Inteligencia Artificial

Estado del Arte: Problema Enhanced Profitable Tour Problem

Muryel Constanzo

12 de octubre de 2025

Evaluación

Resumen (5 %):	___________
Introducción (5 %):	___________
Definición del Problema (10 %):	___________
Estado del Arte (35 %):	___________
Modelo Matemático (20 %):	___________
Conclusiones (20 %):	___________
Bibliografía (5 %):	___________
Nota Final (100 %):	___________

Resumen

El documento presenta el Enhanced Protibale Tour Problem (EPTP), que busca la optimización combinatoria. Perteneciendo a la familia de problemas de ruteo con beneficios, generaliza el TSP clásico, tiene en consideración la selección óptima de un subconjunto de localizaciones y costos para desplazamientos. Se presenta una revisión de técnicas desarrolladas, clasificándolas en métodos exactos, heurísticas y metaheurísticas, realizando un análisis de fortalezas, limitaciones y aplicabilidad según el tamaño de las instancias. Se expone la formulación matemática para el problema, incorporando la posibilidad de múltiples usuarios, ventanas de tiempo y restricciones de capacidad. El análisis concluye con la identificación de las líneas de investigación más prometedoras y proposición de direcciones futuras para el desarrollo de algoritmos más eficientes, aplicables a contextos reales.

1. Introducción

El Enhanced Profitable Tour Problem (EPTP) representa un reto esencial en el ámbito de la optimización combinatoria y la inteligencia artificial, con aplicaciones directas en áreas clave como la logística de distribución, el enrutamiento de vehículos y la organización de itinerarios turísticos. A diferencia del clásico problema del vendedor viajero, en el que es necesario visitar todas las localidades, el EPTP incluye decisiones de selección que fijan qué subconjunto de clientes visitar para maximizar la ganancia neta, equilibrando las ganancias de las visitas con los costos de desplazamiento. Esta naturaleza dual de selección y secuenciación eleva notablemente la complejidad computacional del problema, catalogándolo como NP-difícil e impulsando la creación de métodos especializados para su solución.

El objetivo de este documento es ofrecer un análisis completo del estado del arte en técnicas de resolución para el EPTP, señalando los enfoques metodológicos más significativos, sus fundamentos teóricos, así como sus capacidades y restricciones. Se pretende proporcionar una perspectiva holística que facilite el entendimiento de la evolución histórica del asunto, las tácticas de solución elaboradas y las tendencias que se han investigado actualmente. El aporte clave de este estudio se centra en la revisión crítica de las técnicas disponibles, la comparación de su efectividad según características por caso y la formulación de directrices para las futuras investigaciones que puedan superar las limitaciones actuales, mejorando la aplicabilidad practica de las soluciones.

La razón para llevar a cabo este estudio se basa en la creciente importancia del EPTP en entornos industriales donde los recursos son escasos y no es viable económicamente satisfacer todas las peticiones de servicio existentes. En la época de la optimización de recursos y la sostenibilidad operativa, las organizaciones necesitan herramientas informáticas que les ayuden a decidir qué clientes atender y en qué orden, maximizando la rentabilidad y cumpliendo con restricciones operativas como capacidades de vehículos, ventanas de tiempo y límites presupuestarios. La creación de algoritmos eficaces para el EPTP no solo tiene un interés teórico en el ámbito de la informática, sino que también influye directamente en la efectividad operativa de diversas industrias, lo que valida la importancia de este análisis en el campo de la inteligencia artificial aplicada.

La organización del trabajo es la siguiente: La Sección 2 presenta formalmente el problema y su planteamiento, se da cuenta de las variables de decisión, restricciones, objetivo a cumplir las variantes que se conocen; La Sección 3 expone el estado de la cuestión en el que se revisa la historia del problema y se clasifican los métodos de solución en exactos, heurísticos y metaheurísticos, se analizan las distintas representaciones que existen, se presentan algoritmos que han mostrado ser muy efectivos y se discuten las tendencias actuales de investigación; La Sección 4 presenta la formulación matemática rigurosa del problema, se establecen parámetros, variables, la función objetivo y restricciones a cumplir y se caracteriza el espacio de búsqueda en el cual la meta de la investigación es la resolución de un determinado problema; por último, La Sección 5 sintetiza las conclusiones de la investigación, respuestas a interrogantes sobre si son unificables las técnicas o no, cuáles son sus similitudes y diferencias, si son aplicables o no a la PBC, las limitaciones del análisis, cuáles son las estrategias que presentan buena esperanza final y cuál será el futuro concepto de investigación en el análisis de la PBC.

2. Definición del Problema

El Enhanced Profitable Tour Problem (EPTP) corresponde a un problema de optimización, siendo además una generalización del Profitable Tour Problem (PTP) y una variante del Traveling Salesman Problem (TSP) [6]. El modelo forma parte de la familia de problemas de ruteo de vehículos con beneficios.

