TDM : Vols d'étourneaux

1 Modèle de Vicsek

FIGURE 1 – Crédit photo Marco Valk.

Pour celui qui y a fait attention, le vol des étourneaux au coucher du soleil décrit des figures remarquables. Elles excitent la curiosité et leur compréhension reste encore un sujet actif de recherche qui touche sciences physiques, sciences cognitives et du vivant. La modélisation des effets collectifs ouvre un vaste champ d'applications depuis la biologie jusqu'à la conception de robots interactifs.
Vicsek a conçu un modèle extrêmement simple pour mettre en évidence certains comportements collectifs d'une assemblée de particules ponctuelles (par exemple des oiseaux !). On considère donc N individus se déplaçant dans un plan xy, tous animées d'une même vitesse v_0 constante dans le temps, mais dont la direction est propre à chaque individu, n, et caractérisée par son angle θ_n avec l'axe x. L'effet collectif est modélisé de la manière suivante : à chaque pas de temps, Δt, une nouvelle direction est prise par l'oiseau en fonction des directions de ses voisins. Cette nouvelle direction correspond à la direction moyenne de ses congénères qui se trouvent à cet instant dans un cercle de rayon a autour de lui. Il prend alors cette direction et se dirige en ligne droite à la vitesse v_0 jusqu'au prochain pas de temps. Pour tenir compte des effets stochastiques d'origines diverses (fluctuations des forces aérodynamiques, erreur dans la mesure ou la décision), le choix de la direction est perturbé par un aléa caractérisé par une pdf uniforme sur $[-\pi, \pi]$ et une intensité $\eta \in [0, 1]$. On obtient alors pour chaque individu n, deux équations déterminant son mouvement :

$$\theta_n^{t+\Delta t} = \arg\Big\{ \sum_{r_{nm}<a} e^{i\theta_m^t} \Big\} + \eta\ \xi_n^t \tag{1}$$

$$\boldsymbol{x}_n^{t+\Delta t} = \boldsymbol{x}_n^t + v_0\ \Delta t\ \boldsymbol{u}(\theta_n^{t+\Delta t}) \tag{2}$$

où θ_n^t est la direction du mouvement de l'individu n pendant l'intervalle de temps $[t-\Delta t, t[$, r_{nm} est la distance entre les individus n et m, ξ_n^t est la valeur à l'instant t d'une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[-\pi, \pi]$, $\boldsymbol{x}_n^t$ est la position de l'individu au temps t, et $\boldsymbol{u}(\theta)$ est le vecteur unitaire dans la direction θ.
Pour caractériser la stationnarité du vol, on considère le paramètre d'ordre $\phi \in [0, 1]$ défini par

$$\phi(t) = \frac{1}{N}\Big| \sum_n e^{i\theta_n^t} \Big| \tag{3}$$

On pourra considérer que le vol est stationnaire lorsque $\phi(t)$ atteint une valeur stationnaire en moyenne.

Les équations (1)-(2) seront résolues numériquement dans un domaine carré $[l, l]$ avec des conditions limites périodiques sur ces bords (un oiseau qui sort par un bord est remplacé par un nouvel oiseau qui entre par le bord opposé). Cette condition impose quelques précautions pour le calcul de la nouvelle direction lorsque l'oiseau est proche d'une frontière. Cela conduit à prendre pour r_{nm} la formule suivante :

$$r_{nm} = \min_{\boldsymbol{\epsilon}}(|\boldsymbol{x}_n - (\boldsymbol{x}_m + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{l})|) \tag{4}$$

où

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 \\ 0 & \epsilon_y \end{bmatrix}, \quad \epsilon_x, \epsilon_y = -1, 0, 1, \qquad \boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} l & l \end{bmatrix}^t$$

On choisira comme condition initiale une distribution aléatoire uniforme de positions et directions.

Valeurs numériques : dans ce modèle purement conceptuel, les différentes grandeurs sont considérées sans dimension, mais vous pourrez choisir des échelles qui vous sembleront pertinentes. En prenant a comme échelle de longueur ($a = 1$), et $\Delta t = 1$ comme échelle de temps, ce problème possède quatre nombres sans dimension indépendants, N (ou la densité moyenne, $\rho = N/l^2$), l, η et v_0. On se concentrera essentiellement sur les effets des deux paramètres η et ρ. On notera toutefois qu'on peut faire varier la densité ρ soit en changeant le nombre d'individus dans le domaine, soit en changeant la taille du domaine (il pourra être intéressant d'étudier l'effet d'un changement de taille à densité constante). L'intervalle de temps entre deux changements de direction étant fixé, la vitesse v_0 caractérise en fait le libre parcours des oiseaux par unité de a (parcours effectué sans interaction avec les autres congénères). Pour faciliter l'exploration des propriétés de ce modèle, vous pourrez prendre pour référence les valeurs utilisées par Vicsek *et al.* [1] : $v_0 = 0.03$ (selon les auteurs, les résultats ne dépendent pas de v_0 pour leurs jeux de données, quand $0.003 \leq v_0 \leq 0.3$), $N < 10000$ et $0.1 \leq \rho \leq 10$.

