

0.高中生也能看懂的的神经科学数学基础

0.高中生也能看懂的的神经科学数学基础

2024-07-14更新:

0.1.为什么写这个东西?

0.2.什么是计算神经科学?

1.理解单个神经元: Hodgkin-Huxley 方程

1.1离子电导

1.2静息电位: 电化学平衡

1.2.1扩散: 无规行走

1.2.2.粘性摩擦系数: 溶液的摩擦耗散和电场力下运动

1.2.3.统计物理学的基本知识

1.2.4.Einstein 关系的推导

1.3.描述动作电位的产生和传播

2024-07-14更新:

- 我本来以为两三个小时就能打完我这周学的东西了, 结果我打了三个小时, 却连生物物理学的一部分都没打完, 这才是我这周学的大概 20%。不仅如此, 我觉得我写的东西貌似也没什么启发性.....问题出在哪里? 我不明白。我想公式的推导大概可以不写在文章里面, 而是转用引用的方式写作。到底更应该注重什么东西? 我不知道。
 - 我想首先的问题在于: 我没有搞清楚这篇文章和教科书的区别——这篇文章应该和教科书相去甚远。文章的特点主要是记录了我的学习路径。系统学习这些课程的人可能会碰到一些问题, 我的希望是他们看到这篇文章后能在短的时间内克服这些问题。
 - 受众是谁? 主要是想要学习计算神经科学的高中生。
- 知乎的文字编辑器实在是不敢恭维。导入 docx 吞公式, 导入 md 吞图片.....图床真是烦人。
- 我把打了三个多小时的第一版删了, 换了个诡异的写作风格, 图片也都去掉了, 不知道合不合读者的胃口。

0.1.为什么写这个东西?

笔者写这篇文章的时候刚刚高考结束完一个月, 未来决定学习计算神经科学。我想要尽早参与神经科学的科研学习, 但同时我的基础课也都没有学完。

我之前有个想法是一定要打好基础才能去进行下一步的学习, 而这个所谓的 **打好基础** 到底到什么度为止, 其实我并没有怎么想过, 只是觉得学得越深越好越多越好, 结果却做了很多的无用功。这也是我的高中老师和竞赛教练一直有的想法。

面对这个难题, Philip Nelson的《生物物理学: 能量、信息、生命》中的引言很启发我:

我认识到本科教育使我到大学最后一年(甚至更晚)才能接触到大量基本概念.....尚未获得全貌, 人们就开始小心翼翼地建造复杂的数学大厦.....很多本科生在第一年就开始做研究, 他们需要及早知道概况。

PiKaChu345的[视频](#)也在这个问题上启发了我:

认为要多读书的人往往认为**只有**到达前沿**才能**开始研究。他们潜意识里认为在到达前沿之前所有的问题都已经被人们解决了；只要到达前沿，自动学会研究。不管之前有没有受过做研究的教育。