EPTP tiene como finalidad determinar una ruta que pase por un subconjunto de clientes, maximizando la diferencia entre el beneficio obtenido gracias a las visitas realizadas y el costo del trayecto, es decir, maximizando la ganancia obtenida [1].

2.1. Naturaleza y Contexto

Se propone en las situaciones donde no es necesario ni obligatorio pasar por todas las localizaciones viables, lo que lo diferencia del clásico TSP [3]. Cada localización a visitar cuenta con un beneficio asociado, obtenible al haberse visitado dicha localización; por otro lado, el desplazamiento entre las distintas localizaciones genera costos que son proporcionales a las distancias recorridas [13].

El EPTP utiliza esta estructura básica y la extiende, incorporando además restricciones adicionales y características específicas que aumentan la complejidad y el realismo del modelo. Entre estas se consideran capacidades de localizaciones, ventanas de tiempo, múltiples vehículos o la incertidumbre sobre la disponibilidad de las localizaciones [1].

2.2. Dificultades Asociadas al Problema

EPTP pertenece a la clase de problemas NP-difíciles, esto implica que no hay algoritmos conocidos que puedan resolver todas las instancias del trayecto en tiempo polinomial [6].

Debido a la naturaleza combinatoria del problema, donde la cantidad de soluciones factibles para su resolución crece de forma exponencial conforme aumenta el número de localizaciones disponibles, la complejidad computacional también se intensifica. Además la necesidad de mantener balanceado simultáneamente dos objetivos contrapuestos, es decir, la maximización de beneficios por visitas mientras se minimizan los costos de desplazamiento, genera un espacio de búsqueda complejo, con múltiples óptimos locales, que no hacen más que dificultar la identificación de una solución óptima global [3].

2.3. Variables del Problema

Para EPTP las variables de decisión incluyen estructuración en dos niveles, complementarios entre ellos.

Primero se tienen las variables de selección, que determinan las localizaciones que serán incluidas en el tour y cuáles serán omitidas. En segundo lugar están las variables de secuenciamiento, aquellas que establecen el orden específico en el que las localizaciones serán visitadas [1].

Entre los parárametros del problema se incluyen:

- El conjunto de localizaciones posibles, con cada una caracterizada por su beneficio individual.
- La matriz de costos de desplazamiento entre cada par de puntos de localización.
- Los puntos de partida y retorno del viaje.

Dependiendo de la variante específica del problema, también se encuentran las capacidades de carga, límites temporales, número de vehículos disponibles o incluso las probabilidades de disponibilidad de cada localización [11].

2.4. Restricciones del Problema

Las restricciones del problema aseguran la factibilidad de las soluciones. La restricción principal establece que el viaje debe formar un ciclo cerrado, de forma que el viaje tenga su inicio y fin en la misma localización [6].

Cada localización puede ser visitada como máximo una vez a lo largo de todo el recorrido, evitando repeticiones innecesarias. En los casos en los que se consideran ventanas de tiempo, las visitas deben ser realizadas dentro de los intervalos temporales específicos que se encuentran asociados a cada localizacicón de forma específica y en versiones que cuenten con múltiples vehículos, se imponen restricciones respecto a la cantidad de viajes que se pueden realizar de forma simultánea [13].

2.5. Objetivos del Problema

El objetivo primordial del EPTP es la maximización de la ganancia total neta, que se encuentra definida como la diferencia entre los beneficios totales que fueron recolectados al visitar alguna localidad seleccionada y los costos totales incurridos en el desplazamiento durante el viaje [6].

La función objetivo mencionada refleja la decisión económica, donde se debe buscar un equilibrio óptimo entre la expansión del viaje para obtener más beneficios y el mantenerlo compacto para así minimizar los costos de transporte [3]. Para algunas formulaciones de este problema se pueden tener objetivos secundarios o incluso criterios adicionales, tales como:

- Minimizar el tiempo total del viaje.
- Balancear la carga entre múltiples vehículos.
- Maximizar la cantidad de localizaciones atendidas, sujeto a restricciones de ganancia.

2.6. Variantes Conocidas del Problema

El EPTP se deriva y relaciona con múltplies variantes ya documentadas.

- **Capacitated Profitable Tour Problem (CPTP):**incluye restricciones de capacidad vehicular, en donde cada localización posee además una demanda específica y el vehículo tiene una capacidad limitada [1].
- **Profitable Arc Tour Problem:** trabaja con la asociación de los beneficios a los arcos de la red en lugar de los vértices, lo que modifica considerablemente la estructura conocida del modelo.
- **Team Orienteering Problem (TOP):** considera múltiples vehículos que trabajan bajo un límite de tiempo, buscando maximizar el beneficio total recolectado sujeto a dichas restricciones temporales [1].
- **Probabilistic Profitable Tour Problem:** agrega el factor de incertidumbre estocástica a la disponibilidad de las localizaciones, de forma que requiere la consideración de las probabilidades de éxito en las visitas [13].
- **Split Delivery Capacitated Profitable Tour Problem:** permite que la misma localización sea visitada por múltiples vehículos para satisfacer la demanda establecida.
- **Time-Dependent Capacitated Profitable Tour Problem with Time Windows:** considera la integración de ventanas temporales y costos de viaje que dependen del tiempo, lo que refleja condiciones de tráfico variable [11].

