Двумерные распределения

Случай ДСВ

Пусть в рез. опыта или явл. исследуются ДСВ ξ и η.

$\xi: x_1; x_2; \ldots; x_k$

$\eta: y_1; y_2; \ldots; y_m$

Двумерным законом распределения СВ ξ и η наз. вероятн., определённая на мн. всех упорядоченных пар

$(x_i; y_j);\ i = 1; \ldots; k,\ j = 1; \ldots; m$

Двум. з-н распред. имеет вид след. таблицы:

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	…	y_m	
x_1	P_{11}	P_{12}	…	P_{1m}	P_1^{ξ}
x_2	P_{21}	P_{22}	…	P_{2m}	P_2^{ξ}
…	…	…	…	…	…
x_k	P_{k1}	P_{k2}	…	P_{km}	P_k^{ξ}
	P_1^{η}	P_2^{η}	…	P_m^{η}	

Св-ва

1) $p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j)$

$p_{ij} \geq 0$

2) Если задан 2-мерный з-н, то суммированием по строкам или колонкам можно получить 1-ые з-ны для ξ и η.

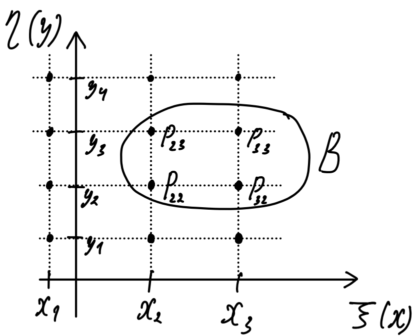
ξ	x_1	x_2	...	x_k
P	p_1^ξ	p_2^ξ	...	p_k^ξ

η	y_1	y_2	...	y_m
P	p_1^η	p_2^η	...	p_m^η

Одномерные з-ны, в общем случае, не восстанавливают однозначно двумерного з-на, т.к. $k \cdot m$ – кол-во неизвестных, $k+m$ – кол-во уравнений

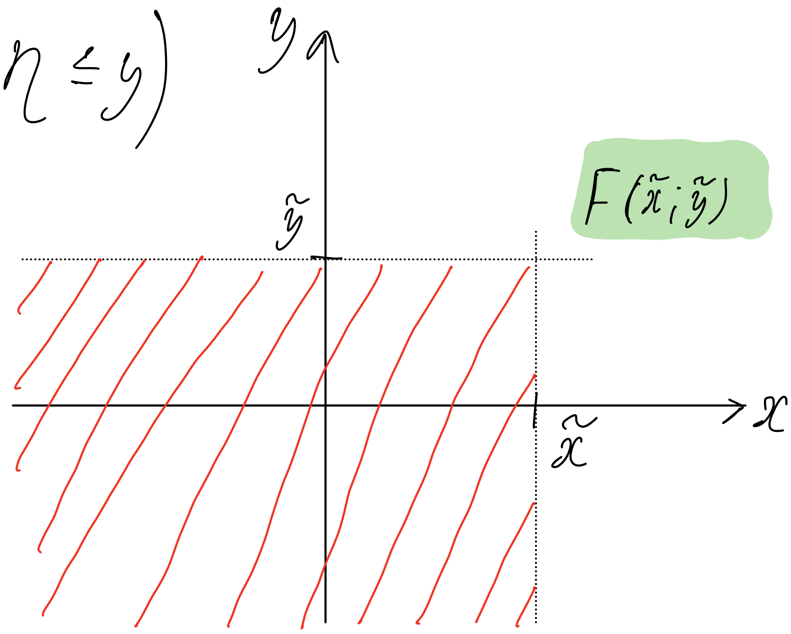
3) $\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$

4) $P((\xi;\eta) \in B) = \sum \sum\limits_{(x_i;y_j) \in B} p_{ij}$



(к п.4)

5) **Двум. ф. распред. СВ ξ и η** наз. ф. след. вида: $F(x;y) = P(\xi \leq x; \eta \leq y)$



Случай НСВ

В случае НСВ ξ и η их двумерное (или совместное) распред. задаётся с помощью ф. $p(x;y)$ – **плотность совместного распред. вероят-ти этих СВ**

