# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## Элементы теории множеств.

Множество – это многое мыслимое как единое.
Кантор.

A; B;...
$A_1$;$A_{2;,...}$ - Множества.

a; b; ....
$a_1$; $a_2$; .... элементы множества.

$a \in A$ – a принадлежит множеству A.
$b \notin B$ - b не принадлежит множеству B.

### Способы задания множеств.

1. Запись множества списком
   $A = \{a_1; a_2; ... ; a_n\}$- в случае конечного множества

   $A = \{a_1; a_2; ... \}$- в случае бесконечного множества, если закономерность очевидна.

   Пример $B = \{2; 4; 6; 8.....\}$

2. Запись множества с помощью характеристического свойства (ХСМ)

ХСМ – называется такое свойство которым обладают все элементы данного множества и не обладают не один элемент не вошедшие в это множество.

$A = \{a: P(a)\}$

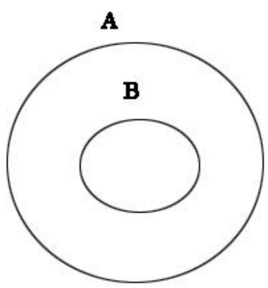
Пример: $A = \{x: (x \in R) \& ( x \geq 0)\}$

Множество, не содержащее ни одного элемента. называется пустым Ø.

Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов A = B.

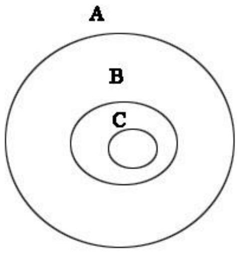
### Понятие подмножества. Свойства подмножеств.

Множество B называется подмножеством множества A, если любой элемент множества B является элементом множества A.




$B \in A$
B вложено в множество A.
$A \supset B$ - множество A включает в себя множество B.

1. $(A \subset B)\&(B \subset A) \rightarrow A=B$
2. Транзитивность вложения
   $(C \subset B)\&(B \subset A) \rightarrow C \subset A$




3. Если множество A имеет n элементов, то $\exists$ ровно $2^n$ различных подмножеств множества A.

   Доказать самостоятельно.

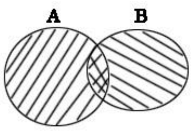
4. Пустое множество и само множество называется несобственными подмножествами. Все остальные, если они $\exists$ называются собственными.

   A = {1; 2}
   Собственные {1}, {2}
   Несобственные Ø, {1; 2}

## Операции над множествами.

I. Объединение – объединение множеств A и B называется множество C, которое состоит из всех элементов входящих в хотя бы в одно из этих множеств.

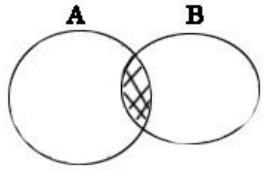
$$A \bigcup B = \{c: (c \in A) \bigcup (c \in B)\}$$




1. $A \bigcup B = B \bigcup A$ – коммутативность
2. $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup B \bigcup C$ – ассоциативность
3. $A \bigcup A = A$ – идемпотентность
4. $A \bigcup ø = A$
5. $(B \subset A) \rightarrow B \bigcup A = A$

II. Пересечение множеств A и B называется множество C, которое состоит из всех элементов одновременно входящих в оба множества.

$$A \cap B = \{c: (c \in A) \& (c \in B)\}$$




1. $A \cap B = B \cap A$ – коммутативность
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ – ассоциативность
3. $A \cap A = A$ – идемпотентность
4. $A \cap ø = ø$
5. $(B \subset A) \rightarrow B \cap A = B$

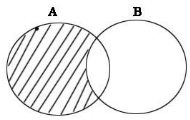
Если $A \cap B = \varnothing$, то такие множества называются не пересекающимися

Система множеств $A_1$; $A_2$; $A_3$; ... $A_n$ называется разбиением множества A, если выполняется два условия:

1. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = A$
2. $A_i \cap A_j = \begin{cases} A_i, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

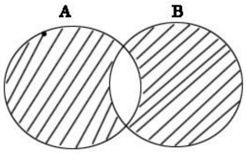
III. Разностью множеств A и B, называется множество C, которое состоит из всех элементов множества A не входящих в B.

$A \setminus B = \{c: (c \in A) \& (c \notin B)\}$
$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$



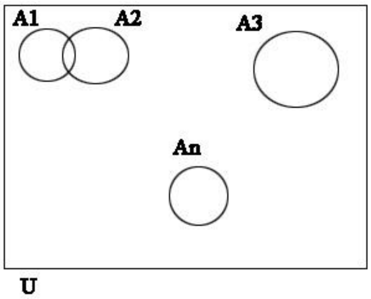

IV. Симметрической разностью множеств A и B, называется множество C, которое состоит из всех элементов входящих либо только в A, либо только в B.

$$A \Delta B = \{c: ((c \in A) \& (c \notin B)) \cup ((c \in B) \& (c \notin A))\}$$
$$A \Delta B = (A \setminus B) \& (B \setminus A)$$



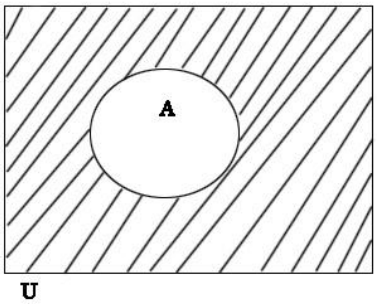

V. Понятие универсального множества. Операция дополнение.

Множество U, называется универсальным для множеств $A_1$; $A_2$; $A_3$; ... $A_n$ , если все эти множества входят в множество U как подмножества.




Множество $\overline{A}$, называется дополнительным множеством или дополнением множества, если оно состоит из всех элементов универсального множества не принадлежащих множеству A.

$$\overline{A} = \{c : (c \in U) \,\&\, (c \notin A)\}$$




1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $\overline{U} = 0$
3. $\overline{0} = U$
4. $\overline{A} = U \setminus A$

## Дистрибутивные законы.

1. $(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$
2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

## Законы Моргана.

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

## Конечные множества и их элементы.

N(A) – количество элементов множества A

1. $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(AB)$
2. $N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(AB) - N(AC) - N(BC) + N(ABC)$

3. $N(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} N(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} N(A_i A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} N(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$

Доказать самостоятельно.

## Понятие алгебры множеств σ – алгебры.

Множество $\mathcal{A}$ подмножеств множества U называется алгеброй множеств, если:

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$; $U \in \mathcal{A}$;
2. $\forall A \in \mathcal{A}$; $\overline{A} \in \mathcal{A}$
3. $\forall A, B \in \mathcal{A}$

$A \cup B \in \mathcal{A}$

$A \cap B \in \mathcal{A}$

Алгебра множеств называется σ – алгеброй, если из условия, что $A_1$; $A_2$; $A_3$; ... $\in \mathcal{A}$ следует, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$; $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Пусть γ– некоторая система множеств, тогда наименьшая алгебра, содержащая γ называется алгеброй, порожденной системой γ.

Наименьшая σ – алгебра содержит систему множеств γ называется σ – алгеброй порожденной системой γ

Теорема: $\forall$ конечное разбиение множества U порождает алгебру множеств.

Обратное $\forall$ алгебра множеств порождается некоторым конечным разбиением.

## Борелевские множества. Борелевская σ – алгебра.

σ – алгебра ß числовых множеств, порожденная всевозможными интервалами и полуинтервалами вида $x_1 < x \le x_2$ называется борелевским.

Множества составляющие ß называется борелевскими.

## Бином Ньютона. Биноминальные коэффициенты и их свойства.

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$, где $C_n^0 = C_n^n = 1$.

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad 0!=1.$$

Доказать самостоятельно бином Ньютона методом математической индукции.

### Свойства.

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$ - свойство симметрии.
2. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$
3. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$
4. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$
5. $C_{n-1}^0 + C_n^1 + \ldots + C_{n+m-1}^m = C_{n+m}^m$
6. $C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_m^k C_n^m$

## Полиномиальная теорема.

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_m^{n_m}$$, где $n_1 \ge 0; \ldots n_m \ge 0$

$C(n_1; n_2; \ldots; n_m) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$ - Полиномиальный коэффициент.

## Формула Стирлинга.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} n^n; n \to \infty$$

# Комбинаторика.

Комбинаторика – это раздел математики, в котором разрабатываются принципы и методы подсчета вариантов тех или иных событий или явлений.

1. Правило сложения.

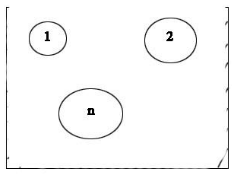
Если действие А может быть осуществлено n способами, а независимое от него действие B может быть осуществлено m способами, то действие «либо A, либо B» может быть осуществлено n+m способами.

2. Правило умножения.

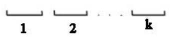
Если действие A может быть осуществлено n способами и после каждого из них действие B может быть осуществлено m способами, то последовательность действий «A и B» может быть осуществлена n*m способами.

## Выбор с возвращением.

***Выборка с возвращением, упорядоченная.***



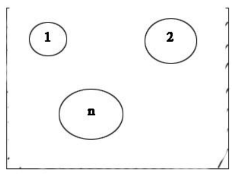

*Имеется хранилище с n различными предметами.*




*Имеется k занумерованных ящиков.*

*Из хранилища берем один случайный предмет. Информацию о нем фиксируем в первой ячейке. Сам предмет возвращаем в хранилище. Затем берем следующий предмет и информацию фиксируем во второй ячейке. И т.д.*

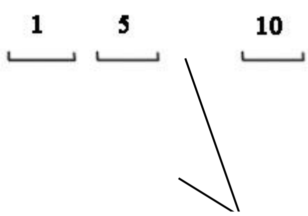

***Выборка с возвращением, неупорядоченная.***



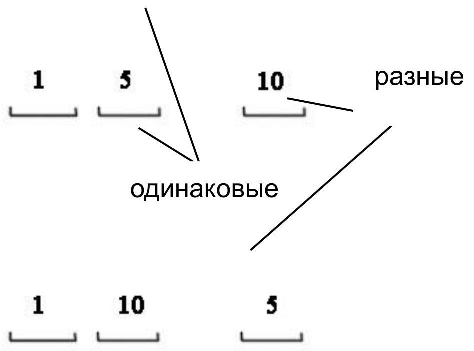

*Имеется хранилище с n различными предметами.*

*Имеется ящик объемом k.*

*Из хранилища берем один случайный предмет. Информацию о нем фиксируем в ящике. Сам предмет возвращаем в хранилище. Затем берем следующий предмет и информацию фиксируем в ящике. И т.д.*

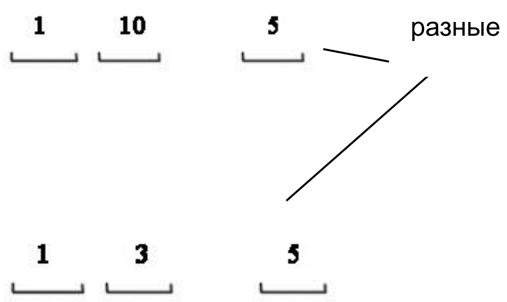



одинаковые




*В данной схеме различными считаются варианты, которые отличаются хотя бы одной позицией.*

*Общее число* $n^k$*;* $n,k \in N$




*В данной схеме различными считаются варианты, которые отличаются набором элементов.*

$$N = C_{n+k-1}^{k}.$$

*Доказательство.*

*Используем математическую индукцию.*

$N(n,k) = C_{n+k-1}^{k}$

1. *База индукции.*

*K=1;* $p \le n$ $C_p^1 = p$

2. *Предположим, что для некоторого k* $N(p\,,\,k) = C_{p+k-1}^{k}$ $\forall p \le n$

*Докажем, что для k+1 формула справедлива* $\forall p \le n$; $N(p;k+1) = C_{p+k}^{k+1}$.

*a – наименьший номер элемента попавшего во второе хранилище. Если a = 1, то оставшиеся k позиций могут быть заполнены* $N(n;k) = C_{n+k-1}^{k}$.

*a=1* $\rightarrow$ $N(n;k)$

*a=2* $\rightarrow$ $N(n-1;k)$

$a=3 \rightarrow N(n-2;k)$

.....

$a=n\text{-}1 \rightarrow N(2;k)$

$a=n \rightarrow N(1;k)$

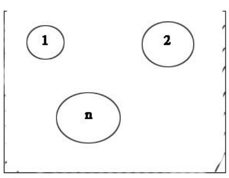
$$N(n;k+1)=C^{k}_{n+k-1}+C^{k}_{n+k-2}+C^{k}_{n+k-3}+\ldots+C^{k}_{k+1}+C^{k}_{k}$$

$$C^{a-1}_{b-1}=C^{a}_{b}-C^{a}_{b-1}$$

$$N(n;k+1)=C^{k+1}_{n+k}-C^{k+1}_{n+k-1}+C^{k+1}_{n+k-1}-C^{k+1}_{n+k-2}+C^{k+1}_{n+k-2}+\ldots+C^{k+1}_{k+1}-$$

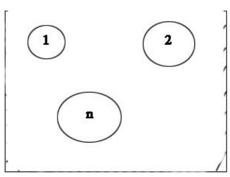
## Выборка без возвращения.

***Выборка без возвращения, упорядоченная.***

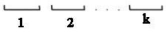



*Имеется хранилище с n различными предметами.*

***Выборка без возвращения, неупорядоченная.***




*Имеется хранилище с n различными предметами.*




*Имеется k занумерованных ящиков.*

*Из хранилища берем один случайный предмет и кладем в первую ячейку. Затем берем следующий предмет и кладется во вторую ячейку. И т.д.*

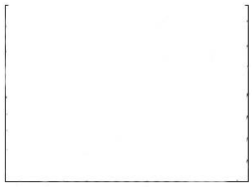
*Любой вариант заполнения упорядоченной выборки без возвращения, называется размещением. Два размещения считаются различными, если они отличаются хотя бы одной позицией.*

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

*Есть особый случай размещения предметов n=k.*

*Размещение n различных предметов по n ячейкам, называется перестановками.*

$$A_n = n!$$



*Имеется ящик объемом k.*

*Из хранилища берем один случайный предмет и кладем в ящик. Затем берем следующий предмет и кладем в ящик. И т.д.*

*Неупорядоченная выборка в процедуре выбора без возвращения, называется сочетанием.*

*Два сочетания считаются различными, если они отличаются набором элементов.*

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

## Размещения с повторениями.

Имеется хранилище с n предметами, но среди них, $n_1$ – предметов одного типа (неотличимых друг от друга) $n_2$ – предметов второго типа и $n_3$ – предметов третьего типа… $n_m$ – предметов m-ого типа. $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$.

Размещением такой совокупности предметов по n занумерованным ячейкам, называется размещением с повторениями.

Два размещения с повторениями считаются различными, если они отличаются хотя бы одной позицией.

Общее количество размещений с повторениями.

$$C(n_1; n_2; \ldots; n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!}$$

# Теория вероятностей.

## События и их классификация.

Теория вероятностей – это наука о случайных событиях и их характеристиках.

Любой из взаимоисключающих друг друга исходов данного опыта или явления, называется элементарным событием или элементарным исходом (ЭИ).

Событием, называется некоторая совокупность элементарных событий (ЭС).

Замечание:

Если множество ЭС конечно, то событием, называется любая совокупность ЭИ.

Пример.

Кидаем кубик.

$A_1; \ldots A_6$ – выпадение соответствующей грани кубика.

B – «выпадение четной грани » $A_2$, $A_4$, $A_6$

C – «выпадение нечетной гран » $A_1$, $A_3$, $A_5$

D – «выпадение грани больше 4» $A_5$, $A_6$

E – «выпадение грани, которая делится на 7»

F – «выпадение положительной грани» $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$

Если событие наступает в результате любого ЭИ. То оно называется достоверным. (F)

Если событие A не содержит ни одного ЭИ, то оно называется невозможным. (E)

Два события, называются равными, если множество их ЭИ совпадают.

Событие, называется детерминированным, если его исход предопределен.

Событие, называется случайным, если множество его ЭИ является собственным подмножеством множества всех ЭИ.

События, называются независимыми или непересекающимися, если множество их ЭИ не пересекаются.

## Операции над событиями.

1. Объединение или сумма событий.

Суммой событий, называется событие, которое означает осуществление хотя бы одного из исходных событий, т.е. это событие, множество ЭИ, которого есть объединение множеств ЭИ обоих событий.

$$A_1 \cup A_2\,;\ A_1 + A_2\,;\ \bigcup_{k=1}^{n} A_k\,;\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\,;\ \sum_{k=1}^{n} A_k\,;\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

2. Пересечение или произведение событий.

Произведением событий, называется событие, которое означает одновременное осуществление исходных событий., т.е. это событие множество, ЭИ ,которого есть пересечение.

$$A_1 \bigcap A_2\,;\ A_1 \cdot A_2\,;$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k\,;\ \prod_{k=1}^{n} A_k$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\,;\ \prod_{k=1}^{\infty} A_k$$

3. Разность событий.

Разностью событий, называется событие, которое означает осуществление первого события с одновременным неосуществлением второго.

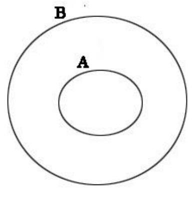
$A_1 \setminus A_2$

4. Дополнительное или противоположное событие.

Событие $\bar{A}$, называется дополнительным или противоположным к событию А, если оно состоит из всех ЭИ данного опыта, не вошедших в событие А.

5. Говорят, что событие А влечет за собой событие В, если из наступлений события А следует наступление события В. Т.е множество ЭИ события А является подмножеством множества ЭИ события В.

$A \subset B$ - Событие А влечет за собой В.



# Понятие вероятности.

## Различные подходы к определению вероятности

### Статистический подход к определению понятия вероятности.

Пусть событие А в серии n независимых испытаний произошло m раз, тогда m/n , называется относительной частотой события А в данной серии испытаний.
При больших значениях n относительная частота случайных массовых событий обладает так называемым свойством устойчивости, т.е. в различных сериях испытаний происходящих при одних и тех же условиях относительная частота колеблется около одного и того же значения, которое принято называть вероятностью события А.

$$\frac{m_1}{n_1} \approx \frac{m2}{n_2} \approx \frac{m_3}{n_3} \approx \ldots$$

### Классический подход к понятию вероятности (метод подсчета шансов).

Если все ЭИ некоторого опыта равновозможны, то вероятностью события А, называется отношение количества благоприятных ЭИ, (т.е. те, которые составляют событие А) к общему числу ЭИ.

