Einleitung in die Stochastik

Datum: February 1, 2024

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Ziel: Mathematisches Modell, welches die intuitive Idee "Wahrscheinlichkeit"(="relative Häufigkeit") beschreibt.

Anwendung:

- Modellierung von Komplexen Systemen (Aktienmarkt, Verkehr, Anfragen bei einem Server)
- Randomisierte Algorithmen (Las-Vegas Algo., Modelierungs Algo. Primzahlentest)
- Performance-Analyse von Algorithmen (Durchschnittliche Laufzeit bei zufälligen Input)

Informelle Einführung:

Experiment: Würfeln mit zwei Würfeln A und b

Ausgang: Ein Paar von Augenzahlen je zwischen 1 und 6 z.B. A zeigt 1 und B zeigt 4 $\rightsquigarrow$ (1,4)
Elementarereignis Ausgangsraum: $6 \cdot 6 = 36$ Möglichekeiten.

$\Omega = \{$
$(1,1),(1,2),(1,3),\cdots,(1,6)$
$(2,1),(2,2),(2,3),\cdots,(2,6)$
$\cdots\}$

Sinnvolle Modellierung:

(i) Eine Aussage des Experiments sollte genau einem $w \in \Omega$ entsprechen.

(ii) Ω sollte keine unmöglichen Ausgänge enthalten.

Wahrscheinlichkeiten

Zuweisungen: Zu jedem $w \in \Omega$ $\quad p(w) \in [0,1]$ zuweisen sodass $\Sigma_{w\in\Omega} p(w) = 1$

Idee: Ein Elementarereignis muss auftreten.

Hier: "faire Würfel" => gibt keinen Grund $p(1,3) > p(5,6)$ Also $p(1,1) = \cdots = p(6,6) = \frac{1}{36}$
Möchten umfassende Ereignisse beschreiben z.B. die Summe der Augenzahl ist 3. $A = \{(1,2),(2,1)\} \subseteq \Omega$

intuitiv: $P(A) = p(1,2) + p(2,1) = 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$

Formale Einführung (Kolmogorov, 1933)

Definition: Ein **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum** ist ein Paar (Ω, P) wobei: Ω eine endliche oder eine abzählbar unendliche Menge ist (**Elementarereignise**) und $P \cdot \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**, d.h (Wahrscheinlichkeitsverteilung)

(i) $P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{P}(A)$ Nichtnegativitätsgesetz

(ii) $P(\Omega) = 1$ (Normierung)

(iii) Für jede Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $A_i \in \mathcal{P}(\Omega)$, sodass $A_i \cap A_j = \varnothing \forall i \neq j$ gilt $P(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \Sigma_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$

Insbesondere: $A, B \in \mathcal{P}(\Omega), A \cap B \neq \varnothing$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Eigenschaften: (Ω, P) diskreter W-raum $A, B \subseteq \Omega$ (Ereignisse)

(a) $P(\varnothing) = 0$

Denn: $1 =_{(ii)} P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) =_{(iii)} P(\Omega) + P(\varnothing) =_{(ii)} 1 + P(\varnothing) => P(\varnothing) = 0$

(b) $P(A^c)(= \Omega / A) = 1 - P(A)$

Denn: $P(A) + P(A^c) =_{(iii)} P(A \cup A^c) =_{(ii)} P(\Omega) = 1$

(c) $A \subseteq B => P(A) \leq P(B)$

Denn: $P(B) = P(A \cup (B/A)) =_{(iii)} P(A) + P(B/A) \leq_{(i)} P(A)$

(d) $P(A \cup B) = P((B/A) \cup (A \cap B)) = P(B/A) + P(A \cap B)$

Denn: $P(B) = P((B/A) \cup (A \cap B)) = P(B/A) + P(A \cap B) => P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = P(A \cup (B/A) =_{(iii)}) P(A) + P(B/A) =_{(*)} P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(e) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ (folgt aus d + (i))

Gesetz disjunktiver Wahrscheinlichkeiten

(Ω, P) diskreter W-Raum, $A = \{w_1, w_2, \cdots\} \subseteq \Omega$
Ereignis $P(A) =_{(iii)} P(\{w_1\}) + P(\{w_2\} + \cdots) = \Sigma_{i \in \mathbb{N} P(\{w_i\})}$

Definition : Eine Funktion $p : \Omega \to [0, 1] sodass \Sigma_{w \in \Omega} p(w) = 1$ heißt **Wahrscheinlichkeitsfunktion**.

