Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación
Primer Semestre de 2022

IIC 2213 – Lógica para ciencia de la Computación

Ayudantía 4: Lógica Proposicional

1 Problemas proposicionales pequeños:

Sean las siguientes proposiciones:

$$\begin{aligned} p &= \text{Me gustan los gatos} \\ q &= \text{Soy una persona feliz} \\ r &= \text{Me va a ir súper bien en lógica.} \end{aligned}$$

, Defina una fórmula en L(P) para cada una de las siguientes afirmaciones:

- Me gustan los gatos y me va a ir súper bien en lógica.
- Si no me gustan los gatos o no me va ir súper bien en lógica entonces no soy una persona feliz.
- Soy una persona feliz si y solo si me gustan los gatos.
- O me gustan los gatos y soy una persona feliz o si no me gustan los gatos no me va a ir súper bien en lógica.

Solución

- $p \vee r$
- $\neg p \vee \neg r \rightarrow \neg q$
- $p \leftrightarrow q$
- $(p \wedge q) \vee (\neg p \rightarrow \neg r)$

2 Tautologías

Demuestre que la siguiente formula φ es una tautología.

$$\varphi = (p \wedge (q \vee r)) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

Solución

Suponemos que no es tautología, es decir existe valuación τ tal que $\tau \not\models \varphi$. Entonces como la fórmula es una implicación y esta es falsa sabemos que para esta valuación pasa lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1 &\to 0 \\ \text{Es decir}\ldots & \\ p \wedge (q \vee r) &= 1 \\ \text{Cómo es una conjunción:} & \\ p &= 1 \\ q \vee r &= 1 \\ \text{Ahora tomamos el otro lado:} & \\ (p \wedge q) \vee (p \wedge r) &= 0 \\ \text{Reemplazando } p & \\ q \vee r &= 0 \end{aligned}$$

Llegamos a una contradicción! Por lo tanto sabemos que no puede existir una valuación τ tal que no se cumple la fórmula, en conclusión es una tautología.

3 T4 2021-1

Tenemos un grafo digirido G y la siguiente propiedad:

> **P**: Si el grafo no tiene ciclos , entonces tiene un nodo que no tiene aristas entrantes (comúnmente llamada una raíz).

Hay que mostrar que P es verdad.
Decides hacerlo modelando cada grafo $G = (V, E)$, con $V = 1, ..., n$, con un

conjunto de proposiciones $P_E = \{e_{ij} | i, j \in \{1, ..., n\}\}$, y las siguientes fórmulas: una fórmula $\varphi_E = \bigwedge_{(i,j)\in E} e_{i,j}$ y otra $\varphi_{\bar{E}} = \bigwedge_{(i,j)\notin E} \neg e_{i,j}$

1. Demuestra que existe una sola valuación que hace verdad a $\Sigma = \varphi_E, \varphi_{\bar{E}}$: la valuación que asigna un 1 a la variable e_{ij} si y solo si (i, j) es una arista en E. Esto nos va a permitir asumir que cada valuación para P_E corresponde a un grafo.
2. Construye una fórmula que sea verdad si y solo si el grafo G representado con las proposiciones y fórmulas tiene un nodo sin aristas entrantes.

3.1 Solución

Vamos a asumir que existe una valuación τ que hace verdad Σ, es decir $\tau \models \Sigma$ y que está asigna un 1 aun $e_{i,j}$ que no es arista en E.

$$e_{i_0,j_0} = 1$$
$$e_{i_0,j_0} \notin E$$

Ahora podemos calcular las fórmulas usando lo definido anteriormente.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\bar{E}} &= \bigwedge_{(i,j)\notin E} \neg e_{i,j} \\
&= \cdots \wedge \neg e_{i_0,j_0} \wedge \cdots = \cdots \wedge 0 \wedge \cdots = 0 \\
\varphi_{\bar{E}} &= 0 \to \tau \not\models \Sigma
\end{aligned}$$

Llegamos a una contradicción porque tenemos que la valuación no satisface a Σ cuando habíamos supuesto que lo hacía. Por lo tanto queda demostrado que una valuación solo satisface a la fórmula si se asigna un 1 a un $e_{i,j}$ si y solo si $(i,j) \in E$.

3.2 Solución

Una fórmula que es solo verdad si G tiene un nodo sin aristas entrantes es la siguiente:

$$\varphi_R = \bigvee_{i=1}^{n} (\bigwedge_{j=1}^{n} \neg e_{j,i})$$

La parte de adentro de la paréntesis se asegura que no haya ningún nodo j tal que exista una arista que vaya de este al nodo i siendo examinado. Es una conjunción porque con solo una arista entrante ese nodo ya no es raíz. La negación está ahí porque queremos que esta parte sea falsa si existe una arista entrante. Fuera del paréntesis tenemos una disyunción porque basta con un solo nodo raíz para que sea verdad que G tiene un nodo sin aristas entrantes. Esta además va a recorrer los nodos.