Стационарные СП

СП наз. **стационарным**, если его некоторые вероят-ные хар-ки (б/м все) не меняются с течением времени, т.е.
нез-
явл. инвариантными отн. временных сдвигов

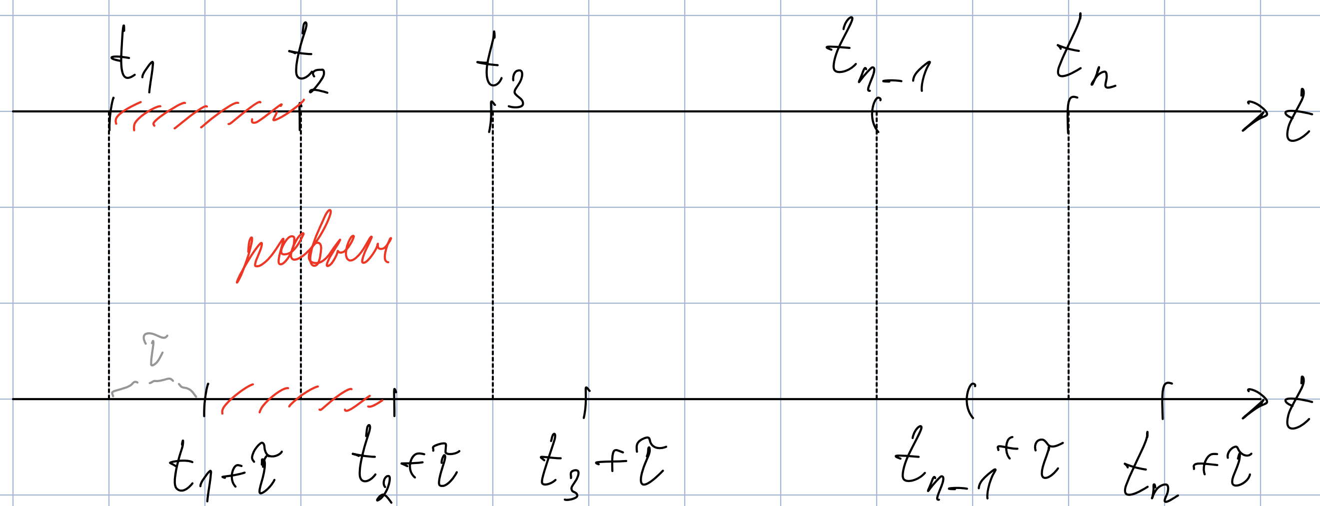
В теории ССП различают стационарность в узком и широком смыслах

СП наз. **стац. в узком смысле**, если **все** его вероят-ные хар-ки не меняются с течением времени

$\forall n \in \mathbb{N};\ \forall t_i;\ i=1;\ldots;n;\ \forall \tau$ –

многомерная ф. распред. обл. след. св-вом:

$$F(t_1;t_2;\ldots;t_n;x_1;x_2;\ldots;x_n)=F(t_1+\tau;\ldots;t_n+\tau;x_1;\ldots;x_n)$$



Вследствии определения м.ф.р. зав не от мом-тов начала и оконч. временных промеж-ов, а от длин этих пром-ов, т.е.

$F(t_1; t_2; \dots; t_n; x_1; x_2; \dots; x_n) = F(\tau_1; \tau_2; \dots; \tau_n; x_1; x_2; \dots; x_n)$

$\tau_i = t_{i+1} - t_i$

начало: $\tau_1 = t_2 - t_1$

конец: $\tau_{n-1} = t_n - t_{n-1}$

$F(t; x) \sim p(t; x) = p(x)$

$F(t_1; t_2; x_1; x_2) \sim p(t_1; t_2; x_1; x_2) = p(\tau; x_1; x_2)$, где $\tau = t_2 - t_1$

$F(t_1; t_2; t_3; x_1; x_2; x_3) \sim p(t_1; t_2; t_3; x_1; x_2; x_3) = p(\tau_1; \tau_2; x_1; x_2; x_3)$, где

$\tau_1 = t_2 - t_1$; $\tau_2 = t_3 - t_2$

СП $X(t)$ наз. стац. в широком смысле, если ф. распред. одно- и двумерные явл. инвариантными отн. временных сдвигов

Зам

Если СП. стац. в узком смысле, то он стац. и в широком смысле. Обратное не верно.

Св-ва ССП:

1) МО: $M(X(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(t; x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)\,dx = m_x$ – const

2) Корр. ф.: $K_x(t_1;t_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) p(t_1;t_2;x_1;x_2)\,dx_1 dx_2 =$ бол

мал

$= K_x(\tau)$; где $\tau = t_2 - t_1$

3) $D_x(t) = K_x(0)$ – const и $K_x(0) \geq 0$

чётность из-за $K_x(t_1;t_2)$

4) $K_x(\tau) = K_x(-\tau)$

5) $|K_x(\tau)| \leq K_x(0)$

6) $K_x(\tau)$ явл. полож. определённой

7) Норм-ый корр. ф. ССП наз. ф. след. вида:

$$r_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)}$$

Св-ва норм. корр. ф.:

1) $r_x(0) = 1$
2) чётная
3) полож. опред-ая
4) $|r_x(\tau)| \leq 1$
5) Норм. корр. ф. ССП явл. мерой ЛЗ любой пары сечений, наход.

-ся друг от друга на τ

Стационарно связанные СП

СПы $x(t), y(t)$ наз. стац. связ., если их взаимная корр. ф имеет след. вид:

$$K_{xy}(t_1;t_2) = r_{xy}(\tau); \quad \tau = t_2 - t_1$$

Если СПы оба стац., то это не означает, что они стац. связ.. Обратное утв. верно.