3. Estado del Arte

El problema Profitable Tour Problem nace como la generalización natural del problema clásico Traveling Salesman Problem (TSP), cuyas primeras formulaciones matemáticas existen alrededor del 1930 [9]. Sin embargo, el concepto formal de los problemas de ruteo con selección de vértices y beneficios asociados no surge sino hasta la década de 1980, cuando los investigadores comenzaron a estudiar situaciones en las que no era económicamente viable visitar todas las localizaciones disponibles [2].

EPTP fue consolidado formalmente a la literatura académica alrededor del 1990, cuando se introdujo el Prize-Collecting Traveling Salesman Problem [4], problema en el que se establecieron las bases teóricas para esta gran familia de problemas.

De forma paralela, se proporcionó una taxonomía comprehensiva [6], que clasifico las diversas variables en problemas del tipo del vendedor viajero con beneficios, de esta forma se distinguió entre aquellos con restricciones de longitud máxima (Orienteering Problem) y aquellos que no contaban con dichas restricciones pero si con costos de desplazamiento (Profitable Tour Problem).

El surgimiento del modelo PTP está directamente vinculado con las aplicaciones prácticas en logística de distribución, planificación turística y ruteo de vehículos, donde la toma de decisiones es simultánea y el secuenciamiento resultaba crítico para la optimización de recursos [1]. La evolución hacia las variantes *Enhanced* o versiones extendidas del problema ha sido impulsada por la necesidad de modelar las características extras que se encuentran en escenarios reales, como lo son las capacidades vehiculares limitadas, las ventanas temporales de atención, múltiples agentes o incluso la incertidumbre en la disponibilidad de localidades [11].

3.1. Métodos de Solución Desarrolados

La resolución del modelo EPTP ha sido abordada en tres categorías principales, las técnicas exactas, algoritmos heurísticos constructivos y las metaheurísticas de búsqueda local.

3.1.1. Métodos Exactos

El tipo de método exacto asegura la obtención de soluciones optimas aun cuando enfrentan limitaciones computacionales significativas debido a la naturaleza NP-difícil del problema inicial. La programación lineal entera da un enfoque más fundamental, en donde el problema se formula mediante el uso de variables binarias, estas variables indican la selección de vértices y arcos, estando sujetas a restricciones de conectividad, además de la capacidad de eliminación de subciclos [1]. Las formulaciones con base en los flujos y en conjuntos de cortes mínimos tienden a ser particularmente efectivas para las instancias cuyo tamaño es moderado [6].

Se tiene también que los algoritmos de ramificación y acotamiento o branch-and-bound han sido utilizados exitosamente, al incorporar técnicas de relajación lineal, de forma que obtienen cotas superiores e inferiores, permitiendo la poda del árbol de búsqueda [4]. Por otro lado, enfoques más sofisticados como la ramificación de corte y precio o branch-cut-and-price, han permitido la resolución de instancias con hasta 500 vértices, debido a que combinan generación dinámica de columnas con planos de corte validos [1].

3.1.2. Heurísticas Constructivas

Las heurísticas constructivas generan soluciones factibles a través de procedimientos determinísticos, agregando iterativamente elementos al viaje. La heurística del vecino más cercano selecciona en cada paso el vértice no visitado que maximiza la relación entre el beneficio del vértice y el costo asociado al agregarlo al tour [6]. Este tipo de enfoque, conocido como greedy, otorga soluciones iniciales de una calidad aceptable, considerando bajo costo computacional.

Por otro lado, las heurísticas de inserción realizan la evaluación sistemáticamente de la incorporación de vértices en posiciones específicas, eligiendo siempre aquellas que maximicen el incremento neto de la ganancia [1]. Algunas variantes más sofisticadas tienen en cuenta criterios de inserción que buscan el balance de la ganancia inmediata con el impacto que generan las futuras inserciones, evitando la toma de decisiones miopes que puedan conducir a óptimos locales de baja calidad.

3.1.3. Metaheurísiticas

Las metaheurísticas dan un enfoque de mayor éxitos para las instancias de gran escala del EPTP, ya que ofrecen un equilibrio favorable entre la calidad de la solución y la eficiencia computacional. La búsqueda tabú, o Tabu Search, ha demostrado resultados destacables, debido al empleo de estructuras de memoria tanto a corto como a largo plazo, guiando la exploración del espacio de soluciones [12]. Los movimientos en la vecindad típicamente empleados vienen con operadores de intercambio de vértices (swap), reubicación de vértices (relocate), inversión de segmentos (2-opt) y operadores de selección que agregan o eliminan los vértices del viaje [1].

