Universität Heidelberg
Institut für Informatik
Priv.-Doz. Dr. Wolfgang Merkle

17. November 2023

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für die Informatik 1

Blatt 5

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Eine dyadische rationale Zahl ist eine rationale Zahl, die als Bruch mit einer Zweierpotenz als Nenner dargestellt werden kann, das heißt, in der Form $\frac{p}{2^t}$ für eine ganze Zahl p und eine natürliche Zahl t. Die Binärdarstellung einer solchen dyadischen rationalen Zahl hat höchstens t Nachkommastellen, zum Beispiel ist die Binärdarstellung von $\frac{1}{8}$ gleich $0,001_2$, von $\frac{4}{8}$ gleich $0,1_2$ und von $\frac{49}{32}$ gleich $1,10001_2$.

Wir betrachten eine Intervallschachtelung $I_1, I_2, \ldots$, welche die reelle Zahl $\sqrt{2}$ einschließt, so dass das Intervall I_t die Form

$$I_t \;=\; [a_t, b_t] \quad \text{für dyadische rationale Zahlen der Form} \quad a_t = \frac{u_t}{2^{t-1}} \;\text{ und }\; b_t = \frac{v_t}{2^{t-1}} \quad \text{hat.}$$

Es ist $u_1 = 1$ und $v_1 = 2$ und für $t = 1, 2, \ldots$ sei $s_t = u_t + v_t$, $m_t = \frac{s_t}{2^t} = \frac{1}{2}\frac{u_t+v_t}{2^{t-1}}$ und weiter

$$\text{im Fall } m_t^2 \geq 2: \quad u_{t+1} = 2u_t \text{ und } v_{t+1} = s_t, \quad \text{das heißt, } a_{t+1} = a_t \text{ und } b_{t+1} = m_t,$$

$$\text{im Fall } m_t^2 < 2: \quad u_{t+1} = s_t \text{ und } v_{t+1} = 2v_t, \quad \text{das heißt, } a_{t+1} = m_t \text{ und } b_{t+1} = b_t.$$

Führen Sie einige Iteration des induktiven Verfahrens zur Bestimmung der Intervalle I_t durch. Bestimmen Sie dabei die Werte u_t, v_t und s_t von Hand oder mit einem Taschenrechner und geben Sie die Werte a_t, b_t und m_t als dyadische rationale Zahlen und in Binärdarstellung an.

Hinweis: Der Wert m_t ist das arithmetische Mittel der Werte a_t und b_t, also gleich der Mitte des Intervalls I_t. Die Intervallschachtelung entspricht somit einer Halbierungssuche, bei der das Intervall I_{t+1} gleich der linken oder rechten „Hälfte“ des vorangehenden Intervalls I_t gesetzt wird, in Abhängigkeit davon, ob das Qudrat der Intervallmitte m_t von I_t größer oder kleiner als 2 ist.

Das Verfahren ist einfach, konvergiert aber auch relativ langsam. Sie können die Approximationsgüte Ihrer berechneten Intervalle überprüfen, indem Sie die Binärdarstellungen der Intervallgrenzen a_t und b_t mit der Binärdarstellung $1,0110101000001001111001\ldots$ von $\sqrt{2}$ vergleichen. Die Binärdarstellung ist die Folge mit Nummer A004539 in der On-line encyplodeia of integer sequences, siehe `https://oeis.org/A004539`.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

a) Die zweistellige Relation miteinander befreundet zu sein ist irreflexiv und symmetrisch.

Zeigen Sie, dass es in einer Gruppe von zwei oder mehr Personen immer zwei Personen gibt, die beide mit derselben Anzahl von Personen in der Gruppe befreundet sind.

b) Eine Färbung der euklidische Ebene mit zwei Farben ist formal eine Funktion von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in die Menge $\{0, 1\}$. Der besseren Anschauung wegen sei 0 mit der Farbe rot und 1 mit der Farbe blau assoziiert.

