Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования национальный исследовательский университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Дисциплина «Математический анализ»

Отчет

По лабораторной работе №2

«Тригонометрические ряды Фурье»

Студент

Мовчан Игорь Евгеньевич
группа R3180

Преподаватель

Бойцев Антон Александрович

г. Санкт-Петербург,

2023 г.

Аналитическая часть

Задача: для функции $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \in [1, 3] \end{cases}$ построить общий тригонометрический ряд, ряд Фурье по синусам и по косинусам.

Сначала отметим, что функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, а значит, она разложима в ряд Фурье, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(f) \cos\frac{\pi k x}{l} + b_k(f) \sin\frac{\pi k x}{l} \right),$$

где

$$a_0(f) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx,$$

$$a_k(f) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{\pi k x}{l} dx,$$

$$b_k(f) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{\pi k x}{l} dx,$$

l – длина полупериода (для нашей функции = 3).

Разложения $f(x)$ в ряды Фурье по синусам и косинусам выглядят соответственно:

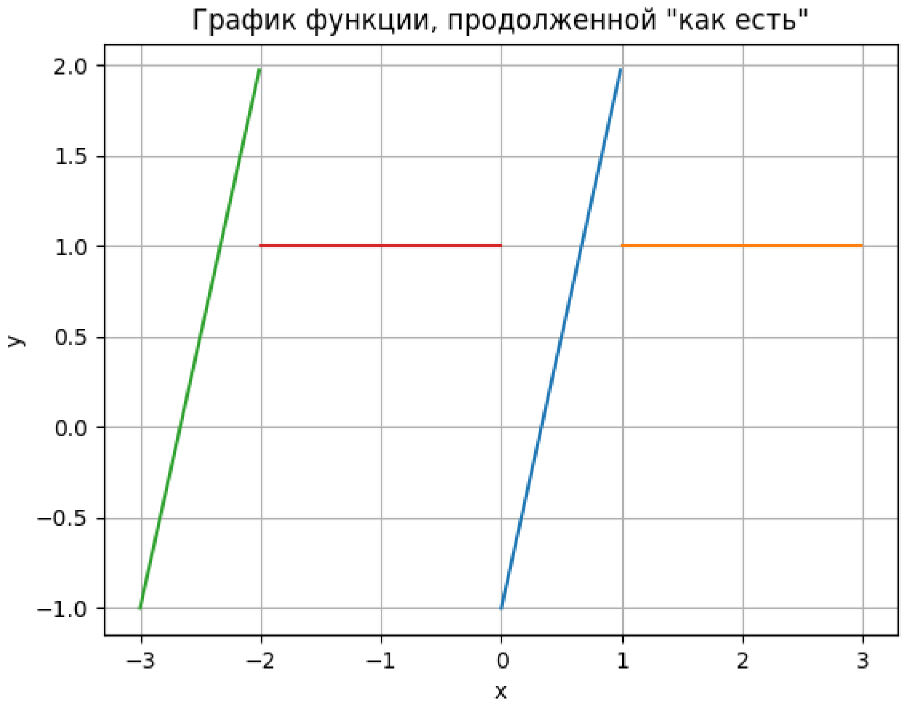
$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) \sin\frac{\pi k x}{l},$$

