Automaten und Grammatiken

4. Endliche Automaten

Wir wollen Turingmaschinen nun stark einschränken. Wir betrachten ein Modell, das im Wesentlichen ohne Speicher zurechtkommt. (= TM ohne Band)

brauchen es nur für die Eingabe

Der Ausgabemechanismus kennt nur Akzeptanz und Nichtakzeptanz.

Als TM kann dies wie folgt realisiert werden:

- Es ~~ist~~ nur ein Band erlaubt.
- Bei jedem Rechenschritt bewegt sich der Kopf nach rechts. Ob und wie

die Felder des Bandes dabei überschrieben werden spielt dann keine Rolle, denn der Kopf kann nie zurück bewegt werden; wir legen aber fest, dass Symbole nicht überschrieben werden. Die Symbole die das Bandalphabet Γ neben denen des Eingabealphabetes Σ und des $\square$ Symbols hat spielen keine Rolle. Wir legen hier $\Gamma = \Sigma \cup \{\square\}$ fest.

- Beim Einlesen des ersten $\square$ Symbols muss die Rechnung der Maschine enden. Wir soll die Rechnung nicht vor dem Einlesen des ersten $\square$ Symbols enden.

Die bedeutet, dass wir TM $M = (Q, \Sigma, \Sigma \cup \{\square\}, \Delta, s, F)$ die nur Instruktionen der Form (q, a, q', a, R) mit $q \in Q$ und $a \in \Sigma$ hat.

Dies sind nun stark eingeschränkte TM. Wir wählen eine äquivalente Form, die als endl. Automaten bezeichnet wird.

Definition 4.1 (endlicher Automat)

Ein **endlicher Automat**, kurz EA, ist ein Tupel $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$. Dabei ist

- Q eine endl. Menge, die Zustandsmenge;
- Σ das Eingabealphabet;
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ die Übergangsrelation, eine Relation, so dass es für alle $q \in Q$ und $a \in \Sigma$ ein $q' \in Q$ mit (q, a, q');
- $s \in Q$ der Startzustand;
- $F \subseteq Q$ die Menge der akzeptierenden Zustände.

Der endl. Automat A ist ein deterministischer endlicher Automat, kurz DEA, wenn es $\forall\ (q, a) \in Q \times \Sigma$ genau ein q' gibt mit $(q, a, q') \in \Delta$.

Im Sinne der obigen Betrachtung entspricht ein EA $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ der 1-TM $M_A = (Q, \Sigma, \Sigma \cup \{\square\}, \{(q, a, q', a, R) : (q, a, q') \in \Delta\}, s, F)$.

⤳ Band spielt keine wesentliche Rolle, Zustände mit gerade gelesenem Symbol bilden die Konfigurationen.

Potenzmenge von Q

Definition 4.2 (Übergangsfunktion eines EA)

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein EA. Die Übergangsfunktion von A ist die Funktion

$\delta_A : Q \times \Sigma \to 2^Q$ mit $\delta_A(q,a) = \{q' \in Q : (q,a,q') \in \Delta\}$ $\forall q \in Q, a \in \Sigma$.

Die erweiterte Übergangsfunktion von A ist die Fkt $\delta_A^* : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$

mit $\delta_A^*(q, \lambda) = \{q\}$ und $\delta_A^*(q, aw) = \bigcup_{q' \in \delta_A(q,a)} \delta_A^*(q', w)$ $\forall q \in Q\ a \in \Sigma$ und $w \in \Sigma^*$.

Für $Q_0 \subseteq Q$ und $w \in \Sigma^*$ schreiben wir $\delta_A^*(Q_0, w)$ statt $\bigcup_{q \in Q_0} \delta_A^*(q, w)$.

Für einen EA $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ mit entsprechender DM $M_A = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta', s, F)$, $q \in Q$ und $w \in \Sigma^*$ ist $\delta_A^*(s, w)$ die Menge der Zustände, die sich als erste Komp. der letzten Konfig einer Rechnung von M_A zur Eingabe w ergeben.

