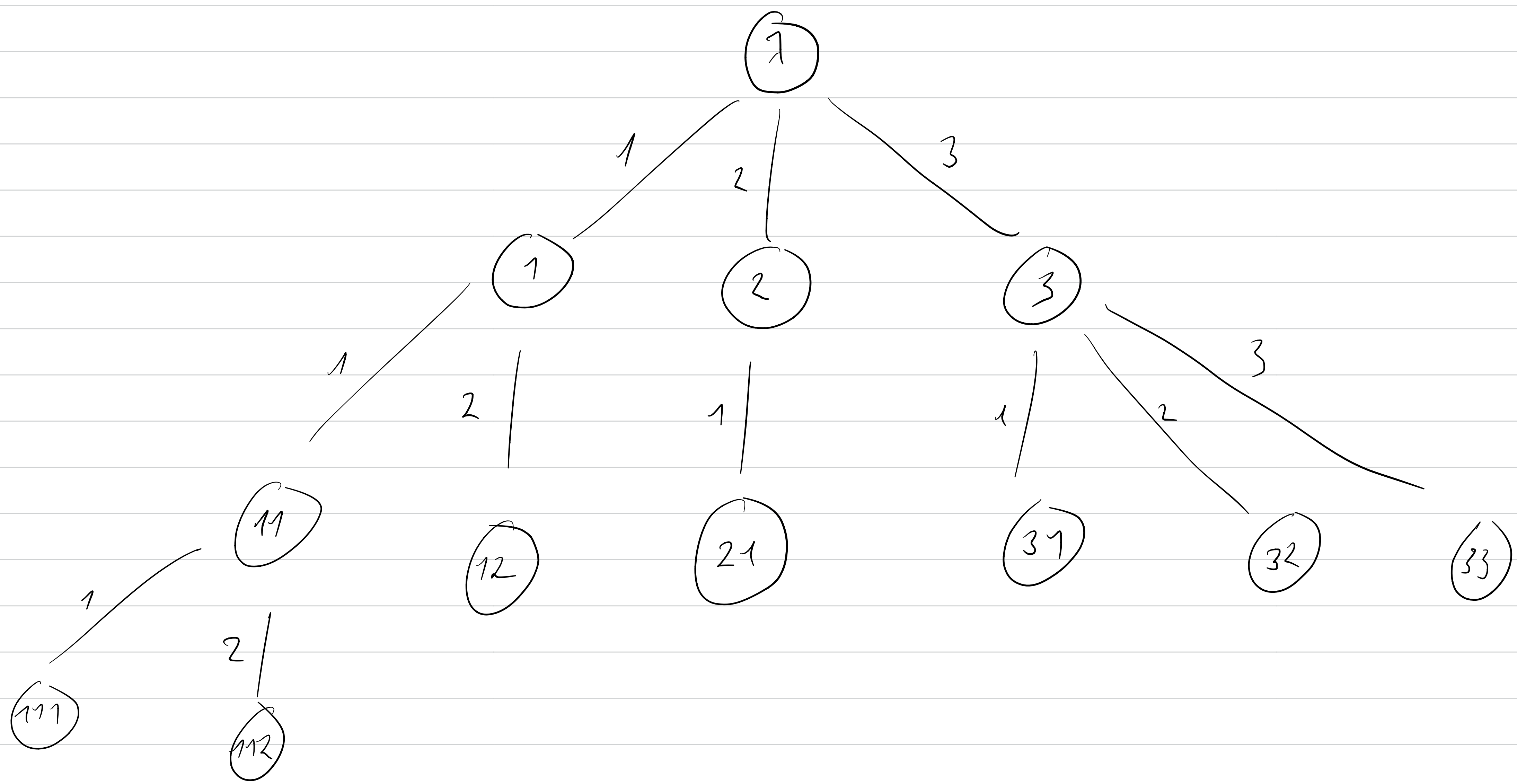


oben: Wurzel

Die Ordnung der Knoten/Ecken ist wichtig

Knoten/Ecken haben Beschriftungen

Geordnete Bäume mit Wurzel allgemein:



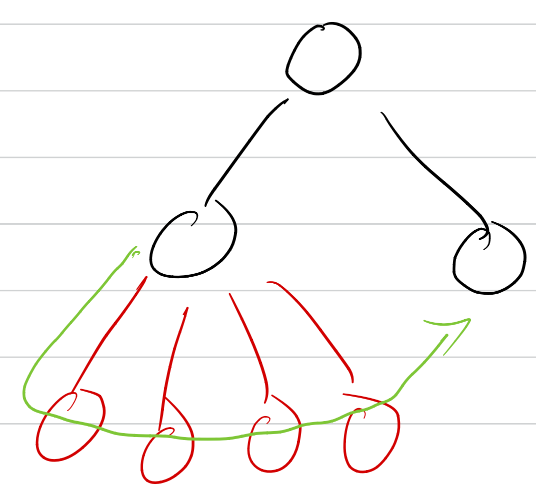
entspricht der Sprache $T = \{\lambda, 1, 2, 3, 11, 12, 21, 31, 32, 33, 111, 112\}$

Wurzel : λ

Ordnung : lexikographisch

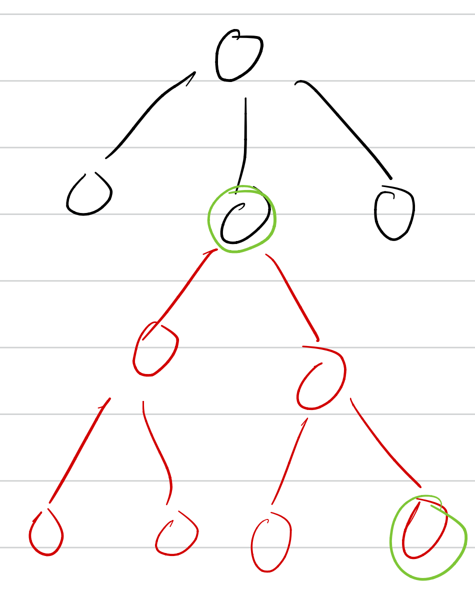
Definition 6.11 (Baum). Eine endliche nicht leere Sprache T heißt <u>Baum</u>, wenn sie unter Präfixbildung abgeschlossen ist, also wenn für alle $w \in T$ und $p \sqsubseteq w$ auch $p \in T$ gilt.
Ein Wort $w \in T$ heißt <u>Blatt</u> von T, wenn w bezüglich $\sqsubseteq$ maximal in T ist, also wenn $w = w'$ für alle $w' \in T$ mit $w \sqsubseteq w'$ gilt.
Wörter $w \in T$, die keine Blätter von T sind heißen <u>innere Ecken</u> von T.

Lemma 6.12. Sei Σ ein Alphabet und $\leq$ die lexikographische Ordnung auf Σ^*.
Seien $u, w \in \Sigma^*$ mit $u \not\sqsubseteq w$ und $u \leq w$. Seien $v_1 < \ldots < v_n \in \Sigma^*$ mit $v_1 \neq \lambda$.
Dann gilt $u < uv_1 < \ldots < uv_n < w$



Beweis. Für $v, v' \in \Sigma^*$ mit $v \leq v'$ gilt offenbar $uv \leq uv'$, es genügt also zu zeigen, dass $uv \leq w$ für alle $v \in \Sigma^*$ gilt. Wegen $u \nsubseteq w$ existiert $i \in [\min\{|u|, |w|\}]$ mit $u(j) = w(j)$ für alle $j \in [i-1]$ und $u(i) < w(i)$. Für $v \in \Sigma^*$ gilt dann $(uv)(j) = w(j)$ für alle $j \in [i-1]$ und $(uv)(i) < w(i)$, also $uv < w$.