Зам.:

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau)$$

Производные и интегралы под ССП

$$K_{x'}(t_1;t_2) = \left(K_x(t_1;t_2)\right)''_{t_1 t_2}; \quad \tau = t_2 - t_1$$

$$K_{x'}(\tau) = \left(K_x(\tau)\right)''_{t_1 t_2} = \left(K_x(t_2 - t_1)\right)''_{t_1 t_2}$$

1) $K_{x'}(\tau) = -K''_x(\tau)$

$K_{x^{(n)}}(\tau) = (-1)^n K_x^{(2n)}(\tau)$

Любая производная ССП явл. ССП

$R_{xx'}(t_1;t_2)=\left(K_x(t_1;t_2)\right)'$

2) $r_{xx'}(\tau)=K'_x(\tau)$

$r_{x'x}(\tau)=-K'_x(\tau)$

Если СП стационарен, то он и его производная явл стац-но связанными

3) $K_y(t_1;t_2)=\int\limits_0^{t_2}(t_2-\tau)K_x(\tau)\,d\tau-\int\limits_0^{t_2-t_1}(t_2-t_1-\tau)\cdot K_x(\tau)\,d\tau+$

$+\int\limits_0^{t_1}(t_1-\tau)\cdot K_x(\tau)\,d\tau$

4) $D_y(t)=2\int\limits_0^{t}(t-\tau)\,K_x(\tau)\,d\tau$

5) $R_{xy}(t_1;t_2)=\int\limits_0^{t_2}K_x(s-t_1)\,ds$

$R_{yx}(t_1;t_2)=\int\limits_0^{t_1}K_x(t_2-s)\,ds$

Эргодические ССП

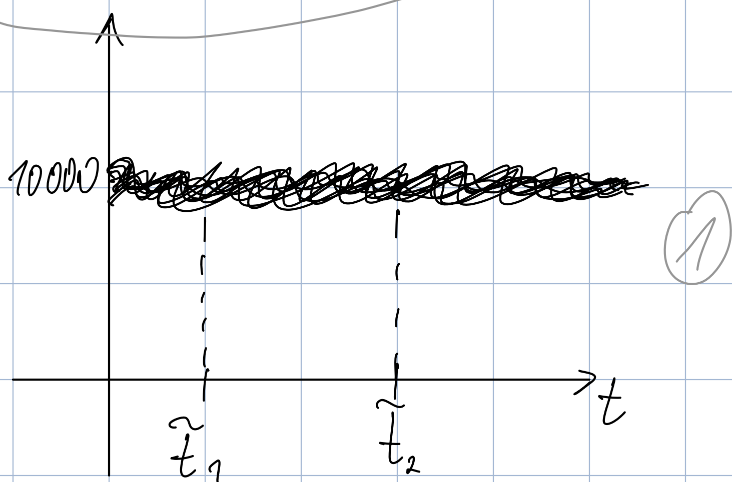
1

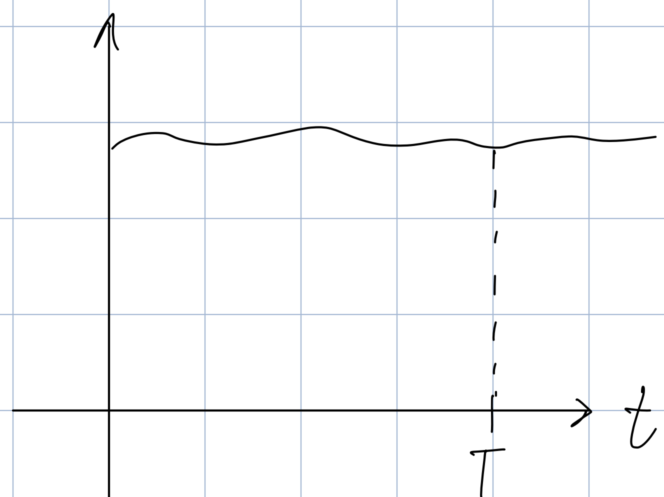
ССП наз. эргодичным/(-дическим), если его вероят-ные хар-ки, полученные усреднением мн-ва всех его реализаций совпадают с хар-ками, полученными усреднением

средняя всех высот

по времени одной (любой) реализацией (/ траекторией р/мой на промеж. времени достаточно большой протяжённости

2





$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

2

Эргодическая Т. Биркгофа – Хинчина

Если СП $X(t)$ стационарен в узком смысле, эргодичен и $M|X(t)| < \infty$, то с вероят-тью 1 выполн. след. предельное соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(t_k) = m_x - const$$ | СП с ~~дискр.~~ решетчатыми временами

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = m_x - const$$ | СП с непрер. временами
(явными)

$x(t)$ - конкретная траектория

Т-ма о достаточных условиях эргодичности:

$\boxed{1}$ ССП $X(t)$ эр-ен отн. М.О., если $\lim\limits_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0$.

И при этом $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = m_x - const$

конкретная ф.

$\boxed{2}$ ССП $X(t)$ эр-ен отн. D, если $\lim\limits_{\tau\to\infty} K_y(\tau) = 0$; где $Y(t) = X^2(t)$ и если $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (x(t) - m_x)^2 dt = D_x - const$

3 ССП $x(t)$ эр-ен по корр-ой ф., если $\lim\limits_{\tau\to\infty} K_z(\tau)=0$;

где $z(t;\tau)=(x(t+\tau)-m_x)(x(t)-m_x)$

и если

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T-\tau}(x(t+\tau)-m_x)(x(t)-m_x)\,dt=K_x(\tau)$$