$P(A) = \dfrac{m}{n}$, где m – число благоприятных ЭИ; n – общее число ЭИ.

**Замечание1.**
С точки зрения реального эксперимента равновозможность различных ЭИ – есть некоторая идеализация конкретного опыта.

**Замечание2.**
Классический подход реализуем только для схем с конечным числом ЭИ.

### Парадокс Мере.

Игра в кости. Выбрасывают 3 кубика и просчитывают сумму выпавших граней. Какая из сумм выпадет чаще 11 или 12?

| *11* | | *12* | |
|---|---|---|---|
| *Комбинации (Мере)* | *Вероятность выпадения комбинации (Паскаль)* | *Комбинации (Мере)* | *Вероятность выпадения комбинации (Паскаль)* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *6 – 4 – 1* | *6* | *6 – 5 – 1* | *6* |
| *6 – 3 – 2* | *6* | *6 – 4 – 2* | *6* |
| *5 – 5 – 1* | *3* | *6 – 3 – 3* | *3* |
| *5 – 4 – 2* | *6* | *5 – 5 – 2* | *3* |
| *5 – 3 – 3* | *3* | *5 – 4 – 3* | *6* |
| *4 – 4 – 3* | *3* | *4 – 4 – 4* | *1* |
| | *Всего 27* | | *Всего 25* |

Мере считал ЭИ – сами комбинации и получил, что выпадение 11 и 12 равновозможны, в то время как на практике 11 выпадает чаще (В этом и заключается парадокс Мере). Позже Паскаль объяснил эту задачу так – он посчитал общее число ЭИ выпадения кубиков 6*6*6 = 216. А затем посчитал вероятности выпадения каждой комбинации. В результате он установил, что 11 выпадет 27 раз, а 12 – 25. Те. Вероятность выпадения 11 – 27/216. 12 – 25/216.

## Вечерняя электричка.

Едет электричка, в которой n вагонов. По пути следования в нее подсаживаются k человек ($k \le n$). Какова вероятность, что каждый пассажир будет в своем вагоне один.

A – «Каждый пассажир в вагоне один»

Для осуществления этого события, необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:
Первый пассажир может сесть в любой из n вагонов.
Второй в n-1 вагонов.
….
k–ый в n-k+1

$N = n^k$ – общее число ЭИ.
$M = n(n-1)\ldots(n-k+1)$ – число благоприятных ЭИ.

$$P(A) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}$$

## Геометрический подход.

Рассматривается n- мерное Эвклидово пространство, на котором введен n – мерный объем. Рассматривается конечная область $\Omega$ этого пространства. Точки которой являются ЭИ некоторого опыта.

Событием, называется любое подмножество A множества $\Omega$ ($A \subset \Omega$), тогда вероятностью события A, называется отношение n – мерного объема множества A к n- мерному объему множества $\Omega$.

$$P(A) = \frac{V_A}{V_\Omega}$$

**Задача 1.**

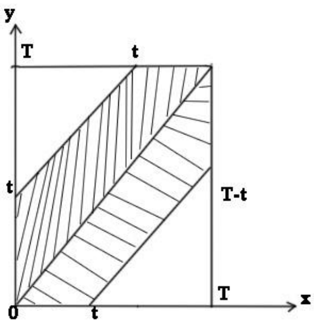
Имеется стержень длины l. Этот стержень падает на пол и раскалывается на 2 куска. Точка в которой он раскалывается – любая. Какова вероятность, что меньший из отколотых кусков не превысит 1/3 длины первоначального стержня.

$$P(A) = \frac{\frac{2}{3}l}{l} = \frac{2}{3}$$

**Задача 2**.

2 человека договариваются о встречи в определенном месте на промежутке времени (0,T). Каждый из них в течении этого времени появляются случайно. Каждый из них ждет другого в течении времени t (t<T). Какова вероятность, что они встретятся.

x – время прихода первого. $(0 \le x \le T)$.
y – время прихода второго $(0 \le y \le T)$.




Первая ситуация: первый пришел раньше или одновременно со вторым.

$$\begin{cases} x \le y \\ y - x \le t \end{cases} \quad \begin{cases} x \le y \\ y \le x + t \end{cases}$$

Вторая ситуация: второй пришел раньше.

$$\begin{cases} y < x \\ x - y \le t \end{cases} \quad \begin{cases} y < x \\ y \ge x - t \end{cases}$$

$$P(A) = \frac{T^2 - (T-t)^2}{T^2} = \frac{2Tt - t^2}{T^2}$$

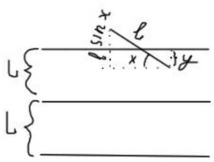
## Задача Бюффона.

Имеется бесконечная плоскость, разлинованная параллельными прямыми. Расстояние, между которыми L. На эту плоскость бросается иголка, длина которой l. Какова вероятность, что иголка пересечет одну из линий.

$l(l \le L)$

x – угол.

y – расстояние от нижнего края иглы до ближайшей сверху линии.

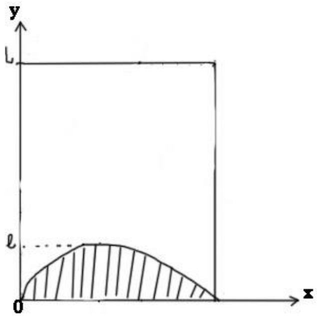



$0 \le x < \pi$

$0 \le y < L$

$l \sin x \ge y$ - игла пересекает линию.

$y \le l \sin x$




$$P(A) = \frac{\int_0^{\pi} l \sin x dx}{\pi L} = \frac{2l}{\pi L} \Rightarrow \pi = \frac{2l}{LP(A)}$$

# Аксиоматический подход к вероятности. Вероятностное пространство. Аксиомы вероятности Колмогорова.

Пусть Ω множество элементарных исходов $\mathcal{A}$ – сигма алгебра подмножеств множества Ω называемых событиями, P – числовая функция, определенная на событиях, называемая вероятностью и обладающая следующими свойствами:

1) $P(A) \ge 0 \forall A \in \mathcal{A}$ (неотрицательность событий)

**2)** $P(\Omega) = 1$ (нормированность вероятности)

**3)** Если A·B=0, то P(A+B)= P(A)+P(B) (аддитивность вероятности)

**4)** $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ и при этом $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = 0$, то $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$ (непрерывность вероятности)

Тогда тройка объектов (Ω, $\mathcal{A}$,P) называется вероятностным пространством.

Аксиомы 3 и 4 можно заменить аксиомой 3* с четной аддитивностью (сигма аддитивность)

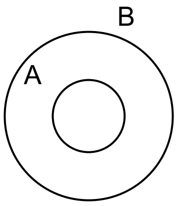
**3*)** Если события $A_1, A_2, \ldots A_n$ попарно не совместны, то

$$P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

**Теорема:** Системы аксиом 1,2,3,4 и 1,2,3* равносильны.

## Вероятности, вытекающие из аксиом.

**1)** Если из события A следует событие B ( $A \subset$ B) то вероятность
P(B\A)= P(B)-P(A)≥0




B= A+ (B\A);
A·(B\A)=0
P(B)= P(A) + P(B\A)

**2)** A$\subset$B → P(A)≤P(B) (из A следует B)

**3)** $\forall A \in \mathcal{A}$

$0 \le P(\text{A}) \le 1$

0 < A < Ω

**4)** P(0) = 0 0 + Ω = Ω
P(0) + 1 = 1

**5)** $\forall A \in \mathcal{A}$ P(A) + P(Ā) = 1

**6)** Если события $\text{A}_1, \text{A}_2, ... \text{A}_n$ попарно не совместны

$$\text{A}_i * \text{A}_J = \begin{cases} 0, i \ne j \\ \text{A}_i, i = j \end{cases}$$

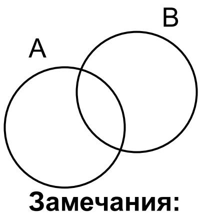
то $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

**7)** $A_1, A_2, ... A_n$ произвольные события

$$\boldsymbol{P(\sum_{i=1} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)}$$

**8)** $\forall \text{A}, \text{B} \in \mathcal{A} : P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Δ A + B = A + ( B \ A); A · ( B \ A ) = 0



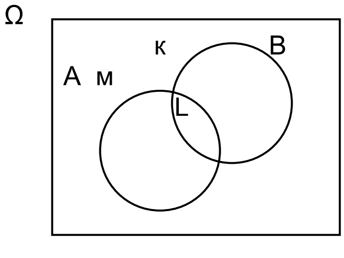

P(A+B)= P(A) + P( B \ A)
B\A = B \ (AB)
P(B\A) = P(B) – P(AB)
P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB)▲

**Замечания:**

**1.** Формулы: P(A+B) = P(A) + P(B); AB = 0
P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB); AB ≠ 0

Называются формулами сложения вероятностей.

**2.** Аксиомы вероятности и их следствия имеют естественное обоснование в рамках классического подхода.



n

P(A+B) = $\frac{m+k+l}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{l}{n} = P(A) + P(B) - P(AB)$

**3.** P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} P(A_i * A_j) - \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} P(A_i * A_j * A_k) + ... + (-1)^{n-1} P(A_1 * A_2 * \cdots A_n)$$

В случае если все события не совместны то

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

**4.** Если событие A достоверное то его вероятность равна 1

P(A)=1 A→P(A) = 1

Если A невозможное, вероятность его равна 0

P(A)=0 A→P(A) = 0

Обратные утверждения верны, только в случае конечного числа элементарных исходов.

## Задача о совпадениях.

Идёт экзамен по теории вероятности. Все студенты складывают свои зачетки на стол. Преподаватель наугад берет зачетку и выставляет оценку и вручает студенту. Какова вероятность, что хотя бы один студент получит свою зачетку.

$A_1, A_2, ... A_n$ события попарно не совместны

$A_i$ i –й студент получил свою зачетку.

$P(\sum_{i=1}^{n} A_i)$ - ?

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} P(A_i * A_j) - \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} P(A_i * A_j * A_k) + ... + (-1)^{n-1} P(A_1 * A_2 * \cdots A_n)$$

$= P_1 - P_2 + ... + (-1)^{n-1} P_n$

1) P($A_1$) = $\frac{1}{n}$ = P($A_i$) = $\frac{1}{n}$ $\Rightarrow P_1 = 1$

2) $P(A_1 \cdot A_2) = \frac{1}{n(n-1)}$

$$P_2 = C_n^2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n!}{2!(n-2)!(n-1)n} = \frac{1}{2!}$$

3) $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$

$$P_3 = C_n^3 \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{3!}$$

4) $P_k = \frac{1}{k!}$

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

При $n \to \infty \quad P(\sum_{i=1}^{n} A_i) \approx 1 - e^{-1}$

## Условная вероятность. Правило умножения вероятностей.

**Опр. 1:** Условной вероятностью события А при условии В называется вероятность события А в предположении, что событие В состоялось.

P(A|B); $P_в(A)$ вероятность события А при условии В.

**Опр. 2:** Условной вероятностью события А при условии В называется отношение вероятности произведений этих событий к вероятности события В.

(если эта вероятность не равна 0)

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

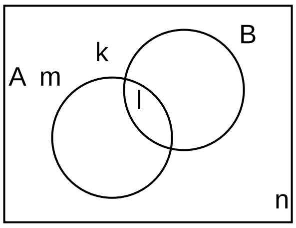
$$P(B \mid \mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A} \cdot B)}{P(\mathrm{A})}$$

P(A·B) = P(A|B) · P(B) = P(B|A) · P(A) правило умножения вероятностей

Следствие: $P(\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{A}_2 \cdot \ldots \cdot \mathrm{A}_n) = P(\mathrm{A}_1) \cdot P_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{A}_2) \cdot P_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}(\mathrm{A}_3) \cdot \ldots \cdot P_{\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{A}_2 \cdot \ldots \cdot \mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_n)$

**Замечание № 1:** в рамках классического подхода условная вероятность выводится

Ω




P(A|B)= $\frac{l}{k} = \frac{l/n}{k/n} = \frac{P(\mathrm{A} \cdot B)}{P(B)}$

P(B|A) $= \frac{l}{m} = \frac{l/n}{m/n} = \frac{P(\mathrm{A} \cdot B)}{P(\mathrm{A})}$

**Замечание № 2:** Условное вероятность определяет новое вероятностное пространство (Ω, $\mathcal{A}$, $P_B(\mathrm{A})$)

Все свойства вероятности сохраняются

1) $P_B(\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A} \cdot B)}{P(B)} \geq 0$

2) $P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

3)

$$P_B(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2) = \frac{P((\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2) \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(\mathrm{A}_1 B \cdot \mathrm{A}_2 B)}{P(B)} = \frac{P(\mathrm{A}_1 B)}{P(B)} + \frac{P(\mathrm{A}_2 B)}{P(B)} = P_B(\mathrm{A}_1) + P_И(\mathrm{A}_2)$$

Если $\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{A}_2 = 0$ то

$(\mathrm{A}_1 \cdot B) \cdot (\mathrm{A}_2 \cdot B) = 0$

4) $\mathrm{A}_1 \supset \mathrm{A}_2 \supset \mathrm{A}_3 \supset \ldots; \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} P(\mathrm{A}_n) = 0$

$\mathrm{A}_1 B \supset \mathrm{A}_2 B \supset \mathrm{A}_3 B \supset \ldots; \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n B) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} P(\mathrm{A}_n B) = 0$

## Независимость событий.

**Опр. 1:** Два события называются независимыми если информация о том произошло или нет одно из них не влияет на вероятность другого.

$$P(A) = P(A \mid B)$$
$$P(B) = P(B \mid A)$$

**Опр. 2:** Несколько событий называются попарно независимыми, если каждые два из них независимы.

**Опр. 3:** Несколько событий называются независимыми в совокупности, если они попарно независимы и каждое событие не зависит от всевозможных произведений остальных событий.

**Пример:** A,B,C – попарно независимы. Тогда независимы A и B, B и C,A и C. Если в совокупности, то A и B,B и C,A и C,A и BC,B и AC,C и AB.

**Теорема 1:** Если событие A и B независимы, то вероятность P(AB)=P(A)·P(B)

**Теорема 2:** Если события $A_1, A_2, \dots A_n$ , независимы в совокупности, то P( $A_1, A_2, \dots A_n$ ) = $P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$

**Пример 1:** Есть 4 числа: 2,3,5,30

$A_2, A_3, A_5$ - вытащенное число делится на 2,3,5

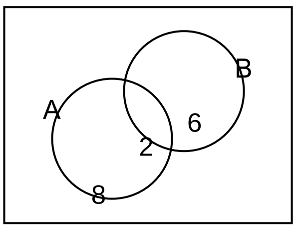
1)P( $A_2$ )=P( $A_3$ )=P( $A_5$ )= $\frac{1}{2}$

2)P( $A_2 A_3$ )= $P(A_2 A_5) = P(A_3 A_5) = \frac{1}{4}$

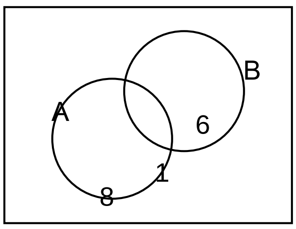
$A_2, A_3, A_5$ попарно независимы

3) $P(A_2 A_3 A_5) = \frac{1}{4} \mapsto A_2, A_3, A_5$ в совокупности зависимы

**Пример 2:**




24




24

P(A) = $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

P(B)= $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

P(AB)= $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

P(AB)=P(A)·P(B)

Это означает, что A и B независимы
P(A)=P(A|B)

P(A) = $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

P(B)= $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

P(AB)= $\frac{2}{24} = \frac{1}{24}$

P(AB)≠P(A)·P(B)

Это означает, что A и B зависимы
P(A)≠P(A|B)

**Пример 3: 1)**Имеется колода карт из 36 карт
A – вытянули пику

B – вытянули даму

P(A) $= \frac{1}{4}$

P(B) $= \frac{1}{9}$

P(AB) = P(A)·P(B) события независимы

P(AB)$= \frac{1}{36}$

**2)** В колоду добавили джокера

P(A) $= \frac{1}{4}$

P(B) $= \frac{1}{9}$

P(AB) ≠ P(A)·P(B) события зависимы

P(AB)$= \frac{1}{37}$

**Замечание:** при установлении независимости A и B часто используют следующий принцип: события A и B, реальные прообразы которых причинно независимы считаются независимыми и в теоретико-вероятностном смысле.

## Задача о наилучшем выборе.

Имеется n предметов разного качества. Задача заключается в том чтобы выбрать предмет наилучшего качества. Случайным образом извлекают первый предмет. На этом опыт может закончится. Если эксперимент продолжается, то остановится можно лишь в тот момент, когда вытащенный предмет лучше всех предыдущих, предположим, что предмет, извлечённый на шаге к лучше всех предыдущих. Какова вероятность, что он при этом окажется абсолютно лучшим.

A – предмет, вытащенный на шаге к наилучший

B – предмет, вытащенный на шаге к- лучший среди вытащенных

P(A|B) - ?