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos\frac{\pi k x}{l}$$

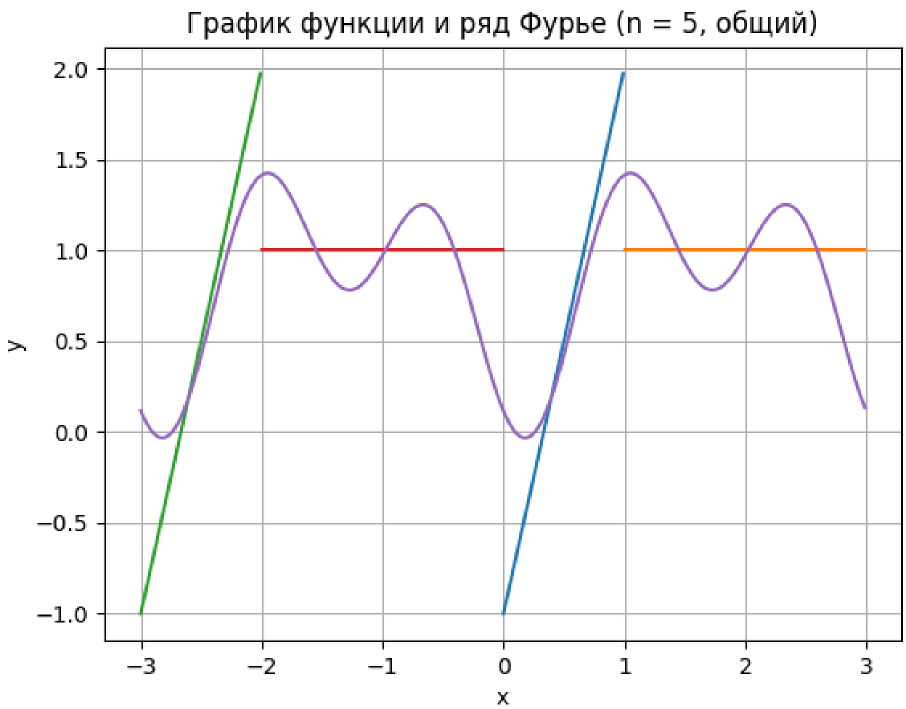
Программная часть

Ссылка на программу: https://github.com/C0ris/fourier_app

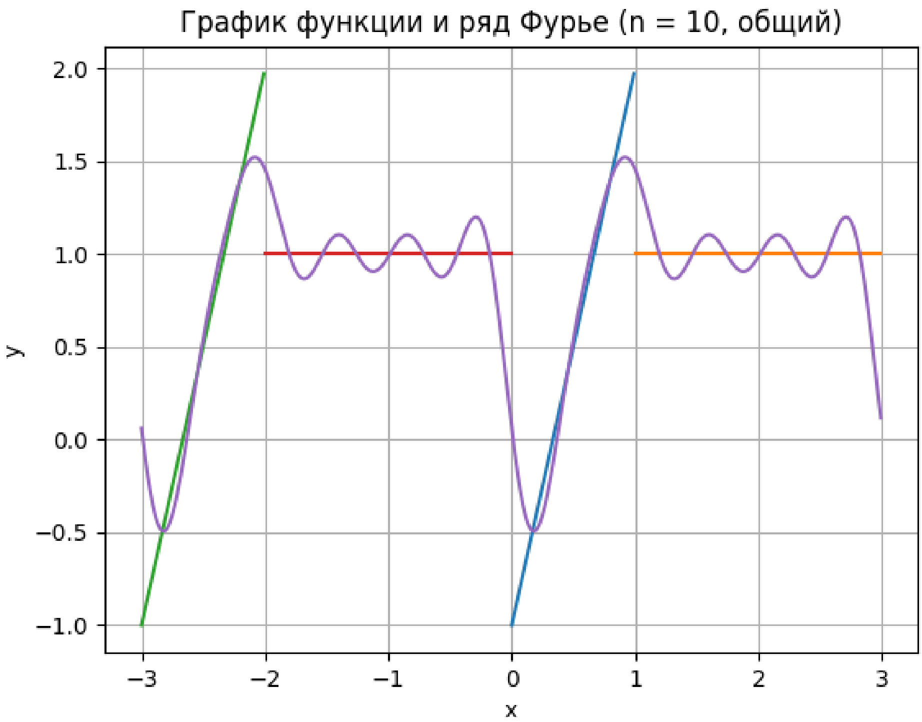
Общий тригонометрический ряд



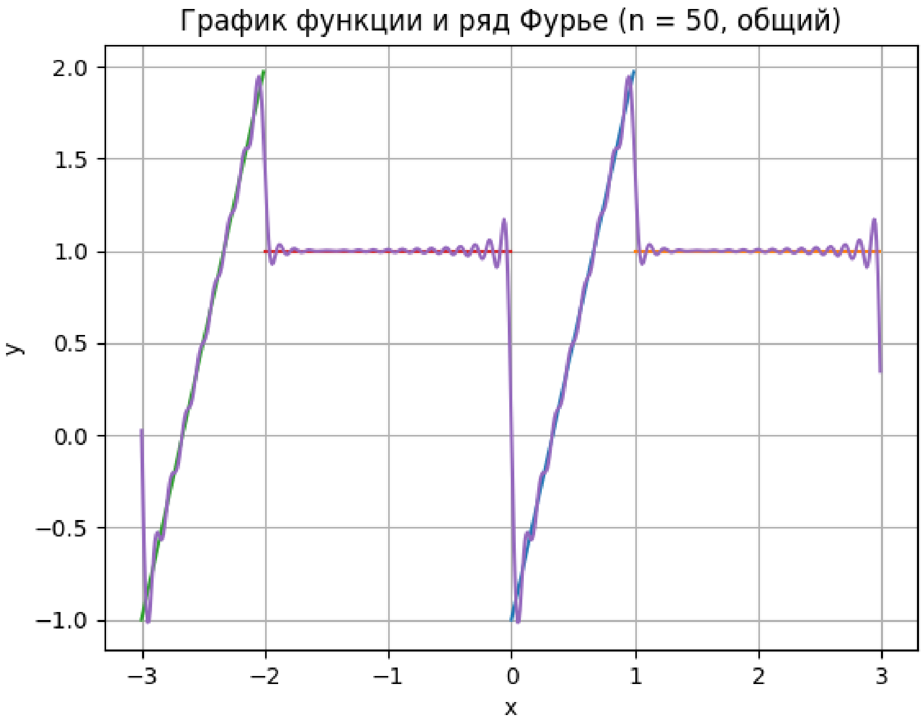
Частичные суммы общего тригонометрического ряда Фурье принимают следующие виды:



Видим, что при n = 5 точность приближения крайне маленькая. При n = 10 имеем практически неотличимую картину куска $3x - 1$, однако всё ещё большие разрывы вокруг прямой $y = 1$:

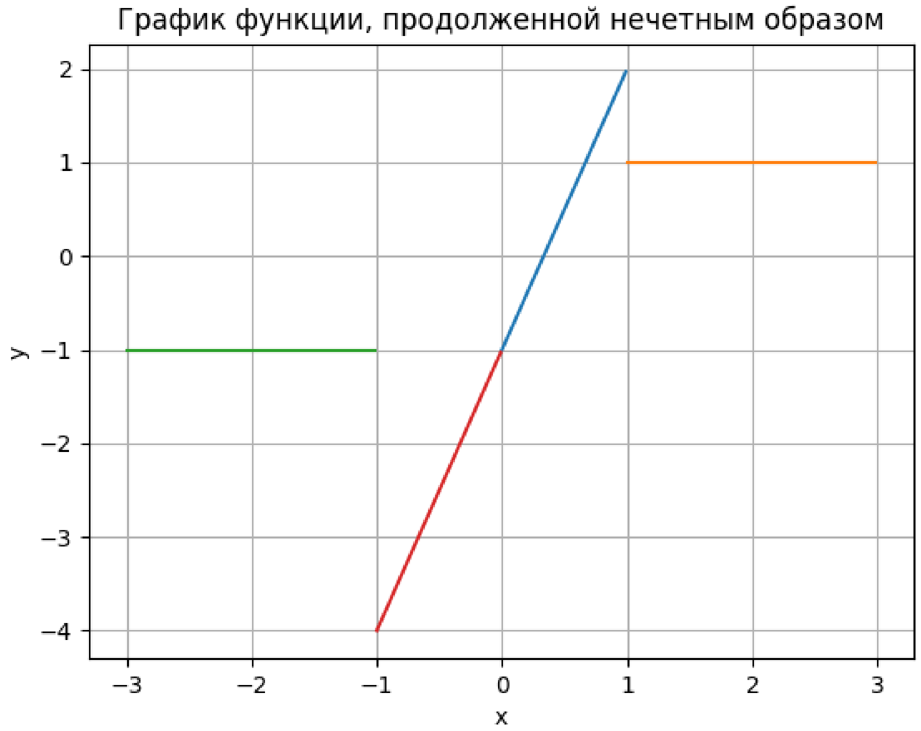


При n = 50 уже можем наблюдать достойное приближение нашей функции:



Ряд Фурье по синусам

Аналогичную картину наблюдаем и для ряда Фурье по синусам:



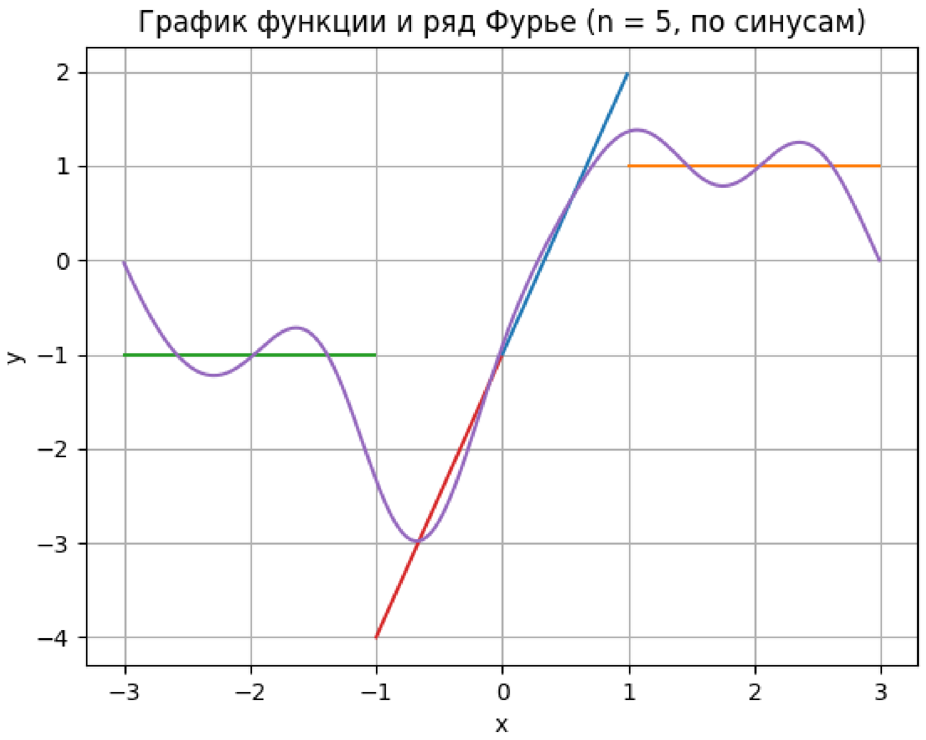



График функции и ряд Фурье (n = 10, по синусам)
y
x
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3