Los algoritmos genéticos o GA, codifican sus soluciones mediante la permutación, lo que representa el orden de visita, incorporando operadores de cruce que se especializan en un tema, como el order crossover (OX) y el partially mapped crossover (PMX), que preservan características estructurales de los viajes [13] La mutación es implementada mediante los operadores de perturbación, que modifican la secuencia y la selección de vértices por igual [3].

3.2. Representaciones del Problema

Los algoritmos de solución tienen una efectividad fuertemente influenciada por la representación que fue empleada para la codificación de las soluciones del EPTP.

3.2.1. Representación por Permutaciones

La representación por permutaciones codifica la solución como si se tratase de una secuencia ordenada de identificadores para los vértices, en donde la posición que tienen en la secuencia determina directamente el orden de visita [3]. Esta representación es natural y termina siendo computacionalmente eficiente, permitiendo la aplicación directa de los operadores de cruce. Aun cuando presenta limitaciones a la hora de modelar explícitamente la decisión respecto a la selección de vértices, ya que requiere mecanismos adicionales que determinan qué vértices son visitados realmente.

3.2.2. Representación Binaria

En la representación binaria se emplea un vector de variables binarias, en donde cada componente indica si el vértice en específico será incluido en el viaje o no, complementado con la información de secuenciamiento [1]. Esta forma de codificar facilita la modelación de restricciones de capacitas, permitiendo la implementación de operadores genéticos que modifican la composición.

Su principal desventaja radica en que necesita de procedimientos de reparación cuando los operadores generan soluciones infactibles.

3.2.3. Representación por Lista de Arcos

Esta forma de representar muestra una solución como el conjunto de arcos, siendo adecuada para formular programación matemática y algoritmos de colonia de hormigas [8]. La representación como tal facilita la verificación de la factibilidad mediante el análisis de conectividad del grafo, aunque produce un incremento en la complejidad de implementación para ciertos operadores de búsqueda local.

Se ha demostrado que representar por permutaciones es más efectivo en la práctica, principalmente cuando se combinan procedimientos de decodificación inteligentes que determinan de forma dinámica la selección optima de vértices dada una secuencia especifica [3].

3.3. Algoritmos más Eficaces

Al realizar un análisis comparativo de resultados se identifica claramente un enfoque que ha demostrado mayor efectividad.

Para aquellas instancias que tienen un tamaño pequeño a moderado, los métodos basados en Branch-cut-and-price representan el estado del arte, debido a que son capaces de garantizar optimalidad en los tiempos computacionales [1]. La implementación de Archetti et al. [1] para el Capacitated Profitable Tour Problem termino resolviendo a optimalidad instancias con hasta 150 vértices en menos de una hora.

Para instancias con una escala mucho mayor, los algoritmos híbridos, que combinan metaheurísticas poblacionales con búsqueda local intensiva, demostraron ser superiores. Se desarrollo un algoritmo multi-inicio (Multi-Start Heuristic) [3] que hace uso de heurísticas aleatorias, seguida de una búsqueda tabú, dando lugar a soluciones con espacios de optimalidad inferiores al 2 % para las instancias con alrededor de 500 vértices. [13] propuso un algoritmo genético hibrido con búsqueda local basada en Lin-Kernighan para el PTP, lo que supero en calidad a las metaheurísticas puras en el 95 % de las instancias probadas [13].

Los algoritmos de optimización por enjambre PSO adaptados al problema discreto han mostrado resultados competitivos, principalmente cuando se hacen híbridos en conjunto con búsqueda local [11]. La VNS por otro lado, surge como un enfoque más robusto, empleando estructuras de complejidad creciente que buscan un escape sistemático de óptimos locales [1].

3.4. Tendencias Actuales

La actual investigación del modelo tratado se caracteriza por cuatro tendencias principales:

3.4.1. Integración de Aprendizaje Automático

Tendencia que incorpora técnicas de aprendizaje automático con el fin de mejorar la función de los algoritmos de optimización. Cuenta con enfoques reinforcement learning, siendo estos explorados para entrenar políticas de decisión.

3.4.2. Optimización Robusta y Estocástica

Reconocen varios escenarios reales que involucran la duda en parámetros como beneficios, costos o disponibilidad de vértices. La investigación más reciente se enfoca en las formulaciones del problema [13], buscando soluciones que mantengan factibilidad y calidad aceptable bajo diversos escenarios.

3.4.3. Paralelización y Computación de Alto Rendimiento

El crecimiento de la disponibilidad de recursos computacionales motiva el desarrollo de implementaciones paralelas para el EPTP. Los algoritmos en paralelo utilizan múltiples poblaciones que tienen evolución constante, contando además con una migración periódica de individuos, lo que mejora la diversidad y acelera la convergencia [3].

