Universität Heidelberg
Institut für Informatik
Priv.-Doz. Dr. Wolfgang Merkle

3. November 2023

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für die Informatik 1
Blatt 3

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Eine reflexive und transitive Relation ist eine Äquivalenzrelation, wenn sie zusätzlich symmetrisch ist und ist eine partielle Ordnung, wenn sie zusätzlich antisymmetrisch ist.

Kann eine reflexive und transitive Relation sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch sein? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei $G = \{0, 2, 4, \ldots\}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Im Folgenden ist jeweils eine Menge A definiert und eine Relation $\leq_{\mathrm{a}}$, $\leq_{\mathrm{b}}$, $\leq_{\mathrm{c}}$ beziehungsweise $\leq_{\mathrm{d}}$. Geben Sie jeweils an, ob die Relation auf der Menge A eine partielle Präordnung, eine Präordnung, eine partielle Ordnung oder eine Ordnung ist. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils in zwei bis drei Sätzen.

a) $A = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \ldots\}$ und $X \leq_{\mathrm{a}} Y$ gilt genau dann, wenn $X \subseteq Y$ gilt.

b) $A = \mathrm{Pot}(\mathbb{N})$ und $X \leq_{\mathrm{b}} Y$ gilt genau dann, wenn $X \subseteq Y$ gilt.

c) $A = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \ldots\}$ und $X \leq_{\mathrm{c}} Y$ gilt genau dann, wenn $X \cap G \subseteq Y \cap G$ gilt.

d) $A = \mathrm{Pot}(\mathbb{N})$ und $X \leq_{\mathrm{d}} Y$ gilt genau dann, wenn $X \cap G \subseteq Y \cap G$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ein GERICHTETER GRAPH ist ein Paar (V, E) aus einer Menge V von KNOTEN und einer Menge $E \subseteq V \times V$ von KANTEN, wobei die Menge E keine SCHLEIFEN, das sind Kanten der Form (x, x), enthält. Durch gerichtete Graphen können Netzwerken dargestellt werden, die Knoten stehen dabei für Rechner, etc. und eine Kante (u, v) steht für eine gerichtete Verbindung vom Knoten u zum Knoten v, zum Beispiel eine nur in eine Richtung nutzbare Datenleitung. Formal ist ein gerichteter Graph (V, E) somit nichts anderes als ein Paar aus einer Menge V und einer zweistelligen irreflexiven Relation E auf V, die als KANTENRELATION bezeichnet wird. Im Graphen (V, E) GIBT ES EINE KANTE VON u NACH v, falls uEv gilt, dies wird auch als $u \to_E v$ geschrieben oder als $u \to v$, falls die Kantenrelation klar ist.

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein KANTENZUG in G ist eine Folge $v_1, \ldots, v_t$ von Knoten, so dass es für $i = 1, \ldots, t-1$ eine Kante von v_i zu v_{i+1} gibt, also das Paar (v_i, v_{i+1}) in E ist. Ein solcher Kantenzug hat Länge $t-1$, ein einzelner Knoten bildet einen Kantenzug der Länge 0. Ein Knoten v ist von einem Knoten u aus erreichbar, wenn es einen Kantenzug gibt, dessen erster Knoten gleich u und dessen letzter Knoten gleich v ist, in diesem Fall schreiben wir $u \curvearrowright_E v$ oder $u \curvearrowright v$, falls die Kantenrelation E klar ist. Nach Definition ist jeder Knoten von sich selbst aus erreichbar, $v \curvearrowright v$ gilt für alle v in V.

a) Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Zeigen Sie, dass die Erreichbarkeitsrelation $\curvearrowright$ reflexiv und transitiv und somit eine partielle Präordnung auf der Knotenmenge V ist.

b) Nach einem Satz der Vorlesung bilden die Äquivalenzklassen einer partiellen Präordnung auf einer Menge eine Zerlegung dieser Menge. Die Äquivalenzklassen der Erreichbarkeitsrelation eines gerichteten Graphen bilden also eine Zerlegung der Knotenmenge des Graphen. Die Äquivalenzklassen werden als KOMPONENTEN DES STARKEN ZUSAMMENHANGS des Graphen bezeichnet. Beschreiben Sie in zwei bis drei Sätzen anschaulich, worin der starke Zusammenhang in einer solchen Komponente besteht und ob und in welcher Weise verschiedene Komponenten miteinander verbunden sein können.

c) (Präsenzaufgabe, nicht abzugeben) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine reflexive und transitive Relation eine partielle Ordnung auf ihren Äquivalenzklassen induziert. Insbesondere ist die induzierte partielle Ordnung wohldefiniert, hängt also nicht von den gewählten Vertretern der betrachteten Äquivalenzklassen ab. Was bedeutet dies im Spezialfall der Erreichbarkeitsrelation eines gerichteten Graphen?

