Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования национальный исследовательский
университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Дисциплина «Математический анализ»

Отчет
По лабораторной работе №1
«Интеграл Римана»

Студент

Мовчан Игорь Евгеньевич
группа R3180

Преподаватель

Бойцев Антон Александрович

г. Санкт-Петербург,

2023 г.

Аналитическая часть

Задача: приближённо вычислить значение $\int_0^{0.5} e^{3x}\,dx$

Сначала скажем, что задача поставлена корректно: значение интеграла существует и конечно, так как функция e^{3x} является непрерывной на всем отрезке $[0, 0.5]$ (а также в целом на любом отрезке $\mathbb{R}$). Также отметим, что у нас всюду существует первообразная функции $f(x) = e^{3x}$, поэтому само значение мы можем вычислить по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{3x} dx = \left.\frac{e^{3x}}{3}\right|_0^{0.5} = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{3} \approx 1.160563$$

Теперь получим интегральную сумму для равномерного разбиения τ отрезка $[0, 0.5]$ и его правого оснащения ξ, найдём её предел.

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} e^{3x_{k-1}}\Delta x_k = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{3k}{2n}}$$

Получаем сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{\frac{3}{2n}}$ и первым членом $b_1 = e^{\frac{3}{2n}}$, равную по определению $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. Исследуем предел:

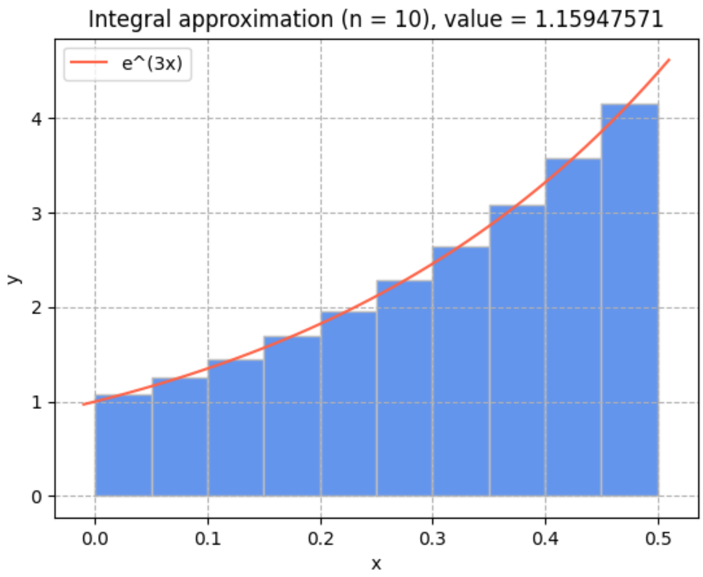
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \cdot \frac{e^{\frac{3}{2n}}\left(e^{\frac{3}{2}} - 1\right)}{e^{\frac{3}{2n}} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \cdot \frac{e^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{3}{2n}} = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{3} \approx 1.160563$$

То есть в пределе мы получаем идентичный применению формулы Ньютона-Лейбница результат, что и требовалось показать.

Программная часть

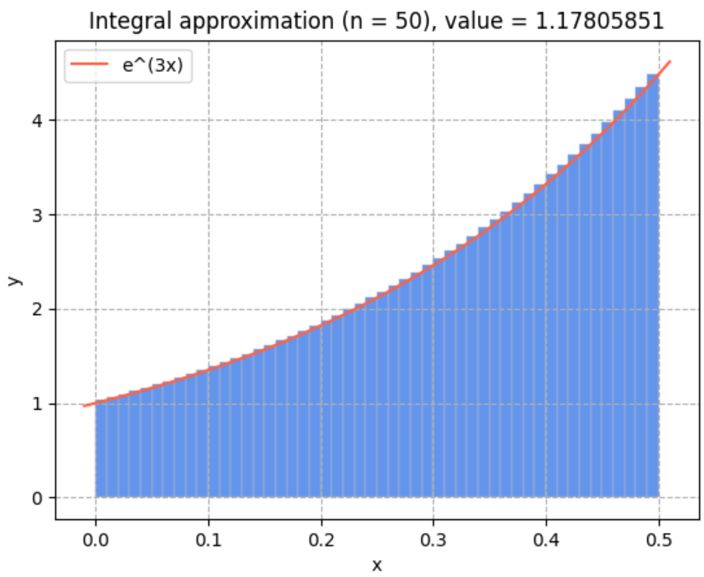
В программе будем применять ту же логику, что и для интегральных сумм, численно делая их всё ближе к искомому значению за счёт увеличения точек разбиения (далее - n).