P(A|B) = $\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$ т.к A подмножество B

1) P(A)= $\frac{1}{n}$

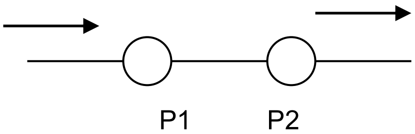
2) P(B)=$\frac{C_k^n \cdot (k-1)!(n-k)!}{n!} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (k-1)!(n-k)!}{n!} = \frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k}$

3) P(A|B)=$\frac{k}{n}$

## Расчет работоспособности цепей

**1.** оба прибора соединены последовательно

Сигнал




$A_1$ работает первый

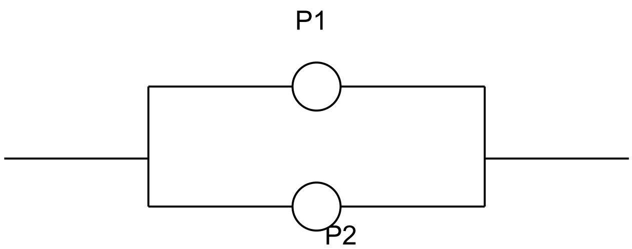
$A_2$ работает второй

A сигнал прошел по цепи

A = $A_1 \cdot A_2$ $A_1$ и $A_2$ независимы

P(A) = P($A_1$)·P($A_2$)= $P_1 P_2$

**2.** приборы подключены параллельно




$A_1 \cdot A_2$ совместные события

а) A = $A_1 + A_2$

P(A) = P($A_1$)+P($A_2$) - P($A_1 \cdot A_2$ ) = $P_1 + P_2 - P_1 P_2$

б) A = $A_1 \overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2 + A_1 \cdot A_2$

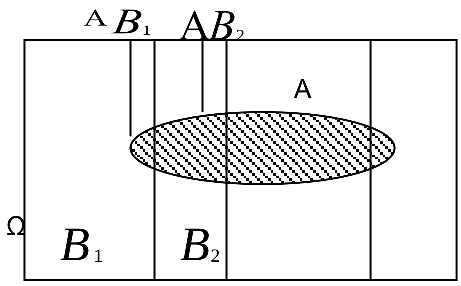
в) Ā = $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2$

P(Ā) = P($\overline{A}_1$) · P($\overline{A}_2$)= (1- $P_1$)·(1- $P_2$)

P(A) = 1- (1- $P_1$)·(1- $P_2$)

## Формула полной вероятности.

Предположим, что в результате некоторого опыта происходит одно из попарно не совместных событий $B_1; B_2;...; B_n$ Вместе с тем в рамках этого опыта рассматривается событие А



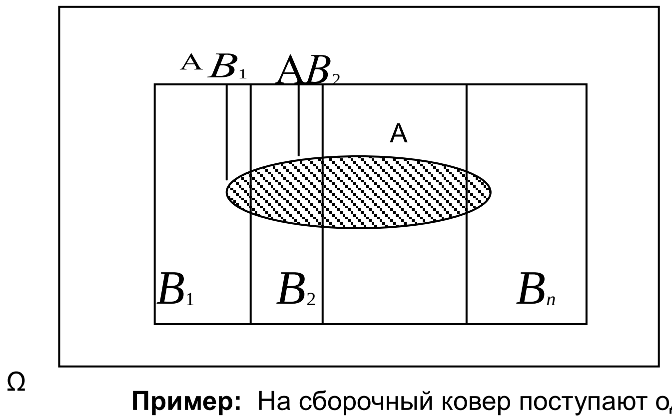

A= $AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_n$

$$AB_i \cap AB_j = \begin{cases} 0, i \neq j \\ AB_i, i = j \end{cases}$$

P(A)= $\sum_{i=1}^{n} P(A \cdot B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A | B_i)$

P(A) $= \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A | B_i)$

**Замечание:**




То формула всё равно справедлива

**Пример:** На сборочный ковер поступают однотипные детали с 3-х заводов равными партиями. В продукции 1-го завода брак – 5%, 2-го завода – 7%, 3-го завода – 1%. Какова вероятность, что случайно взятая с конвейера деталь бракованная?

$B_{1,2,3}$ случайно выбранная деталь изготовленная 1,2,3 заводом (несовместные события)

А – случайно выбранная деталь бракованная

P($B_1$) = P($B_2$)=P($B_3$)= $\frac{1}{3}$

Какова вероятность того что брак взят с 1,2 или 3 завода

P(A| $B_1$) = 0.05

P(A| $B_2$) = 0.07

P(A| $B_3$) = 0.01

P(A) = $\frac{1}{3} * 0{,}05 + \frac{1}{3} * 0{,}07 + \frac{1}{3} * 0{,}01$

## Задача о разорении игрока.

Подбрасывается монетка. Перед броском игрок предугадывает результат. Если угадал + 1 рубль, не угадал – 1 рубль. Начальный капитал X рублей. Игра продолжается до тех пор пока он не наберет a (a>x) рублей или разорится. Какова вероятность, что игрок разорится.

P(x) - вероятность разорения при начальном капитале в x рублей

P(x+1) - вероятность разорения при угаданном первом броске

P(x-1) – вероятность разорения при не угаданном первом броске

$B_1$ - игрок угадывает 1-е выпадение монеты

$B_2$ - игрок не угадывает 1-е выпадение монеты

A – игрок разорился

P(A) $= P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2)$

P(x)=$\frac{1}{2} P(x+1) + \frac{1}{2} P(x-1)$

$P(x+1) - P(x) = P(x) - P(x-1)$ приращение постоянно

P(x) – линейная функция

P(x)=$C_1 + C_2 \cdot X$

P(0)=1 P(0)=1=$C_1$

P(a)=0 P(a)=0=$C_1$ + $C_2 \cdot a$

P(x)= 1-$\frac{x}{a}$

## Формула вероятностей гипотез. (Формула Байеса)

Пусть в результате опыта происходит одно из несовместных событий $B_1; B_2; ...; B_n$. Известно, также что в ходе этого опыта произошло событие A

Какова вероятность, что событие A произошло в рамках события $B_i; i = 1...n$

До проведения опыта вероятности $B_1; B_2; ...; B_n$ определялись следующими значениями $P(B_1); P(B_2); ...; P(B_n)$ это априорные(доопытные) вероятности. После того как событие A произошло необходимо пересмотреть вероятности событий $B_1; B_2; ...; B_n$ как условные $P(B_1 \mid A); P(B_2 \mid A); ...; P(B_n \mid A)$ это апостериорное (послеопытные) вероятности

$P(\mathrm{A} \cdot B_i) = P(A) \cdot P(B_i \mid A) = P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)$

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}{P(\mathrm{A})} = \frac{P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P(A \mid B_k)}$$ Формула Байеса

**Пример:** Имеется два внешне одинаковых ящика с шарами

Из произвольного взятого ящика случайным образом выбирают шар. Он оказался белым. Какова вероятность что это ящик номер № 1

А – достали белый шар

$B_1$ -достали белый шар из 1-го ящика

$B_2$ - достали белый шар из 2-го ящика

события не совместны

P($B_1$) = P($B_2$)= $\frac{1}{2}$ P(A| $B_1$) = $\frac{2}{3}$ P(A| $B_2$) = $\frac{2}{5}$

$$P(B_1|A)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{15}}=\frac{5}{8}$$

# Случайные величины.

**Опр. 1:** Пусть в результате некоторого опыта происходит одно из элементарных событий $\omega$. Числовая функция от элементарных событий $\xi(\omega)$ называется случайной величиной.

**Опр. 2:** Пусть (Ω,$\mathcal{A}$,P) вероятностное пространство, тогда функция $\xi \cdot \xi(\omega)$ называется случайной величиной, если $\forall x \in R$ множество элементарных исходов следующего вида $\{\omega : \xi(\omega) \le x\}$ является событием, т.е. оно $\in$ $\mathcal{A}$.

**Опр. 3:** Пусть (Ω,$\mathcal{A}$,P) вероятностное пространство. Функция $\xi(\omega)$ называется случайной величиной, если $\forall B \in$ ß множество элементарных исходов следующего вида $\{\omega : \xi(\omega) \le B\}$ является событием, т.е. оно $\in$ $\mathcal{A}$.

**Пример № 1:** Бросается монетка

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *«Орел»* $\omega_1$ | $\xi(\omega_1)$ | *1* | *0* | *1* |
| *«Решка»* $\omega_2$ | $\xi(\omega_2)$ | *0* | *1* | *-1* |
| | | $\xi_1$ | $\xi_2$ | $\xi_3$ |

**Пример № 2:** Бросаем кубик

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| «1» | $\omega_1$ | $\xi(\omega_1)$ | 1 | 1 | 1 |
| «2» | $\omega_2$ | $\xi(\omega_1)$ | 2 | 1 | 2 |
| «3» | $\omega_3$ | $\xi(\omega_1)$ | 3 | 2 | 1 |
| «4» | $\omega_4$ | $\xi(\omega_1)$ | 4 | 2 | 2 |
| «5» | $\omega_5$ | $\xi(\omega_1)$ | 5 | 3 | 1 |
| «6» | $\omega_6$ | $\xi(\omega_1)$ | 6 | 3 | 2 |
| | | | $\xi_1$ | $\xi_2$ | $\xi_3$ |

Все случайные величины разделяются на 2 класса

1. дискретные
2. непрерывные

Дискретные случайные величины – это такие, которые принимают конечное и счетное множество значений.

Непрерывные случайные величины – это такие, которые принимают все значения (-∞;+∞ ).

## Дискретные случайные величины.

Предположим что все элементарные исходы Ω разбиты на следующую группу событий $A_1, A_2,... A_к$ по следующему принципу: элементарным исходом составляющим множество $A_i$ соответствует одно и тоже значение случайной величины.

$\xi(A_1) = x_1$; $\xi(A_2) = x_2$;…;$\xi(A_к) = x_к$

P($A_1$) = P($\xi = x_1$)= $P_1$;…;P($A_к$ ) = P($\xi = x_к$)= $P_к$

**Опр. 1:** Зависимость значений случайной величины и вероятности их осуществления называется законом распределения.

Для дискретной случайной величины закон распределения записывается в виде двухстрочной таблицы

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\xi$ | $x_1$ | $x_2$ | >0 $P_i$ | $x_n$ |
| P | $P_1$ | $P_2$ | | $P_n$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\xi$ | $x_1$ | $x_2$ |
| P | $P_1$ | $P_2$ |

$P_i$ >0

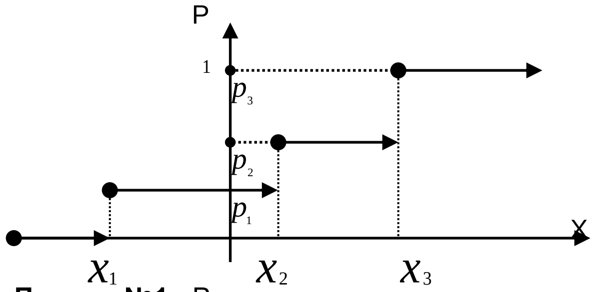
$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ условие нормировки

$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$

**Опр. 2:** Функция вида F(x) = P $(\xi \le x), x \in$ R называется функцией распределения случайной величины $\xi$

## Свойства функции распределения.

1. Функция распределения непрерывна справа (разрыв 1-го рода)
2. Является неубывающей
3. имеет ступенчатый характер(кусочно-постоянная)
4. F(-$\infty$) = 0;   F(+$\infty$) = 1
5. F(x)= $\sum\limits_{x_i \le X} P_i$
6. P(а$\le \xi \le$в) = $\sum\limits_{a \le x_i \le в} P_i$ = F(в) – F(а)




**Пример №1:** Равномерное распределение на множестве $\{1;2;...;N\}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *ξ* | *1* | *2* | *N* | $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i = 1$ |
| *P* | $1/N$ | $1/N$ | $1/N$ | |

$\{X_1; X_2;...; X_n\}$ $\qquad P_i = \dfrac{1}{N}, i = 1,...N$

## Биноминальное распределение (Независимые испытания по схеме Бернулли).

Производится серия n независимых испытаний, в результате каждого из которых с вероятностью P осуществляется событие A. Какова вероятность, что в данной серии испытаний событие A(успех) наступит ровно m раз. (0≤m≤n)

$$\tilde{A} = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{m} \cdot \underbrace{\bar{A} \cdot ... \cdot \bar{A}}_{n-m}$$

P($\tilde{A}$) = $P^m \cdot (1-p)^{n-m}$

Вводится случайная величина равная числу успехов в данной серии испытаний.

n – число испытаний ,p – вероятность успеха,m – число успехов,1-p=q – вероятность не успеха, $\xi$ - случайная величина – число успехов в данной серии испытаний

$\xi$ : 0;1;…;n

P($\xi$=m)=$C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$ формула Бернулли или вероятность биноминального распределения.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *ξ* | *0* | *1* | *2* | *n* |
| *P* | $q^n$ | $C_n^1 \cdot p \cdot q^{n-1}$ | $C_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2}$ | $p^n$ |

$$q^n + C_n^1 \cdot p \cdot q^{n-1} + C_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + \ldots$$

+ $p^n = (q+p)^n$ =1 (условие нормировки)

**Достоинство:** формула очень точная

**Недостаток:** сложна для вычисления при больших значениях

## Асимптотическое представление формулы Бернулли.

**1.** Наивероятнейшее число успехов

$$\begin{cases} \dfrac{P(\xi = k_0)}{P(\xi = k_0 - 1)} \ge 1; \\ \dfrac{P(\xi = k_0)}{P(\xi = k_0 + 1)} \ge 1; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{C_n^k \cdot p^{k_0} \cdot q^{n-k_0}}{C_n^{k-1} \cdot p^{k_0-1} \cdot q^{n-k_0+1}} \ge 1; \\ \dfrac{C_n^k \cdot p^{k_0} \cdot q^{n-k_0}}{C_n^{k+1} \cdot p^{k_0+1} \cdot q^{n-k_0+1}} \ge 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{n!(k_0-1)(n-k_0+1)!}{k_0!(n-k_0)!n!} \cdot \dfrac{p}{q} \ge 1; \\ \dfrac{n!(k_0+1)(n-k_0-1)!}{k_0!(n-k_0)!n!} \cdot \dfrac{q}{p} \ge 1; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{n-k_0+1}{k_0} \cdot \dfrac{p}{q} \ge 1; \\ \dfrac{k_0+1}{n-k_0} \cdot \dfrac{q}{p} \ge 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (n-k_0+1) \cdot p \ge q \cdot k_0; \\ (k_0+1) \cdot q \ge p(n-k_0); \end{cases} \begin{cases} np - pk_0 + p \ge q \cdot k_0; \\ qk_0 + q \ge pn - pk_0); \end{cases} \begin{cases} (p+q) \cdot k_0 \le np + p; \\ (p+q)k_0 \ge np - q); \end{cases}$$

$np - q \le k_0 \le np + p$ наивероятнейшее число успехов

1) np-q ; np+p $\notin Z$ т.е. не являются целыми $\exists! k_0$ (существует единственное $k_0$)

2) np-q ; np+p $\in Z$ (N) целые числа

$$\exists (\mathrm{K}_0)_1 = np - q$$

$$(\mathrm{K}_0)_2 = np + p$$

**Замечание № 1:** p-$\dfrac{q}{n} \le \dfrac{k_0}{n} \le p + \dfrac{p}{n}$;

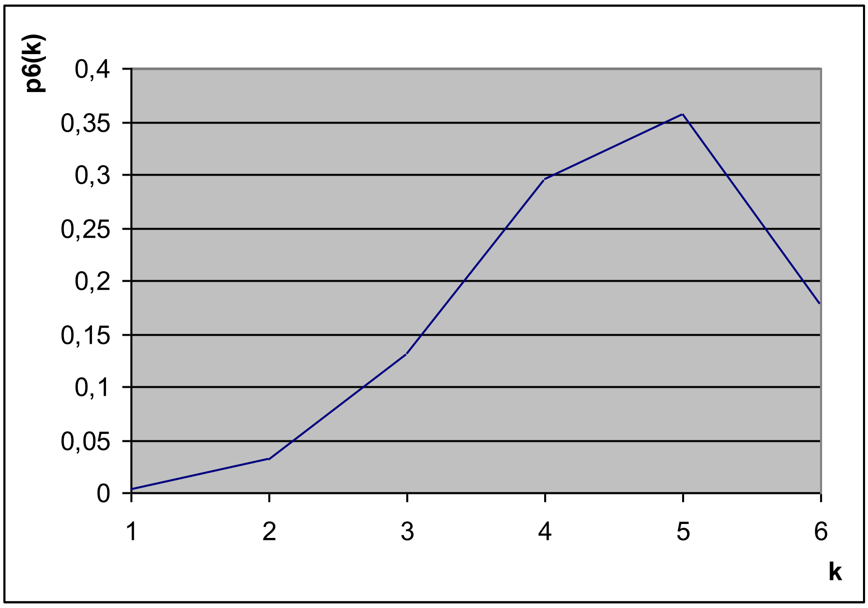
$\dfrac{k_0}{n}$ относительная частота – наивероятнейшая доля успеха

при $n \to \infty$ $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{k_0}{n} = p$

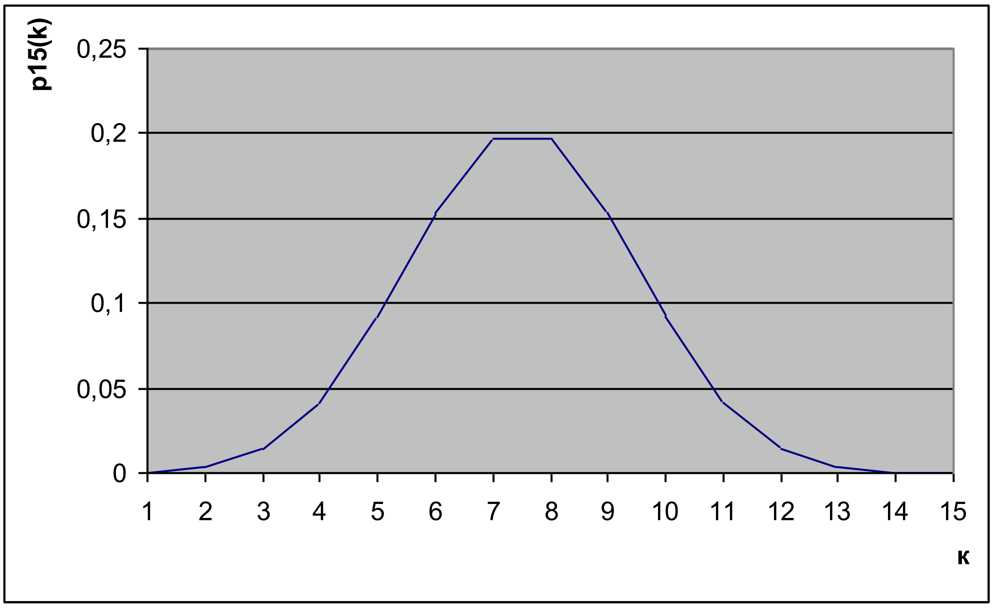
## Замечание №2

Например, рассмотрим опыт: подбрасываем 2 монеты. Неуспехом является только выпадение 2-х орлов. Число испытаний n=6.

Из условия ясно, что p=3/4.




Рассмотрим аналогичный опыт с другими параметрами p=1/2, n=15.




