
Einleitung in die Stochastik

Datum: February 1, 2024

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Ziel: Mathematisches Modell, welches die intuitive Idee "Wahrscheinlichkeit" ("relative Häufigkeit") beschreibt.

Anwendung:

- Modellierung von Komplexen Systemen (Aktienmarkt, Verkehr, Anfragen bei einem Server)
- Randomisierte Algorithmen (Las-Vegas Algo., Modellierungs Algo. Primzahlentest)
- Performance-Analyse von Algorithmen (Durchschnittliche Laufzeit bei zufälligen Input)

Informelle Einführung:

Experiment: Würfeln mit zwei Würfeln A und B

Ausgang: Ein Paar von Augenzahlen je zwischen 1 und 6 z.B. A zeigt 1 und B zeigt 4 \rightsquigarrow (1,4)
Elementarereignis Ausgangsraum: $6 \cdot 6 = 36$ Möglichkeiten.

$$\Omega = \{ \\ (1,1), (1,2), (1,3), \dots, (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), \dots, (2,6) \\ \dots \}$$

Sinnvolle Modellierung:

- (i) Eine Aussage des Experiments sollte genau einem $w \in \Omega$ entsprechen.
- (ii) Ω sollte keine unmöglichen Ausgänge enthalten.

Wahrscheinlichkeiten

Zuweisungen: Zu jedem $w \in \Omega$ $p(w) \in [0,1]$ zuweisen sodass $\sum_{w \in \Omega} p(w) = 1$ Idee: Ein Elementarereignis muss auftreten. Hier: "faire Würfel" \Rightarrow gibt keinen Grund $p(1,3) > p(5,6)$ Also $p(1,1) = \dots = p(6,6) = \frac{1}{36}$ Möchten umfassende Ereignisse beschreiben z.B. die Summe der Augenzahl ist 3. $A = \{(1,2), (2,1)\} \subseteq \Omega$ intuitiv: $P(A) = p(1,2) + p(2,1) = 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$

Formale Einführung (Kolmogorov, 1933)

Definition: Ein **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum** ist ein Paar (Ω, P) wobei: Ω eine endliche oder eine abzählbar unendliche Menge ist (**Elementarereignisse**) und $P: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**, d.h (Wahrscheinlichkeitsverteilung)

- (i) $P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{P}(A)$ Nichtnegativitätsgesetz
- (ii) $P(\Omega) = 1$ (Normierung)
- (iii) Für jede Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $A_i \in \mathcal{P}(\Omega)$, sodass $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ gilt $P(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$

Insbesondere: $A, B \in \mathcal{P}(\Omega), A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Eigenschaften: (Ω, P) diskreter W-raum $A, B \subseteq \Omega$ (Ereignisse)

(a) $P(\emptyset) = 0$

Denn: $1 =_{(ii)} P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) =_{(iii)} P(\Omega) + P(\emptyset) =_{(ii)} 1 + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$

(b) $P(A^c) (= \Omega/A) = 1 - P(A)$

Denn: $P(A) + P(A^c) =_{(iii)} P(A \cup A^c) =_{(ii)} P(\Omega) = 1$

(c) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Denn: $P(B) = P(A \cup (B/A)) =_{(iii)} P(A) + P(B/A) \geq_{(i)} P(A)$

(d) $P(A \cup B) = P((B/A) \cup (A \cap B)) = P(B/A) + P(A \cap B)$

Denn: $P(B) = P((B/A) \cup (A \cap B)) = P(B/A) + P(A \cap B) \Rightarrow P(B) - P(A \cap B)$
 $P(A \cup B) = P(A \cup (B/A)) =_{(iii)} P(A) + P(B/A) =_{(*)} P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(e) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ (folgt aus d + (i))

Gesetz disjunktiver Wahrscheinlichkeiten

(Ω, P) diskreter W-Raum, $A = \{w_1, w_2, \dots\} \subseteq \Omega$

Ereignis $P(A) =_{(iii)} P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + \dots = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(\{w_i\})$

Definition: Eine Funktion $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ sodass $\sum_{w \in \Omega} p(w) = 1$ heißt **Wahrscheinlichkeitsfunktion**.

Beispiel: Würfel mit zwei Würfeln $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2, p(w) = \frac{1}{36} \forall w \in \Omega$

$$P(A) = \sum_{w \in A} p(w) = \sum_{w \in A} \frac{1}{36} = \frac{|A|}{36} \forall A \subseteq \Omega$$

(i) $P(A) = \frac{|A|}{36} \leq 0$

(ii) $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{36} = 1$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{36} = \frac{|A| + |B|}{36} = \frac{|A|}{36} + \frac{|B|}{36} = P(A) + P(B)$$

Beschreibe das Ereignis, dass mind. ein Würfel eine 1 zagt $A = \{(1, 1), \dots, (1, 6), (6, 1), \dots, (6, 6)\}$
 $P(A) = \frac{11}{36}$

Definition: Ein **endlicher** diskreter W-raum (Ω, P) heißt **gleichverteilt**, falls $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \forall A \subseteq \Omega$. Wir können die Gleichverteilung auf jeder endlichen Menge Ω Definition invariant und erhalten ein W-Maß.

