Некоторые виды и классы С.П.

1) Гауссовские СП

С.П. наз. Г., если все его n-мерные распред.-ия имеют норм. р..

Т.е. $\forall n \in N$ $\forall t_1; t_2; \ldots; t_n$ n-мерная плот. распред. вероят-ей имеет

след. вид: $p(t_1; t_2; \ldots; t_n; x_1; x_2; \ldots; x_n) =$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |C|^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{\wedge}\left\{ -\frac{1}{2|C|} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |C_{ij}| (x_i - a_i)(x_j - a_j) \right\}$$

, где $a_i = M(X(t_i))$

$$c_{ij} = M\big((X(t_i) - a_i)(X(t_j) - a_j)\big); \quad c_{ii} = M\left(\left(X(t_i) - a_i\right)^2\right) = \sigma_i^2$$

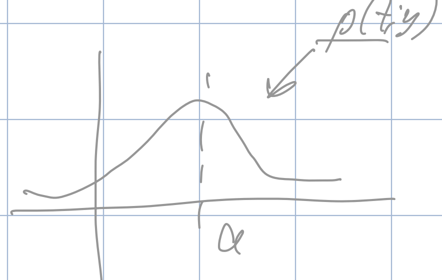
$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$|C|$ – опред. матр. C

$|C_{ij}|$ – алгебр. дополн. эл-та c_{ij}

Док-во:

1) при $n = 1 \longrightarrow p(t; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$



2) при $n = 2$

$$p(t_1;t_2;x_1;x_2)=\frac{1}{(2\pi)^1\cdot|C|^{1/2}}\cdot e^\wedge\left\{-\frac{1}{2|C|}\cdot\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}|C_{ij}|(x_i-a_i)(x_j-a_j)\right\}$$

1) $C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$

$$c_{11}=M\left(X(t_1)-M(X(t_1))\right)^2=\sigma_1^2$$

$$c_{12}=M\left(\left(X(t_1)-M(X(t_1))\right)\cdot\left(X(t_2)-M(X(t_2))\right)\right)=c_{21}\ (t_2t_2\cdot t_1t_1)$$

$$c_{22}=M\left(X(t_2)-M(X(t_2))\right)^2=\sigma_2^2$$

2) $|C|=c_{11}\cdot c_{22}-c_{21}\cdot c_{12}=\sigma_1^2\sigma_2^2-c_{12}^2$

$|C_{11}|=c_{22}=\sigma_2^2\ ;\ |C_{22}|=c_{11}=\sigma_1^2$

$|C_{12}|=-c_{21}\ ;\ |C_{21}|=-c_{12}\longrightarrow|C_{12}|=|C_{21}|$

3) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}|C_{ij}|(x_i-a_i)(x_j-a_j)=\sigma_2^2\left(x_1-M(X(t_1))\right)^2-2c_{12}\cdot\left(x_1-M(X(t_1))\right)\cdot$

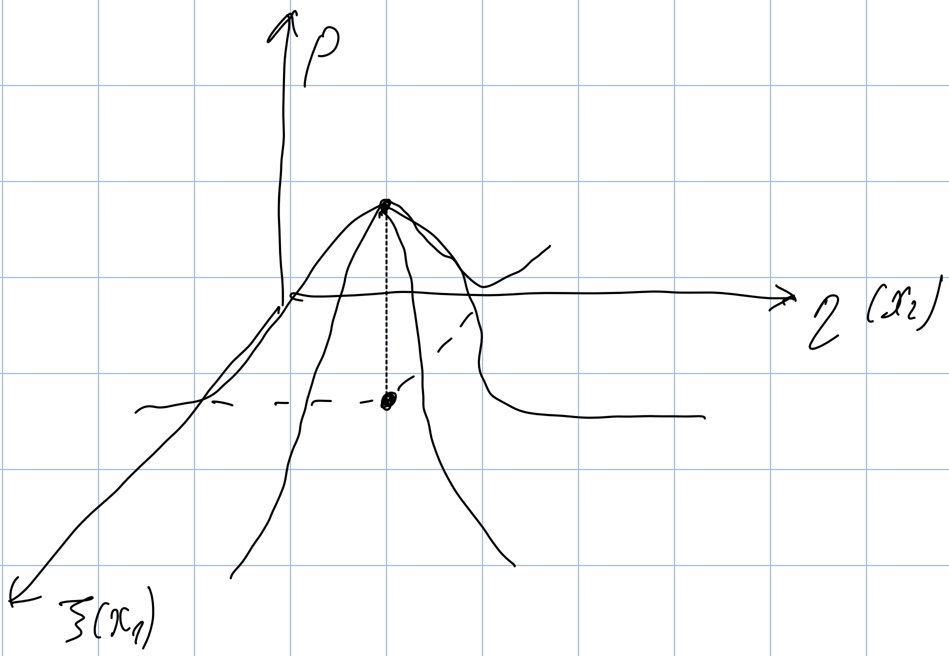
$\cdot\left(x_2-M(X(t_2))\right)+\sigma_1^2\left(x_2-M(X(t_2))\right)^2$