2 Travail attendu

- Travail en groupe de 2,3 ou 4
- Programmation dans le langage de votre choix (Matlab, Python...)
- Présentez vos résultats dans un rapport qui sera joint au CR du TD1-2 "Equation de Langevin".
- Rapport et programmes à rendre pour le 16/12/2023 sur moodle.

3 Marche aléatoire (oiseaux aveugles) : $a = 0$, $\eta = 1$

1. Vérifiez qu'en prenant $a = 0$ (pas d'effet collectif) et $\eta = 1$, vous retrouvez une marche aléatoire (mouvement brownien appelé aussi processus de Wiener). Cela ne convient peut-être pas au cas du vol d'étourneaux, mais cela montre que le modèle de Vicsek contient le modèle brownien d'agitation thermique (cas des micro-particules en suspension dans un liquide).
   Indication : on pourra vérifier que $< \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(0)) > \approx 0$ et tracer la variance $< (\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(0))^2 >$ en fonction de t, où les moyennes sont des moyennes d'ensemble sur les trajectoires des particules.
2. Vous estimerez le coefficient de diffusion correspondant à votre simulation.
3. Que se passe-t-il si vous faites varier η ? (Vous pourrez prendre deux ou trois valeurs entre 1 et 0.1.)
4. Pensez-vous que la densité ρ joue un rôle dans le cas de la marche aléatoire ?

4 Vols avec effets collectifs parfaits : $\eta = 0$

5. Simulez plusieurs cas de vols en faisant varier la densité ρ. Commentez vos résultats (formation de clusters, durée du transitoire...).
   Vous pourrez réaliser des animations pour étudier la formation du vol.
6. Tracez $\phi(t)$ et commentez cette courbe pour différentes valeurs de la densité et/ou du nombre d'individus.

5 Vols perturbés : effets collectifs et stochastiques

Vous considèrerez maintenant le cas où on ajoute aux effets collectifs un bruit (équations (1)-(2)). Dans cette étude, vous vous intéresserez donc maintenant aux effets des deux paramètres η et ρ.

7. Observation.
   — Dans un premier temps, fixez ρ en prenant un grand nombre d'individus (par exemple $\rho = 8$, $N = 8000$) et faites prendre à η les valeurs 0.1, 0.5 et 0.9. Pour "accélérer la simulation" (augmenter la distance entre deux interactions), ou pourra ici prendre $v_0 > 0.03$, par exemple, $v_0 = 0.3$. Qu'observez-vous ? Vous pourrez tracer par exemple la trajectoire d'un oiseau pour les trois valeurs de η, ou encore faire une animation de l'évolution du vol.
   — Comparez les évolutions de $\phi(t)$? Comment varie $\phi(t)$ lorsque η s'approche de 1 (par exemple $\eta = 0.9$) ? Dans la suite, on reprend la valeur $v_0 = 0.03$.
8. On note $< \phi(t) >_\infty$ la moyenne temporelle de ϕ aux temps longs (vol stationnaire). Tracez la courbe $< \phi >_\infty$ en fonction de η, en prenant $\rho = 0.4$ fixée et en faisant varier le nombre de particules (et la taille du domaine), $N = 100, 500, 1000$.
9. Quel est l'effet sur la courbe $< \phi >_\infty (\eta)$ d'une variation de ρ en le multipliant par 10 ($\rho = 4$) en gardant $l = 16$?

Transition de phase
Lorsqu'on prend un grand nombre d'oiseaux, on peut interpréter le passage du vol ordonné ($\phi = 1$) au vol désordonné ($\phi \to 0$) comme une transition continue entre deux phases.
On montre que lors d'une transition de phase continue, le paramètre d'ordre suit une loi puissance du type :

$$< \phi > \sim (\eta_c - \eta)^\beta \tag{5}$$

où η_c est la valeur critique de η caractérisant la transition de phase et β est appelé exposant critique.

10. On se propose d'estimer β à partir des courbes $< \phi >_\infty (\eta)$ obtenues précédemment.
    La valeur de η_c étant inconnue et dépendant de l (ou de N puisque $\rho = 0.4$), la recherche de η_c peut être laborieuse. Pour la faciliter, on admet que β est proche de 0.45 (valeur trouvée dans [1]). Il s'agira donc de prendre, pour chaque valeur de N, une valeur "acceptable" de η_c.
    Pour cela, pour chaque valeur $N = 100, 500$ et 1000, tracez la courbe $\ln < \phi >_\infty$ en fonction de $\ln(1 - \dfrac{\eta}{\eta_c})$ en cherchant par essais successifs les "bonnes" valeurs de η_c pour chaque valeur de N.
    Vous devez réussir à superposer les 3 courbes pour les 3 valeurs de N et à les rendre linéaires dans un diagramme logarithmique. Estimez alors la valeur de β qui corrèle le mieux l'équation (5).
11. Est-ce que cet exposant critique dépend de ρ ?

Références

[1] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, O. Shochet, *Physical Review Letter*, vol. 75, Num. 6, pp 1226-1229, 1995.