La paralelización de evaluaciones para las vecindades en búsquedas de carácter local permite la exploración de regiones de mayor amplitud en el espacio de soluciones en tiempos comparables a implementaciones secuenciales.

3.4.4. Problemas Multiobjetivo

La formulación multiobjetivo del problema, donde se busca optimizar de forma simultánea varios criterios, como la ganancia neta, longitud del viaje, balance de la carga o equidad, ha sido foco de atención [7].

Los algoritmos multiobjetivo como NSGA-II y MOEA/D se adaptan al problema en cuestión, lo que genera aproximaciones al frete de Pareto, lo que ofrece múltiples opciones de compromiso entre las que se puede decidir. Esta perspectiva termina siendo particularmente importante en aquellas aplicaciones donde los diferentes stakeholders priorizan objetivos distintos.

Las limitaciones de técnicas actuales cuentan con la dificultad de escalar a instancias con cerca de miles de vértices, manteniendo las garantías de calidad, la sensibilidad de las metaheurísticas a la configuración de parámetros y la ausencia de métodos sistemáticos para la explotación de información histórica de problemas previamente resueltos.

Las futuras investigaciones se orientan al desarrollo de algoritmos que tengan una mejor capacidad de adaptación, la integración efectiva de conocimientos experto del dominio y la consideración de aquellos aspectos dinámicos en los que le problema evoluciona de forma temporal requiriendo una re-optimización continua.

4. Modelo Matemático

Se presenta la formulación matemática para el Enhanced Profitable Tour Problem con múltiples usuarios y la existencia de ventanas de tiempo, utilizando como base las formulaciones clásicas del problema de ruteo con beneficios [1, 11], siendo extendida para la incorporación de las características específicas del problema en estudio.

4.1. Parámetros y Conjuntos

El problema se define como un grafo dirigido $G = (V, A)$ donde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ representa el conjunto de n nodos disponibles, y $A \subseteq V \times V$ define el conjunto de arcos dirigidos que conectan los pares de nodos.

El nodo $1 \in V$ se asigna como el punto de inicio y termino del viaje, considerándose además un conjunto $U = \{1, 2, \ldots, m\}$ de m usuarios, donde cada uno tiene sus preferencias y restricciones temporales específicas.

Los parámetros temporales del problema incluyen $t_i \geq 0$ para todo $i \in V$, que representa el tiempo de servicio que requiere el nodo i, además se define $d_{ij} \geq 0$ para todo $(i, j) \in A$, que indica el tiempo de viaje que hay desde el nodo i hasta el nodo j.

Cada usuario $k \in U$ dispone de un tiempo total $T_k > 0$ para completar su tour. Además, para cada nodo $i \in V$ se tiene una ventana de tiempo $[e_i, l_i]$, donde $e_i \geq 0$ denota el tiempo de apertura más temprano y $l_i > e_i$ el tiempo más tardío de cierre en el que el nodo esta disponible para ser visitado.

Los parámetros de valorización muestran las preferencias de los usuarios. El parámetro $s_{ik} \in \mathbb{R}$ indica la valorización que el usuario k asigna al nodo i, mostrando además el beneficio recibido por la visita a dicha localización. De la misma forma $c_{ijk} \in \mathbb{R}$ muestra la valorización, en el mayor de los casos negativa ya que representa a un costo, que el usuario k asocia al arco (i, j), de forma que se captura el costo de desplazamiento entre ambos nodos.

4.2. Variables de Decisión

Para el modelo se presentan dos tipos de variables de decisión binarias que caracterizan por completo la solución factible, las variables de decisión principales son:

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A,\, k \in U \tag{1}$$
$$y_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V,\, k \in U \tag{2}$$

La variable x_{ijk} toma el valor 1 si el usuario k utiliza el arco (i, j) en su viaje, y 0 en caso contrario. La variable muestra simultáneamente las decisiones de secuenciamiento u orden de visita y asignación, es decir, qué arcos forman parte del recorrido.

La variable y_{ik} toma el valor 1 si el usuario k visita el nodo i, y 0 si el nodo es omitido del camino, mostrando la decisión de selección de los vértices, un aspecto que lo hace diferente respecto al TSP clásico.

Además, se incluyen variables continuas que hace de auxiliares para el manejo de las ventanas de tiempo y la eliminación de sub-viajes:

$$w_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in V,\, k \in U \tag{3}$$
$$u_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in V \setminus \{1\},\, k \in U \tag{4}$$

La variable w_{ik} representa el tiempo en el cual el individuo k inicia el servicio en el nodo i, permitiendo el modelamiento de las restricciones de ventanas de tiempo y de la propagación temporal a lo largo del tour.

La variable u_{ik} indica el índice de posición utilizado en las restricciones de eliminación de sub-viajes [10], tomando valores crecientes conforme se avanza en la secuencia de visita.

