Reguläre Sprachen

1 Reguläre Sprachen

1.1 Definition (Äquivalenzrelation)

Sei A eine Menge. Eine Äquivalenzreöation auf A ist eine Relation $\leq A^2$, so dass die folgende Eigenschaft erfüllt sind. (wie bei Relationen üblich verwenden wir Infixnotation)

(i) $a \sim a \forall a \in A$ (Reflexivität)

(ii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a \forall a, b, c \in A$ (Symetrie)

(iii) $a \sim b, b \sim c \rightarrow a \sim c$ (Transitivität)

Die **Äquivalenzklasse** eines Elements $a \in A$ bezüglich $\sim$ ist die Menge $[a] \ := a' \in A : a' \ a$. Der **Index** von $\sim$ ist die Kardinalität der Menge $A_{/\sim} := [a]_{\sim} : a \in A$ falls diese endlich ist und ∞ andernfalls.

1.2 Definition (A-Äquivalenz)

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein DEA mit erweiterter Übergangsfunktion $\delta^* : Q \times \Sigma \rightarrow Q$. Die A-Äquivalenz ist die Relation $\ _A$ auf $\Sigma^* \cdots$

1.3 Bemerkung

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ eine DEA.

(i) Die A-Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.

(ii) Der Index von $\sim_A$ ist höchstens $|Q|$.

(iii) Es gilt $L(A) = \bigcup\limits_{w \in L(A)} [w]_{\sim A}$.

1.4 Definition (Rechtskongruenz)

Sei Σ ein Alpha. Eine Rechtskongruenz auf Σ^* ist eine Äquivalenzrelation $\sim ? \leq ? (\Sigma^*)^2$ mit $u \sim v \Rightarrow uw \sim vw \forall u, v, w \in Sigma^*$.

1.5 Proposition

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein DEA. Die A-Äquivalenz $\sim_A$ ist eine Rechtskonqruenz auf Σ^*.
Beweis: Seien $u, v, w \in \Sigma^*$ mit $u \sim_A v$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\delta^*_{det,A}(s, uw) = \delta^*_{det,A}(\delta^*_{det,A}(s, u), w) = \delta^*_{det,A}(\delta^*_{det,A}(s, v), w) \\ = \delta^*_{det,A}(s, vw).(hierbenutzenwirBem 4.3 und 4.5)\end{aligned}$$

Dann gilt $uw \sim_A vw$. $\square$ Zu jedem DEA A gibt es also eine dazugehärige Rechtskonguenz $\sim$ auf Σ^* mit endlichem Index so dass L(A) die Vereinigung von Äquivalenzklasse von $\sim_A$ ist. Tatsächlich gilt auch die Umkehrung: Ist L die Vereinigung von Äquivalenzklasse einer Rechtskongruenz $\sim$ mit endlichem Index, so gibt es einen DEA A mit $L(A) = L$

1.6 Definition

Sei Σ eine Alphabet und L Vereinigung von Äquivalenzklasse einer Rechtskongruenz $\sim$ auf Σ^* mit endlichem Index. Es bezeichne

$$A_{\sim,L} := (\Sigma^*_{/\sim}, \Sigma, \Delta, [\lambda]_{\sim}, [w]_{\sim} : w \in L$$

den DEA mit $\delta_{det,A_{\sim},L}([w]_{\sim}, a) = [wa]_{\sim} \forall w \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$. Die Wohldefiniertheit von $\delta_{det,A_{\sim},L}$ ergibt sich daraus, dass $\sim$ eine Rechtskongruenz ist. Um uns davon zu überzeugen, dass $L(A_{\sim,L}) = L$ gilt betrachten wr zunächst die Arbeitsweise von $A_{\sim,L}$.

1.7 Lemma

Sei Σ ein Alphabet, L Vereinigung von Äquivalenzklassem einer Rechtskongruenz $\sim$ auf Σ^* mit endlichem Index und sei $\delta^* : \Sigma^*_{/\sim} \times \Sigma^* \to \Sigma^*_{/\sim}$ die erweiterte Übergangsfunktion von $A_{\sim,L}$. Dann gilt $\delta^*([\lambda]_\sim, w) = [w]_\sim \forall w \in \Sigma^*$. **Beweis** Wir verwenden vollständige Induktion über $|w|$. Es gilt $\delta^*([\lambda]_\sim, \lambda) = [\lambda_\sim]$. Sei nun $w \in \Sigma^+ \cdots$

1.8 Satz

Sei L die vereinigung von Äquivalenzklasse einer Rechtskongruenz $\sim$ mit endlichem Index Es gibt $L(A_{\sim,L}) = L$ **Beweis:** Sei Σ das Alphabet, so dass $\sim$ eine Rechtskongruenz auf Σ^* ist. Sei $\delta^* : \Sigma^*_{/\sim} \times \Sigma^* \to \Sigma^*_{/\sim}$ die erweiterte Übergangsfunktion von $A_{\sim,L}$ und sei $w \in \Sigma^*$. Aus Lemma 5.7 folgt

$$w \in L(A_{\sim,L}) \Leftrightarrow \delta^*([\lambda]_\sim, w) \in [v]_\sim : v \in L$$

$$\Leftrightarrow [w]_\sim \in [v]_\sim : v \in L$$

$$\Leftrightarrow \exists v \in L : [w]_\sim = [v]_\sim$$

$$\Leftrightarrow \exists v \in L : w \sim v$$

$$\Leftrightarrow w \in L$$

...

1.9 Korollar

Eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn sie die Verienigung von Äquivalenzklasse einer Rechtskongruenz mit endlichem Index ist. **Beweis:** Folgt aus Bemerkung 5.3, Proposition 5.5 und Satz 5.8 □

Betrachten man nur deterministische endliche Automaten ohne unerreichbare Zustände, so entsprechen diese bis auf Unbenutzung von Zuständen sogar den Rechtskongruenz mit endlichem Index zusammen mit Vereinigung von Äquivalenzklassn dieser.

1.10 Definition(erreichbar)

Sei Σ ein Alphabet. Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ ein EA mit erweiterter Übergangsfunktion δ^*. Ein zustand $q \in Q$ heißt erreichbar in A wenn es ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit $q \in \delta^*(s, w)$ gilt.

1.11 Definition(isomorph)

Sei $A_i = (Q_i, \Sigma, \Delta_i, s_i, F_i)$ für $i \in 1,2$ ein EA mit Übergangsfunktion δ_i. Die endliche Automaten A_1 und A_2 sind **isomorph**, kurz $A_1 ? \cong A_2$, wenn es eine Projektion $f : Q_1 \to Q_2$ gibt, sodass folgendes gilt:

(i) $f(s_1) = s_2$

(ii) $\delta_2(f(q_1), a) = f(\delta_1(q_1), a)$