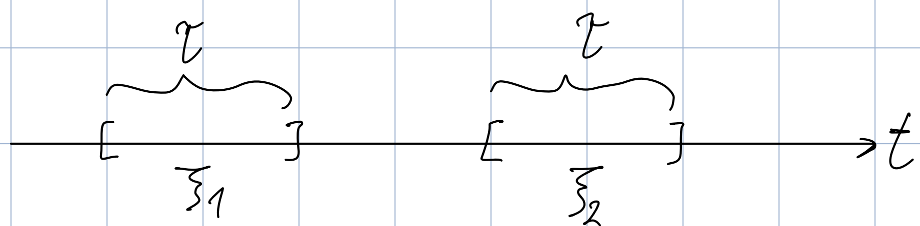
Потоки соб-ий и их хар-ки

Потоком событий наз. послед. соб-ий, ком. наступают в случ. моменты времени.

Св-ва:

1) Стационарность

П. наз. **стационарным**, если вероят. появл. ровно m соб-ий на любом временном промеж. длит. τ зав. только от пар-ов m и τ и нез. от моментов начала и окончания этого временного промежутка



$$P(\xi_1 = 0) = P(\xi_2 = 0)$$
$$P(\xi_1 = 1) = P(\xi_2 = 1)$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$P(\xi_1 = m) = P(\xi_2 = m)$$

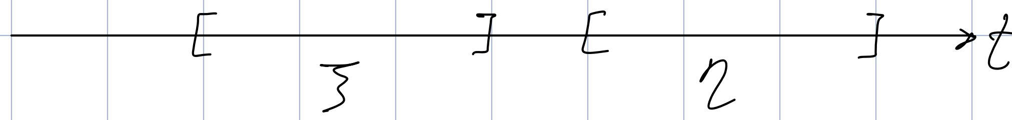
2) Отсутствие последействия

П. обладает о.п., если вероят. появл. m соб-ий на любом промеж. времени не з. от того, происх. или нет соб-ия в моменты времени, ком. предшествовали данному.

Предыстория П. не сказывается на вероят. появл. соб-ий в ближ. будущем.

Т.

Если П. обл. о.п., то СВ-ны числа соб-ий на неперсек. врем. промеж-ках явл. нез.



3) Ординарность (порядок)

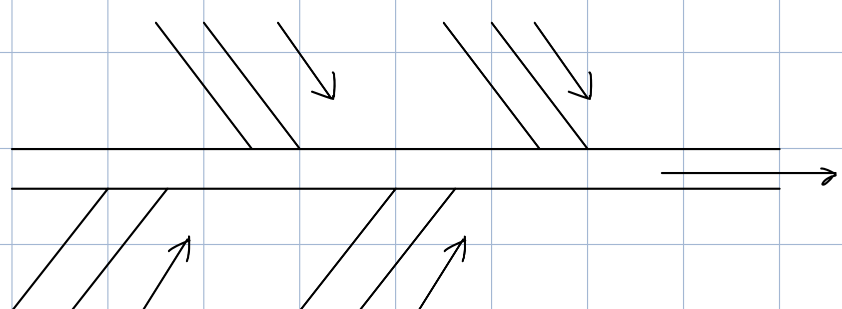
П. обл. ординарностью, если за бесконеч. малый промеж. врем. в П. м/произойти не более 1го соб-ия.

4) Простейшие (Пуассоновские) П-ки

П. наз. п., если он одновременно обл. с., о.п., о.

Т.

Если П. представ. собой сумму большого числа нез. с П-ов, влияние каждого из кот. на общую сумму мало, то суммарный П., при усл. его о., явл. простейшим



И-тью П-ка наз. ср. число соб-ий, происх. в ед. врем.
Обозн.: λ

Т. Пуассона о простейшем П-ке
Если П. обл. постоянной и. λ, то вероят. появл. ровно m соб-ий на промеж. врем. длит. τ наход. по фор., кот. опр. п-ий П. и имеет след. вид:

$$P_\tau(m) = \frac{(\lambda \cdot \tau)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda\tau}$$

Док-во:
1) С. очевидна, т.к. в фор. отсут. упоминание о начале и конце врем. промеж τ;
2) О.п. очевидна, т.к. фор. не отобр. зав. будущих моментов времени от пред.