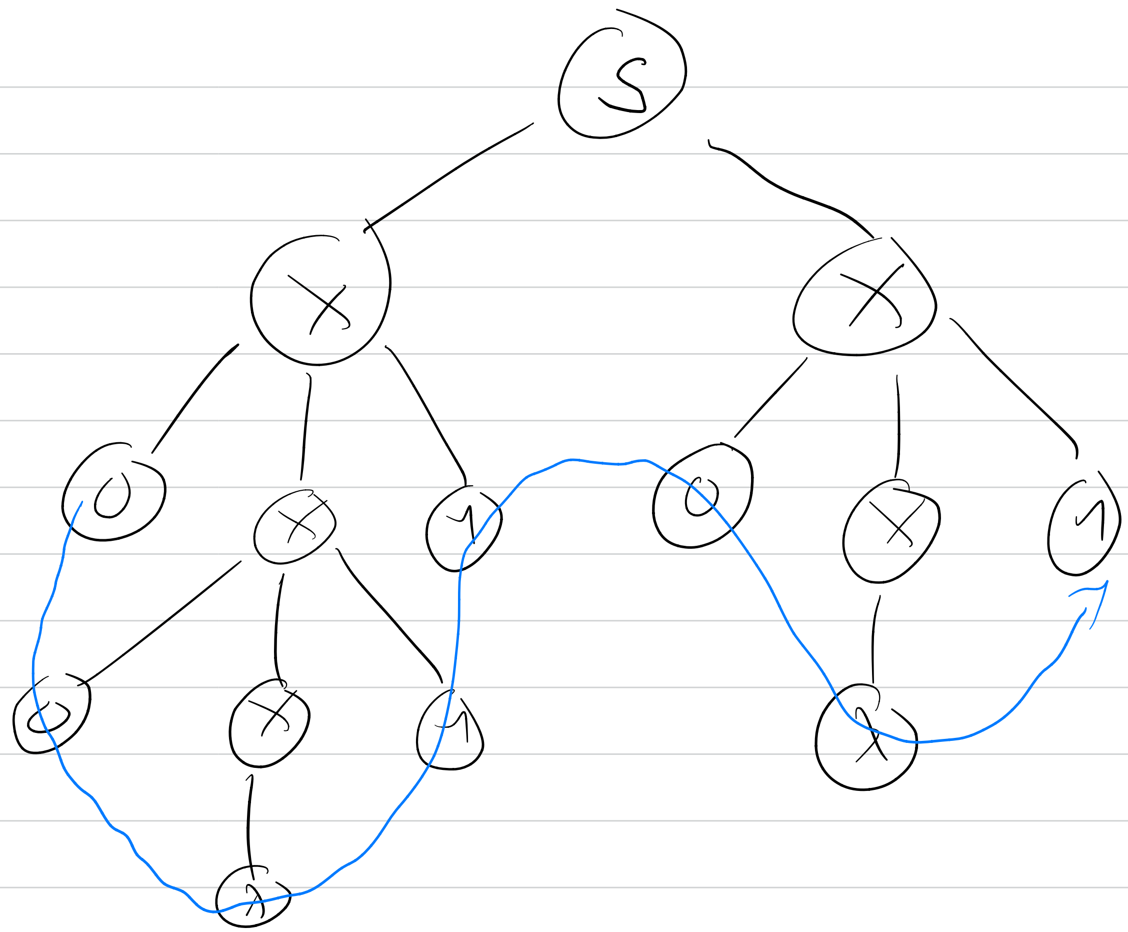
Lemma 6.13. Sei T ein Baum, $\leq$ die lexikographische Ordnung auf T, $p \in T$ und $Q := \{w \in T : p \subseteq w\}$. Es gelten $p = \min Q$ und $Q = \{w \in T : \min Q \leq w \leq \max Q\}$.



Beweis. Offensichtlich gilt $p = \min Q$. Für $w \in Q$ gilt $\min Q \leq w \leq \max Q$ nach Definition von $\min Q$ und $\max Q$. Für $w \notin Q$ mit $w \sqsubseteq p$ gilt $w \sqsubseteq w'$ für alle $w' \in Q$, also $w < \min Q$. Für $w \notin Q$ mit $w \not\sqsubseteq p$ existiert $i \in [\min\{|p|, |w|\}]$ mit $w(i) \neq p(i)$, insbesondere existiert also ein minimales solches i und nach Definition von $\leq$ folgt damit $w \leq w'$ für alle $w' \in Q$ oder $w' \leq w$ für alle $w' \in Q$, insbesondere also wegen $w \notin Q$ somit $w < \min Q$ oder $\max Q < w$.

Definition 6.14 (Beschriftung) Eine <u>Beschriftung</u> eines Baumes T mit Elementen einer Menge X ist eine Funktion $b: T \to X$.

Definition 6.15 (Blattwort). Sei Σ ein Alphabet, sei (T, b) ein Paar aus einem Baum T und einer Beschriftung $b: T \to \Sigma \cup \{\lambda\}$ und sei $t_1, \ldots, t_n$ die Folge der Blätter von T in lexikographischer Reihenfolge. Das <u>Blattwort</u> von (T, b) ist $b(t_1) \ldots b(t_n)$.