## Теорема (формула) Пуассона.

Если в серии независимых испытаний по схеме Бернулли $n \to \infty$, $p \to 0$ в одном испытании; $n \cdot p \to \alpha$, то вероятность m успехов может быть рассчитана по следующей приближенной формуле:

$$P(\xi = m) \approx \frac{\alpha^m}{m!} \cdot e^{-\alpha}$$

Доказательство:

$$P(\xi = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m} = \left| n \cdot p \approx \alpha \rightarrow p \approx \frac{\alpha}{n} \right| =$$

$$= \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} \cdot \left(\frac{\alpha}{n}\right)^m \cdot \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-m} = \frac{\alpha^m}{m!} \cdot \frac{(n-m+1)\cdot \ldots \cdot n}{n^m} \cdot \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{-m} =$$

$$= \frac{\alpha^m}{m!} \cdot \left(\frac{n-m+1}{n}\right) \cdot \left(\frac{n-m+2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{-\frac{n}{\alpha}\cdot(-\alpha)} \cdot \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{-m} = \left| \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \right| =$$

$$= \frac{\alpha^m}{m!} \cdot \left(1-\frac{m-1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{m-2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{-\frac{n}{\alpha}\cdot(-\alpha)} \cdot \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{-m} \approx \frac{\alpha^m}{m!} \cdot e^{-\alpha}$$

при больших n.

**Замечание:**

n~несколько десятков, то можно пользоваться формулой Пуассона

p не превышает 1/10  $0 \le n \cdot p = \alpha \le 10$

Пример №1

Опрашиваются 500 человек по поводу своего дня рождения (день, месяц). Какова вероятность, что ровно двое из них родились 23 октября?

*Дано:* *Решение:*

*n=500*  $n \cdot p = 500/365 \approx 1{,}37$,  $\alpha \approx 1{,}37$

*m=2*

*p=1/365*  $P(\xi=2) = \frac{1{,}37^2}{2!} \cdot e^{-1{,}37} \approx 0{,}2385$

*P(ξ=2)-?*

Пример №2

Среди 1000 человек по статистике 8 левшей. Какова вероятность, что среди 100 случайно отобранных людей нет ни одного левши?

*Дано:* *Решение:*

*p=0,008*  $P(\xi = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$

*n=100*  $P(\xi = m) \approx \frac{\alpha^m}{m!} \cdot e^{-\alpha}$

*m=0*

*P(ξ=0)-?*  $P(\xi=0) \approx e^{-0.8} \approx 0{,}4493$

## Локальная теорема Муавра-Лапласа.

Если в серии независимых испытаний по схеме Бернулли $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \rightarrow \infty$, то вероятность ровно m успехов вычисляется по следующей приближенной формуле:

$$P(\xi = m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}; \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}; \qquad x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

Характеристики $\varphi(x)$:

1. $\varphi(x)$ - четная: $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
2. $\varphi(x)$ протабулирована.

Задача: Из всех привитых от туберкулеза 94% приобретают иммунитет. Какова вероятность того, что среди 100 000 привитых людей 5800 не имеют иммунитета?

*Дано:* *Решение:*

*n=100000*

$$P(\xi = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

*m=5800*

$$P(\xi = m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}};$$

*p=0,06*

*P(ξ=5800)-?*

$$x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{5800 - 6000}{\sqrt{10^6 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}94}} = -2{,}7$$

$$\varphi(2{,}7) = 0{,}0104;$$

*P(ξ=5800)* $\approx \frac{0{,}0104}{75} \approx 0{,}000139$

Задача №2
Вероятность встретить знакомого в коридоре института равна 0,2. Какое количество знакомых можно гарантировано ожидать среди 100 прохожих с вероятностью 0,095?

*Дано:* *Решение:*

*n=100*

*p=0,2*

$$P(\xi = m) \approx \frac{\varphi\left(\frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}};$$

*P(ξ=m)=0,095*

*m-?*

$$\varphi\left(\frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right) = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \cdot P(\xi = m)$$

$$\varphi\left(\frac{m - 20}{4}\right) = 4 \cdot 0{,}95 = 0{,}38$$

$$\left|\frac{m - 20}{4}\right| \approx 0{,}31$$

$$m - 20 \approx \pm 1{,}24$$

$$m_1 = 19; m_2 = 21.$$

## Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Если в серии независимых испытаний по схеме Бернулли $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \to \infty$, то вероятность числа успехов от $m_1$ до $m_2$ включительно вычисляется по следующей формуле:

$P(m_1 \le \xi \le m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, где $x_{1,2} = \frac{m_{1,2} - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$

Характеристики:

1. $\Phi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - интеграл Лапласа; $P(m_1 \le \xi \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$;

2. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ - функция нечетная;

3. Интеграл Лапласа протабулирован;

4.Улучшающая схема: $P(m_1 \le \xi \le m_2) \approx \Phi\left(\dfrac{m_2 + \frac{1}{2} - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}\right) - \Phi\left(\dfrac{m_1 - \frac{1}{2} - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}\right)$.

Задача:
Какова вероятность того, что при 200-кратном бросании монеты орел выпадает от 95 до 105 раз?

*Дано:*

*n=200*

$m_1 = 95$

$m_2 = 105$

$p = q = \frac{1}{2}$

$P(95 \le \xi \le 105) - ?$

*Решение:*

$$x_1 = \frac{m_1 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}} = \frac{95-100}{\sqrt{50}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \approx -0{,}705$$

$$x_2 = \frac{m_2 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}} = \frac{105-100}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}705$$

$$P(95 \le \xi \le 105) = \Phi(0{,}705) - \Phi(-0{,}705) = 2\cdot\Phi(0{,}705) \approx 2\cdot 0{,}2112 = 0{,}5224$$

## Распределение Пуассона (случай редких событий)

Распределением Пуассона называется распределение случайной величины ξ, принимающей значение 0;1;2;3;… со следующими вероятностями:

$$P(\xi = m) = \frac{\alpha^m}{m!}\cdot e^{-\alpha}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *ξ* | *0* | *1* | *2* | … |
| P | $e^{-\alpha}$ | $\frac{\alpha}{1!}\cdot e^{-\alpha}$ | $\frac{\alpha^2}{2!}\cdot e^{-\alpha}$ | |

$$e^{-\alpha} + \frac{\alpha}{1!}\cdot e^{-\alpha} + \frac{\alpha^2}{2!}\cdot e^{-\alpha} + \ldots = e^{-\alpha}\cdot\left(1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots\right) = 1$$

$$1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots = e^{\alpha}$$

## Геометрическое распределение

Геометрическим распределением называется распределение случайной величины ξ:1;2;3;… со следующими вероятностями $P(\xi = m) = p\cdot q^{m-1}$, где *p* – вероятность единичного успеха, *q* – вероятность неуспеха.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *ξ* | *1* | *2* | *3* | … |
| $\tilde{p}$ | p | $p\cdot q$ | $p\cdot q^2$ | |

бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

$p + p\cdot q + p\cdot q^2 + \ldots = \dfrac{p}{1-q} = 1$ (0<*q*<1) – условие нормировки выполнено.

Задача:
Стрелок стреляет по мишени до первого попадания. Вероятность попадания *p*, вероятность непопадания – *q*. Какова вероятность попасть с первого выстрела, со второго выстрела?

# Непрерывные случайные величины.

Непрерывные случайные величины – величины, которые принимают все значения числовой оси$(-\infty;+\infty)$.

В случае непрерывных случайных величин бессмысленно говорить о вероятности каждого его конкретного значения. Можно лишь обсуждать вероятность попадания случайной величины на некоторый промежуток числовой оси. Поэтому для описания непрерывных случайных величин вводится понятие плотности распределения вероятности p(x).

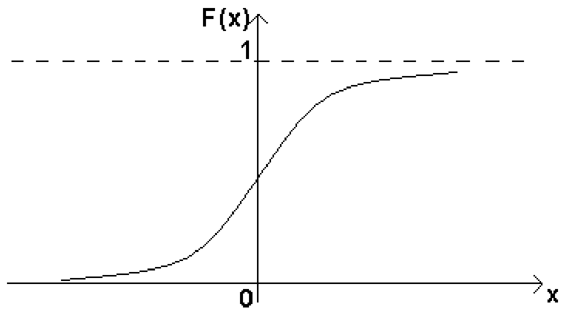
## Свойства плотности вероятности:

1. $p(x) \ge 0, x \in R;$
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$ - условие нормировки;
3. Вероятность попадания случайной величины ξ на [a;b] имеет следующий вид

$$P(a \le \xi \le b) = \int\limits_a^b p(x)dx.$$

## Свойства функции распределения:

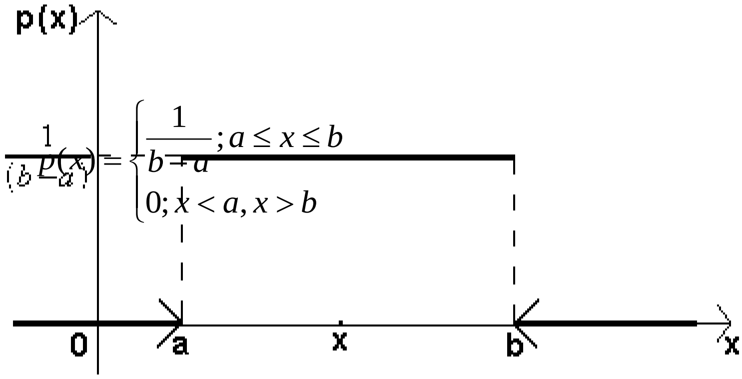
1.функция непрерывна;
2.не убывает;
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0; \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1;$
4. $F'(x) = p(x);$
5. $P(a \le \xi \le b) = \int\limits_a^b p(x)dx = F(b) - F(a).$



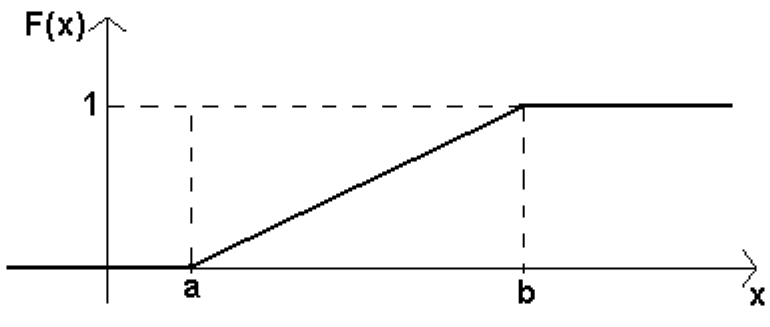

## Примеры непрерывных случайных величин.

1. Равномерное распределение на отрезке.

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}; a \le x \le b \\ 0; x < a, x > b \end{cases}$$




$$F(x) = \begin{cases} 0; x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}; a \le x \le b \\ 1; x > b \end{cases}$$

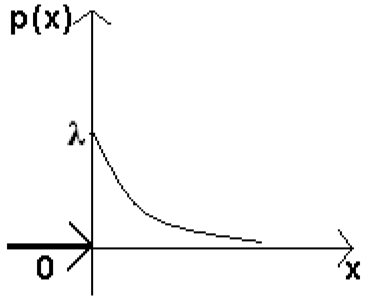


$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dt=\frac{t}{b-a}\Big|_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a}$$

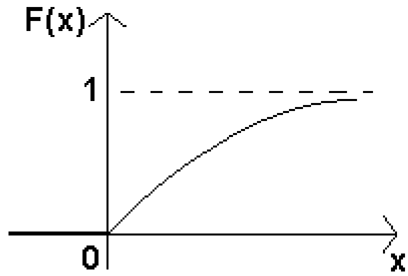
2. Показательное распределение.

$$p(x)=\begin{cases}0; x<0\\ \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}; x\ge 0\end{cases}$$

λ – положительный параметр




$$F(x)=\begin{cases}0; x<0\\ 1-e^{-\lambda\cdot x}; x\ge 0\end{cases}$$




$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int_{0}^{x}\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot t}dt=\lambda\cdot\frac{e^{-\lambda\cdot t}}{-\lambda}\Big|_{0}^{x}=-(e^{-\lambda\cdot x}-1)$$

# Многомерные законы распределения

На примере двумерных распределений

Предположим, что в рамках опыта исследуются 2 дискретные случайные величины ξ(кси) и η(эта).

$\xi: x_1; x_2;...; x_k$

$\eta: y_1; y_2;...; y_m$

Определение: Совместным законом распределения дискретных случайных величин ξ и η (или законом их совместного распределения) называется вероятность $P_{\xi\eta}=P(\xi=x_i;\eta=y_j)$, определенная на всем множестве упорядоченных пар $(x_i; y_j); i=1;...; k; j=1;...; m.$

Двумерный закон распределения случайных величин ξ и η имеет вид следующей таблицы:

| $\xi \backslash \eta$ | $y_1$ | $y_2$ | $\dots$ | $y_m$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\dots$ | $p_{1m}$ | $p_1^{\xi}$ |
| $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $\dots$ | $p_{2m}$ | $p_2^{\xi}$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | | $\dots$ | $\dots$ |
| $x_k$ | $p_{k1}$ | $p_{k2}$ | $\dots$ | $p_{km}$ | $p_k^{\xi}$ |
| | $p_1^{\eta}$ | $p_2^{\eta}$ | $\dots$ | $p_m^{\eta}$ | |

$$p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^{\xi} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_j^{\eta} = 1$$

Из двумерного закона одномерные законы выводятся легко.

| $\xi$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| $\tilde{p}$ | $p_1^{\xi}$ | $p_2^{\xi}$ | $\dots$ | $p_k^{\xi}$ |

| $\eta$ | $y_1$ | $y_2$ | $\dots$ | $y_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $\tilde{p}$ | $p_1^{\eta}$ | $p_2^{\eta}$ | $\dots$ | $p_m^{\eta}$ |

В общем случае одномерные законы не определяют многомерного распределения, т.к.
к*m – количество неизвестных
k+m – количество уравнений.
В случае непрерывных случайных величин ξ и η их совместное распределение задается плотностью совместного распределения вероятностей $p_{\xi\eta}(x; y) \approx p(x; y)$.

1. $p(x; y) \geq 0;$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x; y) dxdy = 1$ - условие нормировки;
3. $P((x; y) \in B) = \iint\limits_{B} p(x; y) dxdy;$
4. $p_{\xi}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x; y) dy$

$$p_{\eta}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x; y) dx$$

## Независимые случайные величины

Случайные величины ξ и η называются независимыми, если для совместного закона распределения дискретных случайных величин ξ и η и для плотности совместного распределения вероятностей непрерывных случайных величин ξ и η выполняются следующие соотношения:

$$P_{\xi\eta}(\xi = x_i; \eta = y_j) = P_{\xi}(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j)$$

Если случайные величины независимы, то двумерное распределение или плотность двумерного распределения однозначно определяются одномерными законами.

## Операции над случайными величинами:

1. Сложение и вычитание дискретных случайных величин: $\zeta = \xi + \eta; \zeta$ (дзета)

$\xi : x_1; x_2; ...; x_k$

$\eta : y_1; y_2; ...; y_m$

| $\xi \backslash \eta$ | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | | $p_{1m}$ |
| $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | | $p_{2m}$ |
| ... | | | | |
| $x_k$ | $p_{k1}$ | $p_{k2}$ | | $p_{km}$ |

| $\zeta$ | $x_1+y_1$ | $x_2+y_2$ | ... | $x_k+y_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | | $p_{km}$ |

Замечание: Если какие-то суммы совпадают, то соответствующие вероятности просто складываются.

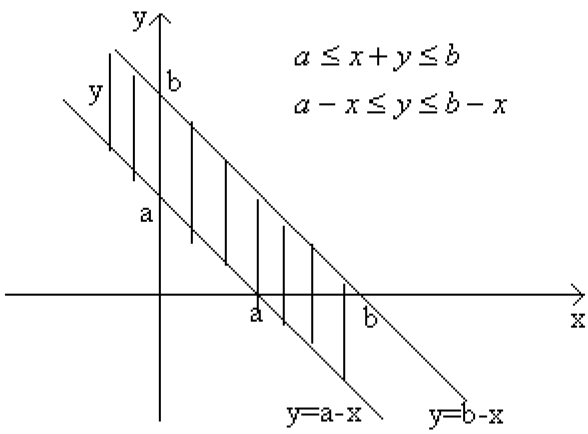
2. Произведение двух дискретных случайных величин $\zeta = \xi \cdot \eta$

| $\zeta$ | $x_1 \cdot y_1$ | $x_2 \cdot y_2$ | ... | $x_k \cdot y_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | | $p_{km}$ |

3. Сумма двух независимых непрерывных случайных величин

$\zeta = \xi + \eta; \qquad p_\xi(x); p_\eta(y)$

$$P(a \le \zeta \le b) = \int_a^b P_\zeta(t)dt$$




$$P(a \le \xi + \eta \le b) = \iint_B p_\xi(x) \cdot p_\eta(y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{a-x}^{b-x} p_\xi(x) \cdot p_\eta(y)dxdy = \begin{vmatrix} y = t - x \\ t = x + y \\ dt = dy \\ t_н = a, t_в = b \end{vmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_a^b p_\xi(x) \cdot p_\eta(t - x)dt =$$

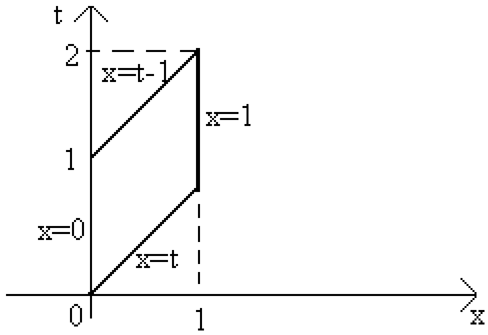
$$= \int_a^b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x) \cdot p_\eta(t - x)dx\right)dt$$

$$P_\zeta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x) \cdot p_\eta(t - x)dx$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0; x \le 0; x \ge 1 \\ 1; 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} 0; y \le 0; y \ge 1 \\ 1; 0 < y < 1 \end{cases}$$

$$P_\zeta(t) = \int_0^1 p_\eta(t-x)dx; 0 < t - x < 1; x < t \le x + 1$$



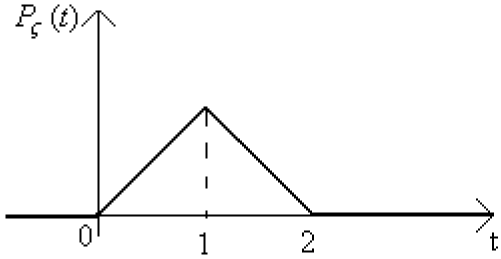

$a) 0 \le t \le 0$

$$p_\zeta(t) = \int_0^t dx = x\Big|_0^t = t$$

$б) 1 \le t \le 2$

$$p_\zeta(t) = \int_{t-1}^1 dx = t\Big|_{t-1}^1 = 2 - t$$

$$P_\zeta(t) = \begin{cases} t; 0 \le t \le 1 \\ 2 - t; 1 \le t \le 2 \\ 0; t < 0; t > 2 \end{cases}$$




# Математическое ожидание

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины называется сумма попарных произведений значений этой случайной величины на вероятности их осуществления.

