Дубовицкий Н. А. Вариант 5

```
Параметры: N = 3 k = 5 p = [0.3, 0.5, 0.6]  M = 200000

Аналитические вероятности:
  P(A) = 1 - ∏(1-p_i)^k                     = 0.999946
  P(B) = ∏[1 - (1-p_i)^(k-1)]               = 0.694169
  P(C) = Σ_j (1-p_j)^k ∏_{i≠j} [1 - (1-p_i)^(k-1)] = 0.183966

Монте-Карло (оценка ± 95% ДИ):
  P̂(A) = 0.999570  CI95 = [0.999479, 0.999661]
  P̂(B) = 0.694785  CI95 = [0.692767, 0.696803]
  P̂(C) = 0.283175  CI95 = [0.281200, 0.285150]
```

Обозначим $q_i = 1 - p_i$. Для i-го стрелка номер первого попадания
T_i ~геометрическое распределение:

$$\Pr\{T_i = t\} = q_i^{t-1} p_i, t = 1,2, \ldots$$

Стрелок делает $\min(T_i, k)$выстрелов (после первого попадания прекращает).

Событие A

«У всех вместе останется **хотя бы один** патрон».
Это не выполняется **только тогда**, когда каждый израсходовал все kпатронов, т.е. ни у кого не было попадания за первые kвыстрелов:

$$\Pr(\bar{A}) = \prod_{i=1}^{N} q_i^k .$$

Отсюда

$$\boxed{\Pr(A) = 1 - \prod_{i=1}^{N} q_i^k}.$$

Событие B

«**Ни у кого** не израсходован весь боезапас».
Для каждого стрелка это означает, что попадание произошло **до** k-го выстрела:

$$\Pr(\text{у } i\text{-го } < k \text{ выстрелов}) = \Pr(T_i \le k - 1) = 1 - q_i^{k-1}.$$

Независимость стрелков даёт

$$\boxed{\Pr(B) = \prod_{i=1}^{N} (1 - q_i^{k-1})}.$$

Событие C

«**Ровно один** израсходует весь боезапас, остальные — не весь».
Пусть это j-й стрелок. Тогда у него $T_j > k$(вероятность q_j^k), а у всех остальных $T_i \leq k - 1$(вероятности $1 - q_i^{k-1}$). Складываем по всем возможным j:

$$\boxed{\Pr(C) = \sum_{j=1}^{N} q_j^k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} (1 - q_i^{k-1})}.$$

Частный случай (одинаковые меткости $p_i = p$)

$$\boxed{\Pr(A) = 1 - (1 - p)^{kN}}, \boxed{\Pr(B) = (1 - (1 - p)^{k-1})^N}, \boxed{\Pr(C) = N(1 - p)^k (1 - (1 - p)^{k-1})^{N-1}}.$$

Ответ на контрольный вопрос

Главное отличие между дискретно и непрерывно распределёнными случайными величинами заключается в характере множества возможных значений и способе их описания.

- **Дискретная случайная величина** может принимать **только отдельные (конечные или счётные)** значения.
  Для неё задаётся **закон распределения вероятностей** — перечень всех возможных значений x_iи соответствующих им вероятностей $P(X = x_i)$, при этом

$$\sum_i P(X = x_i) = 1.$$

Примеры: количество попаданий, число деталей, число голов при бросании монеты и т.д.

- **Непрерывная случайная величина** может принимать **любое значение на некотором интервале** (например, $[a, b]$или $[0, +\infty)$).
  Вероятность того, что она примет конкретное значение, равна нулю, а распределение описывается **функцией плотности вероятности** $f(x)$, связанной с функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt\,, P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Примеры: время ожидания, длина детали, уровень шума, температура и т.д.

Таким образом:

- дискретная — **суммируется** (вероятности отдельных значений),
- непрерывная — **интегрируется** (плотность вероятности на интервалах).