Blattwort: 001101

Definition 6.16 (Ableitungsbaum). Sei $G=(N,T,P,S)$ eine kontextfreie Grammatik und sei $d := \max(\{|w| : X \to w \in P\} \cup \{1\})$. Ein <u>Ableitungsbaum</u> einer Satzform $w \in (N \cup T)^*$ aus $A \in N$ in G ist ein Paar (T, b) aus einem Baum $T \subseteq [d]^*$ und einer Beschriftung $b: T \to N \cup T \cup \{\lambda\}$ mit $b(\lambda) = A$ und Blattwort w, so dass für alle inneren Ecken t von T eine Regel $X \to v \in P$ existiert, so dass folgendes gilt.

(i) $b(t) = X$

(ii) $\{t' \in T : t \sqsubseteq t'$ und $|t'| = |t|+1\} = \{ta : a \in \max\{|v|, 1\}\}$

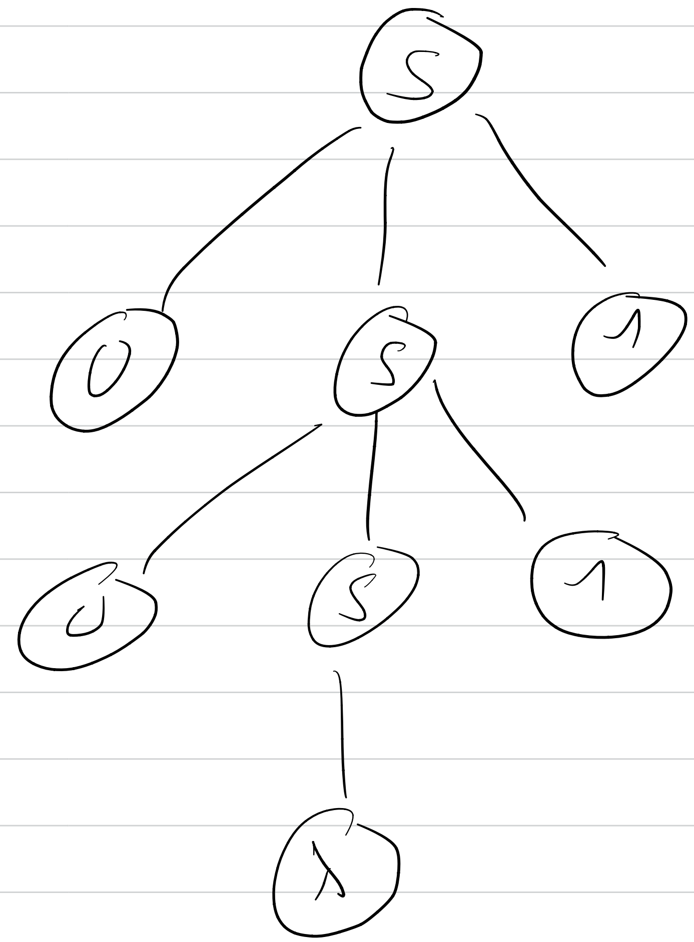
(iii) $b(ta) = v(a)$ für alle $a \in [|v|]$

(iv) $b(t1) = \lambda$ falls $v = \lambda$.