Ссылка на программу: https://github.com/C0ris/int_app



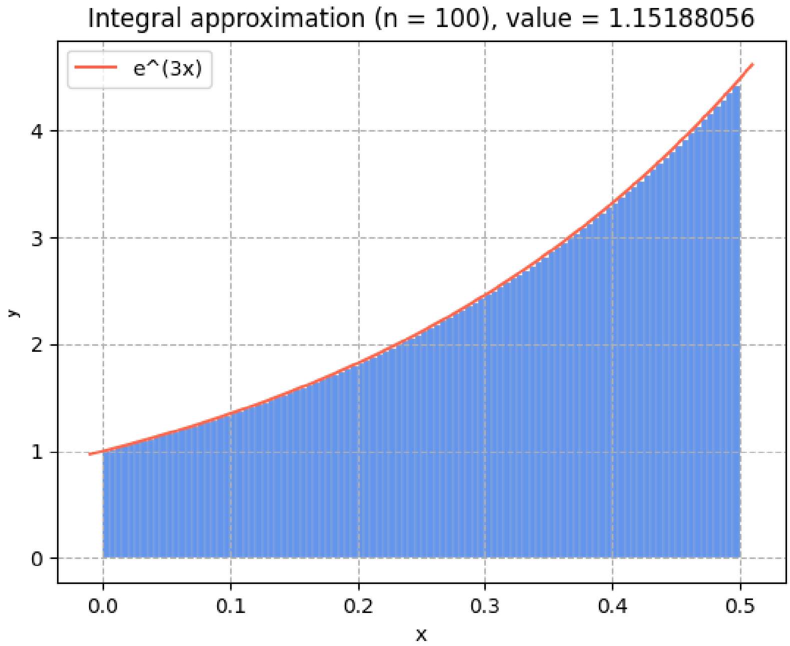
Выше приведён результат работы программы для n = 10 и центрального оснащения. Видно, что отрезок делится на 10 равных частей, для каждой находится высота, численно равная значению функции на середине отрезка, строится прямоугольник, которыми мы и приближаем значение интеграла.

Теперь сделаем оснащение правым, а также увеличим n до 50.



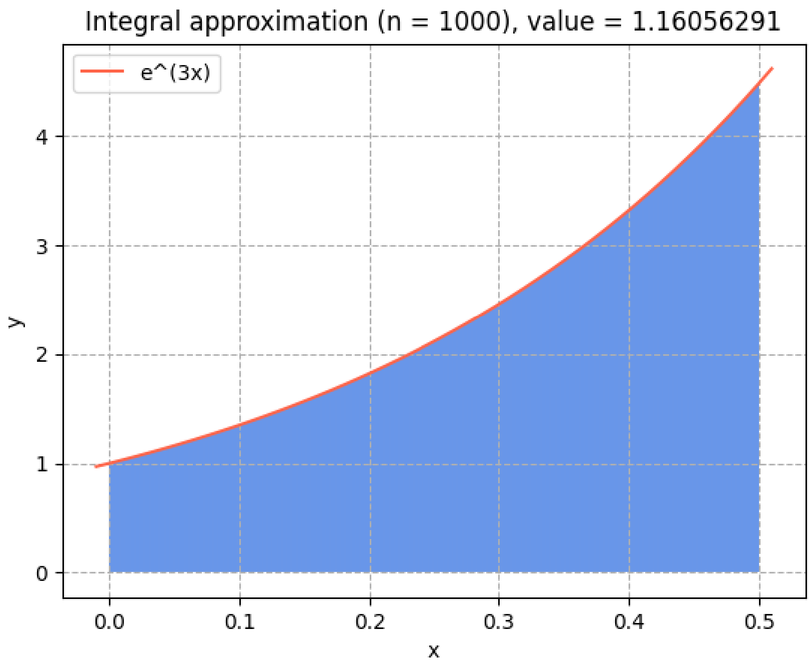
Результат получился ожидаемым: значение больше искомого, так как функция всюду возрастает, также возросла погрешность приближения в сравнении с прошлым вычислением (объяснение – в 3 части).

