BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Lundi 7 juin 2021

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le candidat traite **4 exercices :** les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1, commun à tous les candidats (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x}.$$

On donne l'expression de la dérivée seconde f''de f, définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f''(x) = \frac{2\,e^{2x}\,(2x^2-2x+1)}{x^3}.$$

1. La fonction f', dérivée de f, est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

a. $f'(x) = 2e^{2x}$

b. $f'(x) = \frac{e^{2x}(x-1)}{x^2}$

c. $f'(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$

d. $f'(x) = \frac{e^{2x}(1+2x)}{x^2}$

2. La fonction f :

a. est décroissante sur $]0\,;+\infty[$

b. est monotone sur $]0\,;+\infty[$

c. admet un minimum en $\frac{1}{2}$

d. admet un maximum en $\frac{1}{2}$

3. La fonction f admet pour limite en $+\infty$:

a. $+\infty$

b. 0

c. 1

d. e^{2x}

4. La fonction f :

a. est concave sur $]0\,;+\infty[$

b. est convexe sur $]0\,;+\infty[$

c. est concave sur $]0\,;\frac{1}{2}]$

d. est représentée par une courbe admettant un point d'inflexion

Exercice 2, commun à tous les candidats (5 points)

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que $5\ \%$ des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.

Un ingénieur a mis au point un test à appliquer aux pièces. Ce test a deux résultats possibles : « positif » ou bien « négatif ».

On applique ce test à une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne.

On note $p(E)$ la probabilité d'un événement E.

On considère les événements suivants :

- D : « la pièce est défectueuse » ;
- T : « la pièce présente un test positif » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de D et T.

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- La probabilité qu'une pièce présente un test positif sachant qu'elle défectueuse est égale à $0{,}98$;
- La probabilité qu'une pièce présente un test négatif sachant qu'elle n'est pas défectueuse est égale à $0{,}97$.

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE I

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. **a.** Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne soit défectueuse et présente un test positif.
   b. Démontrer que : $p(T) = 0{,}0775$.
3. On appelle ***valeur prédictive positive*** du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que le test est positif. On considère que pour être efficace, un test doit avoir une valeur prédictive positive supérieure à $0{,}95$.
   Calculer la valeur prédictive positive de ce test et préciser s'il est efficace.

PARTIE II

On choisit un échantillon de 20 pièces dans la production de la chaîne, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.
On rappelle que : $p(D) = 0{,}05$.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que cet échantillon contienne au moins une pièce défectueuse. On donnera un résultat arrondi au centième.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 3, commun à tous les candidats (6 points)

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés.

Elle sort les gâteaux du congélateur à -19 °C et les apporte sur la terrasse où la température ambiante est de 25 °C.

Au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de 1,3 °C.

I - Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante, c'est-à-dire que l'augmentation de la température des gâteaux est la même minute après minute.

Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur.

Ce modèle semble-t-il pertinent ?

II - Second modèle

On note T_n la température des gâteaux, en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur ; ainsi $T_0 = -19$.

On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante :

pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25)$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} = 0{,}94T_n + 1{,}5$.
2. Calculer T_1 et T_2. On donnera des valeurs arrondies au dixième.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n \leq 25$.
   En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible ?
4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n).
5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.
6. On pose, pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.
   a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_0.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = -44 \times 0{,}94^n + 25$.
   c. En déduire la limite de la suite (T_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.
7. **a.** Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur. Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.

   b. Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10 °C. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.

c. Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geq 10$.

```
def seuil():
    n=0
    T=......
    while T...... :
        T=......
        n=n+1
    return n
```

Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

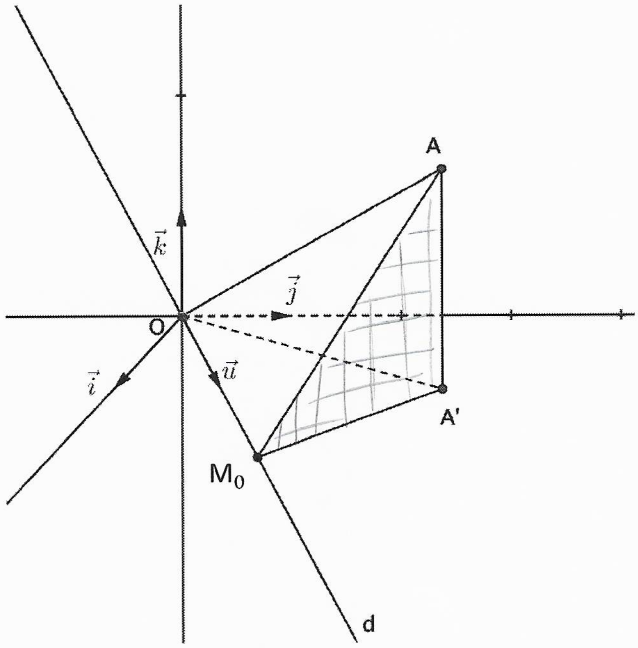
Pour éclairer le choix, les principaux domaines abordés sont indiqués en début de chaque exercice.

Exercice A

Principaux domaines abordés :
Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé ; orthogonalité dans l'espace.

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère :

- le point A de coordonnées $(1\,;3\,;2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.



Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.

On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\,;t\,;0)$.

a. On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :

$$\mathrm{AM}^2 = 2t^2 - 8t + 14\,.$$

b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\,;2\,;0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale. On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.

3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.

4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\,;3\,;0)$.
Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(\mathrm{AA'M}_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.

5. Calculer le volume de la pyramide $\mathrm{OM}_0\mathrm{A'A}$.
On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

Exercice B

Principaux domaines abordés :
Équations différentielles ; fonction exponentielle.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = y + 2xe^x$.

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2e^x$. On admet que u est dérivable et on note u' sa fonction dérivée. Démontrer que u est une solution particulière de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = f(x) - u(x).$$
a. Démontrer que si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) alors la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y' = y$.
On admet que la réciproque de cette propriété est également vraie.
b. À l'aide de la résolution de l'équation différentielle $y' = y$, résoudre l'équation différentielle (E).
3. **Étude de la fonction u**
a. Étudier le signe de $u'(x)$ pour x variant dans $\mathbb{R}$.
b. Dresser le tableau de variations de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées).
c. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction u est concave.

MÉTROPOLE 2021

Bac 2021, candidats libres voie générale, spécialité mathématiques

Corrigé du sujet de l'épreuve du 7 juin 2021

Exercice 1 :

1.

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

On a donc :

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Avec :

$$u(x) = e^{2x} \Rightarrow u'(x) = 2e^{2x}$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

D'où :

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} \times x - e^{2x} \times 1}{x^2}$$

$$= \frac{2xe^{2x} - e^{2x}}{x^2}$$

$$= \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$$

La réponse à la question 1 est la **<u>réponse C</u>**.

2.

Étudions le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$$

Sur $]0;+\infty[$ les fonctions e^{2x} et x^2 sont strictement positives donc $f'(x)$ est du signe de $2x-1$

Étudions le signe de $2x-1$ sur $]0;+\infty[$:

$$2x-1>0$$

$$\Leftrightarrow 2x>1$$

$$\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

La réponse à la question 2 est la **réponse C**.

3.

Étudions la limite de $f(x)$ en $+\infty$:

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{x}$$

Exprimée de cette manière nous obtenons une forme indéterminée de type $\frac{+\infty}{+\infty}$. Or le théorème des croissances comparées nous apprend que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \quad (1)$$

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{x}=\frac{e^x\times e^x}{x}=e^x\times\frac{e^x}{x}$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty \quad (2)$$

Par multiplication des limites (1) et (2), on a :

$$\lim_{x\to+\infty}e^x\times\frac{e^x}{x}=+\infty$$

La réponse à la question 3 est la **réponse A**.

4.

Étudions le signe de $f''(x)$ sur $]0;+\infty[$:

$$f''(x) = \frac{2e^{2x}(2x^2-2x+1)}{x^3}$$

Sur $]0;+\infty[$ les fonctions $2e^{2x}$ et x^3 sont strictement positives donc $f''(x)$ est du signe de $2x^2-2x+1$.