Обозначения: $\bar{\xi}; M_\xi; M(\xi)$

$$M_\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot P(\xi = x_k)$$

$$M_\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot P(\xi = x_k)$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется выражение следующего вида: $M_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_\xi(x)dx$

Примеры:

1.

| $\xi$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | … | $\frac{1}{n}$ |

$$M_\xi = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + ... + x_n \cdot \frac{1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

2. Выпадение грани кубика

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *ξ* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* |
| *p* | *1/6* | *1/6* | *1/6* | *1/6* | *1/6* | *1/6* |

$$M_\xi = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

4. Равномерное распределение на отрезке [0,1]

$$p(x) = \begin{cases} 1; 0 \le x \le 1 \\ 0; x < 0; x > 1 \end{cases}$$

$$M_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p\ (x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

## Свойства математического ожидания

$1.\xi_{\min} \le M_{\xi} \le \xi_{\max};$

$2.M_{c} = c, c - константа$

$3.\xi \le \eta \rightarrow M_{\xi} \le M_{\eta}$

4.Константа-множитель выносится из-под знака математического ожидания.

$M(c \cdot \xi) = c \cdot M(\xi)$

5. Математическое ожидание от алгебраической суммы любых случайных величин равно алгебраической сумме их математических ожиданий.

$M(\xi \pm \eta) = M(\xi) \pm M(\eta)$

а) для дискретных

$$M(\xi + \eta) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(x_i + y_j)\cdot p_{ij} = \sum_{i=1}^{k} x_i(\sum_{j=1}^{m} p_{ij}) + \sum_{j=1}^{m} y_j(\sum_{i=1}^{k} p_{ij}) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i^{\xi} + \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p_j^{\eta} = M_{\xi} + M_{\eta}$$

б) для непрерывных

$$M(\xi + \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x + y)p(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p^{\xi}(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot p^{\eta}(y)dy =$$

$$= M_{\xi} + M_{\eta}$$

Следствие:

$M(\xi + c) = M_{\xi} + c$

6. Если случайные величины ξ и η – независимы, то мат. ожидание от произведения случайных величин равно произведению их мат. ожиданий.

$M(\xi \cdot \eta) = M_{\xi} \cdot M_{\eta}$

а) для дискретных

$$M(\xi \cdot \eta) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i^{\xi} \cdot \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p_j^{\eta} = M_{\xi} \cdot M_{\eta}$$

б) для непрерывных

$$M(\xi \cdot \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot p(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy)dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p^{\xi}(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot p^{\eta}(y)dy =$$

$$= M_{\xi} \cdot M_{\eta}$$

7. Неравенство Йенсена

Если функция $y = g(x)$ выпукла вниз, то для любой случайной величины ξ

$Mg(\xi) \ge g(M(\xi))$

Доказательство:

Предположим, что функция *g(x)* дважды дифференцируема по формуле Тейлора:

$$g(x) = g(a) + g'(a)\cdot(x - a) + \frac{1}{2}g''(\tilde{a})\cdot(x - a)^2$$

$\tilde{a} \in [a; x]$

Вторая производная выпуклых вниз функций всегда положительная:

$g(x) = g(a) + g'(a)\cdot(x - a)$

$g(\xi) = g(a) + g'(a)\cdot(\xi - a)$

$Mg(\xi) \ge g(a) + g'(a)\cdot M(\xi - a)$

Пусть $a = M(\xi)$

$M(\xi - a) = M(\xi) - a$

$Mg(\xi) \ge g(M(\xi))$

8. Неравенство Ляпунова

Для любых положительных α,β;  0<α<β

$$\left(M|\xi|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \left(M|\xi|^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Доказательство:

$y = x^{\frac{\beta}{\alpha}}$, т.к. $\frac{\beta}{\alpha} > 1$, то функция выпукла вниз, значит применимо неравенство Йенсена

$$M\left(\eta^{\frac{\beta}{\alpha}}\right) \ge \left(M_{\eta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}; \eta = |\xi|^{\alpha}$$

$$M\left(\left(|\xi|^{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\right) \ge \left(M|\xi|^{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$M\left(|\xi|^{\beta}\right) \ge M\left(|\xi|^{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \quad |\uparrow \frac{1}{\beta}$$

$$\left(M|\xi|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \left(M|\xi|^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

9. Неравенство Коши-Буняковского

Для любых двух случайных величин ξ и η

$$|M(\xi\eta)| \le \sqrt{M_{\xi}^{2} \cdot M_{\eta}^{2}}$$

$$\zeta = x \cdot \xi + y \cdot \eta$$

$$M(\zeta^{2}) \ge 0$$

$$M(x^{2}\xi^{2} + 2xy\xi\eta + y^{2}\eta^{2}) = x^{2}M(\xi^{2}) + 2xyM(\xi\eta) + y^{2}M(\eta^{2}) \ge 0$$

$$ax^{2} + bx + c = 0; D \le 0$$

$$4y^{2}M^{2}(\xi\eta) - 4y^{2}M(\xi^{2})M(\eta^{2}) \le 0 \quad |: 4y^{2}; y \ne 0$$

$$\left(M(\xi\eta)\right)^{2} \le M(\xi^{2})M(\eta^{2})$$

10. Неравенство Гёльдера

p>1,q>1 $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$M|\xi|^{p} < \infty; M|\eta|^{q} < \infty$ тогда $M(\xi\eta) < \infty$

$$|M(\xi\eta)| \le \left(M|\xi|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(M|\eta|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

11. Неравенство Минковского

Если $M|\xi|^{p} < \infty; M|\eta|^{p} < \infty$ , p>1

$$\left(|M(\xi+\eta)|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(M|\xi|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(M|\eta|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Задача: По мишени делают 3 выстрела. Результаты этих выстрелов не зависят друг от друга. Вероятность попадания при первом $p_1 = 0{,}4$, при втором $p_2 = 0{,}3$, при третьем $p_3 = 0{,}6$. Рассматривается случайная величина, характеризующая число попаданий в мишень. Найти её мат. ожидание.

1.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *ξ* | *0* | *1* | *2* | *3* |
| *p* | *0,168* | *0,436* | *0,324* | *0,072* |

$A_{1,2,3}$ – попадание при 1,2,3 выстреле соответственно.

а) $B = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$

б) $C = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$

в) $D = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3$

г) $E = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

2. $\xi_1$ - число попаданий при первом выстреле

$\xi_2$ - число попаданий при втором выстреле

$\xi_3$ - число попаданий при третьем выстреле

$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$

$M(\xi) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + M(\xi_3) = 1{,}3$

### Функции случайного аргумента и их мат. ожидание.

Определение: Если любому значению случайной величины ξ соответствует и при этом единственное значение случайной величины η, то говорят, что задана функция $\eta = f(\xi)$ случайного аргумента ξ.

1. ξ – дискретная случайная величина.

| $\xi$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $p_1$ | $p_2$ | | $p_n$ |
| $\eta = \Phi(\xi)$ | $\varphi(x_1)$ | $\varphi(x_2)$ | | $\varphi(x_n)$ |

Если в каких-то колонках будут одинаковые значения, они должны быть просуммированы.
2. ξ – непрерывная случайная величина
Рассматривается функция $\eta = \varphi(\xi)$ случайного аргумента ξ. При этом неслучайная функция $y = \varphi(x)$ дифференцируема, монотонна и имеет обратную $x = \varphi^{-1}(y)$. Пусть также случайная величина ξ имеет плотность распределения $p_\xi(x)$.

$P_\eta(y) = P_\xi(\varphi^{-1}(y)) \cdot \left|\varphi^{-1}(y)'\right|$

3. $M_\eta = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot p_k$

$M_\eta = M\varphi(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) \cdot p_k$

4. $M_\eta = M\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot p(x)dx$

## Дисперсия

От лат. рассеяние, разброс.
Определение: Дисперсией случайной величины ξ называется мат. ожидание квадрата отклонения случайной величины от её мат. ожидания.

$D_\xi = M(\xi - M_\xi)^2$

$D_\xi = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M_\xi)^2 \cdot p_k$ - для дискретных

$D_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_\xi)^2 \cdot p(x)dx$ - для непрерывных

Определение: Арифметический квадратный корень из дисперсии называется средним квадратичным отклонением (стандартным).

$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}$

Дисперсия характеризует степень разброса случайной величины около своего среднего значения.
Пример 1:

| $\xi$ | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| p | 0,1 | 0,4 | 0,5 |
| $\xi - M_\xi$ | -2,8 | -0,8 | 1,2 |
| $(\xi - M_\xi)^2$ | 7,84 | 0,64 | 1,44 |

$$M_\xi = 3{,}8$$

$$D_\xi = 7{,}84 \cdot 0{,}1 + 0{,}64 \cdot 0{,}4 + 1{,}44 \cdot 0{,}5 = 1{,}76$$

$$\sigma_\xi \approx 1{,}31$$

Пример 2: Равномерное распределение на отрезке [0;1]

$$p(x) = \begin{cases} 1; 0 \le x \le 1 \\ 0; x < 0; x > 1 \end{cases}$$

$$M_\xi = \frac{1}{2}$$

$$D_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \frac{1}{2})^2 \cdot p(x) dx = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

## Свойства дисперсии

1. Не отрицательность

$$D_\xi \ge 0$$

$$D_\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = c$$

2. Константа - множитель выносится из под знака дисперсии в квадрате.

$$D(c \cdot \xi) = c^2 \cdot D_\xi$$

Δ

$$M(c \cdot \xi - M_{c \cdot \xi})^2 = c^2 \cdot M(\xi - M_\xi)^2 = c^2 \cdot D_\xi$$

3. $D_\xi = M(\xi^2) - (M_\xi)^2$

Δ

$$D_\xi = M(\xi - M_\xi)^2 = M\left(\xi^2 - 2 \cdot \xi \cdot M_\xi + (M_\xi)^2\right) = M(\xi^2) - 2 \cdot (M_\xi)^2 + (M_\xi)^2 = M(\xi^2) - (M_\xi)^2$$

4. Если случайные величины ξ и h независимые, то дисперсия суммы этих случайных величин равна сумме дисперсий

$$D(\xi + h) = D(\xi) + D(h)$$

Δ

$$D(\xi + h) = M(\xi + h)^2 - (M(\xi + h))^2 = M(\xi^2 + 2 \cdot \xi \cdot h + h^2) - (M\xi)^2 - 2 \cdot M\xi \cdot Mh - (Mh)^2 =$$

$$= M_{\xi^2} + M_{h^2} + 2 \cdot M_\xi \cdot M_h - (M\xi)^2 - 2 \cdot M\xi \cdot Mh - (Mh)^2 = D(\xi) + D(h)$$

4'. $D(\xi + c) = D(\xi)$ где c = const

5. $D\left(\sum_{\kappa=1}^n \xi_k\right) = \sum_{k=1}^n D_{\xi_k} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n M\left((\xi_k - M_{\xi_k}) \cdot (\xi_l - M_{\xi_l})\right)$

Δ

$$D\left(\sum_{\kappa=1}^{n}\xi_k\right)=M\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k-M\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\right)^2=M\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^2-2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}M_{\xi_k}\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}M_{\xi_k}\right)^2\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}M_{\xi_k^2}+2\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n}M(\xi_k\cdot\xi_l)-2\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}\left(M_{\xi_k}\right)^2+2\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n}M(\xi_k\cdot\xi_l)\right]+\sum_{k=1}^{n}M_{\xi_k}^2+$$

$$+2\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n}M_{\xi_k}\cdot M_{\xi_l}=D\left(\sum_{\kappa=1}^{n}\xi_k\right)=\sum_{k=1}^{n}D_{\xi_k}+2\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n}M\left(\left(\xi_k-M_{\xi_k}\right)\cdot\left(\xi_l-M_{\xi_l}\right)\right)$$

# Математическое ожидание и дисперсия важнейших распределений

## Равномерное распределение на последовательности {1,2,3,…,N}

| $\xi$ | 1 | 2 | 3 | … | N |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $1/N$ | $1/N$ | $1/N$ | … | $1/N$ |

$$M_\xi=\frac{1}{N}\cdot(1+2+3+\ldots+N)=\frac{N(N+1)}{2\cdot N}=\frac{N+1}{2}$$

$$D_\xi=M_{\xi^2}-\left(M_\xi\right)^2=\frac{1}{N}\cdot\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+N^2\right)-\frac{(N+1)^2}{4}=\frac{N\cdot(N+1)(2\cdot N+1)}{6\cdot N}-\frac{(N+1)^2}{4}=$$

$$=\frac{(N+1)(N-1)}{12}=\frac{N^2-1}{12}$$

## Биномиальное распределение

$$P(\xi=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$$

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 | … | N |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $q^n$ | $n\cdot p\cdot q^{n-1}$ | $\frac{n(n-1)}{2}\cdot p^2\cdot q^{n-2}$ | … | $p^n$ |

1. Математическое ожидание

$$M_\xi=n\cdot p\cdot q^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot p^2\cdot q^{n-2}+\ldots+n\cdot p^n=np\left(q^{n-1}+\frac{(n-1)}{2}\cdot p\cdot q^{n-2}+\ldots+p^{n-1}\right)=$$

$$=n\cdot p\cdot(q+p)^{n-1}=n\cdot p$$

2. Введем серию случайных величин $\xi_1;\xi_2;\xi_3;\ldots;\xi_n;$ число успехов в 1, 2, 3,…, n испытании

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_n$$
$$M_{\xi} = \sum_{k=1}^{m} M_{\xi_k} = n \cdot M_{\xi_1}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\xi$ | 0 | 1 |
| P | q | p |
| $\xi^2$ | 0 | 1 |

3. Дисперсия

$$D_{\xi} = D\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} D_{\xi_k} = n \cdot D_{\xi 1} = n \cdot p \cdot q$$
$$D_{\xi_1} = M\left(\xi_1^2\right) - \left(M_{\xi_1}\right)^2 = p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q$$

## Распределение Пуассона

$$P(\xi = m) = \frac{\alpha^m}{m!} e^{-\alpha}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\xi$ | 1 | 2 | 3 | … |
| p | $e^{-a}$ | $\frac{\alpha}{1!} e^{-a}$ | $\frac{\alpha^2}{2!} e^{-a}$ | … |

$$M_{\xi} = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \frac{\alpha^m}{m!} e^{-\alpha} = e^{-\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^m}{(m-1)!} = \alpha \cdot e^{-\alpha} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^{m-1}}{(m-1)!} = \alpha \cdot e^{-\alpha} \cdot e^{\alpha} = \alpha$$

$$M_{\xi^2} = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \frac{\alpha^m}{m!} e^{-\alpha} = e^{-\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\alpha^m}{(m-1)!} = \alpha \cdot e^{-\alpha} \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^m}{(m-1)!}\right)_a^1 =$$
$$= \alpha \cdot e^{-\alpha} \cdot \left(\alpha \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^{m-1}}{(m-1)!}\right)_a^1 = \alpha \cdot e^{-\alpha} \left(\alpha \cdot e^{\alpha}\right)_a^1 = \alpha \cdot e^{-\alpha} \left(e^a + \alpha \cdot e^{\alpha}\right) = \alpha + \alpha^2$$

$$D_{\xi} = M\left(\xi^2\right) - \left(M_{\xi}\right)^2 = \alpha + \alpha^2 - \alpha^2 = \alpha$$

## Геометрическое распределение

$$P(\xi = m) = p \cdot q^{m-1}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\xi$ | 1 | 2 | 3 | … |
| p | p | $p \cdot q$ | $p \cdot q^2$ | … |

$$M_{\xi} = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot p \cdot q^{m-1} = p \cdot \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot q^{m-1} = p \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} q^{m}\right)_q^1 = p \cdot \left(\frac{q}{1-q}\right)_q^1 = p \cdot \frac{p-q+q}{(1-q)^2} = \frac{p}{(1-q)^2} =$$

$$= \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$M\left(\xi^2\right) = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \cdot p \cdot q^{m-1} = p \cdot \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \cdot q^{m-1} = p \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} m \cdot q^{m}\right)_q^1 = p \cdot \left(q \cdot \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot q^{m-1}\right)_q^1 =$$

$$= p \cdot \left(q \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} m \cdot q^{m}\right)^1\right)_q^1 = p \cdot \left(q \cdot \frac{1}{(1-q)^2}\right)_q^1 = p\,\frac{(1-q)^2 + 2 \cdot q}{(1-q)^4} = p\,\frac{1-q^2}{(1-q)^4} = p\,\frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{p^2}$$

$$D_{\xi} = M\left(\xi^2\right) - \left(M_{\xi}\right)^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

## Непрерывное равномерное распределение на отрезке

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\[2ex] 0 \quad x<a & x>b\end{cases}$$

$$M_\xi=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot p(x)\cdot\partial x=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}\cdot\partial x=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b=\frac{a+b}{2}$$

$$M\left(\xi^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot p(x)\cdot\partial x=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}\cdot\partial x=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_a^b=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$D_\xi=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{a^2+2\cdot ab+b^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

## Показательное распределение

$$p(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x} & x\ge 0\\[2ex] 0 & x<0\end{cases}$$

$$M_\xi=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\cdot\partial x=\lambda\int_0^{\infty}x\cdot\left(\frac{e^{-\lambda\cdot x}}{-\lambda}\right)^{|}\cdot\partial x=-\int_0^{\infty}x\left(e^{-\lambda\cdot x}\right)^{|}\cdot\partial x=-\left(xe^{-\lambda\cdot x}\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}e^{-\lambda\cdot x}\cdot\partial x\right)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda\cdot x}\cdot\partial x=$$

$$=\frac{e^{-\lambda\cdot x}}{-\lambda}\bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{-\lambda}\cdot(0-1)=\frac{1}{\lambda}$$

λ – величина обратная математическому ожиданию

$$M\left(\xi^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\cdot\partial x=\lambda\cdot\int_0^{\infty}x^2\cdot\left(\frac{e^{-\lambda\cdot x}}{-\lambda}\right)^{|}\cdot\partial x=-\left(x^2e^{-\lambda\cdot x}\Big|_0^{\infty}-2\cdot\int_0^{\infty}x\cdot e^{-\lambda\cdot x}\cdot\partial x\right)=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$D_\xi=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