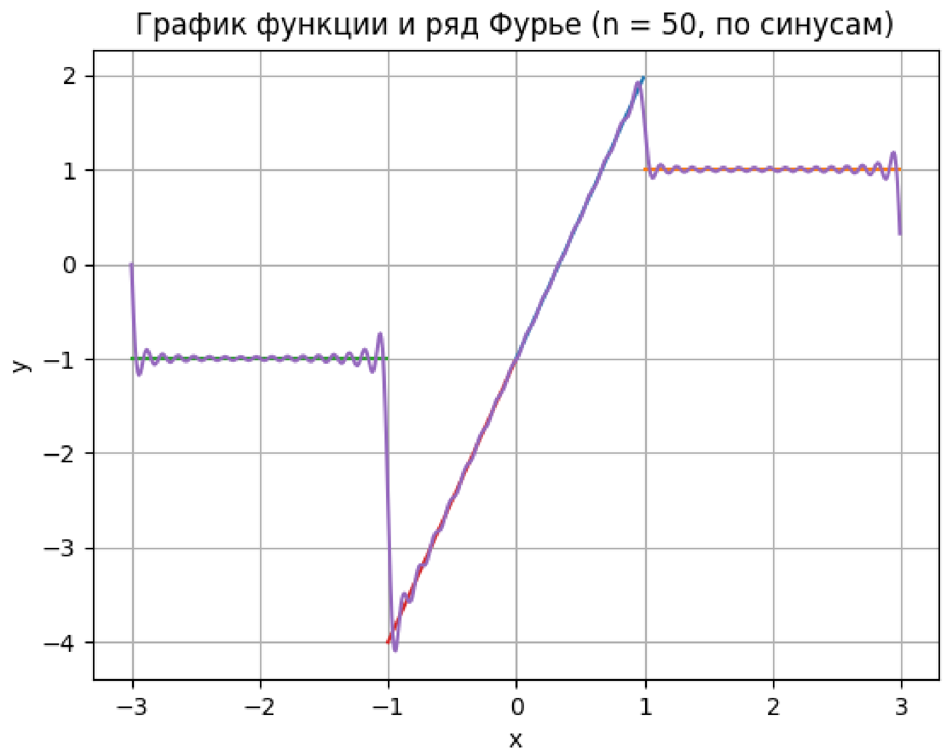
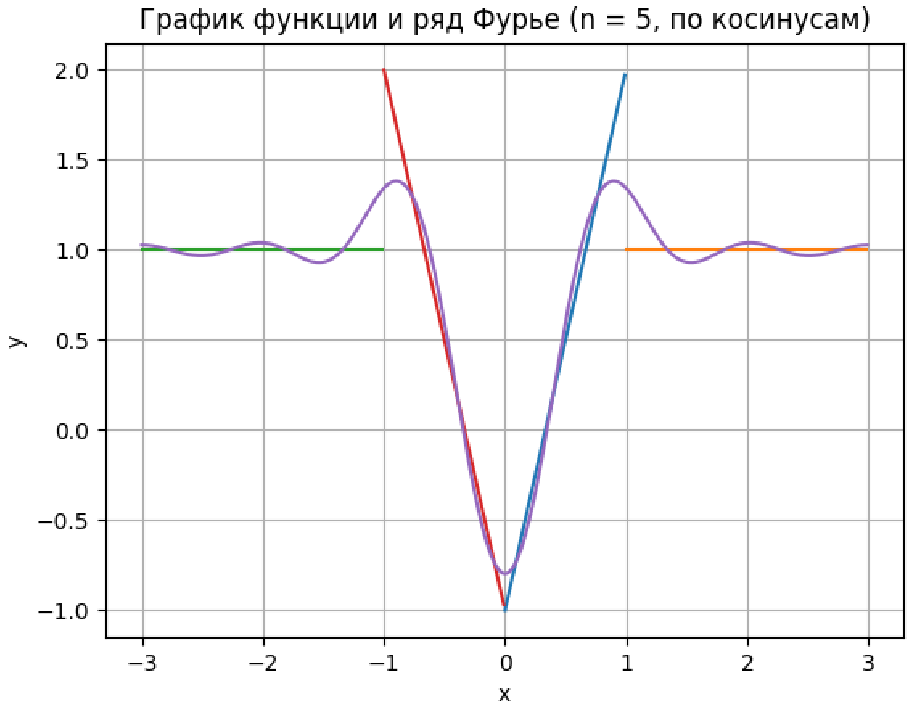
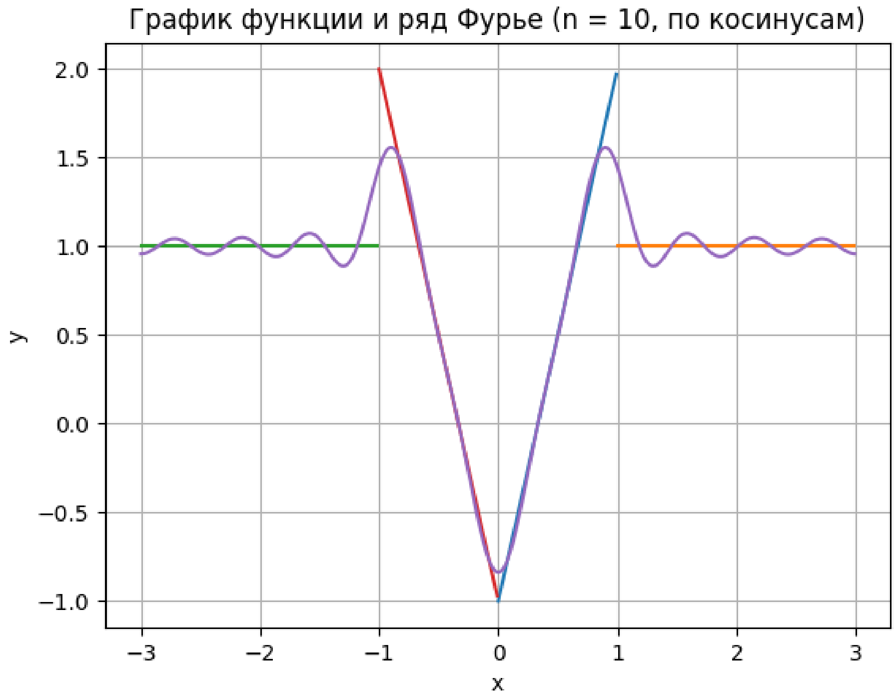


