Universität Heidelberg
Institut für Informatik
Priv.-Doz. Dr. Wolfgang Merkle

24. November 2023

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für die Informatik 1
Blatt 6

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Eine zweistellige Funktion $*$, in Infixnotation als Operator geschrieben, ist assoziativ, wenn für jede mögliche Wahl der Argumente x, y und z das folgende ASSOZIATIVGESETZ gilt

$$((x * y) * z) \ = \ (x * (y * z)).$$

Zeigen Sie, dass a) die Konjunktion $\wedge$, b) die Disjunktion $\vee$ und c) die exklusive Disjunktion $\oplus$ assoziativ sind, indem sie für die drei Operatoren jeweils die Wahrheitstafeln der im Assoziativgesetz vorkommenden Teilausdrücke angeben.

Hinweis: Es lässt sich zeigen, dass für assoziative Operatoren die Klammerung auch bei komplizierteren Ausdrücken als denen im Assoziativgesetz irrelevant für den Wert des Ausdrucks ist und somit weggelassen werden kann. Insbesondere lässt sich zeigen, dass eine Konjunktion $x_1 \wedge \cdots \wedge x_t$ genau dann wahr ist, wenn alle x_i wahr sind, also den Wert 1 haben, und eine Disjunktion $x_1 \vee \cdots \vee x_t$ genau dann wahr ist, wenn mindestens ein x_i den Wert 1 hat.

Die exklusive Disjunktion wird auch als Paritätsfunktion bezeichnet. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $x_1 \oplus \cdots \oplus x_t$ genau dann wahr ist, wenn von den t auftretenden Wahrheitswerten eine ungerade Anzahl den Wert 1 hat.

Die Äquivalenz $\leftrightarrow$ ist ebenfalls assoziativ. Zum Beispiel ist der Ausdruck $x_1 \leftrightarrow x_2 \leftrightarrow x_3$ wahr, falls x_1, x_2 und x_3 alle drei wahr sind, aber auch, falls x_1 wahr und x_2 und x_3 falsch sind, die Klammerung spielt dabei keine Rolle. Aussagen der Form $x_1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x_t$ stehen in Beweisen allerdings oft für eine Äquivalenzkette, das heißt, für die Folge der einzelnen Äquivalenzen $x_1 \Leftrightarrow x_2$, $x_2 \Leftrightarrow x_3$, $\ldots$, $x_{t-1} \Leftrightarrow x_t$. Für eine solche Äquivalenzkettte ist klar, dass x_1 genau dann wahr ist, wenn x_t wahr ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

a) Zeigen Sie durch Induktion über n, dass für alle n in $\mathbb{N}$ folgende Summenformel gilt

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i \ = \ 2^{n+1} - 1. \tag{1}$$

b) Beweisen Sie durch Induktion über n, dass sich die Summenformel (1) wie folgt verallgemeinern lässt: für alle natürlichen Zahlen $d \geq 2$ und für alle n in $\mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} (d-1)d^i \ = \ d^{n+1} - 1. \tag{2}$$

Hinweis: Führen Sie den Beweis in Teil b für einen beliebigen, aber festen Wert $d \geq 2$. Aus Summenformel (2) folgt Summenformel (1) als Spezialfall für $d = 2$, Sie können also auch nur die Summenformel in Teil b beweisen, die Summenformel aus Teil a folgt dann daraus.

Die Summenformel (2) besagt für Darstellungen von natürlichen Zahlen zur Basis d, dass die Darstellungen in folgendem Sinne fortlaufend sind: der Nachfolger der größte Zahl, die sich mit $n + 1$ Ziffern darstellen lässt, das ist die Zahl auf der linken Seite von (2), ist gleich d^{n+1}, das ist die kleinste Zahl, die sich mit $n + 2$ Stellen darstellen lässt. Beispielsweise ist für $d = 10$ und $n = 2$ die Zahl 1000_{10} der Nachfolger der Zahl 999_{10}.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Welche der folgenden Strukturen sind Gruppen? Beweisen Sie Ihre Antwort jeweils kurz in drei bis vier Sätzen. Im Folgenden bezeichnen $+$ und $\cdot$ die Einschränkung der üblichen Addition beziehungsweise Multiplikation reeller Zahlen auf die jeweils betrachtete Menge.

a) $(\mathbb{N}, +)$,

b) $(\mathbb{Z}, \cdot)$,

c) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,

d) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$,

e) $(d\mathbb{Z}, +)$ mit $d\mathbb{Z} = \{dt \colon t \in \mathbb{Z}\}$ für eine natürliche Zahl d ungleich 0,

f) $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ mit $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \colon q > 0\}$.

Hinweis: Falls eine Struktur keine Gruppe ist, genügt es ein Gegenbeispiel anzugeben das zeigt, dass eine der Bedingungen für eine Gruppe verletzt ist.

Für die hier betrachteten Strukturen kann im Fall einer Gruppe dies jeweils durch Anwendung des Untergruppenkriteriums aus der Vorlesung bewiesen werden. Sie dürfen dabei verwenden, dass $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ Gruppen sind.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

In der Vorlesung wurde das folgende Untergruppenkriterium bewiesen.

Für eine Gruppe $(G, +)$ ist eine Teilmenge U von G genau dann eine Untergruppe von G, wenn U nichtleer und unter der Verknüpfung $+$ abgeschlossen ist und zu einem Element auch immer dessen inverses Element in G enthält, das heißt, falls gilt

$$\text{(i)}\ \ U \neq \emptyset, \qquad \text{(ii)}\ \ \forall u, v \in U\ (u + v \in U) \qquad \text{und} \qquad \text{(iii)}\ \ \forall u \in U\ (-u \in U).$$

Betrachten Sie folgendes weitere Untergruppenkriterium: eine Teilmenge U von G ist genau dann eine Untergruppe der Gruppe $(G, +)$, wenn U das neutrale Element 0 von G enthält und zu zwei Elementen auch immer deren Differenz, das heißt, falls gilt

$$\text{(a)}\ \ 0 \in U \qquad \text{und} \qquad \text{(b)}\ \ \forall u, v \in U (u - v \in U).$$

Beweisen Sie, dass das zweite Untergruppenkriterien korrekt ist, indem Sie zeigen, dass in einer Gruppe $(G, +)$ eine Teilmenge U von G die Bedingungen (i), (ii) und (iii) genau dann erfüllt, wenn U die Bedingungen (a) und (b) erfüllt.

Hinweis: In dieser Aufgabe wird die additive Schreibweise für Gruppen verwendet: die Gruppenoperation wird als $+$ geschrieben, das neutrale Element als 0 und das inverse Element zu a als $-a$. Der Ausdruck $u - v$ ist eine abkürzende Schreibweise für $u + (-v)$.

Abgabe: Bis Freitag, den 1. Dezember 2023, 20:00 Uhr.

Die Übungsblätter müssen in Zweiergruppen bearbeitet und abgegeben werden.

Biete laden Sie Ihre Lösung bis zum Abgabetermin als eine PDF-Datei in Moodle hoch.

Die Übungsblattpartner sind in Moodle nicht hinterlegt. Bitte nennen Sie auf Ihrer Lösung beide Namen. Stellen Sie sicher, dass pro Paar höchstens eine Datei hochgeladen wird, wer von beiden dies tut, können Sie sich aussuchen.