4.3. Función Objetivo

El problema como tal busca la maximización de la valorización neta total, agregando sobre todos los usuarios:

$$\text{máx}\, Z = \sum_{k \in U} \left(\sum_{i \in V} s_{ik} \cdot y_{ik} + \sum_{(i,j) \in A} c_{ijk} \cdot x_{ijk} \right) \tag{5}$$

La función objetivo suma dos componentes:

- El primer término $\sum_{i \in V} s_{ik} \cdot y_{ik}$ cuantifica el beneficio total obtenido por el usuario k al visitar el nodo seleccionado, en donde cada nodo ($y_{ik} = 1$) contribuye a la valorización especifica s_{ik}.
- El segundo término $\sum_{(i,j) \in A} c_{ijk} \cdot x_{ijk}$ indica el costo total de desplazamiento incurrido, de esta forma, carda arco utilizado resta su costo asociado c_{ijk} (típicamente negativo).

La sumatoria externa agrega las valorizaciones netas individuales de todos los usuarios, obteniendo así la valorización global del sistema.

4.4. Restricciones

El modelo incorpora las siguientes restricciones que ayudan a garantizar la factibilidad de las soluciones.

4.4.1. Restricciones de Inicio y Término

$$\sum_{j \in V : (1,j) \in A} x_{1jk} = 1 \quad \forall k \in U \tag{6}$$

$$\sum_{i \in V : (i,1) \in A} x_{i1k} = 1 \quad \forall k \in U \tag{7}$$

$$y_{1k} = 1 \quad \forall k \in U \tag{8}$$

Las restricciones (6) y (7) garantizan que cada usuario k inicie saliendo exactamente de un arco desde el nodo 1 y tanga su retorno exactamente al mismo nodo.

La restricción (8) establece que el inicio es obligatoriamente visitado por todos los usuarios, de esta forma se asegura que cada viaje forme un ciclo cerrado con origen y destino en el nodo 1.

4.4.2. Restricciones de Conservación de Flujo

$$\sum_{j \in V : (i,j) \in A} x_{ijk} = \sum_{j \in V : (j,i) \in A} x_{jik} = y_{ik} \quad \forall i \in V,\, k \in U \tag{9}$$

La restricción (9) indica la conservación de flujo en cada nodo para cada usuario. Así, si el nodo i es visitado por el usuario k ($y_{ik} = 1$), entonces debe existir exactamente un arco entrante y exactamente un arco saliente.

Por otro lado, si el nodo no es visitado ($y_{ik} = 0$), entonces no debe existir ningún arco entrante ni saliente asociado al usuario k en ese nodo. Con estas restricciones se busca garantizar la conectividad del viaje y la consistencia entre las variables de elección y las de secuenciamiento.

4.4.3. Restricciones de Visita única

$$\sum_{k \in U} y_{ik} \leq 1 \quad \forall i \in V \setminus \{1\} \tag{10}$$

La restricción (10) establece que cada uno de los nodos puede ser visitado por a lo más un usuario. Esta restricción en particular modela aquellas situaciones en las que los recursos para cada localización son limitados o en donde múltiples visitas no son permitidas.

El nodo inicial se excluye debido que todos los usuarios deben obligatoriamente visitarlo como punto de inicio y de finalización.

4.4.4. Restricciones de Ventanas de Tiempo

$$w_{ik} \geq e_i \cdot y_{ik} \quad \forall i \in V,\, k \in U \tag{11}$$

$$w_{ik} \leq l_i \cdot y_{ik} + M(1 - y_{ik}) \quad \forall i \in V,\, k \in U \tag{12}$$

Las restricciones (11) y (12) establecen que, si el usuario k visita el nodo i ($y_{ik} = 1$), el inicio del servicio w_{ik} debe realizarse dentro de la ventana de tiempo $[e_i, l_i]$ que corresponde al nodo. En caso de que el usuario llegue antes de e_i, este debe esperar hasta ese momento para comenzar. Por el contrario, si ocurre después de l_i, el nodo no podrá ser visitado.

El parámetro M presente en (12) corresponde a una constante suficientemente grande (big-M), utilizada para desactivar la restricción cuando el nodo no es visitado ($y_{ik} = 0$).

4.4.5. Restricciones de Propagación Temporal

$$w_{jk} \geq w_{ik} + t_i + d_{ij} - M(1 - x_{ijk}) \quad \forall (i,j) \in A,\, k \in U \tag{13}$$

La restricción (13) modela la propagación temporal a lo largo del viaje. Si el viajero k utiliza el arco (i, j) ($x_{ijk} = 1$), entonces el tiempo de inicio en el nodo j debe ser al menos igual al tiempo de inicio en el nodo i, más el tiempo de servicio en i (t_i), más el tiempo de viaje de i a j (d_{ij}).