Beispiel: Würfel mit zwei Würfeln $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2, p(w) = \frac{1}{36} \forall w \in \Omega$
$P(A) = \Sigma_{w \in A} p(w) = \Sigma_{w \in A} \frac{1}{36} = \frac{|A|}{36} \forall A \subseteq \Omega$

(i) $P(A) = \frac{|A|}{36} \leq 0$

(ii) $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{36} = 1$
$A \cap B = \varnothing P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{36} = \frac{|A|+|B|}{36} = \frac{|A|}{36} + \frac{|B|}{36} = P(A) + P(B)$

Beschreibe das Ereignis, dass mind. ein Würfel eine 1 zeigt $A = \{(1,1), \cdots, (1,6), (6,1) \cdots, (2,1)\}$
$P(A = \frac{11}{36})$

Definition : Ein **endlicher** diskreter W-raum (Ω, P) heißt **gleichverteilt**, falls $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \forall A \subseteq \Omega$
Wir können die gleichverteilung auf jeder endlcihen Menge Ω Definition iniert und erhalten ein W-Maß.

Beispiel:

(a) Würfer mit 2 roten Seiten und 4 blauen Seiten. $\Omega = \{rot, blau\}, p(rot) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, p(blau) = \frac{2}{3}$

(b) $\Omega = \{a,b,c,d\}$ (nicht gleichverteilt) $p : \Omega \to [0,1]$ mit $\Sigma_w \in \Omega p(w) = 1$ **hier tabelle einfügen a = 1/10, b= 1/5, c = 1/2, d = ?** $P(A) = \Sigma_{w \in A} p(w)$

(c) abzählbar unendlich $\Omega = \mathbb{N}, p(n) = (\frac{1}{2})^n$ $P(\Omega) = \Sigma_{n=1}^{unendlich} (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$ Viele Experimente bestehen aus der Wiederholung desselben grundlegenden Experiments.

Definition : Seien $\Omega_1, \cdots, \Omega_n$diskrete W-Räume mit W-funktionen $p_1, \cdots, p_m$. Dann ist der **Produktraum** von $\Omega_1, \cdots, \Omega_n$, das karteische Proukt $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n = \{(w_1, \cdots, w_n), w_i \in \Omega_i, 1 \leq i \leq n\}$ zusammen mit dem W-Maß Definition iniert durch die W-funktionen Definition iniert durch

$$p((w_1, \cdots, w_n)) = P_1(w_1) \cdot p_n(w_n) = \Pi^n_{i=1 p_i(w_i)}$$

Beispiel: Mit zwei Würfeln. Sei $\Omega' = \{1,2,3,4,5,6\}$ mit $p' = \frac{1}{6} \forall a \in \Omega'$ der W-Raum der den Wurf von einem Würfel beschreibt, dann $\Omega = \Omega' \times \Omega'$
$p((a,b)) = p'(a) \cdot p'(b) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Satz: Der Produkraum $\Omega_1 \times \Omega \times \cdots \Omega_n$ ist ein diskreter W-Raum.

Beweis: $1 \geq P((w_1, \cdots, w_n)) = p_1(w_1) \cdots p_n(w_n) \geq 0$
$p : \Omega_1 \times \cdots \Omega_n \to [0,1]$

$$\Sigma_{(w_1, \cdots, w_n) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n} p((w_1, \cdots, w_n))$$
$$= \Sigma_{w_1 \in \Omega_1} \Sigma_{w_2 \in \Omega_2} \cdots \Sigma_{w_n \in \Omega_n} p_1(w_1 \cdots p_n(w_n))$$
$$= (\Sigma_{w_1 \in \Omega_1} p_1(w_1))(\Sigma_{w_2 \in \Omega_2} p_2(w_2)) \cdots (\Sigma_{w_n \in \Omega_n} p_n(w_n))$$

Unabhängigkeit

Diskreter W-Raum (Ω, P) Ereignis $A \subseteq \Omega$ Formalisierung Für die Idee, dass zwei Ereignisse A und B ich nicht beeinflussen.

Def: Zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ heißen **Unabhängig**, falls $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Bsp: Wurf eines Würfels $\rightsquigarrow \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, A = \{2,4,6\}, B = \{1,2\}, C = \{2,3,5\}$ $P(A \cap B) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}$ $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ => A und B Unabhängig $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ $P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ => A und C sind nicht Unabhängig.

Def: Eine Menge $\{A_1, \cdots, A_2\}$ von Ereignissen ist **Unabhängig** falls $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \Pi_{i=1}^{n} P(\bigwedge,)$

Im Bsp: Angenommen wir wissen, dass A eingetreten ist. Is es dann meht oder weniger wahrscheinlich, dass auch C eingetreten ist? $P(C|A) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{2}$

Def: Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** $P(B|A)$ vin B unter der Annahme, dass A eingetreten ist, ist $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, P(A) > 0$

Angenommen $A \subseteq B$ $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

Beobachtung: Seien A und B unabhängig. Dann $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$ (A liefert keine zusätzliche Information ob B eingetreten ist!)