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Als nächstes betrachten wir UNGERICHTETE GRAPHEN. Diese unterscheiden sich von gerichteten Graphen anschaulich gesprochen dadurch, dass die Kanten keine Richtung haben, also nicht zwischen einer Kante (u, v) und der Kante (v, u) unterschieden wird. Formal definieren wir einen ungerichteten Graphen als einen gerichteten Graphen, dessen Kantenrelation E symmetrisch ist. Die in Aufgabe 3 definierten Begriffe und Schreibweisen übertragen sich damit auf ungerichtete Graphen, insbesondere ist ein Knoten v von einem Knoten u aus erreichbar, kurz: $u \curvearrowright v$, wenn es einen Kantenzug mit erstem Knoten u und letztem Knoten v gibt. Auch das Ergebnis aus Aufgabe 3, dass die Erreichbarkeitsrelation eines gerichteten Graphen eine partielle Ordnung auf ihren Äquivalenzklassen induziert, überträgt sich auf ungerichtete Graphen.

a) Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Zeigen Sie, dass die Erreichbarkeitsrelation $\curvearrowright$ eine Äquivalenzrelation auf der Knotenmenge V ist.

b) Die Äquivalenzklassen der Erreichbarkeitsrelation eines ungerichteten Graphen werden als ZUSAMMENHANGSKOMPONENTEN des Graphen bezeichnet. Beschreiben Sie in zwei bis drei Sätzen anschaulich, worin der Zusammenhang in einer solchen Komponente besteht und in welcher Hinsicht die verschiedenen Zusammenhangskomponenten voneinander getrennt sind.

Hinweis: die Knotenmenge eines gerichteten oder ungerichteten Graphen kann endlich oder unendlich sein. In der Literatur wird die Betrachtung oft auf endliche Graphen beschränkt, für die Aufgaben hier spielt es keine Rolle, ob die betrachteten Knotenmengen als endlich vorausgesetzt werden oder nicht.

Werden ungerichtete Graphen wie hier durch symmetrische Kantenrelationen dargestellt, werden üblicherweise Kanten der Form (u, v) und (v, u) miteinander IDENTIFIZIERT. Das bedeutet dann zum Beispiel, dass beide Kanten nur als eine Kante gezählt werden oder dass, falls in einem Algorithmus Kanten entfernt oder hinzugefügt werden, dies immer für beide Kanten zusammen geschieht. Entsprechend stellt das Paar (V, E) aus Knotenmenge $V = \{u, v\}$ und Kantenmenge $E = \{(u, v), (v, u)\}$ sowohl einen gerichteten Graphen dar mit je einer Kante pro Richtung zwischen den Knoten u und v als auch einen ungerichteten Graphen mit einer Kante zwischen u und v. Durch diese Identifizierung unterscheiden sich gerichtete und ungerichtete Graphen, so dass letztere nicht als Spezialfall von gerichteten Graphen angesehen werden, auch wenn sie formal als solcher definiert sind.

Alternativ könnte die Kantenrelation eines ungerichteten Graphen auch als Menge von Paarmengen der Form $\{u, v\}$ dargestellt werden, diese Darstellung ist aber nicht sehr verbreitet und entspricht auch nicht unserer Darstellung von Relationen als Mengen von Tupeln.

Aufgabe 5 (Präsenzaufgabe, nicht abzugeben)

Ein WEG, auch: PFAD, in einem gerichteten oder ungerichteten Graphen ist ein Kantenzug, in dem jeder Knoten des Graphen höchstens einmal vorkommt, formal: ein Kantenzug $v_1, \ldots, v_t$ ist ein Weg, falls die Knoten $v_1, \ldots, v_t$ paarweise verschieden sind, also $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ gilt.

Zeigen Sie für gerichtete und ungerichtete Graphen jeweils, dass sich der Begriff erreichbar nicht ändert, wenn in seiner Definition Kantenzug durch Weg ersetzt wird.

Hinweis: Dies lässt sich auch so formulieren, dass es in einem Graphen für je zwei Knoten u und v genau dann einen Kantenzug von u nach v gibt, wenn es einen Weg von u nach v gibt.

Abgabe: Bis Freitag, den 10. November 2023, 20.00 Uhr.

Die Übungsblätter müssen in Zweiergruppen bearbeitet und abgegeben werden.

Biete laden Sie Ihre Lösung bis zum Abgabetermin als eine PDF-Datei in Moodle hoch.

Die Übungsblattpartner sind in Moodle nicht hinterlegt. Bitte nennen Sie auf Ihrer Lösung beide Namen. Stellen Sie sicher, dass pro Paar höchstens eine Datei hochgeladen wird, wer von beiden dies tut, können Sie sich aussuchen.

Die Übungsblattpartner sollen aus derselben Übungsgruppe kommen und müssen in Übungsgruppen bei derselben Person sein. Übungsblattpartner können in den Tutorien vermittelt werden.