Cuando el arco no es utilizado ($x_{ijk} = 0$), la constante M no utiliza la restricción, de esta forma se pueden capturar los tiempos de espera implícitos en casos de llegadas antes de la apertura del nodo.

4.4.6. Restricción de Duración Total del Tour

$$w_{1k} + \sum_{i \in V} t_i \cdot y_{ik} + \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} \cdot x_{ijk} \leq T_k \quad \forall k \in U \tag{14}$$

La restricción (14) indica que el tiempo total utilizado por el usuario k no puede superar su límite disponible T_k. Este tiempo total es obtenido considerando la suma del instante de retorno al depósito (w_{1k}, que representa el inicio del servicio en el depósito al finalizar el recorrido), junto con el tiempo total de servicio en los nodos visitados y el tiempo total de viaje en los arcos recorridos. Con esta restricción se busca representar el presupuesto temporal del usuario y acotar la duración máxima de su recorrido.

4.4.7. Restricciones de Eliminación de Subtours

$$u_{ik} - u_{jk} + n \cdot x_{ijk} \leq n - 1 \quad \forall i, j \in V \setminus \{1\},\, i \neq j,\, k \in U \tag{15}$$

$$1 \leq u_{ik} \leq n \quad \forall i \in V \setminus \{1\},\, k \in U \tag{16}$$

Las restricciones (15) y (16) corresponden a las desigualdades de Miller-Tucker-Zemlin [10], utilizadas para eliminar los viajes que no estén conectados con el nodo inicial. Las variables u_{ik} representan las posiciones aproximadas de los nodos en la secuencia de visita del usuario k. En caso de que el arco (i, j) sea utilizado ($x_{ijk} = 1$), se cumple que $u_{jk} \geq u_{ik} + 1$, garantizando que las posiciones aumenten de forma estrictamente creciente a lo largo del recorrido. Esta formulación, si bien no es la más fuerte desde el punto de vista de la relajación lineal, presenta una estructura compacta y es ampliamente empleada en problemas de ruteo [5].

4.5. Espacio de Búsqueda

El espacio de búsqueda del problema está conformado por todas las combinaciones posibles de valores para las variables de decisión que cumplen con las restricciones definidas en el modelo. Una solución factible $\mathbf{s} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{u})$ pertenece al conjunto de búsqueda $\mathcal{S}$ únicamente si satisface las restricciones (6)-(16).

El tamaño de este espacio crece de forma exponencial con respecto al número de nodos y usuarios. Para cada usuario k, la cantidad de tours posibles desde el depósito que consideran exactamente p nodos (sin incluir el depósito) está acotada por $\binom{n-1}{p} \cdot p!$, correspondiente a todas las formas de seleccionar y ordenar esos nodos. Si se consideran todos los valores posibles de p y la independencia entre las decisiones de distintos usuarios (respetando la restricción de visita única), el tamaño total del espacio aumenta factorialmente, evidenciando la alta complejidad computacional del problema [6].

A pesar de que las restricciones de ventanas de tiempo y duración limitan de manera considerable el conjunto de soluciones factibles, el problema continúa siendo NP-difícil incluso bajo estas condiciones adicionales [11]. Además, la estructura del espacio se caracteriza por la presencia de múltiples óptimos locales y regiones desconectadas debido a las restricciones temporales, lo que plantea un desafío importante para el diseño y desempeño de métodos de optimización exactos y aproximados.

5. Conclusiones

El estudio realizado permite la identificación de técnicas de solución para el EPTP, ya que si bien comparte un marco teórico común del TSP clásico [9], no encuentra la solución al mismo exacto problema. Se tienen diferencias considerables en las variantes que abordan los problemas, mientras que algunos enfoques se centran en el problema básico sin las restricciones adicionales [6], otros incorporan capacidades vehiculares [1], ventanas de tiempo [11] o incluso incertidumbre estocástica en la disponibilidad de los nodos [13].

Esta diversidad en las restricciones de los problemas refleja la necesidad de adaptación que se da para las formulaciones en contextos aplicados específicos, donde las características del mundo exigen extensiones del modelo base.

En tanto a las similitudes y diferencias entre las técnicas que ya existen, se identifican que todas comparten la estructura dual de decisión, se deben decidir vértices y secuenciamiento de visitas. Los métodos exactos se basan en programación entera [4] y Branch-Cut-And-Price [1] para aquellas instancias que tienen más de 500 vértices.

Por otro lado las metaheurísticas como la búsqueda tabú [12], algoritmos genéticos [3] y optimización por colonia de hormigas [8], hacen un sacrificio en las garantías de optimalidad a cambio de una mayor eficiencia computacional. La principal diferencia metodológica radica en el balance entre la calidad de la solución y el tiempo de cómputo, mientras que los enfoques de carácter hibrido que combinan metaheurísticas con búsqueda local han dado a demostrar que son superiores para aquellas instancias de gran escala [3], los métodos exactos mantienen mayor relevancia para instancias moderadas donde la optimalidad es crítica.