Для левого оснащения и n = 100 получаем:



Видим, что погрешность измерений до сих пор оставляет желать лучшего.

Для достаточно большого n и центрального оснащения получаем вполне достойный результат – сошлись 6 знаков после запятой (учитывая округление):



Погрешность вычислений

Объясним теперь отличающуюся в зависимости от выбора оснащения погрешность приближенных вычислений.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n g_i(\xi_i)\Delta x_i + R \Rightarrow R = \sum_{i=1}^n \left(\int_{x_i}^{x_i} f(x)dx - g(\xi_i)\Delta x_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - g(\xi_i))dx$$

Функция $g(x) = \begin{cases} f(x_{i-1}) \\ f\left(x_{i-1} + \frac{\Delta x_i}{2}\right) \\ f(x_i) \end{cases}$, если у нас левое, центральное и правое оснащения соответственно.

Рассмотрим ситуация левого оснащения:

$$f(x) = f(x_{i-1}) + f'(\xi_i)(x - x_{i-1})$$

Из разложения по Тейлору с остатком в форме Лагранжа ⇒

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big((f(x) - f(x_{i-1})\big)\, dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f'(\xi_i)(x - x_{i-1}))d(x - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} f'(\xi_i)\bigg|_{x_{i-1}}^{x_i} = \frac{n \cdot (\Delta x_i)^2}{2} f'(\xi_i) = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(\xi_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |R| \le \max_{x \epsilon [a,b]} |f'(x)| \cdot \frac{(b-a)^2}{2n}$$

Аналогичные результаты можем получить и для правого разбиения (вплоть до изменения x_{i-1} на x_i во всех местах, кроме подстановки).

Исследуем погрешность центрального оснащения:

$$f(x) = f\left(x_{i-1} + \frac{\Delta x}{2}\right) + f'\left(x_{i-1} + \frac{\Delta x}{2}\right)\left(x - \left(x_{i-1} + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) +$$

$$+ \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - \left(x_{i-1} + \frac{\Delta x}{2}\right)\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left((f(x) - f\left(x_{i-1} + \frac{\Delta \mathrm{x}}{2} \right) \right) dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f'\left(x_{i-1} + \frac{\Delta \mathrm{x}}{2} \right) \left(x - \left(x_{i-1} + \frac{\Delta \mathrm{x}}{2} \right) \right) + \frac{f''(\xi)}{2} \left(x - \left(x_{i-1} + \frac{\Delta \mathrm{x}}{2} \right) \right)^2 \right) dx =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f''(\xi)}{6} \left(x - \left(x_{i-1} + \frac{\Delta \mathrm{x}}{2} \right) \right)^3 \Bigg|_{x_{i-1}}^{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f''(\xi)}{48} \cdot 2(\Delta x)^3 = f''(\xi) \frac{n(\Delta x)^3}{24} =$$

$$= f''(\xi) \frac{(\mathrm{b} - \mathrm{a})^3}{24n^2} \Rightarrow |R| \le \max_{x \epsilon [a,b]} |f''(\mathrm{x})| \cdot \frac{(\mathrm{b} - \mathrm{a})^3}{24n^2}$$

Выходит, что практически (если у функции существует вторая производная) во всех ситуациях центральное оснащение оказывается в более выигрышном положении, нежели нижние и верхние суммы Дарбу, так как оценка погрешностей основывается уже не на первой, а не второй производной, а n принимает вторую степень вместо первой. Это полностью отражается и на наших результатах.

Выводы по проделанной работе

В результате работы научился приближать значение интеграла с помощью метода прямоугольников, а также находить теоретическую погрешность аппроксимации в зависимости от количества точек разбиения. Полученные в процессе выполнения лабораторной работы навыки наверняка будут полезны в моем профессиональном будущем :).