Beispiel:

- (a) Würfel mit 2 roten Seiten und 4 blauen Seiten. $\Omega = \{rot, blau\}, p(rot) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, p(blau) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- (b) $\Omega = \{a, b, c, d\}$ (nicht gleichverteilt) $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ mit $\sum_w p(w) = 1$ hier **tabelle einfügen** $a = 1/10, b = 1/5, c = 1/2, d = ?$ $P(A) = \sum_{w \in A} p(w)$
- (c) abzählbar unendlich $\Omega = \mathbb{N}, p(n) = (\frac{1}{2})^n$ $P(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$ Viele Experimente bestehen aus der Wiederholung desselben grundlegenden Experiments.

Definition: Seien $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ diskrete W-Räume mit W-funktionen p_1, \dots, p_n . Dann ist der **Produktraum** von $\Omega_1, \dots, \Omega_n$, das kartesische Produkt $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n = \{(w_1, \dots, w_n), w_i \in \Omega_i, 1 \leq i \leq n\}$ zusammen mit dem W-Maß Definition invariant durch die W-funktionen Definition invariant durch

$$p((w_1, \dots, w_n)) = P_1(w_1) \cdot p_n(w_n) = \prod_{i=1}^n p_i(w_i)$$

Beispiel: Mit zwei Würfeln. Sei $\Omega' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $p' = \frac{1}{6} \forall a \in \Omega'$ der W-Raum der den Wurf von einem Würfel beschreibt, dann $\Omega = \Omega' \times \Omega'$
 $p((a, b)) = p'(a) \cdot p'(b) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Satz: Der Produktraum $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$ ist ein diskreter W-Raum.

Beweis: $1 \geq P((w_1, \dots, w_n)) = p_1(w_1) \cdot \dots \cdot p_n(w_n) \geq 0$
 $p : \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n \rightarrow [0, 1]$

$$\begin{aligned} & \sum_{(w_1, \dots, w_n) \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n} p((w_1, \dots, w_n)) \\ &= \sum_{w_1 \in \Omega_1} \sum_{w_2 \in \Omega_2} \dots \sum_{w_n \in \Omega_n} p_1(w_1) \cdot \dots \cdot p_n(w_n) \\ &= (\sum_{w_1 \in \Omega_1} p_1(w_1)) (\sum_{w_2 \in \Omega_2} p_2(w_2)) \cdot \dots \cdot (\sum_{w_n \in \Omega_n} p_n(w_n)) \end{aligned}$$

Unabhängigkeit

Diskreter W-Raum (Ω, P) Ereignis $A \subseteq \Omega$ Formalisierung Für die Idee, dass zwei Ereignisse A und B sich nicht beeinflussen.

Def: Zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ heißen **Unabhängig**, falls $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Bsp: Wurf eines Würfels $\rightsquigarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 2\}, C = \{2, 3, 5\}$ $P(A \cap B) = P(\{2\}) = \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow A$ und B Unabhängig $P(A \cap C) = \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow A$ und C sind nicht Unabhängig.

Def: Eine Menge $\{A_1, \dots, A_n\}$ von Ereignissen ist **Unabhängig** falls $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$

Im Bsp: Angenommen wir wissen, dass A eingetreten ist. Is es dann mehr oder weniger wahrscheinlich, dass auch C eingetreten ist? $P(C|A) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{2}$

Def: Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** $P(B|A)$ von B unter der Annahme, dass A eingetreten ist, ist $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, P(A) > 0$

Angenommen $A \subseteq B$ $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

Beobachtung: Seien A und B unabhängig. Dann $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$ (A liefert keine zusätzliche Information ob B eingetreten ist!)

Bsp: Würfel mit zwei Würfeln B: Ereignis, dass die Summe der Augenzahl = p ist

A: Ereignis, dass der 1. Wurf = 5 ist.

$B = \{(4, 5), (5, 4), (3, 6), (6, 3)\}$

$A = \{(5, 1), (5, 2), \dots\}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit

\mathbb{U} soll später getauscht werden mit punkt drin symbol!!!!