Étudions le signe de $2x^2-2x+1$ sur $]0;+\infty[$. Calcul du discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4\times2\times1 = 4-8 = -4$$

Le discriminant étant négatif, la fonction est toujours du signe du coefficient de x^2.
Donc sur $]0;+\infty[$:

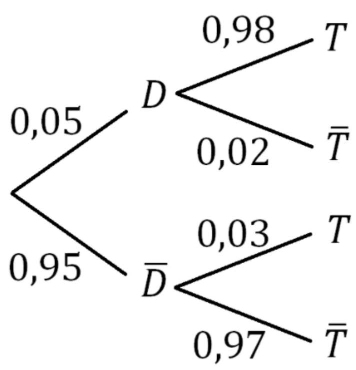
$$2x^2-2x+1>0 \Leftrightarrow f''(x)>0 \Leftrightarrow f \text{ est convexe}.$$

La réponse à la question 4 est la **réponse B**.

Exercice 2 :

Partie I

1.



2.a

Calculons la probabilité que la pièce soit défectueuse ET présente un test positif :

$$P(D\cap T) = 0,05\times0,98 = 0,049$$

2.b

Calculons la probabilité que la pièce présente un test positif. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(T) = P(D\cap T) + P\left(\overline{D}\cap T\right) = 0,049 + 0,95\times0,03 = 0,0775$$

3.

Calculons la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que le test est positif :

$$P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}049}{0{,}0775} \approx 0,632$$

La valeur prédictive est inférieure à 0,95. Ce test n'est donc pas considéré comme efficace.

Partie II

1.

Soit l'expérience de Bernoulli : « on prend une pièce de la production et on note si elle est défectueuse ou non » dont le succès est « la pièce est défectueuse ». On répète 20 fois l'expérience de Bernoulli de manière identique et indépendante. X compte le nombre de succès à la fin de la répétition des épreuves. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $p = 0,05$ et $n = 20$.

2.

Calculons la probabilité que cet échantillon contienne au moins une pièce défectueuse :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - 0,95^{20}$$

$$\approx 0,64$$

Il y a environ 64 % de chance qu'il y ait au moins une pièce défectueuse sur un échantillon de 20 pièces.

3.

L'espérance de X est :

$$E(X) = np = 20 \times 0,05 = 1$$

En moyenne, sur un échantillon de 20 pièces il y a 1 pièce défectueuse.

Exercice 3 :

I – Première modèle

Une vitesse de décongélation constante induit que la température, en fonction du temp,s est modélisée par une fonction affine de type $f(x) = mx + p$, avec x le nombre de minutes. Nous disposons des informations suivantes : $f(0) = -19$ et $f(10) = 1,3$

Calcul du coefficient directeur de la fonction :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1,3-(-19)}{10-0} = 2,03$$

Calcul de l'ordonnée à l'origine :

$$f(x) = 2,03x + p$$

$$f(0) = p = -19$$

Donc :

$$f(x) = 2,03x - 19$$

Calcul, avec ce modèle, de la température prévue au bout de 25 min :

$$f(25) = 2,03 \times 25 - 19 = 31,75$$

Selon ce modèle, la température des gâteaux, au bout de 25 min, devra être supérieure à la température ambiante. Ce modèle n'est donc pas pertinent.

II – Deuxième modèle

1.

On a :

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -0,06 \times (T_n - 25) + T_n$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -0,06T_n + 1,5 + T_n$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$$

2.

Calculons T_1 et T_2 , sachant que $T_0 = -19$:

$$T_1 = 0,94T_0 + 1,5 = 0,94 \times (-19) + 1,5 = -16,4$$

$$T_2 = 0,94T_1 + 1,5 = 0,94 \times (-16,4) + 1,5 = -13,9$$

3.

Soit $P(n)$: « $T_n \leq 25$ »

Initialisation : On a $T_0 = -19$ donc $T_0 \leq 25$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose $P(k)$ vraie pour un k fixé quelconque. Démontrons que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que « $T_{k+1} \leq 25$ » :

$$T_k \leq 25$$

$$\Leftrightarrow 0,94T_k \leq 25 \times 0,94$$

$$\Leftrightarrow 0,94T_k + 1,5 \leq 25 \times 0,94 + 1,5$$

$$\Leftrightarrow T_{k+1} \leq 25$$

$P(k+1)$ est vraie.

On a $P(0)$ vraie et la proposition P héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Oui ce résultat était prévisible car en se réchauffant, les gâteaux ne vont pas pouvoir dépasser la température ambiante.