$P_\tau(m) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$; $\lambda \cdot \tau \sim 0,1$

3) $P_\tau(0) = e^{-\lambda\tau} = 1 - \lambda\tau + \frac{(\lambda\tau)^2}{2} + o\left((\lambda t)^3\right)$

$P_\tau(1) = \lambda\tau \cdot e^{-\lambda\tau} = \lambda\tau - (\lambda\tau)^2 + o\left((\lambda\tau)^3\right)$

$P_\tau(m\geq 2) = 1 - P_\tau(0) - P_\tau(1) = \cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{\lambda\tau} - \frac{(\lambda\tau)^2}{2} - O((\lambda\tau)^3) - \cancel{\lambda\tau} + (\lambda\tau)^2 - O((\lambda\tau)^3) = \frac{(\lambda\tau)^2}{2} + O((\lambda\tau)^3)$

Вероятность появления 2ух и более соб-ий напорядок меньше чем вероятность появл. 0 или 1го соб-ий.
Значит фор. Пуассона обл. ординарностью
Следовательно она обл. всеми 3-мя св-вами

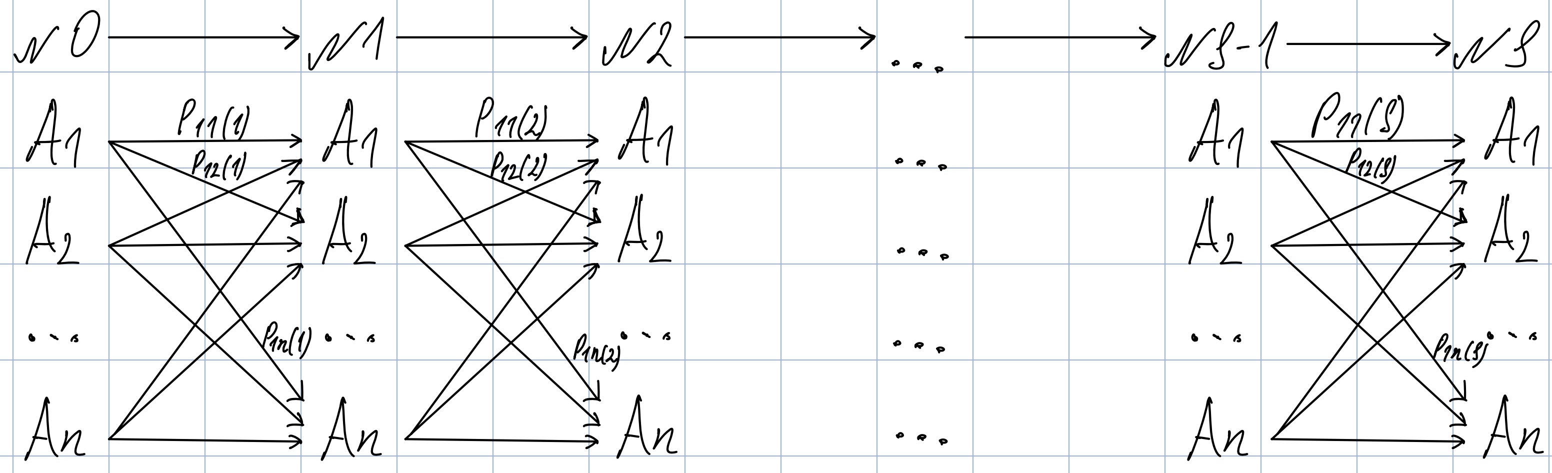
Введение в теорию цепей Маркова

Цепью (Ц.) Маркова (М.) наз. послед. исп-ий в рез. каждого из кот. происходит и при том единственное из несовм. соб-ий $A_1, A_2, \dots, A_n$.

