Einleitung in die Stochastik

Datum: January 29, 2024

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Ziel: Mathematisches Modell, welches die intuitive Idee "Wahrscheinlichkeit"(="relative Häufigkeit") beschreibt.

Anwendung:

- Modellierung von Komplecxen Systemen (Aktienmarkt, Verkehr, Anfragen bei einem Server)
- Randomisierte Algorithmen (Las-Vegas Algo., Modelierungs Algo. Primzahlentest)
- Performance-Annalyse von Algorithmen (Durchschnittliche Laufzeit bei zufälligen Input)

Informelle Einführung:

Experiment: Würfeln mit zwei Würfeln A und b

Ausgang: Ein Paar von Augenzahlen je zwischen 1 und 6 z.B. A zeigt 1 und B zeigt 4 $\rightsquigarrow$ (1,4) Elementarereignis Ausgangsraum: $6 \cdot 6 = 36$ Möglichekeiten.

$\Omega = \{$
$(1,1),(1,2),(1,3),\cdots,(1,6)$
$(2,1),(2,2),(2,3),\cdots,(2,6)$
$\cdots\}$

Sinnvolle Modellierung:

(i) Eine Aussage des Experiments sollte genau einem $w \in \Omega$ entsprechen.

(ii) Ω sollte keine unmöglichen Ausgänge enthalten.

Wahrscheinlichkeiten

Zuweisungen: Zu jedem $w \in \Omega$ $p(w) \in [0,1]$ zuweisen sodass $\Sigma_{w\in\Omega} p(w) = 1$ Idee: Ein Elementarereignis muss auftreten. Hier: "faire Würfel" => gibt keinen Grund $p(1,3) > p(5,6)$ Also $p(1,1) = \cdots = p(6,6) = \frac{1}{36}$ Möchten umfassende Ereignisse beschreiben z.B. die Summe der Augenzahl ist 3. $A = \{(1,2),(2,1)\} \subseteq \Omega$ intuitiv: $P(A) = p(1,2) + p(2,1) = 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$

Formale Einführung (Kolmogorov, 1933)

Definition: Ein **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum** ist ein Paar (Ω, P) wobei: Ω eine endliche oder eine abzählbar unendliche Menge ist (**Elementarereignise**) und $P \cdot \mathcal{P} \to)\mathbb{R}$ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**, d.h (Wahrscheinlichkeitsverteilung)

(i) $P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{P}(A)$ Nichtnegativitätsgesetz

(ii) $P(\Omega) = 1$ (Normierung)

(iii) Für jede Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $A_i \in \mathcal{P}(\Omega)$, sodass $A_i \cap A_j = \varnothing \forall i \neq j$ gilt $P(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \Sigma_{i\in\mathbb{N}} P(A_i)$

Insbesondere: $A, B \in \mathcal{P}(\Omega), A \cap B \neq \varnothing\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Eigenschaften: (Ω, P) diskreter W-raum $A, B \subseteq \Omega$ (Ereignisse)

(a) $P(\varnothing) = 0$

Denn: $1 =_{(ii)} P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) =_{(iii)} P(\Omega) + P(\varnothing) =_{(ii)} 1 + P(\varnothing) => P(\varnothing) = 0$

(b) $P(A^c)(= \Omega / A) = 1 - P(A)$

Denn: $P(A) + P(A^c) =_{(iii)} P(A \cup A^c) =_{(ii)} P(\Omega) = 1$

(c) $A \subseteq B => P(A) \leq P(B)$

Denn: $P(B) = P(A \cup (B/A)) =_{(iii)} P(A) + P(B/A) \leq_{(i)} P(A)$

(d) $P(A \cup B) = P((B/A) \cup (A \cap B)) = P(B/A) + P(A \cap B)$

Denn: $P(B) = P((B/A) \cup (A \cap B)) = P(B/A) + P(A \cap B) => P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = P(A \cup (B/A) =_{(iii)}) P(A) + P(B/A) =_{(*)} P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(e) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ (folgt aus d + (i))

Gesetz disjunktiver Wahrscheinlichkeiten

(Ω, P) diskreter W-Raum, $A = \{w_1, w_2, \cdots\} \subseteq \Omega$
Ereignis $P(A) =_{(iii)} P(\{w_1\}) + P(\{w_2\} + \cdots) = \Sigma_{i \in \mathbb{N} P(\{w_i\})}$

Definition : Eine Funktion $p : \Omega \to [0,1] sodass \Sigma_{w \in \Omega} p(w) = 1$ heißt **Wahrscheinlichkeitsfunktion**.