Св-ва:

1) $p(x;y) \geq 0, \quad (x;y) \in R^2$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x;y)\, dx\, dy = 1$

3) Из двумерной плотности распред. можно легко получить одномерную

$+\infty$

$$P_\xi(x) = \int\limits_{-\infty} p(x;y)\,dy$$

$$P_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x;y)\,dx$$

В общем случае, одномерная плот. не восстан. однозначно двумерную плотность

4) $P\big((\xi;\eta) \in B\big) = \iint\limits_{B} p(x;y)\,dx\,dy$

5) Двум. ф. распред. СВ ξ и η имеет след. вид: $F(x;y) = P(\xi \le x;\ \eta \le y)$; $(x;y) \in R^2$. $F(x;y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} p(s;t)\,ds\,dt$

Независимость СВ

Д СВ ξ и η наз. нез., если эл-ты двумерного з-на равны про-из. соответствующих эл-тов одномерного з-на.

$$p_{ij} = p_i^{\xi} \cdot p_j^{\eta};\quad i = 1;\dots;k,\ j = 1;\dots;m$$

Н СВ ξ и η наз. нез., если плотность двум. распред. имеет след. структуру: $p(x;y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y)$

Операции над СВ

1) Случай ДСВ

$\zeta = \xi + \eta$

ζ	$x_1 + y_1$	$x_1 + y_2$	...	$x_k + y_m$
p	p_{11}	p_{12}	...	p_{km}

Зам.

Если будут встречаться совпадающие суммы значений (ξ, η), то соотв. колонки объединятся в одну, а вероят. складываются.

$\zeta = f(\xi; \eta)$

ζ	$f(x_1; y_1)$	$f(x_1; y_2)$	...	$f(x_k; y_m)$
p	p_{11}	p_{12}	...	p_{km}

2) Случай НСВ

Зад. о сумме 2-ух нез. равномер. распред. СВ

$\xi : p_\xi(x)$;

$\eta : p_\eta(y)$;

$\zeta = \xi + \eta$.

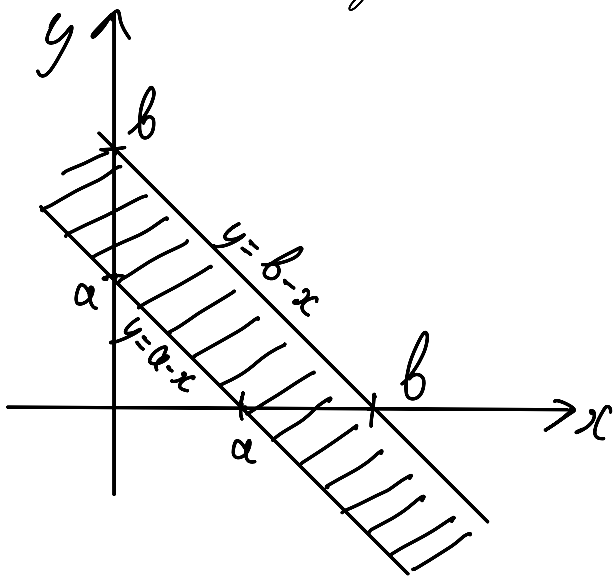
$$P(a\le \zeta_\xi \le b)=\int\limits_a^b p_{\zeta_\xi}(t)\,dt=\iint\limits_{a\le x+y\le b} p(x;y)\,dx\,dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{a-x}^{b-x}p(x;y)\,dy =$$

$a\le x+y\le b$

$a-x\le y\le b-x$

$y=a-x$

$y=b-x$



$$= \left|\begin{array}{l} y+x=t \\ y=t-x \\ dy=dt \\ a-x+x=t \Rightarrow a=t_{н} \\ b-x+x=t \Rightarrow b=t_{в} \end{array}\right| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_a^b p(x;t-x)\,dt=\int\limits_a^b dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(x;t-x)\,dx=$$

$$=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(x;t-x)\,dx\right)dt$$

$$p_{\zeta_\xi}(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(x;t-x)\,dx$$