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n E_i, E_i \cap E_j = \emptyset \text{ für } i \neq j, A \subseteq \Omega$$

$$\text{Dann: } P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|E_i) \cdot P(E_i)$$

$$\text{Beweis: } A = \bigcup_{i=1}^n (A \cap E_i), P(A \cap E_i) = P(A|E_i) \cdot P(E_i)$$

hier text einfügen noch was fehlt...

$$\text{Also } P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap E_i) \stackrel{\text{3. Axiom}}{=} \sum_{i=1}^n P(A|E_i) \cdot P(E_i)$$

Satz von Bayes:

$$A, B \subseteq \Omega, P(A), P(B) > 0$$

$$\text{Dann } P(B|A) = P(A|B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)}$$

$$\text{Beweis: } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) \quad \square$$

Diskrete Zufallszahlen

Oft möchte man Ereignissen einen numerischen Wert zuordnen (Summe der Augenzahlen, Gewinn).

Def: Eine **diskrete Zufallszahlen** X ist eine Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf einen diskreten W-Raum (Ω, P)

Bem: X ist keine "Variable" im üblichen Sinne, sondern eine Funktion.

Wir können einen W-Raum auf den Werten (Bilderraum) von X definieren.

Satz Sei X diskreter zufallsvariable auf (Ω, P) .

$\Omega_X = \text{im}(X) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists w \in \Omega : X(w) = x\}$ $P_X(x) = P(X^{-1}(x)) = P(\{w \in \Omega \mid X(w) = x\})$ definiert eine W-funktion auf Ω_X .

Hier wichtig checke ob X richtig größer oder klein ist!!!

Beweis: $0 \leq P_X(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega_X$ bei def (hier photos checken!!?)

$\Omega = \bigcup_{x \in \Omega_X} X^{-1}(x)$, $\sigma_{x \in \Omega_X} P_X(x) = \Sigma_{x \in \Omega_X}$ <- Das ist einfach komplett falsch ich muss das noch mal über arbeiten??

Def: Das Wahrscheinlichkeitsmaß definiert auf $\Omega_X = \text{im}(X)$ mittels $P_X(x) = P(X = x)$ heißt die **Verteilung** von X .

Bsp: Bei einem Wurf eines fairen Würfels werden den Augenzahlen folgende Gewinne zugewiesen.

hier tabelle einfügen

definiert Zufallsvariable $X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \mathbb{R}$ $P(X = 1) = P(X^{-1}(1)) = P(\{w \in \Omega \mid X(w) = 1\}) = P(\{1, 2, 3\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\Omega_X = \{1, 2, 3\}$

hier nochmal tabelle :' (

(Verteilung)

Binomialverteilung:

mit Parametern $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$. ist definiert als $\Omega_X = \{0, 1, \dots, n\}$ durch die W-funktion $b(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Bernoulli-Experiment:

Versuch mit zwei Ausgängen $\{1, 0\}$ $P(1) = p$, $P(0) = q = 1 - p$.

Bernoulli-Prozess:

Die Folge von Wiederholungen desselben Bernoulli-Experiments. Ein Prozess mit n Versuchen kann mittels Ω^n beschrieben werden. $(0, 1, 0, 0, 1, 1, \dots)$

Die Wahrscheinlichkeit für k Erfolge ist gegeben durch $b(k, n, p)$.

Hypergeometrische Verteilung

parameter $K, n, r, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $0 \leq k \leq n \leq m, k \leq r$. Definiert durch $h(K, n, r, m) = \frac{\binom{r}{k} \binom{m-r}{n-k}}{\binom{m}{n}}$

Interpretation: Urne mit r roten Kugeln, $m-r$ blaue. Ziehen n Kugeln ohne zurückzulegen (auf einmal)

Ω = Jede Menge von n Kugeln

P = gleichverteilt

$h(k; n, r, m) = P$ was kommt hier rein????

Def: Der **Erwartungswert** einer diskreten Zufallsvariable X ist (Was für ein komisches E ist das denn bitt??) $E[X] = \sum_{x \in \Omega_X} p_X(x)X = \sum_{x \in \Omega_X} P(X = x) \cdot x$ und wird oft mit μ (wie Mikrosekunde) bezeichnet.

Bsp: Beim Würfeln einer geraden Augenzahl verliert man ????. Beim Würfeln einer ungeraden gewinnt man die Augenzahl in ???.

$\Omega_X = \{-3, 1, 3, 5\}$

hiernochtable

??? = ????

Satz: X diskreter Zufallsvariable über (Ω, P) . Dann $??? = \sum_{w \in \Omega} X(w)p(w)$

Beweis: $??? = \sum_{x \in \Omega_X} X p_X(x) = \sum_{x \in \Omega_X} x \cdot P(X^{-1}(x)) = \sum_{x \in \text{im}(X)} X$