认为要多做题的人往往认为要做大量的题目，打好坚持的基础。他们潜意识里认为**只要**自己的基础足够数量，**就**可以做出好的研究。

所以为什么不能像做研究一样学习知识呢？

同时我也越来越意识到发现问题的重要性。之前的高中同学有几个总是能提出具有启发性的问题，这让我非常佩服。

我希望写这样一篇文章——能让没有基础的人们尽可能轻松地阅读，同时以研究感兴趣的问题作为文章的主线，而不是处处按照教材的顺序。

这篇文章是我边学边写的，势必会有很多问题和错误。但随着之后的学习，这些前面的问题和错误会被修正。也希望能吸引更多的人们来学习或指点。

我希望那个花费大约 100 个小时来写作这篇文章，在每周的周日更新写两个小时。今天是 2024-07-08，不出意外的话，明年的今天就可以完成这篇文章了。

0.2.什么是计算神经科学？

⚠ Caution

1. 计算神经科学在研究什么问题？
2. 计算神经科学有哪些研究成果？

1.理解单个神经元：Hodgkin-Huxley 方程

高中我们就已经学习了神经元的静息电位和动作电位：

- 静息电位的时候 K^+ 外流->外正内负
- 动作电位的时候 Na^+ 内流->外负内正。

高中生的读者可能觉得这样就足够了，但其实这背后还有很多的问题没有解决：

⚠ Caution

1. 直观的看， V_m 的改变来自于 G_K 、 G_{Na} 等**离子电导**的改变。不过电位到底为什么改变？离子电导由什么来决定？又因为什么而产生变化？我们能不能得知这些变化可能是什么形式的？
2. 在**静息电位**的时候，细胞显然是处于一个**有别于外界的稳态**之中—— V_m 稳定在大约 $-70mV$ 左右而不是 0。这是由什么导致的呢？
3. **动作电位** 是如何产生的？又是如何**传导**的？我们都知道**髓鞘**的产生让有颌类脊椎动物的神经传导速度大大加快了，这是如何做到的？乌贼没有髓鞘，但它的轴突又粗又长，轴突的物理特征会怎么样影响动作电位的传导？

1.1离子电导

- 电位到底为什么改变？
- 离子电导由什么来决定？
- 离子电导因为什么而产生变化？我们能不能得知这些变化可能是什么形式的？

1.2静息电位：电化学平衡^{1 2}

静息电位的产生源自于 **扩散** 和 **电场力作用下运动** 的平衡——或者说 **电化学平衡**。

这需要一些简单的物理知识，但毕竟这并不是生物物理学，所以我们并不需要细究背后的物理学机制。

1. 我们知道**扩散**的本质是无规行走。那么如何定量地描述无规行走？又如何定量地描述扩散？
2. 我们知道粒子和溶液分子碰撞会导致**摩擦耗散**。这让溶液中粒子在外力下的运动不同于理想中的匀加速运动。那么碰撞的结果具体是什么？又如何定量地计算这种摩擦耗散？粒子在**电场力**和溶液摩擦耗散作用下的运动如何定量地描述？
3. 如何推导出**电化学平衡**？

1.2.1扩散：无规行走

Important

关于无规行走的结果，我们要推出来一个重要的结论是：

$$E[x(t)^2] = 2Dt$$

关于公式的一个简单易懂的推导见《生物物理学：能量、信息、生命》§4.1.2¹。推导这个结果并不需要任何超出高中的数学知识，只需要知道随机变量的运算法则就可以了。书中以下面的例子推导了位移 x 的二阶矩的均值 $E[x_n^2]$ 与位移次数 n 的正比例关系：

假设这是一个**离散**的**一维**无规行走，假设一个粒子，从原点开始运动，每一次运动有一半的概率向 x -轴 正方向移动 l ，有一半的概率向负方向移动 l 。它在 n 次运动后的位移记为 x_n 。位移 L 也是一个随机变量：

$$P(L = l) = \frac{1}{2}, P(L = -l) = \frac{1}{2}$$

试着想象一下！书中的推导实际上仅仅用到了独立随机变量的期望乘积法则和

$$E[x_n] = 0$$

就通过累加法得到了：

$$E[x_n^2] = nL^2$$

你可能会说这不过是二项分布而已，关于这个过程的全部细节都可以推出来。确实如此。不过我们得到的结论可不仅限于二项分布。实际上对于任意分布的 L ，通过简单的变换都可以得到：