# Условные законы распределения

| $\xi$ \ $h$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_m$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $P_{11}$ | $P_{12}$ | … | $P_{1m}$ | $P_1^{\xi}$ |
| $x_2$ | $P_{21}$ | $P_{22}$ | … | $P_{2m}$ | $P_2^{\xi}$ |
| … | … | … | … | … | … |
| $x_n$ | $P_{n1}$ | $P_{n2}$ | … | $P_{nm}$ | $P_n^{\xi}$ |
| | $P_1^h$ | $P_2^h$ | $\cdots$ | $P_m^h$ | |

Пусть в результате некоторого опыта случайная величина h принимает одно из своих возможных значений $y_i$ , а случайная величина ξ может принять одно из своих значений {$X_1$, $X_2$, $X_3$,…, $X_n$}. Условная вероятность того, что случайная величина ξ примет значение $X_i$ , при условии, что случайная величина h приняла значение $y_i$ равна $P(x_i|y_j)$ и называется условным законом распределения случайной величины ξ

Другими словами условным законом распределения случайной величины ξ при значение условным законом распределения случайной величины h= $y_i$ называется совокупность условных вероятностей $P(x_1; y_j); P(x_2; y_j);...; P(x_n; y_j)$

$$P(x_i \mid y_j) = \frac{P_{ij}}{P_j^h}$$

Аналогичным образом вводится условное распределение случайной величины h при фиксированном значении $\xi = x_i$

$$P(y_1; x_j); P(y_2; x_j);...; P(y_n; x_j)$$

$$P(y_j; x_i) = \frac{P_{ij}`}{P_i^{\xi}}$$

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

В случае непрерывных случайных величин ξ и h вводится понятие условной плотности распределения $p(x \mid y)$ случайной величины ξ при заданном значении случайной величины $h = y$

$$p(x \mid y) = \frac{p(x; y)}{p(y)}$$

$$p(y \mid x) = \frac{p(x; y)}{p(x)}$$

## Свойства условных вероятностей и плотностей вероятностей

1. Не отрицательность

$P(x_i \mid y_j) \geq 0;$ $\qquad p(x \mid y) \geq 0;$

$P(x_i \mid y_j) \geq 0;$ $\qquad p(x \mid y) \geq 0;$

2. Нормированность

$\sum_{i=1}^{n} P(x_i \mid y_j) = 1 \qquad j = 1;2;3;...; m$

$\sum_{j=1}^{m} P(y_j \mid x_i) = 1 \qquad i = 1;2;3;...; n$

$\int_{-\infty}^{\infty} p(x \mid y) \cdot \partial x = 1$

$\int_{-\infty}^{\infty} p(y \mid x) \cdot \partial y = 1$

## Условное математическое ожидание

Условным математическим ожиданием случайной величины h при некотором фиксированном значении случайной величины ξ = x называется

- В случае дискретных случайных величин
  $M(h \mid \xi = x) = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot P(y_j \mid x)$
- В случае дискретных случайных величин
  $M(h \mid \xi = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \ \cdot p(y \ \mid x) \cdot \partial x$

$M(h \mid \xi = x) = \varphi(x)$ , где $\varphi(x)$ – называется функцией регрессии случайной величины h на случайную величину ξ

$M(\xi \mid h = y) = \psi(y)$ , где $\psi(y)$ – называется функцией регрессии случайной величины ξ на случайную величину h

**Пример**

| $\xi$ \ $h$ | -2 | 4 | |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 0.2 | 0.4 | 0.6 |
| 3 | 0.3 | 0.1 | 0.4 |
| | 0.5 | 0.5 | |

- $P(x_i \mid h=-2)$

$$P(1 \mid h=-2)=\frac{0.2}{0.5}=0.4$$

$$P(3 \mid h=-2)=\frac{0.3}{0.5}=0.6$$

$$M(\xi \mid h=-2)=1\cdot 0.4+3\cdot 0.6=2.2$$

- $P(x_i \mid h=4)$

$$P(1 \mid h=4)=\frac{0.4}{0.5}=0.8$$

$$P(3 \mid h=4)=\frac{0.1}{0.5}=0.2$$

$$M(\xi \mid h=4)=1\cdot 0.8+3\cdot 0.2=1.4$$

- $P(y_j \mid \xi=1)$

$$P(-2 \mid \xi=1)=\frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3}$$

$$P(4 \mid \xi=1)=\frac{0.4}{0.6}=\frac{2}{3}$$

$$M(h \mid \xi=1)=-2\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{2}{3}=2$$

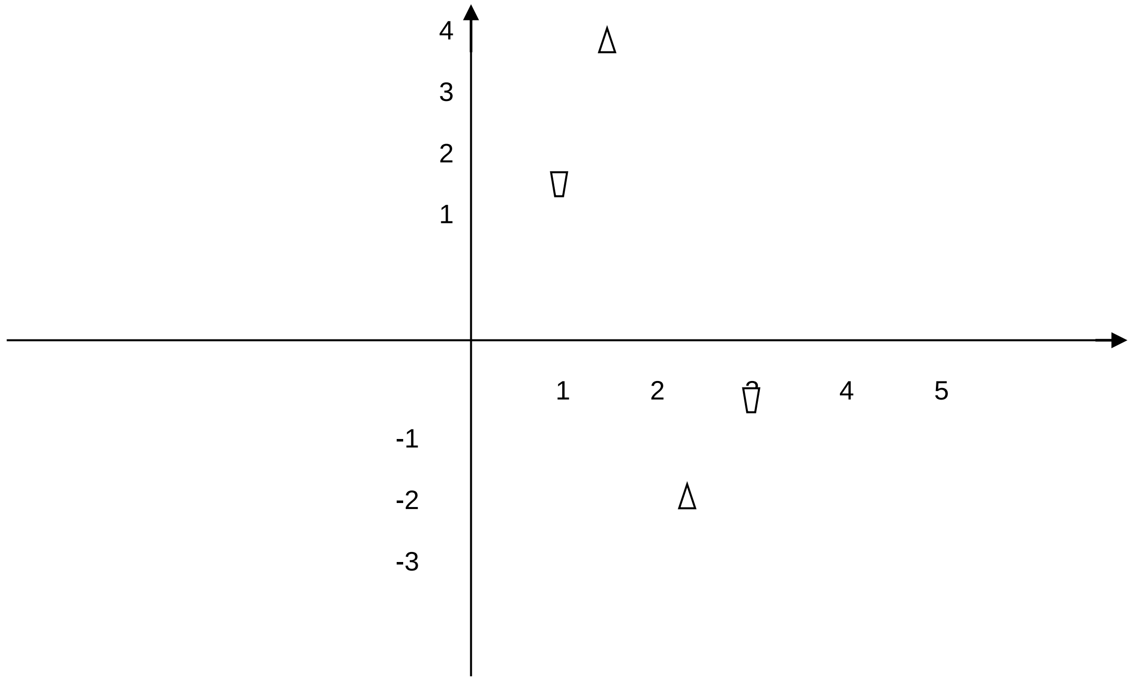
- $P(y_j \mid \xi=3)$

$$P(-2 \mid \xi=3)=\frac{0.3}{0.4}=\frac{3}{4}$$

$$P(4 \mid \xi=3)=\frac{0.1}{0.4}=\frac{1}{4}$$

$$M(h \mid \xi=3)=-2\cdot\frac{3}{4}+4\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$x=M(\xi \mid h=y)=\varphi(x) \quad \Delta$$
$$y=M(h \mid \xi=x)=\psi(y) \quad \nabla$$


4
3
2
1
1
2
4
5
-1
-2
-3

# Корреляционный момент (корреляция) двух случайных величин

Рассматриваются случайные величины ξ и h для которых задан двумерный закон распределения, если они дискретные или плотности совместного распределения, если непрерывны, тогда корреляционный момент случайных величин ξ и h.

$$C_{\xi h} = M\left(\left(\xi - M_{\xi}\right)\cdot\left(h - M_{h}\right)\right)$$

$$C_{\xi h} = \sum_{i=1}^{n} \ \sum_{j=1}^{m}\left(\left(x_i - M_{\xi}\right)\cdot\left(y_j - M_{h}\right)\right)\cdot p_{ij}$$

$$C_{\xi h} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(x - M_{\xi}\right)\cdot\left(y - M_{h}\right)\right)\cdot p(x;y)\cdot\partial x\cdot\partial y$$

## Свойства корреляционного момента

1. $C_{\xi\xi} = D_{\xi}, \quad C_{hh} = D_{h}$ где D – дисперсия
2. $C_{\xi h} = M(\xi\cdot h) - M_{\xi}\cdot M_{h}$

   $\nabla$

   $C_{\xi h} = M\left(\left(\xi - M_{\xi}\right)\cdot\left(h - M_{h}\right)\right) = M\left(\xi\cdot h - \xi\cdot M_h - h\cdot M_{\xi} + M_{\xi}M_h\right) = M(\xi h) - 2\cdot M_{\xi}M_h + M_{\xi}M_h$
3. Если случайные величины ξ и h независимы, то $C_{\xi h} = 0$
4. $-\sigma_{\xi}\sigma_h \le C_{\xi h} \le \sigma_{\xi}\sigma_h$

   $\nabla$

   $\zeta = h\cdot\sigma_{\xi} - \xi\cdot\sigma_h;$

   $D\zeta = M\left(\zeta\cdot M_{\zeta}\right)^2 = M\left(h\cdot\sigma_{\xi} - \xi\cdot\sigma_h - \sigma_{\xi}M_h + \sigma_h M_{\xi}\right)^2 = M\left(\sigma_{\xi}\cdot(h - M_h) - \sigma_h\cdot(\xi - M_{\xi})\right)^2 =$

   $= M\left(\sigma_{\xi}^2\cdot(h - M_h)^2 - 2\sigma_{\xi}\sigma_h\cdot(h - M_h)\cdot(\xi - M_{\xi}) + \sigma_h^2\cdot(\xi - M_{\xi})^2\right) = \sigma_{\xi}^2\sigma_h^2 - 2\sigma_{\xi}\sigma_h\cdot C_{\xi h} + \sigma_{\xi}^2$

   $= 2\cdot\sigma_{\xi}^2\sigma_h^2 - 2\sigma_{\xi}\sigma_h\cdot C_{\xi h} = 2\sigma_{\xi}\sigma_h\cdot\left(\sigma_{\xi}\sigma_h - C_{\xi h}\right) \ge 0$

   $C_{\xi h} \le \sigma_{\xi}\sigma_h$

## Коэффициент корреляции и его свойства

Коэффициент корреляции есть отношение корреляционного момента к произведению стандартных отклонений случайных величин

$$r_{\xi h} = \frac{C_{\xi h}}{\sigma_{\xi}\sigma_h}$$

Если $r_{\xi h} = 0$, то случайные величины ξ и h называются некоррелированными

Если $r_{\xi h} \ne 0$, то случайные величины ξ и h называются коррелированными

# Свойства

1. $-1 \le r_{\xi h} \le 1$

2. Если случайные величины ξ и h независимые, то они некоррелированные ( $r_{\xi h} = 0$ )

   Если случайные величины ξ и h коррелированные ( $r_{\xi h} \ne 0$ ), то эти случайные величины зависимы

   ***Обратные утверждения неверны !***

3. Нормированной случайной величиной называется отношение отклонения случайной величины от ее математического ожидания к стандартному отклонению

   $$\xi^1 = \frac{\xi - M_\xi}{\sigma_\xi}$$

   $$M_{\xi^1} = M\left(\frac{\xi - M_\xi}{\sigma_\xi}\right) = \frac{1}{\sigma_\xi}\left(M_\xi - M_\xi\right) = 0$$

   $$D_{\xi^1} = D\left(\frac{\xi - M_\xi}{\sigma_\xi}\right) = \frac{1}{\sigma_\xi^2} D\left(\xi - M_\xi\right) = \frac{D_\xi}{\sigma_\xi^2} = 1$$

   Коэффициент корреляции двух случайных величин ξ и h равен корреляционному моменту их нормированных случайных величин

   $$r_{\xi h} = C_{\xi^1 h^1}$$

   $\nabla$

   $$r_{\xi h} = \frac{C_{\xi h}}{\sigma_\xi \sigma_h} = \frac{M\left(\left(\xi - M_\xi\right)\cdot\left(h - M_h\right)\right)}{\sigma_\xi \sigma_h} = M\left(\frac{\xi - M_\xi}{\sigma_\xi} - \frac{h - M_h}{\sigma_h}\right) = M_{\xi^1 h^1} = C_{\xi^1 h^1}$$

4. Если случайные величины ξ и h линейно-зависимые, то модуль коэффициента корреляции $\left|r_{\xi h}\right| = 1$

   $h = a + b \cdot \xi$ где a,b произвольные коэффициенты. $b \ne 0$

   1. $M_h = M\left(a + b \cdot \xi\right) = a + b \cdot M_\xi$

      $$D_h = M\left(h - M_h\right)^2 = M\left(a + b \cdot \xi - a - b \cdot M_\xi\right)^2 = b^2 M\left(\xi - M_\xi\right)^2 = b^2 D_\xi$$

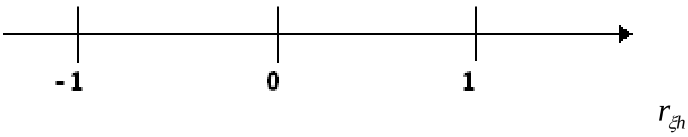
      $\sigma_h = |b| \cdot \sigma_\xi$

   2. $C_{\xi h} = M\left(\left(\xi - M_\xi\right)\cdot\left(h - M_h\right)\right) = M\left(\left(\xi - M_\xi\right)\cdot b\left(\xi - M_\xi\right)\right) = b \cdot D_\xi$

   3. $r_{\xi h} = \dfrac{C_{\xi h}}{\sigma_\xi \sigma_h} = \dfrac{b \cdot {\sigma_\xi}^2}{\sigma_\xi \cdot |b| \sigma_\xi} = \dfrac{b}{|b|} = \pm 1$

Если линейная зависимость между ξ и h носит возрастающий характер, тогда коэффициент корреляции равен 1. Если линейная зависимость между ξ и h носит убывающмй характер, тогда коэффициент корреляции равен -1.

5. Коэффициент корреляции является мерой линейной зависимости двух случайных величин




6. Степень линейной зависимости

| $r_{\xi h}$ | *0 ÷ 0.3* | *0.4 ÷ 0.7* | *0.8 ÷ 1* |
|---|---|---|---|
| *С.Л.З.* | *Слабая* | *Средняя* | *Сильная* |

# Уравнения Регрессии

$$\begin{matrix} M(h \mid \xi) = \varphi(x) \mid \\ M(\xi \mid h) = \psi(y) \mid \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y = \varphi(x) \\ x = \psi(y) \end{matrix}$$

Кривые, которые задаются двумя уравнениями, называются кривыми регрессии. Ограничимся случаем, когда кривые регрессии являются прямыми (прямые регрессии).

$$y = A(x - M_\xi) + B$$

1. $M_y = M_h = M\left(A(\xi - M_\xi)\right) + M_B$
   $M_h = A(M_\xi - M_\xi) + B$
   $B = M_h$
2. $C_{\xi h} = M\left((\xi - M_\xi)(h - M_h)\right) = M\left((\xi - M_\xi)(A \cdot (\xi - M_\xi) + B - B)\right) = A \cdot M(\xi - M_\xi)^2 = A \cdot \sigma_\xi^2$
   $$A = \frac{C_{\xi h}}{\sigma_\xi^2} = \frac{r_{\xi h}\sigma_\xi \sigma_h}{\sigma_\xi^2} = \frac{r_{\xi h}\sigma_h}{\sigma_z}$$
   $$y = M_h + r_{\xi h}\frac{\sigma_h}{\sigma_z}(x - M_\xi)$$

$y - M_h = r_{\xi h}\dfrac{\sigma_h}{\sigma_z}(x - M_\xi)$ уравнение регрессии случайной величины h на случайную величину ξ

$x - M_\xi = r_{\xi h}\dfrac{\sigma_\xi}{\sigma_h}(y - M_h)$ уравнение регрессии случайной величины ξ на случайную величину h

### Характеристики

1. В общем, для произведения случайной величины ξ и h прямые регрессии не совпадают
2. Если модуль коэффициента корреляции равен 1, т.е. ξ и h линейно-зависимы, то оба уравнения регрессии совпадают между собой и с самим уравнением линейной зависимости ξ и h
3. Обе прямые регрессии проходят через точку $(M_\xi ; M_h)$ т.е. пересекаются в этой точке
4. Прямая регрессии случайной величины h на случайную величину ξ имеет следующий смысл, если случайные величины ξ и h коррелированны ($r_{\xi h} \neq 0$), то правая часть уравнения регрессии обеспечивает наилучшее приближение случайной величины h к случайной функции вида $C_1 + C_2 \cdot \xi$ в смысле метода наименьших квадратов

$$\min M(h - C_1 - C_2\xi)^2 = M\left(h - M_h - r_{\xi h}\frac{\sigma_h}{\sigma_\xi}(x - M_\xi)\right)^2 = \sigma_h\left(1 - r_{\xi h}{}^2\right)$$

## Неравенство Чебышева

Если случайная величина ξ имеет конечную дисперсию, то для $\forall \varepsilon \succ 0$ имеет место следующее соотношение

1. $P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{M_{|\xi|}}{\varepsilon}$
2. $P(|\xi - M_\xi| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{D_\xi}{\varepsilon^2}$
   $\nabla$
   $D_\xi = M(\xi - M_\xi)^2 \geq \sum_{i=1}^n (x_i - M_\xi)^2 \cdot p_i \geq \varepsilon^2 \cdot \sum_{i=1}^n p_i = \varepsilon^2 \cdot P(|\xi - M_\xi| \geq \varepsilon)$
   $D_\xi \geq \varepsilon^2 \cdot P(|\xi - M_\xi| \geq \varepsilon)$
3. $P(|\xi - M_\xi| \prec \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{D_\xi}{\varepsilon^2}$

Второе неравенство Чебышева показывает, при малой дисперсии с вероятностью близкой к 1 случайные величины локализуются около своего математического ожидания

### Вероятность отклонения случайной величины от их математического ожидания. Правило σ.

**ε** $\quad P(|\xi - M_\xi| \prec \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{\sigma_\xi}{\varepsilon^2}$

*σ* $\quad P(|\xi - M_\xi| \prec \sigma) \geq 0$

*2σ* $\quad P(|\xi - M_\xi| \prec 2\sigma) \geq 0.75$

*3σ* $\quad P(|\xi - M_\xi| \prec 3\sigma) \geq 0.81$

$4\sigma$ $\quad P\left(\left|\xi - M_\xi\right| \prec 4\sigma\right) \geq 0.9875$

**Отклонение от математического ожидания случайной величины, распределенной по биномиальному закону**

$$P(a \leq \xi \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$np = M_\xi \qquad \sqrt{npq} = \sigma$$

$$a = M_\xi - \varepsilon \quad b = M_\xi + \varepsilon$$

$$P\left(M_\xi - \varepsilon \leq \xi \leq M_\xi + \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

$$P\left(\left|\xi - M_\xi\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

$$\textit{Пусть} \quad \varepsilon = 3\sigma$$

$$P\left(\left|\xi - M_\xi\right| \leq 3\sigma\right) \approx 2 \cdot \Phi(3) = 0.9973$$

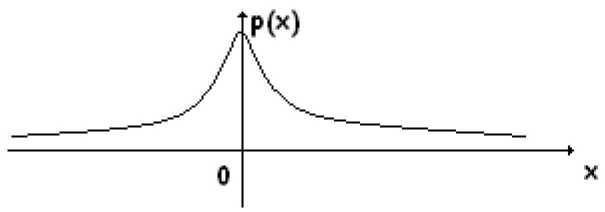
# Нормально-распределенная случайная величина.