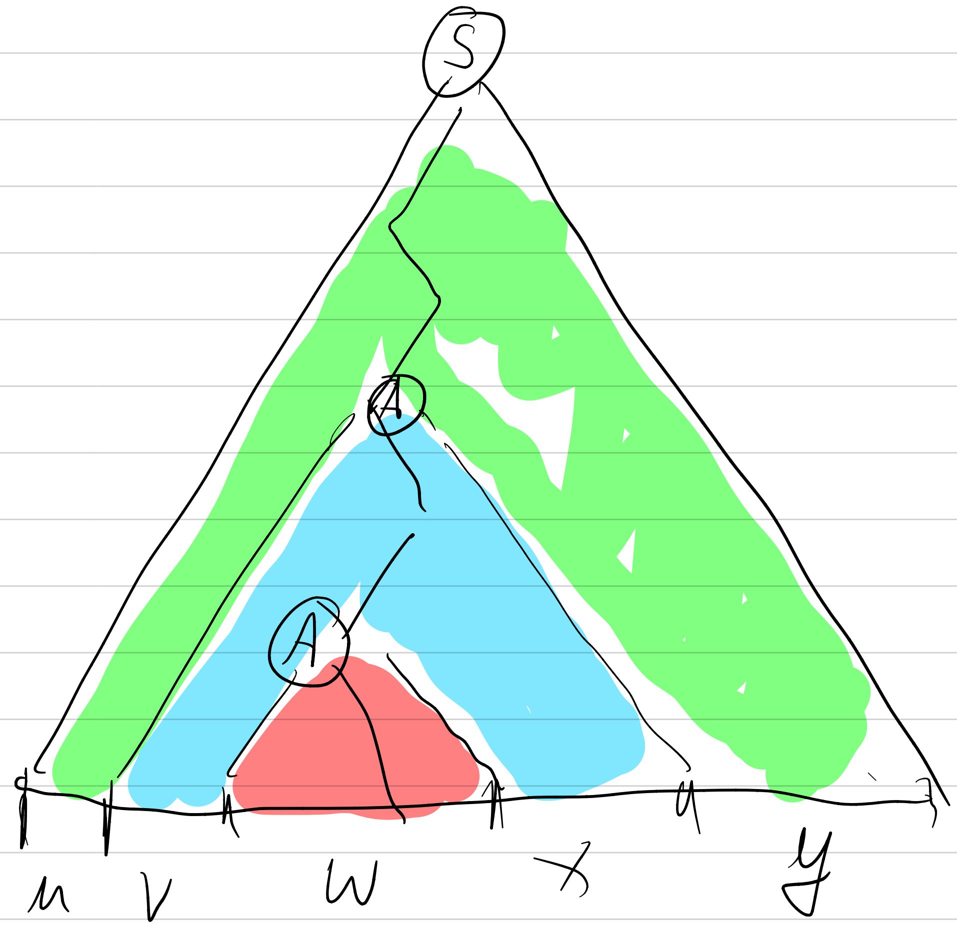
Die Blätter von (T, b) sind die Blätter von T und die inneren Ecken von (T, b) sind die inneren Ecken von T.

