Universität Heidelberg
Institut für Informatik
Priv.-Doz. Dr. Wolfgang Merkle

10. November 2023

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für die Informatik 1

Blatt 4

Für eine Funktion $f\colon A \to B$ wurden in der Vorlesung das Bild $f(A_0)$ einer Teilmenge A_0 von A und das Urbild $f^{-1}(B_0)$ einer Teilmenge B_0 von B wie folgt definiert

$$f(A_0) = \{f(x) \in B\colon x \in A_0\} \qquad \text{und} \qquad f^{-1}(B_0) = \{x \in A\colon f(x) \in B_0\}.$$

Gemäß dieser Definition gilt insbesondere $f(\emptyset) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Die Bildmenge von f ist gleich $f(A)$.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Es sei $Q = \{n^2\colon n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$ die Menge der Quadratzahlen, genauer die Menge der Quadrate natürlicher Zahlen, und für eine natürliche Zahl n sei $q(n)$ die kleinste Quadratzahl größer oder gleich n, das heißt, es gilt $q(n) = \min\{m \in Q\colon n \leq m\}$. Weiter seien die folgende Funktionen definiert

$$f_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n^2, \qquad f_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto q(n), \qquad f_3\colon \mathbb{N} \to Q,\ n \mapsto n^2, \qquad f_4\colon \mathbb{N} \to Q,\ n \mapsto q(n).$$

a) Bestimmen Sie die Menge $f_1(\{3, 4, 5, 6\})$.

b) Bestimmen Sie die Menge $f_2(\{3, 4, 5, 6\})$.

c) Bestimmen Sie die Menge $f_1^{-1}(\{30, \ldots, 50\})$.

d) Bestimmen Sie die Menge $f_2^{-1}(\{30, \ldots, 50\})$.

e) Geben Sie für die Funktionen f_1 bis f_4 jeweils an, ob diese injektiv beziehungsweise surjektiv sind.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

a) Die Funktion $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei definiert wie in Aufgabe 1. Geben Sie endliche, nichtleere Teilmengen A_0, A_0', B_0 und B_0' der Menge der natürlichen Zahlen an, für die gilt

(i) $A_0 \neq q^{-1}(q(A_0))$, (ii) $A_0' = q^{-1}(q(A_0'))$, (iii) $q(q^{-1}(B_0)) \neq B_0$, (iv) $q(q^{-1}(B_0')) = B_0'$.

Es sei $f\colon A \to B$ eine Funktion. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

b) Für alle Teilmengen A_0 von A gilt $A_0 \subseteq f^{-1}(f(A_0))$.

c) Falls f injektiv ist, gilt $A_0 = f^{-1}(f(A_0))$ für alle Teilmengen A_0 von A.

d) (Präsenzaufgabe, nicht abzugeben) Für alle Teilmengen B_0 von B gilt $f(f^{-1}(B_0)) \subseteq B_0$.

e) (Präsenzaufgabe, nicht abzugeben) Falls f surjektiv ist, gilt $f(f^{-1}(B_0)) = B_0$ für alle Teilmengen B_0 von B.

Hinweis: Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn jede der beiden Mengen in der jeweils anderen Menge enthalten ist. Für die in Teil c zu zeigende Gleichheit wurde die Inklusion in die eine Richtung bereits in Teil b gezeigt. Es genügt also unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass die Funktion f injektiv ist, die Inklusion in die anderen Richtung zu zeigen. Ein ähnlicher Zusammenhang gilt für die Teile d und e.

;

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Auf einer Menge A sei eine strikte Ordnung $<$ definiert. Zeigen Sie, dass jede streng monoton wachsende Funktion $f\colon A \to A$ injektiv ist.

b) Die Funktion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei monoton fallend. Zeigen Sie, dass g fast überall konstant ist, das heißt, es gibt natürliche Zahlen n_0 und c, so dass $g(n) = c$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Hinweis zu Teil b: Monoton fallend bezieht sich auf die üblichen Relationen $<$ und $\leq$ auf den natürlichen Zahlen, die Schreibweise $n \geq n_0$ steht für $n_0 \leq n$. Sie dürfen benutzen, dass jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen ein kleinstes Element hat. Argumentieren Sie mit dem kleinsten Element in der Bildmenge $g(\mathbb{N})$ von g.

Abgabe: Bis Freitag, den 17. November 2023, 20.00 Uhr.

Die Übungsblätter müssen in Zweiergruppen bearbeitet und abgegeben werden.

Biete laden Sie Ihre Lösung bis zum Abgabetermin als eine PDF-Datei in Moodle hoch.

Die Übungsblattpartner sind in Moodle nicht hinterlegt. Bitte nennen Sie auf Ihrer Lösung beide Namen. Stellen Sie sicher, dass pro Paar höchstens eine Datei hochgeladen wird, wer von beiden dies tut, können Sie sich aussuchen.