Bemerkung 4.3

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein EA.

(i) $\forall q \in Q$ und $a \in \Sigma$ gilt $\delta_A^*(q, a) = \delta_A(q, a)$.

(ii) Ist A ein DFA, $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $w \in \Sigma^*$, so gilt $|\delta_A(q, a)| = 1$ und $|\delta_A^*(q, w)| = 1$.

(iii) Seien $u, v \in \Sigma^*$. $\forall q \in Q$ gilt $\delta_A^*(q, uv) = \delta_A^*(\delta_A^*(q, u), v)$ und $\forall Q_0 \subseteq Q$ gilt $\delta_A^*(Q_0, uv) = \delta_A^*(\delta_A^*(Q_0, u), v)$.

Definition 4.4 (Übergangsfunktion eines DEA)

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein DEA. Auch die Funktion $\delta_{det,A} : Q \times \Sigma \to Q$ mit $\delta_A(q,a) = \{\delta_{det,A}(q,a)\}$ $\forall q \in Q$ und $a \in \Sigma$ wird auch Übergangsfunktion von A genannt. Analoges gilt für $\delta^*_{det,A}$ und δ^*_A.

Für $Q_0 \subseteq Q$ und $w \in \Sigma^*$ schreiben wir auch $\delta^*_{det,A}(Q_0, w)$ statt

$$\bigcup_{q \in Q_0} \{\delta^*_{det,A}(q,w)\}.$$

Bemerkung 4.5

Ist $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein DEA, so gelten Bemerkung 4.3 (i) und (iii) auch wenn δ_A durch $\delta_{det,A}$ und δ^*_A durch $\delta^*_{det,A}$ ersetzt wird.

Bemerkung 4.6

Sei Q eine endliche Menge, Σ ein Alphabet, $s \in Q$, und $F \subseteq Q$.

(i) $\forall$ Fkt $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ gibt es genau einen EA $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ mit $\delta_A = \delta$.

(ii) $\forall$ Fkt $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ gibt es genau einen DEA $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ mit $\delta_{det, A} = \delta$.

Definition 4.7 (akzeptierte Sprache)

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein EA. Die Sprache $L(A) := \{ w \in \Sigma^* : \delta_A^*(s, w) \cap F \neq \emptyset \}$ ist die akzeptierte Sprache von A.

Definition 4.8 (regulär)

Eine Sprache L heißt regulär, wenn es einen EA A mit $L(A) = L$ gibt.

Wir schreiben REG für die Klasse der regulären Sprachen.

Zu jedem Zeitpunkt während der Verarbeitung der Eingabe durch einen endl. Automaten hängt die restliche Bearbeitung immer nur vom gegenwärtigen Zustand und dem noch einzulesenden Teil der Eingabe ab, nicht aber wie bei TM im allgemeinen von vergangenen Bandmanipulationen.

Interpretiert man die Eingabe als von einer äußeren Quelle kommend, so ist der Zustand des Automaten also allein durch seinen Zustand gegeben und der nächste Zustand hängt nur vom zugeführten Symbol ab.

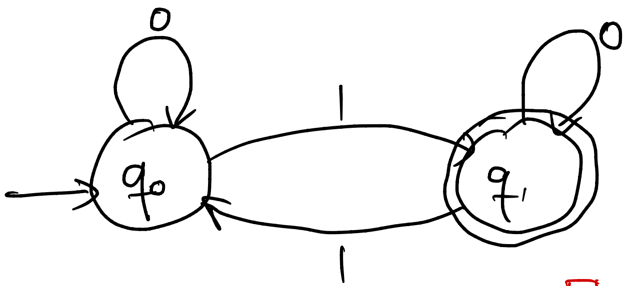
Daher bietet sich eine Darstellung eines EA durch ein Übergangsdiagramm oder eine sogenannte Übergangstabelle an.