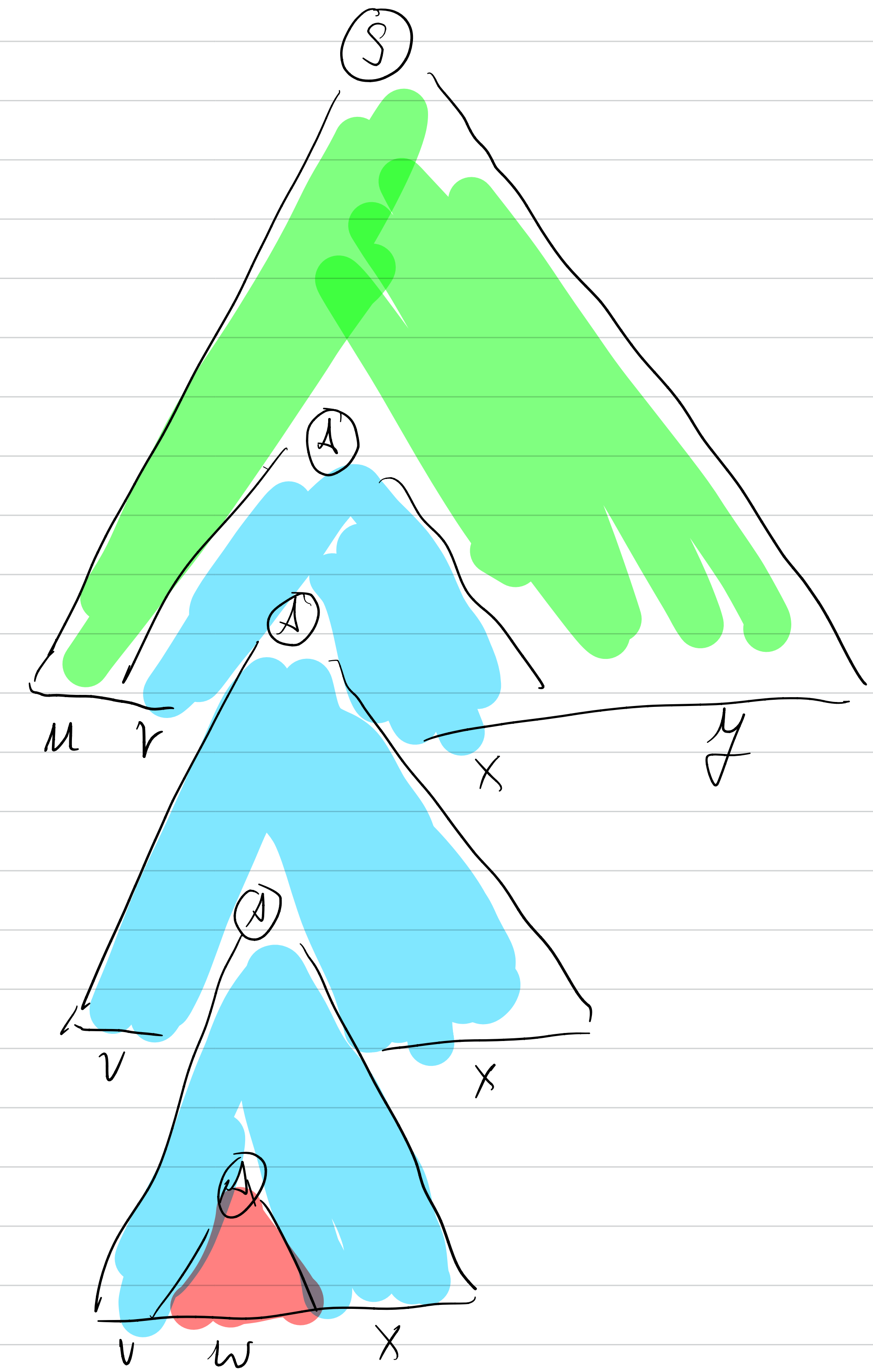
Beispiel 6.17 Sei $G = (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \to 0S1, S \to \lambda\}, S)$, $T = \{\lambda, 1, 2, 3, 21, 22, 23, 221\}$ und sei $b : T \to \{S, 0, 1, \lambda\}$ die Beschriftung mit $b(\lambda) = b(2) = b(22) = S$, $b(1) = b(21) = 0$ und $b(221) = \lambda$. Dann ist (T, b) ein Ableitungsbaum von 0011 aus S in G.

Die Darstellung von T sieht wie folgt aus



- Wörter in T als Kreise mit ihrer Beschriftung
- Für $t \in T$ und $a \in \mathbb{N}$ mit $ta \in T$ sind t und ta verbunden und t steht über ta
- Für $t \in T$ und $a, b \in \mathbb{N}$ mit $ta, tb \in T$ und $a < b$ steht ta links von tb.





⋮

Satz 6.20 (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen). Sei Σ ein Alphabet. Für jede kontextfreie Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gibt es eine Konstante $k \in \mathbb{N}$, so dass folgendes gilt:

Ist $z \in L$ mit $|z| \geq k$, so gibt es Wörter $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ mit $z = uvwxy$, so dass Folgendes gilt:

(i) $vx \neq \lambda$

(ii) $|vwx| \leq k$

(iii) $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$

Beispiel 6.21. $L = \{0^n 1^n 0^n ; n \in \mathbb{N}_0\} \notin CF$ lässt sich mit dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen wie folgt zeigen:

Beweis. Angenommen $L \in CF$. Sei $k \in \mathbb{N}$ für L wie in Satz 6.20 gewählt.
Sei $z := 0^k 1^k 0^k$. Seien $u, v, w, x, y \in \{0,1\}^*$ gemäß der Wahl von k Wörter mit $uvwxy = z$, $vx \neq \lambda$, $|vwx| \leq k$ und $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.
Aus $uvwxy = z$ und $|vwx| \leq k$ folgt, dass $r, s \leq k$ mit $u = 0^r \wedge y = 1^s 0^k$ oder $u = 0^k 1^r \wedge y = 0^s$ existieren. Wegen $vx \neq \lambda$ existieren also $r, s \leq k$ mit $r \leq k-1$ oder $s \leq k-1$ so dass $uwy = 0^r 1^s 0^k$ oder $uwy = 0^k 1^r 0^s$ gilt. In jedem Fall gilt also $uwy \notin L$ im Widerspruch dazu, dass $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt.