З-н больших чисел

1) При нек., дост. общих условиях совместное поведение большого числа СВин почти утрачивает случ. характер и становится закономерным;
2) С точки зрения практики, важно знать условие, при выполнении кот. совместное действие большого числа СВин приводит к рез. почти нез. от случая;
3) Эти условия и составляют суть ЗБЧ

Т. Чебышева (ЗБЧ)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, нез. СВ-ны, обладающие $M\xi_1, M\xi_2, \ldots, M\xi_n, \ldots, M\xi_i < \infty$ и $D\xi_1, D\xi_2, \ldots, D\xi_n, \ldots$ и при этом $\exists C>0 : D\xi_i \le C$.
Тогда $\forall \varepsilon > 0$ выполн. след. предельное (пред.) соотношение (соотн.):

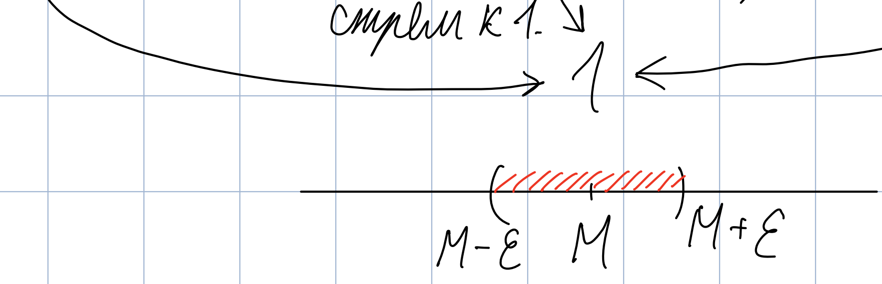
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} - \frac{M\xi_1+\ldots+M\xi_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Док-во:
Воспользуемся 2-ым нер-вом Ч.
$$\forall \varepsilon \ge 0, \forall \eta : P(|\eta - M\eta| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D\eta}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{C+\ldots+C}{n^2} < \frac{nC}{n^2}$$

Пусть $\eta = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$; $M\eta = \frac{M\xi_1+\ldots+M\xi_n}{n}$; $D\eta = \frac{D\xi_1+\ldots+D\xi_n}{n} < \frac{C}{n}$

$$1 \ge P\left(\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} - \frac{M\xi_1+\ldots+M\xi_n}{n}\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D\eta}{\varepsilon^2} > 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$$



ЗБЧ в форме Т.Ч. показ., что при неогранич. увелич. СВин ($n \to \infty$) с вероят. сколь угодно близкой к 1 ср. ариф. всех СВин оказывается сколь угодно близким к С равной ср. ариф. их М.О ий

След. Т.Ч.

Если при условиях Т.Ч., $M\xi_1 = M\xi_2 = \ldots = a < \infty \to \forall \varepsilon > 0$ выполн. след. пред. соотн.:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Предположим, что происходит измерение некой В (величины) „а", при этом число изм-ий неогр. растёт. След. Т.Ч. показ., что при увелич. числа изм-ий ($n \to \infty$) с вероят. близкой к 1 ср. ариф. получ. изм-ий сколь угодно мало отличается от измеряемой В „а".

Данные обстоятельства явл. фунд. обоснованием, в рамках аксиом Колмогорова, принципа ср. ариф-го, на кот. базируется все современные, экспериментальные науки.

Т. Бернулли (ЗБЧ)

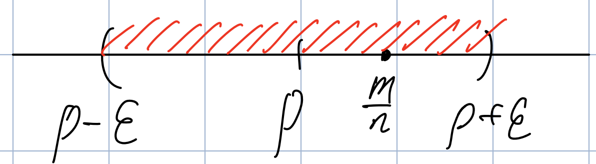
Пусть $\xi = m$ СВ числа успехов в серии нез. исп. с вероят. p успеха в каждом исп. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ выполн. след. соотн.:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\overset{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}{\overset{\parallel}{m}}}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, где ξ_i − число успехов в i ом исп.

ξ_i	0	1
$\tilde{p}$	q	p

$M\xi_i = p$



Т. Б. показ., что в рамках а-ом К. обоснован стат. подход к понятию вероятности.

Ц.П.Т.

Пусть СВ-ны $\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n; \dots$ нез., имеют одинак. з-н распред. и $M\xi_i = a < \infty$; $D\xi_i = \sigma^2 < \infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ выполн. след.

предельное соотн.:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{|\xi_1+\ldots+\xi_n - n\cdot a|}{\sigma\cdot\sqrt{n}} < \varepsilon\right) = 2\cdot\Phi(\varepsilon)$$

Ц.П.Т. показ., что сумма большого числа нез. одинаково распред. СВин **любой** природы ведёт себя как норм. распред.

Т. Ляпунова (обобщение Ц.П.Т.)

Если СВны $\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n; \ldots$ нез., $M\xi_i = a_i < \infty$; $D\xi_i = \sigma_i^2 < \infty$ и конечными моментами 3его порядка $M|\xi_i - a_i|^3 = C_i < \infty$ и $n\to\infty$: $\frac{\sqrt[3]{\sum C_i^3}}{\sqrt{\sum \sigma_i^2}} \longrightarrow 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ выполн. след. предельное соотн.:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \sum_{i=1}^{n} a_i\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}} < \varepsilon\right) = 2\cdot\Phi(\varepsilon)$$

Т. Ляпунова показ., что сумма большого числа нез. СВин **различной** природы имеет распр., близкое к норм.