Bsp: Würfer mit zwei Würfeln B: Ereignis, dass die Summe der Augenzahl = p ist
A: Ereignis, dass der 1. Wurf = 5 ist.
$B = \{(4,5), (5,4), (3,6), (6,3)\}$
$A = \{(5,1), (5,2), ...\}$
$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$
$P(B) = \frac{4}{??} = \frac{1}{?}$

Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit

$\Cup$ soll später getauscht werden mit punkt drin symbol!!!!

$$\Omega = \Cup_{i=1}^{n} E_i, E_i \cap E_j = \varnothing i \neq j, A \subseteq \Omega$$

Dann: $P(A) = Sigma_{i=1}^{n} P(A|E_i) \cdot P(E_i)$

Beweis: $A = \Cup_{i=1}^{n}(A \cap E_i), P(A \cap E_i) = P(A|E_i)$

$$hiertexteinfgennochwasfehlt...$$

Also $P(A) =_{3.Axiom} \Sigma$

Satz von Bayes:

$A, B \subseteq \Omega, P(A), P(B) \neq 0$
Dann $P(B|A) = P(A|B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)}$

Beweis: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
=>$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) = P(A)$ $\square$

Diskrete Zufallszahlen

Oft möchte man Ereignissen einen nummerischen Wert zuordnen (Summe der Augenzahlen, Gewinn).

Def: Eine **diskrete Zufallszahlen** X ist eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ auf einen diskreten W-Raum (Ω, P)

Bem: X ist keine "Variable" im üblichen Sinne, sondern eine Funktion.

Wir können einen W-Raum auf den Werten (Bilderraum) von X definieren.

Satz Sei X diskreter zufallsvariable auf (Ω, P).
$\Omega_X = im(X) = \{x \in \mathbb{R} | E?? =_w \in \Omega : X(w) = x\}$ $Px^{(x)} = P(X^{-1}(x))P = (\{w \in \Omega | X(w) = x\})$ deiniert eine W-funktion auf Ω_X.

$$HierwichtigcheckeobXrichtiggrooderkleinist!!!$$

Beweis: $0 \leq P_X(x) \leq 1 \quad \forall Ax \in \Omega_X$ bei def (hier photos checken!!?)
$\Omega = \Cap_{x \in \Omega_X} X^{-1}(x), \sigma_{x \in \Omega_X} P_X(x) = \Sigma_{x \in \Omega_X}$ <- Das ist einfach komplet falsch ich muss das noch mal über arbeiten??

Def: Das Wahrscheinlichkeitsmaß definiert auf $\Omega_X = im(X)$ mittels $P_X(x) = P(X = x)$ heißt die **Verteilung** von X.

Bsp: Bei einem Wurf eines fairen Würfels werden den Agenzahlen folgende Gewinne zugewiesen.

$$hiertabelleeinfgen$$

definiert Zufallsvariable $X : \{1,2,3,4,5,6\} \to \mathbb{R}$ $\quad P(X=1) = P(X^{-1}(1)) = P(\{w \in \Omega | X(w) = 1\}) = P(\{1,2,3\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\Omega_X = \{1,2,3\}$

$$hiernochmaltabelle :' ($$

(Verteilung)

Binomialverteilung:

mit Parametern $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$. ist definiert ais $\Omega_X = \{0,1,\cdots,n\}$ durch die W-funktion $b(k,n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Bernoulli-Experiment:

Versucgh mit zwei Ausgängen $\{1,0\}$ $P(1) = p, P(o) = q = 1-p$.

Bernouilli-Prozess:

Die Folge von Wiederholungen dasselben Bernoulli-Experiments. Ein Prozess mit n Versuchen kann mittels Ω^n beschreiben werden. $(0,1,0,0,1,1,\cdots)$
Die Wahrscheinlichkeit für k Erfolge ist gegeben durch $b(k,n,p)$.

Hypergeometrische Verteilung

parameter $K, n, r, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $0 \leq k \leq n \leq m, k \leq r$. Defniniert durch $h(K,n,r,m) = \frac{\binom{r}{k}\binom{m-r}{n-k}}{\binom{m}{n}}$

Interpretation: Urne mit r roten Kugeln, m-r blaue Ziehen n Kugeln ohne zurückzlegen (auf einmal)
Ω = Jede Menge von n Kugeln
P = gleichverteilt
$h(k;n,r,m) = P$ was kommt hier rein????

Def: Der **Erwartungswert** einer diskreter Zufallsvariable X ist (Was für n komisches E ist das denn bitt??) $E[x] = \Sigma_{x \in \Omega_X} p_X(x) X = \Sigma_{x \in \Omega_X} P(X=x) \cdot x$ und wird oft mit mü (wie mükrosekunde) bezeichnet.

Bsp: Beim Würfeln einer geraden Augenzahl verliert man ???? Beim Würfeln einer ungeraden gewinnt man die Augenzahl in ???.
$\Omega_X = \{-3,1,3,5\}$

$$hiernochtabelle$$

??? =????

Satz: X diskreter Zufallsvariable über (Ω, P). Dann ??? $= \Sigma_{w \in \Omega} X(w) p(w)$

Beweis: ??? $= \Sigma_{x \in \Omega_X} X p_x(x) = \Sigma_{x \in \Omega_X} x \cdot P(X^{-}1)(x)) = \Sigma_{x \in im(X)} X$