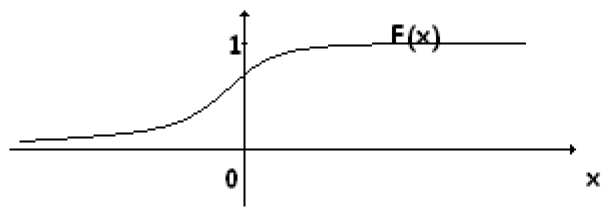
# Гауссово распределение

Нормальным распределением с параметрами $(a;\sigma)$ называется распределение случайной величины ξ, которая имеет следующую плотность распределение вероятности

1. $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$
2. Нормированное (стандартное) распределение называется нормальное распределение с параметрами (0;1)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



$a)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \partial x = 1$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \partial t$$

$b)$

$$M_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \partial x = 0$$

$$D_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \partial x = 1$$

c) Вероятность попадания нормированной случайной величины на заданный отрезок

$$P(a \le \xi \le b) = F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

d) Отклонение нормированной случайной величины от её математического ожидания

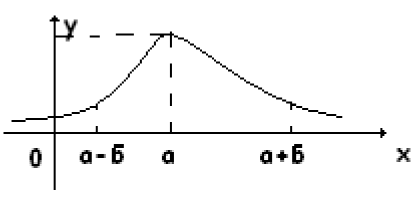
$$P(|\xi| \prec \varepsilon) = 2 \cdot \Phi(\varepsilon)$$

| $\varepsilon$ | $P(\lvert\xi\rvert \prec \varepsilon) = 2 \cdot \Phi(\varepsilon)$ |
|---|---|
| 1 | $P(\lvert\xi\rvert \prec 1) = 0.6826$ |
| 2 | $P(\lvert\xi\rvert \prec 2) = 0.9544$ |
| 3 | $P(\lvert\xi\rvert \prec 3) = 0.9973$ |
| 4 | $P(\lvert\xi\rvert \prec 4) = 0.9994$ |

## Нормальное распределение с параметрами (a;σ)

Пусть $a \in R \qquad \sigma \succ 0$

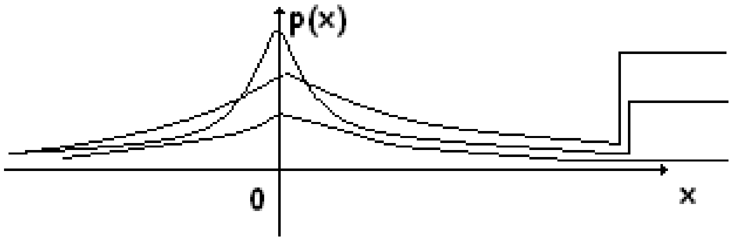
Плотность распределения $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ и $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} \partial t$




Кривая Гаусса

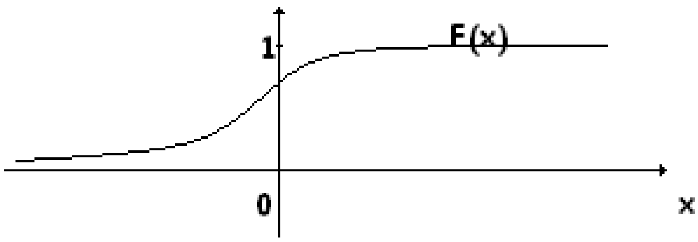
## Основные свойства кривой Гаусса

1. $x \in R \quad 0 \prec y \le \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}$
2. $x = a$ ось симметрии
3. $\lim y(x) = 0$ при $x \to \pm\infty$
4. $x = a$ точка max $y(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}$
5. $x = a \pm \sigma$ точки перегиба $y(a \pm \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot e} \cdot \sigma}$




σ = 3
σ = 1
σ = 8

При увеличении σ уменьшается амплитуда, и график становится более пологим




2. Основные характеристики нормального распределения

$$M_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \partial x = \left| \begin{array}{l} \frac{x-a}{\sigma} = t \\ x = t\sigma + a \\ \partial x = \sigma \cdot \partial t \end{array} \right| = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (t\sigma + a) e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \partial t =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \sigma \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \partial t + a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \partial t \right) = a$$

$$D_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \partial x = \sigma^2$$

3. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на заданный отрезок

$$P(x_1 \le \xi \le x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \partial x = \left| \begin{array}{l} \frac{x-a}{\sigma} = t \\ x = t\sigma + a \\ \partial x = \sigma \cdot \partial t \end{array} \right| = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\frac{x_1-a}{\sigma}}^{\frac{x_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \partial t =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x_1-a}{\sigma}}^{\frac{x_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \partial t = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right)$$

4. Отклонение нормально распределенной случайной величины от её математического ожидания

$$P(|\xi - a| \le \varepsilon) = P(a - \varepsilon \le \xi \le a + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

| $\xi$ | $\mathrm{P}(\lvert\varepsilon - a\rvert < \varepsilon)$ |
|---|---|
| $\sigma$ | *0.6826* |
| *2* $\sigma$ | *0.9544* |
| *3* $\sigma$ | *0.9973* |
| *4* $\sigma$ | *0.9994* |

## Правило трех сигм:

Если случайная величина распределена нормально, то считается практически невозможным ее отклонение от М $\xi$ больше, чем на 3 $\sigma$ .

Более того, на практике, если некоторая случайная величина отклоняется от своего среднего значения меньше чем на 3 $\sigma$ , то есть основание предполагать, что эта случайная величина нормально распределенная.

# Расчет доверительных интервалов

$$\mathrm{P}(a - \varepsilon \le \xi \le a + \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Считается, что параметры нормального распределения $(a;\sigma)$ известны и заданна вероятность $\tilde{p}$ отклонения случайной величины от М $\xi$ , в которую случайная величина попадает с вероятность $\tilde{p}$ .

**Пример**: $\xi : (20:10)$

Найти интервал, попадание в который, осуществляется с вероятностью $\tilde{p}$ =0.95

0.95 = 2 $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{10}\right)$

$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{10}\right)$ = 0.475

$\frac{\varepsilon}{10}$ = 1.96

$\varepsilon = 19.6$

# Некоторые важнейшие распределения связанные с нормальным.

## $\chi^2$ - распределение.

$\xi$ - случайная величина, нормально распределенная с параметрами (0: 1), тогда случайная величина $\xi^2$ имеет следующую плотность распределения:

$$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\Pi x}}, & x > 0 \end{cases}$$

Пусть, $\xi_1; \quad \xi_2; \ldots\ldots \xi_n$ - совокупность n независимых нормально распределенных случайных величин с параметрами (0;1), тогда случайная величина $\chi^2 = \xi_1^2; + \xi_2^2 + \ldots \xi_n^2$ обладает распределением, которое принято называть $\chi^2$ - распределением с n степенями свободы.

## Свойства $\chi^2$ - распределния:

1. Плотность $\chi^2$ - распределения.

$$\mathrm{P}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{2^{\frac{\kappa}{2}} \Gamma\left(\frac{\kappa}{2}\right)} e^{-\frac{\kappa}{2}} x^{\frac{\kappa}{2}-1}, & x > 0 \end{cases}$$

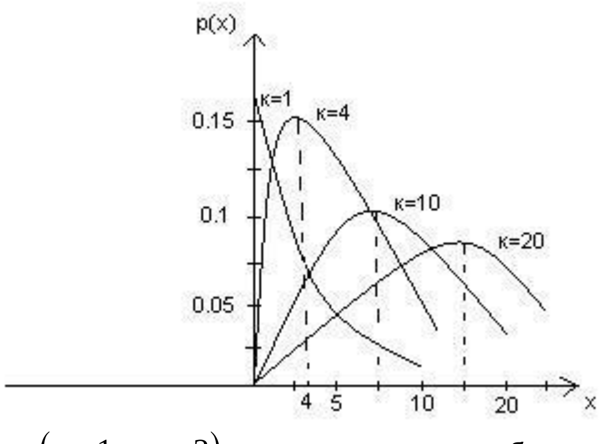
*Гамма функция.*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Плотность $\chi^2$ - распределения исключительно зависит от степеней свободы *к.*

2.




$\mathrm{P}(x) \quad - (\kappa = 1 \; u \; \kappa = 2)$ являются монотонно убывающими.

При *к* = 3 : *x* = *к*-2 есть локальный максимум.

3. $M(\chi)^2 = n$

$D(\chi)^2 = 2n$

4. С увеличением *к* – числа степеней свободы $\chi^2$ - распределение медленно приближается к нормальному.

## Распределение Стьюдента ( *t* – распределение)

Пусть случайные величины $\xi_1; \quad \xi_2;\ldots\ldots\xi_n$ нормально распределены с параметрами $(0;\sigma)$, тогда

случайная величина $t = \dfrac{\xi}{\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ имеет распределение, которое называется t – распределением или распределением Стьюдента с n – степенями свободы.

1) P(*x*) = $\dfrac{1}{\sqrt{n\Pi}}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{\chi^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ - четная функция

2) По мере увеличения n, распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному.

## Распределение Фишера-Снедекора ( F – распределение).

Пусть $\xi_1; \quad \xi_2;\ldots\xi_m$ и $\eta_1; \quad \eta_2;\ldots\eta_n$ нормально распределены с параметрами (0; 1). Распределение случайной величины вида:

$F = \dfrac{\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}\xi_i^2}{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i^2}$ называется распределением со степенями свободы *m* и *n*.

$$\mathrm{P}(x;m;n) = \begin{cases} 0, \qquad x<0 \\ \dfrac{m^{\frac{m}{2}-1}n^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\mathrm{X}^{\frac{m}{2}-1}(n+m\lambda)^{-\frac{m+n}{2}}, \qquad x\geq 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{M}(F) = \frac{n}{n-2}(n>2)$$

$$D(F) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$$

# Закон больших чисел.

При некоторых, достаточно общих, условиях, суммарное поведение большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным. Для практики важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие многих случайных величин приводит к результату почти независящему от случая. Эти условия и составляют суть законов больших чисел.

## Теорема Чебышева.

Пусть $\xi_1; \xi_2; \ldots$ попарно независимые случайные величины, имеющие $\mathrm{M}\xi_1; \mathrm{M}\xi_2 \ldots$ и $D\xi_1 : D\xi_2 \ldots$. Пусть также дисперсии всех случайных величин ограниченны некоторой константой, т.е. $\exists\ c > 0 :\ D\xi_i \le c$, тогда $\forall \varepsilon > 0$ выполняется следующее

соотношение: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\dfrac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n} - \dfrac{M\xi_1+M\xi_2+\ldots+M\xi_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$

Доказательство:
Воспользуемся вторым неравенством Чебышева.

$$\mathrm{P}\left(\left|\eta - M\eta\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{D\eta}{\varepsilon^2}$$

Пусть $\eta = \dfrac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}$; $\qquad M\eta = \dfrac{M\xi_1+M\xi_2+\ldots+M\xi_n}{n}$;

$$D\eta = \frac{D\xi_1+\ldots+D\xi_n}{n^2} \le \frac{nc}{n^2}\ ; \qquad D\eta \le \frac{c}{n};$$

$$1 \ge \mathrm{P}\left(\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} - \frac{M\xi_1+\ldots+M\xi_n}{n}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{C}{\eta\varepsilon^2}$$

Смысл закона больших чисел заключается в том, что при больших n, с вероятностью близкой к 1, среднее арифметическое суммы независимых случайных величин становится близким к *const*, равной среднему арифметическому математических ожиданий этих случайных величин.

Следствие теоремы Чебышева: Если при условиях теоремы Чебышева $\xi_1;\quad \xi_2; \ldots\ldots \xi_n$ имеют равные между собой математические ожидания $M\varepsilon_i = a, \quad i = 1, 2, 3\ldots$, то $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Следствие теоремы Чебышева обосновывает принцип среднего арифметического, используемого во всех экспериментальных дисциплинах, т.е. если производится серия n – измерений без систематической ошибки, то среднее арифметическое результатов наблюдается при больших n сколько угодно мало отличается от измеряемой величины.

## Теорема Бернулли.

Пусть m – число успехов в серии n испытаний в схеме Бернулли с вероятностью p – успехов в каждом испытании. $\forall \varepsilon > 0$ выполняется следующее предельное соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

$\xi_1$ – число успехов в первом эксперименте.

$\xi_2$ – во втором.

$\vdots$

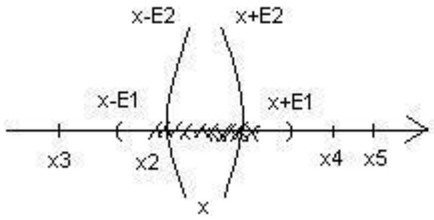
$\vdots$

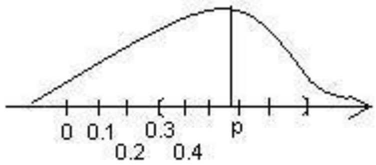
$\xi_n$

$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = \xi$
Число успехов в данной серии испытаний

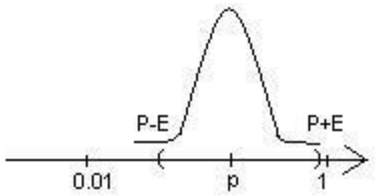
$$\mathrm{M}\xi_1 = \ldots = \mathrm{M}\xi_n = p$$

Сходимость величин $\{\mathrm{X}n\} \to x \qquad \lim\limits_{n\to\infty} Xn = x$;




$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{m}{10}-P\right|<\varepsilon\right)=P_1$$




$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{m}{100}-P\right|<\varepsilon\right)=P_2$$

## Центральная предельная теорема.

Если случайные величины $\xi_1;\quad \xi_2;\ldots\ldots\xi_n$ - независимы, нормально распределены с конечными математическими ожиданиями $\mathrm{M}\xi_i=a_i<\infty$, конечные дисперсии $D\xi_i=\sigma_i^2$, тогда $\forall\varepsilon>0$ выполняется:

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\left|\frac{\xi_1+\ldots+\varepsilon_n-na}{\sigma\sqrt{n}}\right|<\varepsilon\right)=\Phi_0(\varepsilon)$$

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2}+\Phi_0(x)$$

## Теорема Ляпунова.

Если $\xi_1;\quad \xi_2;\ldots\ldots\xi_n$ - независимы, имеют конечные математические ожидания $\mathrm{M}\xi_i=a_i<\infty$, конечные дисперсии $D\xi_i=\sigma_i^2<\infty$

$$\mathrm{M}\left(\left|\xi-ak\right|\right)^3=C_k^3<\infty; \qquad \frac{\sqrt[3]{\sum_{k=1}^{n}C_k^3}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2}} \qquad \forall\varepsilon>0$$

выполняется следующее соотношение: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\dfrac{\xi_1+\ldots+\varepsilon_n-\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2}}\right|<\varepsilon\right)=\Phi_0(\varepsilon)$

Как следует из теоремы Ляпунова: совокупное действие случайных величин различной природы оказывается близким к нормальному распределению.

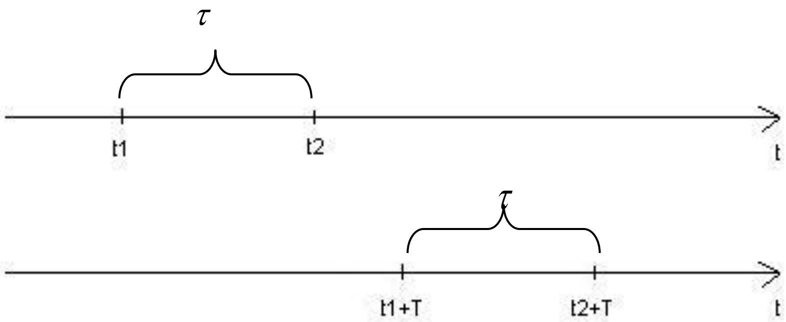
# Потоки событий.

Поток событий – последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

## Свойства потоков:

1. Стационарность потока.

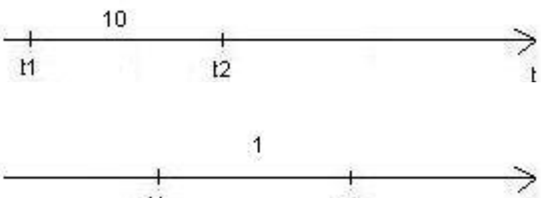
Поток называется стационарным, если вероятность появления ровно m- событий на промежутке времени длительностью $\tau$ зависит только m и $\tau$ , и не зависит от момента времени, в который этот временной промежуток начался.




2. Отсутствие последствия.

Говорят, что поток обладает свойством отсутствия последствия, если вероятность появления m-событий на любом промежутке времени не зависит от того, появились или нет события в момент времени непосредственно предшествующий началу рассматриваемого промежутка.

Предыстория потока не сказывается на вероятности появления событий в будущем.




Если поток обладает таким свойством, то выполняется взаимная независимость числа событий в непересекающихся промежутках времени.

3. Ординарность потока.

Говорят, что поток обладает свойством ординарности, если за бесконечно малые промежутки времени может произойти не более одного события в потоке, т.е. появление 2-х и более событий практически невозможно.

4. Простейший (Пуассоновский) поток.

Простейшим потоком называется поток, который обладает всеми тремя свойствами.