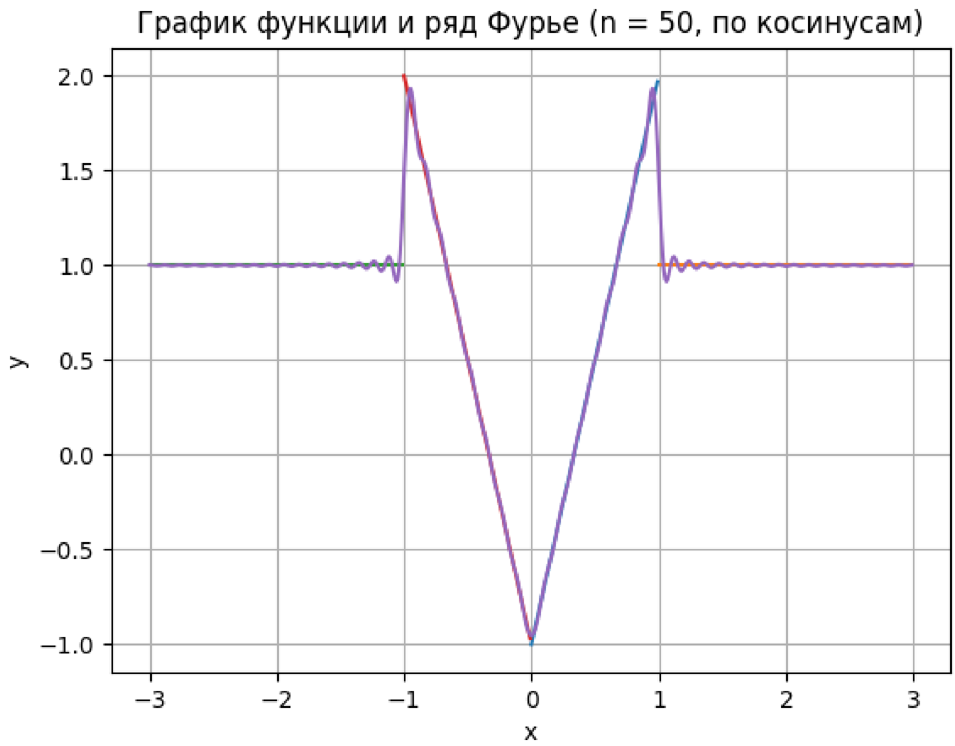
График функции и ряд Фурье (n = 50, по синусам)
y
x
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3

Ряд Фурье по косинусам

Для косинусов же получаем ситуацию более точного приближения вокруг 0, которая переходит в картину удивительной идентичности при n = 50:







Коэффициенты рядов Фурье для случая

Общего тригонометрического ряда:

$$a_k = \frac{\pi k \sin\left(\frac{\pi k}{3}\right) - \pi k \sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right) + 9\cos\left(\frac{\pi k}{3}\right) + 9\cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) - 9(-1)^k - 9}{\pi^2 k^2}$$

$$b_k = \frac{-\pi k - 2\pi(-1)^k k - 2\pi k \sin^2\left(\frac{\pi k}{3}\right) - \pi k \cos\left(\frac{\pi k}{3}\right) - 2\pi k \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) + 9\sin\left(\frac{\pi k}{3}\right) - 9\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right)}{\pi^2 k^2}$$

$$a_0 = \frac{5}{3}$$

Ряда по синусам:

$$b_k = \frac{-2\pi(-1)^k k - 4\pi k \cos\left(\frac{\pi k}{3}\right) + 18\sin\left(\frac{\pi k}{3}\right)}{\pi^2 k^2}$$

$$a_0 = -\frac{2}{3}$$

По косинусам:

$$a_k = \frac{-18 + 18\cos\left(\frac{\pi k}{3}\right) + 2\pi k \sin\left(\frac{\pi k}{3}\right)}{\pi^2 k^2}$$

$$a_0 = \frac{5}{3}$$

Выводы по проделанной работе

В результате работы научился аппроксимировать функции общими тригонометрическими рядами, а также рядами Фурье по синусам или косинусам, находить коэффициенты этих рядов компьютерными средствами. Полученные в процессе выполнения лабораторной работы навыки наверняка будут полезны в моем профессиональном будущем.