Beispiel: Würfel mit zwei Würfeln $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2, p(w) = \frac{1}{36} \forall w \in \Omega$
$P(A) = \Sigma_{w \in A} p(w) = \Sigma_{w \in A} \frac{1}{36} = \frac{|A|}{36} \forall A \subseteq \Omega$

(i) $P(A) = \frac{|A|}{36} \leq 0$

(ii) $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{36} = 1$
$A \cap B = \varnothing P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{36} = \frac{|A| + |B|}{36} = \frac{|A|}{36} + \frac{|B|}{36} = P(A) + P(B)$

Beschreibe das Ereignis, dass mind. ein Würfel eine 1 zeigt $A = \{(1,1), \cdots, (1,6), (6,1) \cdots, (2,1)\}$
$P(A = \frac{11}{36})$

Definition : Ein **endlicher** diskreter W-raum (Ω, P) heißt **gleichverteilt**, falls $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \forall A \subseteq \Omega$ Wir können die gleichverteilung auf jeder endlcihen Menge Ω Definition iniert und erhalten ein W-Maß.

Beispiel:

(a) Würfer mit 2 roten Seiten und 4 blauen Seiten. $\Omega = \{rot, blau\}, p(rot) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, p(blau) = \frac{2}{3}$

(b) $\Omega = \{a, b, c, d\}$ (nicht gleichverteilt) $p : \Omega \to [0,1]$ mit $\Sigma_w \in \Omega p(w) = 1$ **hier tabelle einfügen a = 1/10, b= 1/5, c = 1/2, d = ?** $P(A) = \Sigma_{w \in A} p(w)$

(c) abzählbar unendlich $\Omega = \mathbb{N}, p(n) = (\frac{1}{2})^n$ $P(\Omega) = \Sigma_{n=1}^{unendlich} (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$ Viele Experimente bestehen aus der Wiederholung desselben grundlegenden Experiments.

Definition : Seien $\Omega_1, \cdots, \Omega_n$diskrete W-Räume mit W-funktionen $p_1, \cdots, p_m$. Dann ist der **Produktraum** von $\Omega_1, \cdots, \Omega_n$, das karteische Proukt $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n = \{(w_1, \cdots, w_n), w_i \in \Omega_i, 1 \leq i \leq n\}$ zusammen mit dem W-Maß Definition iniert durch die W-funktionen Definition iniert durch

$$p((w_1, \cdots, w_n)) = P_1(w_1) \cdot p_n(w_n) = \Pi_{i=1 p_i(w_i)}^n$$

Beispiel: Mit zwei Würfeln. Sei $\Omega' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $p' = \frac{1}{6} \forall a \in \Omega'$ der W-Raum der den Wurf von einem Würfel beschreibt, dann $\Omega = \Omega' \times \Omega'$
$p((a, b)) = p'(a) \cdot p'(b) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Satz: Der Produkraum $\Omega_1 \times \Omega \times \cdots \Omega_n$ ist ein diskreter W-Raum.

Beweis: $1 \geq P((w_1, \cdots, w_n)) = p_1(w_1) \cdots p_n(w_n) \geq 0$
$p : \Omega_1 \times \cdots \Omega_n \to [0,1]$

$$\Sigma_{(w_1, \cdots, w_n) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n} p((w_1, \cdots, w_n))$$
$$= \Sigma_{w_1 \in \Omega_1} \Sigma_{w_2 \in \Omega_2} \cdots \Sigma_{w_n \in \Omega_n} p_1(w_1 \cdots p_n(w_n))$$
$$= (\Sigma_{w_1 \in \Omega_1} p_1(w_1))(\Sigma_{w_2 \in \Omega_2} p2(w_2)) \cdots (\Sigma_{w_n \in \Omega_n} p_n(w_n))$$