Исходя из выше написанного:

$$p(t_1;t_2;x_1;x_2)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2-c_{12}^2}}\cdot e^\wedge\left\{-\frac{1}{2(\sigma_1^2\sigma_2^2-c_{12}^2)}\cdot\sigma_2^2\left(x_1-M(X(t_1))\right)^2-2c_{12}\cdot\left(x_1-M(X(t_1))\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(x_2-M(X(t_2))\right)+\sigma_1^2\left(x_2-M(X(t_2))\right)^2\right\}$$

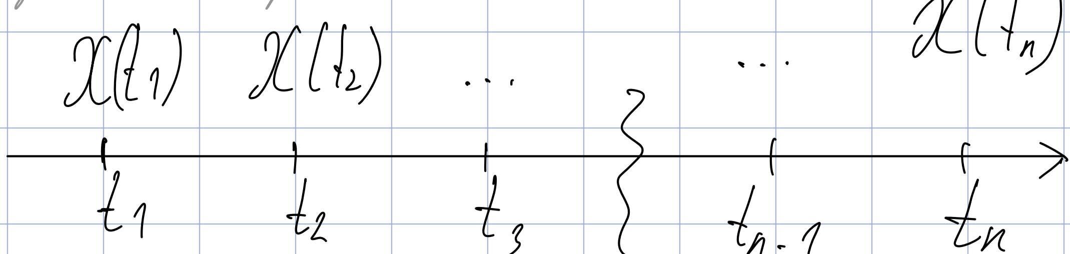


II СП с нез. приращениями

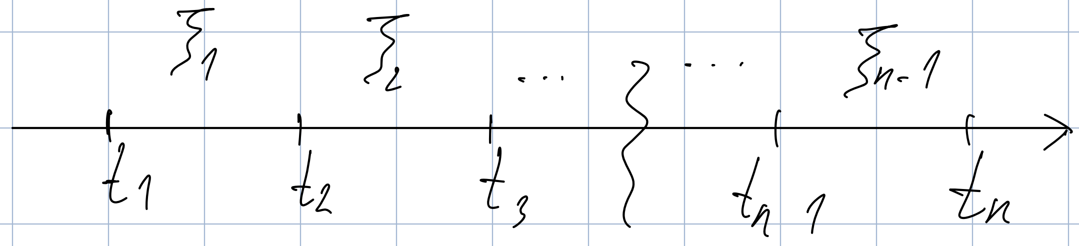
СП. $X(t)$ наз П с нез. приращениями, если его прир.-ие на непересек. врем. пром-ах нез. друг от друга. Т.е. $\forall\ t_1; t_2; \dots; t_n$ СВ-ны $X(t_2)-X(t_1); X(t_3)-X(t_2);$
$t_1<t_2<\dots<t_n$

$\dots; X(t_n)-X(t_{n-1})$ явл нез.

при фикс t_1 при...



$\Delta X_{21} = X(t_2) - X(t_1)$ $\quad\dots\quad$ $\Delta X_{n;n-1}$



III СП с некоррелированными приращениями

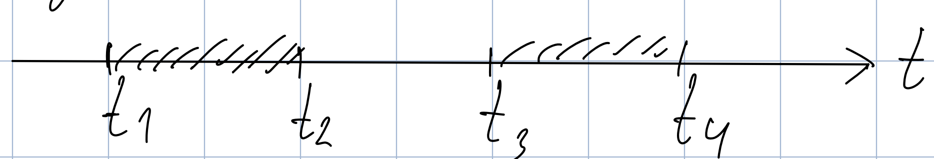
С.П. $X(t)$ наз. П. с некоррелированными приращениями, если выполн. 2 условия:

1) $\forall t: M(X^2(t)) < \infty$

2) $\forall t_1, t_2, t_3, t_4$ выполн. след. усл.: $M\big((X(t_2) - X(t_1) - m_{12}) \cdot (X(t_4) - X(t_3) - m_{34})\big) = 0$, где $m_{12} = M(X(t_2) - X(t_1))$, $m_{34} = M(X(t_4) - X(t_3))$

$t_1 < t_2 < t_3 < t_4$

$\xi = X(t_2) - X(t_1)$ $\qquad$ $\eta = X(t_4) - X(t_3)$



V. Марковские С.П.

Наиболее простой реализацией М. С.П. явл. Ц.М. как С.П. с дискретными временами и состояниями.

VI. Пуассоновские С.П.

С.П. $X(t)$ наз. Пуас., если он обл. след. св-вами:

1) $t \geq 0$
2) Этот С.П. явл. П с нез. прир-ями
3) $X(0)=0$
4) $X(t)-X(s);\ 0 \leq s \leq t$ имеет распред. Пуас с пар. $a(t-s)$, где $a>0$.

Т.е. $P(X(t)-X(s)=m)=\frac{(a(t-s))^m}{m!}\cdot e^{-a(t-s)};\ m=0;1;2;\dots$

VII. Винеровские С.П.

С.П. наз. В., если он обл. св-вами:

1–3 Пуас.

4) СВ $X(t)-X(s);\ 0 \leq s \leq t$ имеет н/р с пар. $(0;\sqrt{t-s})$

T. e. $p(t, s, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}$