(S)

При этом усл. вероят. $p_{ij}(s)$ того, что в исп №s наступит соб. A_j, если перед этим в исп. №$s-1$ произошло соб A_i не з. от рез. предшествующих исп-ий.

Соб-ия $A_1, A_2, \dots, A_n$ наз. состоянием системы, а испытания - изменением состояния этой системы.



Состояние Ц.М. в очередном исп не з. от того, что происходило до этого исп.

Ц.М наз Ц. с дискретными временами, если изм. состояний происходит в конкрет., фикс. моменты времени
(s играет роль времени)

Ц.М. наз. Ц. с непрерыв. временем, если изм. состояний происх. в случ. моменты времени

Ц.М. наз. однородной, если услов. вероят. $p_{ij}(s)$ перехода в исп. №s из сост. A_i в сост. A_j не з. от номера исп., т.е. от s

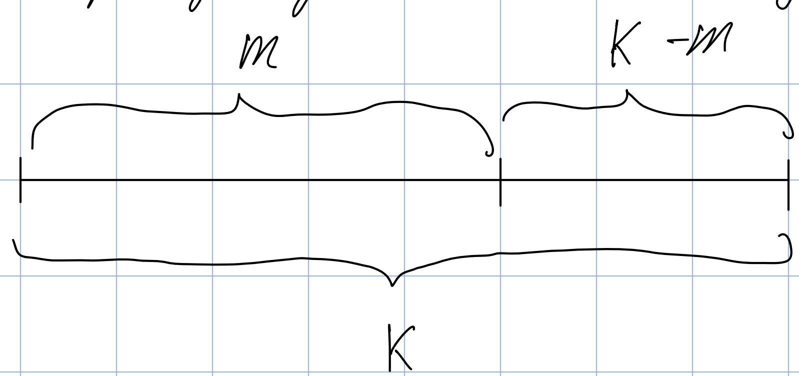
В случае однородной Ц.М. вероят-ти p_{ij}, $i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,n$ наз. переходными. Они формируют матрицу переходных вероят-ей.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{n} Pp_{ij} = 1;\ i=1,2,\dots,n$$

Равенство Маркова и его следствие

$P_{ij}(K)$ – вероят. перехода из сост. A_i в сост. A_j в течении K исп.



$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_1 & A_1 \\ A_2 & A_2 & A_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_i & A_r & A_j \\ \dots & \dots & \dots \\ A_n & A_n & A_n \end{array}$$

$$P_{ij}(K) = P_{i1}(m)\cdot P_{1j}(K-m) + P_{i2}(m)\cdot P_{2j}(K-m) + \ldots + P_{iK}(m)\cdot P_{Kj}(K-m)$$

$$P_{ij}(K) = \sum_{r=1}^{n} P_{ir}(m)\cdot P_{rj}(K-m)$$ – равенство М.

1) $K=2,\ m=1$

$$P_{ij}(2) = \sum_{r=1}^{n} P_{ir}(1)\cdot P_{rj}(1) = \sum_{r=1}^{n} p_{ir}\cdot p_{rj};$$

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} P_{11}(2) & P_{12}(2) & \ldots & P_{1n}(2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{n1}(2) & P_{n2}(2) & \ldots & P_{nn}(2) \end{pmatrix} = \left(P_{ij}(2)\right)$$

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}\cdot\mathcal{P} = \mathcal{P}^2$$

2) $K=3,\ m=1$

$$P_{ij}(3) = \sum_{r=1}^{n} P_{ir}(1)\cdot P_{rj}(2)$$

$$\mathcal{P}_3 = \left(P_{ij}(3)\right) = \mathcal{P}^3$$

3) $\boxed{\mathcal{P}_k = (p_{ij}(k)) = \mathcal{P}^k}$