4.

On sait que :

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$$

Or, on a démontré que :

$$T_n \leq 25$$

$$\Leftrightarrow T_n - 25 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -0,06 \times (T_n - 25) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} - T_n \geq 0$$

On a, pour tout entier naturel $T_{n+1} - T_n \geq 0$, donc la suite (T_n) est strictement croissante.

5.

La suite (T_n) est majorée et strictement croissante donc elle est convergente.

6.a

Soit $U_n = T_n - 25 \Leftrightarrow T_n = U_n + 25$

Montrons que (U_n) est une suite géométrique, c'est-à-dire qu'elle est de forme $U_{n+1} = q \times U_n$:

$$U_{n+1} = T_{n+1} - 25$$

$$= 0,94T_n + 1,5 - 25$$

$$= 0,94(U_n + 25) - 23,5$$

$$= 0,94U_n + 0,94 \times 25 - 23,5$$

$$= 0,94U_n + 23,5 - 23,5$$

$$U_{n+1} = 0,94U_n$$

(U_n) est une suite géométrique de raison $0,94$ avec pour premier terme :
$U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44$

6.b

La suite géométrique a pour formule explicite :

$$U_n = U_0 \times q^n$$

$$\Longrightarrow U_n = -44 \times 0,94^n$$

Or,

$$T_n = U_n + 25$$

$$\Longrightarrow T_n = \ -44 \times 0,94^n + 25$$

6.c

Étudions la limite de T_n :

$$\lim_{n \to +\infty} 0{,}94^n = 0$$

Et donc, par produit de limites :

$$\lim_{n \to +\infty} -44 \times 0{,}94^n = 0$$

Et finalement par somme de limites :

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = \lim_{n \to +\infty} -44 \times 0{,}94^n + 25 = 25$$

Selon ce modèle, si l'on attend un temps assez grand la température se stabilise à 25 °C ce qui est cohérent à la réalité physique.

7.a

Calcul de la température des gâteaux après 30 min :

$$T_{30} =- 44 \times 0,94^{30} + 25 \approx 18$$

La température des gâteaux après 30 min est d'environ 18 °C.

7b.

$$T_n = 10$$

$$\Leftrightarrow \quad - 44 \times 0,94^n + 25 = 10$$

$$\Leftrightarrow 0,94^n = \frac{10-25}{-44}$$

$$\Leftrightarrow ln(0,94^n) = ln\left(\frac{15}{44}\right)$$

$$\Leftrightarrow n\, ln(0,94) = ln\left(\frac{15}{44}\right)$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{ln\left(\frac{15}{44}\right)}{ln(0,94)} \approx 17,4$$

Si Cécile veut manger son gâteau à 10 °C, il faut qu'elle le mange entre 17 et 18 min après l'avoir sorti du congélateur.

7.c

```
def seuil () :
        n=0
        T=-19
        while T<10 :
                T=-44*0.94**n+25
                n=n+l
        return n
```

Exercice A :

1.

La représentation paramétrique d'une droite est de forme :

$$D : \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt, \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Avec $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de la droite et $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur directeur de la droite.

Donc :

$$d : \begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 0 + 1t, \\ z = 0 + 0t \end{cases} \; t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow d : \begin{cases} x = t \\ y = t, \\ z = 0 \end{cases} \; t \in \mathbb{R}$$

2.a

Calculons la distance AM^2 :

$$AM^2 = \left(\sqrt{(t-1)^2 + (t-3)^2 + (0-2)^2}\right)^2$$

$$AM^2 = t^2 - 2t + 1 + t^2 - 6t + 9 + 4$$

$$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14$$

2.b

Déterminons le minimum de la fonction $f(t) = 2t^2 - 8t + 14$:

La fonction $f(t)$ est un polynôme du second degré. Le coefficient de t^2 est positif, la parabole est donc tournée vers le haut. Le minimum de $f(t)$ est atteint au niveau du sommet qui a pour abscisse $t_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{4} = 2$. Le point M pour lequel la distance AM est minimale est tel que $t = 2$ donc a pour coordonnées $(2; 2; 0)$.

3.

Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AM_0}$:

$$\overrightarrow{AM_0}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-3 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Calculons le produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM_0} = 1\times 1 + 1\times(-1) + 0\times(-2) = 0$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM_0}$ sont orthogonaux, donc les droites d et (AM_0) sont orthogonales.

4.

Montrons que M_0 est le projeté orthogonal de O sur le plan $\left(AA'M_0\right)$. On sait que $M_0 \in (AA'M_0)$ par définition du plan. On sait que (OM_0) qui n'est autre que la droite d est orthogonale à (AM_0). De plus,

$$\overrightarrow{A'M_0}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-3 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et donc :

$$\overrightarrow{OM_0} \cdot \overrightarrow{A'M_0} = 2\times 2 + 2\times(-1) + 0\times 0 = 0$$

(OM_0) est orthogonale à $(A'M_0)$ et à (AM_0) qui sont deux droites sécantes du plan $(AA'M_0)$. On a alors que (OM_0) est orthogonale au plan $(AA'M_0)$.

$$M_0 \in (AA'M_0) \quad et \quad (OM_0) \perp (AA'M_0) \Leftrightarrow M_0 \text{ est le projeté orthogonal de } O \text{ sur } (AA'M_0)$$

Or, le projeté orthogonal H d'un point M sur un plan est le point du plan le plus proche de M. Donc M_0 est le point de $\left(AA'M_0\right)$ le plus proche de O.

5.

Calcul des longueurs :

$$AA' = \sqrt{(1-1)^2 + (3-3)^2 + (0-2)^2} = 2$$

$$A'M_0 = \sqrt{(2-1)^2 + (2-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

$$OM_0 = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Calcul du volume de la pyramide :

$$\frac{1}{3} \times \frac{AA' \times A'M_0}{2} \times OM_0 = \frac{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Exercice B :

1.

Calculons $u'(x)$:

$$u'(x) = 2x \times e^x + x^2 \times e^x = 2xe^x + u(x)$$

La fonction $u(x)$ est bien une solution particulière de (E).

2.a

Soit $g(x) = f(x) - u(x)$.

On a :

$$g'(x) = f'(x) - u'(x)$$

Or, si $f(x)$ est solution de (E) alors $f'(x) = f(x) + 2xe^x$.

Ce qui implique que :

$$g'(x) = f(x) + 2xe^x - (u(x) + 2xe^x)$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = f(x) - u(x)$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = g(x)$$

Donc $g(x)$ est bien solution de l'équation différentielle $y' = y$.

2.b

On sait que les solutions des équations différentielles de type $y' = ay + b$ sont de type $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où C est une constante réelle.

Les solutions de $y' = y$ sont donc de forme $g(x) = Ce^{1x} - \frac{0}{1} = Ce^x$.

Déterminons les formes des solutions de l'équation différentielle (E) :

$$g(x) = f(x) - u(x)$$

$$\Leftrightarrow Ce^x = f(x) - x^2 e^x$$

$$\Leftrightarrow Ce^x + x^2 e^x = f(x)$$

Donc les solutions de (E) sont de forme :

$$f(x) = e^x(C + x^2)$$

3.a

Étudions le signe de $u'(x) = 2x \times e^x + x^2 \times e^x = xe^x(2 + x)$:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
e^x		$+$	|	$+$	|	$+$	
$2+x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3.b

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(x)$		↗	$4e^{-2}$	↘	0	↗	

3.c

$$u'(x) = e^x(2x + x^2)$$

$$u''(x) = e^x(2x + x^2) + e^x(2 + 2x)$$

$$= e^x(2x + x^2 + 2 + 2x)$$

$$= e^x(x^2 + 4x + 2)$$

Sur R la fonction e^x est strictement positive donc $u''(x)$ est du signe de x^2+4x+2.

Déterminons le discriminant de la fonction x^2+4x+2 :

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 2 = 8$$

Déterminons les racines :

$$x_1 = \frac{-4+\sqrt{8}}{2} = \frac{-4+2\sqrt{2}}{2} = -2+\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-4-\sqrt{8}}{2} = \frac{-4-2\sqrt{2}}{2} = -2-\sqrt{2}$$

Le polynôme est du signe du coefficient de x^2 sauf entre les racines. Donc $u''(x)$ est négative sur $[-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}]$, on a donc u concave sur $[-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}]$.