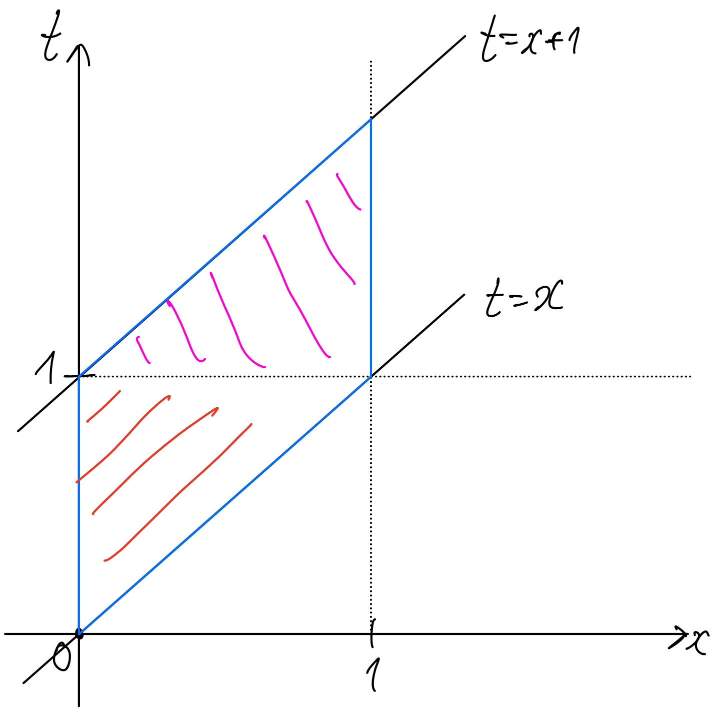
$$p(x;y)=p_\xi(x)\cdot p_\eta(y);\quad p_\xi(x)=\begin{cases}1; & 0\le x\le 1\\ 0; & x<0;\ x>1\end{cases}$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases}1; & 0\le y\le 1\\ 0; & y<0;\ y>1\end{cases}$$

$0,\ y<0,\ y>1$

$$p_{\zeta}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x;\,t-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(x)\cdot p_{\eta}(t-x)\,dx$$

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le t-x\le 1\end{cases}\qquad \begin{cases}0\le x\le 1\\ x\le t\le x+1\end{cases}$$



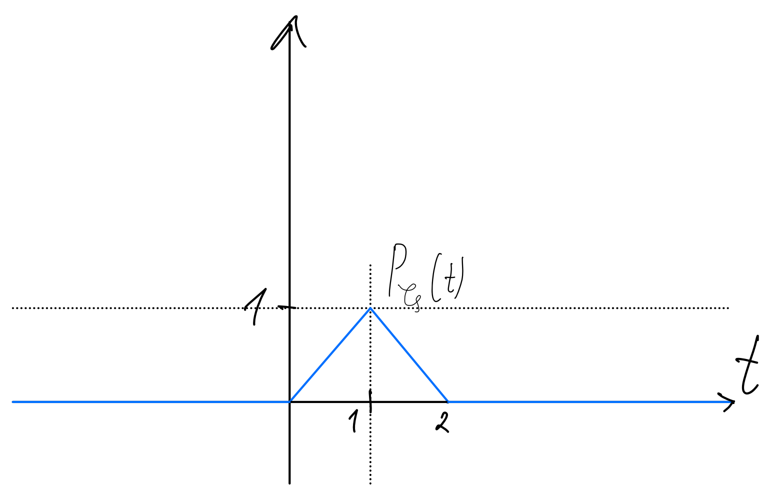
① $0\le t\le 1$

$$\int_0^t dx = x\Big|_0^t = t$$

② $1\le t\le 2$

$$\int_{t-1}^{1} dx = x\Big|_{t-1}^{1} = 2-t$$

$$p_{\zeta}(t)=\begin{cases}t;\ 0\le t\le 1\\ 2-t;\ 1\le t\le 2\\ 0;\ t<0;\ t>2\end{cases}$$



Замеч.

Сумма 2-ух нормальных распред. не явл. нормальн. распред