Beispiel 4.9

Sei $A := (\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, \Delta, q_0, \{q_1\})$ mit

$$\Delta = \{(q_0, 0, q_0), (q_0, 1, q_1), (q_1, 0, q_1), (q_1, 1, q_0)\}$$

Übergangsdiagramm und Übergangstabelle von A sehen wie folgt aus



die Elemente von Σ

eine Zeile für die Elemente von Q

Zustand/Symbol	0	1
$\rightarrow q_0$	q_0	q_1
q_1 *	q_1	q_0

Startzustand

$\in F$

Eine Spalte pro Element in Σ

$(q_1, 0, q_1) \in \Delta$ (wenn A in q_1 ist und 0 einliest, geht A in q_1 über)

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* : \#_1(w) \text{ ist ungerade}\}$$

Übergangsdiagramm: Für jeden Zustand gibt es einen Kreis. Zustände in F bekommen einen Doppelkreis. Für $(q, a, q') \in \Delta$ für wir einen Pfeil von dem Kreis von q zu dem Kreis von q' mit der Beschriftung a. Zusätzlich gibt es einen Pfeil (ohne Beschriftung) aus dem „Nichts" zu dem Kreis des Startzustandes.

Ähnlich wie bei allg. und normierten DA bleibt die Klasse der akzeptierten Sprachen gleich wenn man nur det. endl. Automaten zulässt. Um dies zu beweisen führen wir den Potenzautomaten ein.

Definition 4.10 (Potenzautomat)

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein EA. Der Potenzautomat von A ist der DEA $P_A = (2^Q, \Sigma, \Delta', \{s\}, \{P \subseteq Q : P \cap F \neq \emptyset\})$ mit

$$\delta_{det, P_A}(Q_0, a) = \bigcup_{q \in Q_0} \delta_A(q, a) \quad \forall Q_0 \subseteq Q \quad \forall a \in \Sigma.$$

Satz 4.11

Eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn es einen DEA A mit $L(A) = L$ gibt.

Beweis: Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein EA mit Potenzautomat P_A. Es genügt zu zeigen, dass $L(A) = L(P_A)$. Hierfür genügt es zu zeigen, dass

$$\delta^*_{det, P_A}(\{s\}, w) = \delta^*_A(s, w) \quad \forall w \in \Sigma^* \quad (*)$$

denn damit folgt

$$w \in L(P_A) \iff \delta^*_{P_A}(\{s\}, w) \cap \{P \subseteq Q : P \cap F \neq \emptyset\} \neq \emptyset$$

$$\iff \delta^*_{det, P_A}(\{s\}, w) \cap F \neq \emptyset$$

$$\overset{(*)}{\iff} \delta^*_A(s, w) \cap F \neq \emptyset$$

$$\iff w \in L(A)$$

Wir zeigen (*) mittels vollständiger Ind. über $|w|$.

Es gilt $\delta^*_{det, P_A}(\{s\}, \lambda) = \{s\} = \delta^*_A(s, \lambda)$.

Sei $w \in \Sigma^+$ mit $\delta^*_{det, P_A}(\{s\}, v) = \delta^*_A(s, v)$ $\forall v \in \Sigma^{\leq |w|-1}$. Nun zeigen wir (*).

Sei $va := w$ mit $a \in \Sigma$ und $|v| = |w| - 1$.

$$\delta^*_{det,\mathcal{P}_A}(\{s\}, w) \overset{\text{Bem 4.5}}{=} \delta^*_{det,\mathcal{P}_A}\left(\delta^*_{det,\mathcal{P}_A}(\{s\}, v), a\right)$$

$$\overset{\text{Ind. hyp.}}{=} \delta^*_{det,\mathcal{P}_A}\left(\delta^*_A(s, v), a\right)$$

$$= \bigcup_{q \in \delta^*_A(s,v)} \delta_A(q, a)$$

$$= \delta^*_A\left(\delta^*_A(s, v), a\right).$$

$$= \delta^*_A(s, \underset{\overset{\shortparallel}{w}}{va}).$$

$\square$