Universität Heidelberg
Institut für Informatik
Priv.-Doz. Dr. Wolfgang Merkle

27. Oktober 2023

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für die Informatik 1

Blatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Endlich viele Mengen $A_1, \dots, A_t$ oder unendlich viele Mengen $A_1, A_2, \dots$ werden als PAARWEISE DISJUNKT bezeichnet, falls je zwei verschiedene dieser Mengen disjunkt sind, das heißt, es gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle Indizes i und j mit $i \neq j$. Zum Beispiel sind die Mengen in einer Zerlegung paarweise disjunkt.

a) Geben Sie drei endliche nichtleere Teilmengen A, B und C der natürlichen Zahlen an, die nicht paarweise disjunkt sind und deren Schnitt $A \cap B \cap C$ leer ist.

b) Geben Sie Teilmengen $A_0, A_1, \dots$ der natürlichen Zahlen an, so dass der Schnitt von je zwei dieser Mengen alle bis auf endlich viele natürlichen Zahlen enthält, und der Schnitt $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ über alle Mengen leer ist.

c) Zeigen Sie, dass der Schnitt von zwei oder mehr paarweise disjunkten Mengen immer leer ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Zu einer Folge $X_1, X_2, \dots$ von Mengen ist deren LIMES INFERIOR und LIMES SUPERIOR definiert als

$$\liminf_{i \to \infty} X_i = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{i=m}^{\infty} X_i \quad \text{beziehungsweise} \quad \limsup_{i \to \infty} X_i = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=m}^{\infty} X_i.$$

Bestimmen Sie für die folgenden Folgen von Menge jeweils deren Limes inferior und Limes superior.

a) Betrachten Sie die Folge $A_1, A_2, \dots$ mit $A_i = \{0, 2, \dots, 2i\}$.

b) Ein Primteiler einer Zahl ist ein Teiler dieser Zahl, der prim ist. Es sei P die Menge aller Primzahlen. Betrachten Sie die Folge $B_1, B_2, \dots$ mit $B_i = \{t \in P \colon t \text{ teilt i}\}$, das heißt, die Menge B_i enthält genau die Primteiler von i.

c) Betrachten Sie die Folge $C_1, C_2, \dots$ mit $C_i = \mathbb{N} \setminus \{i, i+1, \dots, i^3\}$

Hinweis: Bestimmen Sie jeweils zunächst die Mengen, die den Mengen $\bigcap_{i=m}^{\infty} X_i$ und $\bigcup_{i=m}^{\infty} X_i$ entsprechen. Erläutern Sie Ihre Lösung kurz.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge von Mengen mit Limes superior

$$A_{\text{sup}} \;=\; \limsup_{i\to\infty} A_i \;=\; \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=m}^{\infty} A_i.$$

Die Mengen A_i seien alle Teilmengen einer Menge A und es sei

$$B \;=\; \{x \in A\colon \text{es gibt unendlich viele Indizes } i \text{ mit } x \in A_i\},$$

das heißt, B ist die Menge aller x in A, so dass es beliebig große Indizes i mit $x \in A_i$ gibt. Beweisen Sie, dass $A_{\text{sup}} = B$ gilt.

Hinweis: Im Vorlesungsskript finden Sie einen ähnlichen Beweis für eine Aussage über den Limes inferior.

Abgabe: Bis Freitag, den 3. November 2023, 20.00 Uhr.

Die Übungsblätter müssen in Zweiergruppen bearbeitet und abgegeben werden.

Biete laden Sie Ihre Lösung bis zum Abgabetermin als eine PDF-Datei in Moodle hoch.

Die Übungsblattpartner sind in Moodle nicht hinterlegt. Bitte nennen Sie auf Ihrer Lösung beide Namen. Stellen Sie sicher, dass pro Paar höchstens eine Datei hochgeladen wird, wer von beiden dies tut, können Sie sich aussuchen.

Die Übungsblattpartner sollen aus derselben Übungsgruppe kommen und müssen in Übungsgruppen bei derselben Person sein. Übungsblattpartner können in den Tutorien vermittelt werden.