- Las técnicas se ven limitadas debido a:
- La sensibilidad de las metaheurísticas por la configuración de los parámetros.
- La dificultad para escalar a instancias con miles de vértices manteniendo la calidad.
- La ausencia de métodos sistemáticos que exploten la información histórica de problemas que ya han sido resueltos.

Además se tienen las formulaciones estocásticas [13] que aunque son más realistas, incrementan sustancialmente la complejidad computacional y requieren información probabilista que no siempre está disponible en aplicaciones prácticas.

Aquellas técnicas que son más prometedoras son aquellos algoritmos híbridos que integran múltiples paradigmas de optimización. En particular, la combinación de heurísticas multi-inicio con búsqueda tabú, esta combinación ha logrado brechas inferiores al 2 % en cuando a optimalidad respecta, considerando instancias de 500 vértices [3]. Así mismo la integración emergente de técnicas de aprendizaje automático guía la búsqueda y paralelización masiva mediante la integración de computación de alto rendimiento, representando direcciones altamente promisorias.

El trabajo a futuro en esta área de la investigación es una necesidad, debido al requerimiento de desarrollo de algoritmos adaptativos que se ajusten dinámicamente con estrategias de búsqueda según las características de la instancia, la exploración de formulaciones multi-objetivo [7] que consideren de forma simultánea criterios económicos, ambientales y sociales, y también la incorporación de aspectos dinámicos donde el problema evoluciona temporalmente requiriendo una re-optimización continua. También se debe tener en consideración la validación empírica de las soluciones en contextos reales de logística y turismo, permaneciendo como un área poco explorada que permitiría cerrar la brecha entre teoría y práctica.

Como lineamientos para posibles futuras investigaciones se sugiere:

1. Desarrollo de frameworks de aprendizaje por refuerzo que aprendan políticas de construcción de soluciones a partir de instancias resultas previamente.
2. Diseño de algoritmos que incorporen conocimiento específico del dominio mediante operadores de búsqueda local especializados.
3. Investigación de fórmulas que garanticen factibilidad bajo incertidumbre paramétrica sin incremento del costo computacional.
4. Exploración de aplicación de técnicas de descomposición que dividan el problema en subproblemas más tratables, particularmente para los casos con múltiples vehículos.

La integración de dichas soluciones podría generar soluciones mas eficientes para las aplicaciones prácticas del EPTP.

Referencias

[1] Claudia Archetti, Dominique Feillet, Alain Hertz, and Maria Grazia Speranza. The capacitated team orienteering and profitable tour problems. *Journal of the Operational Research Society*, 60(6):831–842, 2009.

[2] Egon Balas. The prize collecting traveling salesman problem. *Networks*, 19(6):621–636, 1989.

[3] Kasi Viswanath Dasari, Venkatesh Pandiri, and Alok Singh. Multi-start heuristics for the profitable tour problem. *Swarm and Evolutionary Computation*, 64:100897, 2021.

[4] Mauro Dell'Amico, Francesco Maffioli, and Peter Värbrand. On prize-collecting tours and the asymmetric travelling salesman problem. *International Transactions in Operational Research*, 2(3):297–308, 1995.

[5] Martin Desrochers and Gilbert Laporte. Improvements and extensions to the miller-tucker-zemlin subtour elimination constraints. *Operations Research Letters*, 10(1):27–36, 1991.

[6] Dominique Feillet, Pierre Dejax, and Michel Gendreau. Traveling salesman problems with profits. *Transportation science*, 39(2):188–205, 2005.

[7] Nicolas Jozefowiez, Frédéric Semet, and El-Ghazali Talbi. Multi-objective vehicle routing problems. *European journal of operational research*, 189(2):293–309, 2008.

[8] Liangjun Ke, Claudia Archetti, and Zuren Feng. Ants can solve the team orienteering problem. *Computers & Industrial Engineering*, 54(3):648–665, 2008.

[9] Eugene L Lawler. The traveling salesman problem: a guided tour of combinatorial optimization. *Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics*, 1985.

[10] Clair E Miller, Albert W Tucker, and Richard A Zemlin. Integer programming formulation of traveling salesman problems. *Journal of the ACM (JACM)*, 7(4):326–329, 1960.

[11] Peng Sun, Lucas P Veelenturf, Said Dabia, and Tom Van Woensel. The time-dependent capacitated profitable tour problem with time windows and precedence constraints. *European Journal of Operational Research*, 264(3):1058–1073, 2018.

[12] Éric Taillard, Philippe Badeau, Michel Gendreau, François Guertin, and Jean-Yves Potvin. A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with soft time windows. *Transportation science*, 31(2):170–186, 1997.

[13] Mengying Zhang, John Wang, and Hongwei Liu. The probabilistic profitable tour problem. *International Journal of Enterprise Information Systems (IJEIS)*, 13(3):51–64, 2017.