Zeigen Sie, dass es zu jeder solchen Färbung und zu jeder reellen Zahl a zwei Punkte mit Abstand a zueinander gibt, die mit derselben Farbe gefärbt sind.

Hinweise: In Teil a kann die Relation miteinander befreundet zu sein als Kantenrelation eines ungerichteten Graphen dargestellt werden. Mache Sie sich zunächst klar, dass in einer Gruppe von n Personen jede Personen mit höchstens $n-1$ Personen befreundet sein kann, und es in derselben Gruppe nicht zwei Personen geben kann, die mit 0 beziehungsweise mit $n-1$ Personen befreundet sind. Teil b hat eine einfache Lösung unter Verwendung von gleichseitigen Dreiecken.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (8 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, das ist das kartesische Produkt der Menge der natürlichen Zahlen mit sich selbst, abzählbar ist.

b) Es sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und $I = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R}\colon 0 \leq x \leq 1\}$ sei das Einheitsintervall. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow I$ ist abschnittsweise wie folgt definiert

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4x}, & \text{falls } x \leq -1, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & \text{falls } -1 < x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{4x}, & \text{falls } 1 < x. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f injektiv ist und schließen Sie daraus, dass die Menge der reellen Zahlen und das Einheitsintervall gleichmächtig sind.

Hinweise: Es genügt, wenn Sie in Teil a eine Folge $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ angeben, so dass jedes Paar in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ genau ein mal in der Folge vorkommt. Erklären Sie Ihre Konstruktion in zwei bis drei Sätzen.

Die Definition von f in Teil b hat drei Fälle, in denen f jeweils auf einer Teilmenge der reellen Zahlen definiert wird, diese drei Teilmengen bilden eine Zerlegung von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung von f auf eine dieser Teilmengen jeweils injektiv ist und dass die Bilder der drei Teilmengen unter f paarweise disjunkt sind. Beachten Sie, dass die Abbildung f nicht surjektiv ist.

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe, nicht abzugeben)

Für eine Menge X sei $X(x)$ gleich dem Wahrheitswert der Aussage $x \in X$, es gilt also

$$X(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{fallls } x \in X, \\ 0 & \text{falls } x \notin X. \end{cases}$$

Mit dieser Schreibweise könnnen mengentheoretische Operationen und Relationen für Teilmengen A und B einer Menge C mit aussagenlogische Funktionen äquivalent dargestellt werden. Zum Beispiel gilt für den Durchschnitt $\cap$ und die Gleichheit von Mengen Folgendes.

(i) für alle x in C gilt $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$.

(ii) $A = B$ gilt genau dann, wenn für alle x in C gilt $A(x) \leftrightarrow B(x)$.

a) Geben Sie für die mengentheoretischen Operationen Vereinigung $\cup$ und Differenz $\setminus$ äquivalente Darstellungen analog zu (i) an.

b) Geben Sie für den mengentheoretische Operation symmetrische Differenz $\triangle$ zwei verschiedene äquivalente Darstellungen wie in (i) an, einmal indem die symmetrische Differenz gemäß ihrer üblichen Definition auf die mengentheoretische Differenz zurückgeführt wird und einmal direkt mit einer geeigneten aussagenlogischen Funktion.

c) Geben Sie für die Teilmengenrelation $\subseteq$ eine äquivalente Darstellung analog zu (ii) an.

d) Geben Sie für die strikte Teilmengenrelation $\subset$ eine äquivalente Darstellung analog zu (ii) an.

Abgabe: Bis Freitag, den 24. November 2023, 20.00 Uhr.

Die Übungsblätter müssen in Zweiergruppen bearbeitet und abgegeben werden.

Biete laden Sie Ihre Lösung bis zum Abgabetermin als eine PDF-Datei in Moodle hoch.

Die Übungsblattpartner sind in Moodle nicht hinterlegt. Bitte nennen Sie auf Ihrer Lösung beide Namen. Stellen Sie sicher, dass pro Paar höchstens eine Datei hochgeladen wird, wer von beiden dies tut, können Sie sich aussuchen.