$$E[(x_N - NE[L])^2] = NE[L^2]$$

这也是《生物物理学：能量、信息、生命》§4.1.3¹的结果。

Important

虽然这里只提到了

$$E[x(t)^2] = 2Dt$$

不过很显然，对于 y, z 也是一样的。对于三维的无规行走：

$$E[r^2] = E[x^2] + E[y^2] + E[z^2] = 6Dt$$

关于无规行走还有一个有趣的例子有关高分子的尺寸和分子量，见《生物物理学：能量、信息、生命》§4.3.1¹

在这个例子中我们得到：

$$E[r_N^2] = 3NL^2 \propto M$$

高分子的半径的平方和其分子量大致成正比。

① Note

扩散在亚细胞层面非常迅速：

- 对于室温下水中的小分子

$$D \approx 10^{-9} \text{m}^2 \text{s}^{-1} = 1 \mu\text{m}^2 \text{ms}^{-1}$$

- 在半径为 $1 \mu\text{m}$ 的细菌内，小分子从中心均匀扩散到整个细胞的用时大概只需要 0.2ms 。

1.2.2.粘性摩擦系数：溶液的摩擦耗散和电场力下运动

① Caution

摩擦是什么？

Gilbert：好的。你说过，由于热运动，处于室温的气体不会落到地板上。那么，它们为什么不会因为摩擦而减速并最终停止（然后落向地板）呢？

Sullivan：啊，那不可能，因为能量是守恒的。所有气体分子之间仅发生弹性碰撞，就像一年级物理课中学过的弹球那样。

Gilbert：哦？那什么是摩擦呢？如果在比萨斜塔上丢下两个球，由于摩擦，轻的会落得慢一些。所有人都知道机械能并不守恒它最终转化为热能。

Sullivan：哦，嗯....

你看，一知半解对于两位虚拟的科学家来说真是件危险的事。假如不是扔一个小球，而是把一个气体分子以极大速度射进房间，比如100倍于平均速度（确实可以用粒子加速器做到这一点），会发生什么呢？

摘自《生物物理学：能量、信息、生命》§3.2¹

我们先回顾一下高中物理学过的知识：

一个典型的例子是物体自由落体时受到的来自空气的平方阻力：

$$f = Cv^2$$

当物体以稳定的速度下落的时候：

$$Cv_{ss}^2 = mg$$

解得的稳定速度：

$$v_{ss} = \sqrt{\frac{mg}{C}}$$

引入这个例子的原因并不是想说明具体的数学细节，而是想说明最终的稳定速度是由外力 F 和摩擦共同决定的。在这个例子中 f 是 v 的函数。不过也并不一定如此。

Important

和上一个例子不同，这里甚至都没有阻力 f 出现。**粘性摩擦耗散**源于物理实体和周围热运动的流体分子的随机碰撞。随机碰撞的摩擦耗散的结果是粒子在每次碰撞之后的初速度满足

$$E[v_0] = 0$$

所以在外力驱动下，一维的匀加速运动的初速度为 0，

$$E[x] = \frac{f}{2m}(\Delta t)^2$$

粒子的平均速度为

$$v_{diff} = \frac{E[x]}{\Delta t} = \frac{F\Delta t}{2m}$$

Important

而其中 m , Δt 都是粒子本身的特性。而和 F 无关。因此可以设 ζ 为**粘性摩擦系数**：

$$v_{diff} = \frac{F}{\zeta}$$

在这个模型中：

$$\zeta = \frac{2m}{\Delta t}$$

Note

Stokes 定律给出了在低雷诺数流体中，球形物体的粘性摩擦系数 ζ ：

$$\zeta = 6\pi\eta R$$

Caution

值得一提的是这里的

$$\zeta = \frac{2m}{\Delta t}$$

并不一定，会随着模型的改变而改变。不过我们接下来要推出来的 **Einstein 关系** 却是一定的。

Caution

另外，引入一个概率分布的 Δt 并不会改变

$$v_{diff} = \frac{F}{\zeta}$$

Einstein 关系也不会改变：

$$\zeta D = k_B T$$

不过在这里， ζ 的定义有所不同：

$$\zeta = \frac{m}{\tau}$$

其中 τ 是平均碰撞时间。

1.2.3.统计物理学的基本知识

根据1.2.1

$$D = \frac{L^2}{2\Delta t}$$

根据1.2.2

$$\zeta = \frac{2m}{\Delta t}$$

根据1.2.3

$$\left(\frac{L}{\Delta t}\right)^2 = E[v^2] = \frac{k_B T}{m}$$

我们就推导出了

 Important

Einstein 关系:

$$\zeta D = k_B T$$

1.2.4.Einstein 关系的推导

1.3.描述动作电位的产生和传播

1. 《生物物理学：能量、信息、生命》 § 4, § 7.4, § 11.1 [↩](#) [↩](#) [↩](#) [↩](#) [↩](#)

2. 《费曼物理学讲义》 § 43 [↩](#)