**Теорема**: Если поток представляет собой сумму большого числа независимых стационарных потоков, влияние каждого на сумму ничтожно мало, то ординарный поток при условии его ординарности

является простейшим.
Определение: Интенсивность потока называется среднее число событий происходящих за единицу времени.

$\lambda$ - интенсивность $\qquad \lambda = const$
m – событий за промежуток времени $\tau$

$$P(\xi = m) = \frac{\alpha^m}{m!} e^{-\alpha}; \qquad \alpha = M\xi;$$

Замена $\alpha = \lambda\tau$
Простейший поток должен обладать 3-мя свойствами:

1. Стационарность.
2. Отсутствие последствия.
3. Ординарность.

$$P_\tau(0) = e^{-\lambda\tau} \sim 1 - \lambda\tau \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$P_\tau(1) = \lambda\tau e^{-\lambda\tau} \sim \lambda\tau$$

$$P_\tau(m \ge 2) = 1 - e^{-\lambda\tau} - \lambda\tau e^{-\lambda\tau} \sim (\lambda\tau)^2 = 1 - \left(1 - \lambda\tau + \frac{(\lambda\tau)^2}{2} - \frac{(\lambda\tau)^3}{6} + \ldots\right) -$$

$$- \lambda\tau\left(1 - \lambda\tau + \frac{(\lambda\tau)^2}{2} - \frac{(\lambda\tau)^3}{6} + \ldots\right) = \frac{(\lambda\tau)^2}{2} + o\left((\lambda\tau)^2\right)$$

**Пример**: На телефонную станцию поступают 2 вызова в 1 минуту. Какова вероятность, что за 5 минут наступит 12 звонков.
Дано:

$\lambda = 2 \qquad P_5(12) = \frac{10^{12}}{12!} e^{-10} \approx 0.09$

$\tau = 5$

$m = 12$

$P_5(12) - ?$

# Введение в теорию цепей Маркова.

Цепь Маркова – последовательность испытаний, в каждом из которых, появляется и при том только один из несовместных событий $A_1; A_2; \ldots A_к$. При этом условная вероятность $P_{i\,j}(S)$ того, что в испытании с номером S наступит событие $A_j$ при условии, что в S-1 испытании было $A_i$ не зависит от результатов предшествующих испытаний.
События $A_1; A_2; \ldots A_к$ называются состояниями системы, а сами испытания называются изменениями состояний системы.

Если изменение состояний происходит в фиксированные моменты времени, то такая цепь называется цепью Маркова с дискретными временами.
Если изменение состояний происходит в произвольные моменты времени, то цепь Маркова называют цепью с непрерывным временем.
Цепь Маркова называется однородной, если условная вероятность $P_{i\,j}(S)$ перехода из состояния $A_i$ в состояние $A_j$ не зависит от номера испытания S.

| №1 | №2 | №3 | №S-1 | №S | №S+1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $A_1$ | $A_1$ | $A_1$ | $A_1$ | |
| $A_2$ | $A_2$ | $A_2$ | $A_2$ | $A_2$ | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |
| $A_к$ | $A_к$ | $A_к$ | $A_к$ | $A_к$ | |

Для однородных цепей Маркова $P_{i\,j}$ называются переходными вероятностями.

$$\Re_1 = \left(P_{i\,j}\right)$$

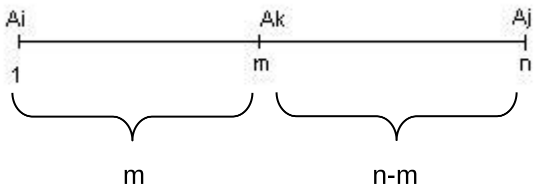
$$\Re_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{k} P_{i\,j} = 1 \qquad i = 1; \ldots k;$$

## Равенство Маркова.

$P_{i\,j}(n)$ - вероятность перехода из состояния $A_i$ в $A$; за n испытаний.

$P_{27}(3)$




$$P_{i\,j}(n) = P_{i1}(m)\,P_{1j}(n-m) + \ldots + P_{i\,k}(m)\,P_{k\,j}(n-m)$$

$$P_{i\,j}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{i\,r}(m)\,P_{r\,j}(n-m)$$

1) n = 2; m=1;

$$P_{i\,j}(2) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(1)\,P_{rj}(1)$$

$$\Re_2 = P_{i\,j}(2) = \sum_{r=1}^{k} P_{i\,r}\ P_{r\,j}$$

$$\Re_2 = \Re_1^2$$

2) n = 3;    m = 1;

$$P_{i\,j}(3) = \sum_{r=1}^{k} P_{i\,r}\ P_{r\,j}(2)$$

$$\Re_3 = \Re_1^3$$

3) $\Re_n = \Re_1^n$

**Пример**:

$$\Re_1 = \begin{vmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{vmatrix}$$

$$\Re_2 = \Re_1^2 = \begin{vmatrix} 0.34 & 0.66 \\ 0.33 & 0.67 \end{vmatrix}$$

# Производные функции.

Определение: Дискретная случайная величина $\xi$ называется целочисленной, если она принимает только целые неотрицательные значения 0; 1; 2; $\ldots \mathrm{P}_n = \mathrm{P}(\xi = n)$ с соответствующими вероятностями.

Определение: Производящей функцией целочисленной случайной величины $\xi$ называется функция вида: $\varphi\xi(S) = \mathrm{M}s^{\xi}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\xi$ | *0* | *1* | $\ldots$ |
| P | $\mathrm{P}_0$ | $\mathrm{P}_1$ | $\ldots$ |

$$\varphi\xi(S) = p_0 + p_1 S + p_2 S^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n S^n$$

$$f(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} S^k$$ - разложение функции в ряд Макларена

$$\varphi_{\xi}(S) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n S^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} S^k$$

$$P_n = \frac{\varphi_{\xi}^{(n)}}{n!}; \qquad n = 0; 1; 2; \ldots$$

## 1. Биноминальное распределение.

Количество испытаний n с вероятностью успеха p, неуспеха q.

$$\xi = 0; 1; \ldots n$$

$$p_m = \mathrm{P}(\xi = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

$$\varphi_{\xi}(S) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} S^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (p\,S)^m q^{n-m} = (pS + q)^n \qquad -\textit{Бином Ньютона}$$

## 2. Распределение Пуассона.

$$p_m = \mathrm{P}(\xi = m) = \frac{\alpha^m}{m!} e^{-\alpha}$$

$$\varphi_{\xi}(S) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\alpha} S^m$$

$$\varphi_{\xi}(S) = e^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha S)^m}{m!} = e^{-\alpha} e^{\alpha S} = e^{\alpha(S-1)}$$

## 3. Геометрическое распределение.

$$p_m = \mathrm{P}(\xi = m) = pq^{m-1}$$

$$\varphi_\xi(S)=\sum_{m=1}^{\infty} pq^{m-1}S^m = pS\sum_{m=1}^{\infty}(qS)^{m-1} = \frac{pS}{1-qS}$$

Факториальным моментом порядка *к* случайной величины $\xi$ называется:

$$\mathrm{M}_\xi^{[k]} = \mathrm{M}(\xi(\xi-1)\ldots\ldots(\xi-k+1))$$

$$\mathrm{M}_\xi^{[0]} = \mathrm{M}_1 = 1$$

$$\mathrm{M}_\xi^{[1]} = \mathrm{M}_\xi$$

$$\mathrm{M}_\xi^{[2]} = \mathrm{M}(\xi^2-\xi) = \mathrm{M}_{\xi^2} - \mathrm{M}_\xi$$

$$\mathrm{M}_\xi = \mathrm{M}_\xi^{[1]}$$

$$D_\xi = \mathrm{M}_\xi^{[2]} + \mathrm{M}_\xi^{[1]} - \left(\mathrm{M}_\xi^{[1]}\right)^2$$

**Теорема**:

$$\mathrm{M}_\xi^{[k]} = \varphi_\xi^{(k)} \quad (1)$$

$$\mathrm{M}_\xi^{[k]} = \mathrm{M}(\xi(\xi-1)\ldots(\xi-k+1)) = \sum_{n=k}^{\infty}(n(n-1)\ldots(n-k+1))$$

$$\varphi_\xi(S) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n S^n$$

$$\varphi_\xi^{(k)}(S) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)S^{n-k}p_n$$

$$\varphi_\xi^{(k)}(1) = \mathrm{M}_\xi^{[k]}$$

$$\mathrm{M}_\xi = \varphi_\xi'(1)$$

$$D_\xi = \varphi_\xi''(1) + \varphi_\xi'(1) - (\varphi_\xi'(1))^2$$

1. Биноминальное распределение.

$$\varphi_\xi(S) = (pS+q)^n \qquad \varphi_\xi'(S) = np(pS+q)^{n-1}$$

$$\varphi_\xi''(S) = n(n-1)p^2(ps+q)^{n-2}$$

$$\mathrm{M}_\xi = np$$

$$D_\xi = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p) = npq$$

2. Распределение Пуассона.

$$\varphi_\xi(s) = e^{\alpha(S-1)} \qquad \varphi_\xi'(S) = \alpha\, e^{\alpha(S-1)}$$

$$\varphi_\xi''(S) = \alpha^2 e^{\alpha(S-1)}$$

$$\mathrm{M}_\xi = \alpha$$

$$D_\xi = \alpha^2 + \alpha - \alpha^2 = \alpha$$

3. Геометрическое распределение.

$$\varphi_\xi(S) = \frac{pS}{1-q} \qquad \varphi_\xi'(S) = \frac{p(1-qS)-qpS}{(1-qS)^2} = \frac{p}{(1-qS)^2}$$

$$\varphi_\xi''(S) = \frac{2pq}{(1-qS)^2}$$

$$\mathrm{M}_\xi = \frac{1}{p} \qquad D_\xi = \frac{2q}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Теорема о мультипликативном свойстве производящих функций.

$\xi_1; \xi_2; \ldots \xi_n$ - независимые целочисленные случайные величины, имеющие производящие функции $\varphi_{\xi_1}(S); \varphi_{\xi_2}(S) \ldots \varphi_{\xi_n}(S)$, то $\varphi_{\xi_1}(S) + \ldots + \varphi_{\xi_n}(S) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi}(S)$

Доказательство:

$$\varphi_{\xi_1 + \ldots + \xi_n}(S) = \mathrm{M}\left(S^{\xi_1 + \ldots + \xi_n}\right) = \mathrm{M}\left(S^{\xi_1} S^{\xi_2} \ldots S^{\xi_n}\right) = \mathrm{M}s^{\xi_1} \ldots \mathrm{M}s^{\xi_n} = \qquad \xi - \textit{независимы}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathrm{M}s^{\xi_k} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(S)$$

**Пример**: $\xi_1$ - биноминальное распределение случайной величины $\xi$

$$\varphi_{\xi_1}(S) = (pS + q)^{n_1}$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

$$\varphi_{\xi} = \varphi_{\xi_1}(p) \varphi_{\xi_2}(p) = (pS + q)^m$$

# Характеристические функции.

Пусть $\xi$ и $\eta$ действительные случайные величины с конечными $\mathrm{M}_{\xi}; \quad \mathrm{M}_{\eta}$, тогда случайная величина $\zeta = \xi + i\eta$ называется комплексной случайной величиной, имеющей математическое ожидание $\mathrm{M}_{\zeta} = \mathrm{M}_{\xi} + i\mathrm{M}_{\eta}$.

Все основные свойства математических ожиданий переносятся и на случай комплексных случайных величин.

$$|\mathrm{M}\zeta| \le \mathrm{M}|\zeta|$$

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Определение: Характеристической функцией случайной величины $\xi$ называется функция

$$f_{\xi}(t) = \mathrm{M}e^{it\xi} \qquad t \in R$$

$$f_{\xi}(t) = \mathrm{M}(\cos(t\xi)) + i\mathrm{M}(\sin(t\xi))$$

Если известна функция распределения $f_{\xi}(x)$ или $p_{\xi}(x)$, то явная запись будет

$$f_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} df_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_{\xi}(x)\, dx$$

В случае дискретных случайных величин $f_{\xi}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} \mathrm{P}(\xi = x_k)$

## Свойства характеристической функции:

1) $|f_{\xi}(t)| \le 1 \qquad f_{\xi}(0) = 1$

$$|f_{\xi}(t)| = \left|\mathrm{M}e^{it\xi}\right| \le \mathrm{M}\left|e^{it\xi}\right| = \mathrm{M}(1) = 1$$

$$e^{it\xi} = \cos(t\xi) + i\sin(t\xi) \Rightarrow \left|e^{it\xi}\right|$$

$$f_{\xi}(0) = \mathrm{M}_1 = 1$$

2) Характеристическая функция равномерно непрерывна по аргументу $t$

3) Если случайные величины $\xi$ и $\eta$ связаны минимальным соотношением $\eta = a\xi + b$, где $a, b - const$, то $f_n(t) = e^{itb} f_{\xi}(at)$

Доказательство:

$$f_{\eta}(t) = \mathrm{M}e^{it\eta} = \mathrm{M}e^{ita\xi + itb} = \mathrm{M}e^{itb}e^{ita\xi} = e^{itb} f_{\xi}(at)$$

4) $f_{\xi}(-t) = \overline{f_{\xi}(t)}$

$$\overline{e^{it\xi}} = e^{-it\xi}$$

5) Мультипликативное свойство характеристической функции.

Если случайные величины $\xi_1; \xi_2; \ldots \xi_n$ - независимы, то $f_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{\xi_k}(t)$

Доказательство:

$$f_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t) = \mathrm{M}e^{it(\xi_1+\ldots+\xi_n)} = \mathrm{M}\left(e^{it\xi_1}e^{it\xi_2}\ldots e^{it\xi_n}\right) = \mathrm{M}e^{it\xi_1}\mathrm{M}e^{it\xi_2} = \prod_{k=1}^{n} f_{\xi_k}(t)$$

6) Пусть $m_k = \mathrm{M}_{\xi}{}^{k} < \infty; \qquad k = 1;\ldots n$, тогда характеристическая функция дифференцируема до порядка *n* включительно, выполняется следующее соотношение

$$(1) \qquad f_{\xi}^{(k)}(0) = i^k m_k; \qquad k = 1;\ldots n$$

$$(2) \qquad f_{\xi}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} m_k + R_n(t), \qquad где\ R_n = o\left(t^n\right) \qquad -\ формула\ Макларена$$

Доказательство:

$$f_{\xi}(t) = \mathrm{M}e^{it\xi}$$

$$f_{\xi}^{k}(t) = \mathrm{M}\left((i\xi)^k e^{it\xi}\right)$$

$$f_{\xi}^{k}(0) = i^k \mathrm{M}_{\xi}{}^{k} = i^k m_k$$

7)Если $\xi$ дискретная целочисленная случайная величина, то ее характеристическая и производящая функции связанны следующей формулой:

$$f_{\xi}(t) = \varphi_{\xi}\left(e^{it}\right)$$

$$f_{\xi}^{(k)}(t) = \varphi_{\xi}\left(e^{it}\right)$$

## Примеры характеристических функций.

1. Биноминальное распределение. *n* – экспериментов, *p* – вероятность успеха.

$$\left(\varphi_{\xi}(S) = (pS+q)^n\right)$$

$$f_{\xi}(t) = \left(pe^{it} + q\right)^n$$

2. Распределение Пуассона.

$$\varphi_{\xi}(S) = e^{\alpha(S-1)}$$

$$f_{\xi}(t) = e^{\alpha\left(e^{it-1}\right)}$$

3. Геометрическое распределение.

$$\varphi_{\xi}(\xi) = \frac{pS}{1-qS}$$

$$f_{\xi}(t) = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$$

4. $\xi = c; \quad c = const; \quad : p = 1$

$$f_{\xi}(t) = e^{itc}$$

5. Нормальное распределение.

а) Нормальное распределение (0; 1)

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_{\xi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx-\frac{x^2}{2}} dx = f_{\xi}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} i \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{itx-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$d\left(itx - \frac{x^2}{2}\right) = (it - x)dx$$

$$d\left(itx-\frac{x^2}{2}\right)-itdx-xdx$$

$$xdx=itdx-d\left(itx-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=\frac{i^2t}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx-\frac{x^2}{2}}dx-\frac{i}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^p dp=\frac{-t}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx-\frac{x^2}{2}}dx=-t\ f_\xi(t)$$

$$\begin{cases} f'_\xi(t)+t\ f_\xi(t)=0 \\ f_\xi(0)=1 \end{cases}$$

$$\ln|y|=-\frac{t^2}{2}+\ln C$$

$$\begin{cases} y=Ce^{-\frac{t^2}{2}} \\ y(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow\ f_\xi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

б) Произвольное нормальное распределение

$\eta=\sigma\xi+a$ , если $\xi$ - нормально распределенная случайная величина с параметрами (0;1), $\eta$ - нормально распределенная случайная величина с параметрами $(a;\sigma)$

$$f_\eta(t)=e^{ita-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$$

Замечание о сумме нормальных распределений:

$\xi_1;\ \xi_2\ldots\xi_n$

$$f_{\xi_1}(t)=e^{ita_1-\frac{\sigma_1^2t^2}{2}};\qquad\ldots\ldots\quad;f_{\xi_n}(t)=e^{ita_n-\frac{\sigma_n^2t^2}{2}}$$

$$f_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t)=\prod_{k=1}^{n}e^{itak-\frac{\sigma_k^2t^2}{2}}=e^{it\sum_{k=1}^{n}ak-\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2}=e^{itA-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$$

Сумма нормальных распределений есть нормальное распределение случайных величин.

6. Равномерное распределение на отрезке

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}; & a\le x\le b\\ 0; & x<a;x>b\end{cases}$$

$$f_\xi(t)=\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}dx$$

$$f_\xi(t)=\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$$

Если рассматривается симметрический отрезок [-*l*;*l*]

$$f_\xi(t)=\frac{e^{itl}-e^{-itl}}{it2l}=\frac{\sin(tl)}{tl}$$

**Теорема**: Любой характеристической функции соответствует и при том единственная функция распределения (плотность распределения).

$$p_\xi(x)=\frac{1}{2\Pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f_\xi(t)dt$$

# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

# ТЕМА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

## 1.1. Определение случайного процесса. Основные подходы к заданию случайных процессов. Понятие реализации и сечения. Элементарные случайные процессы.

Случайным (стохастическим, вероятностным) процессом называется функция действительного переменного t, значениями которой являются соответствующие случайные величины X(t).

В теории случайных процессов t трактуется как время, принимающее значения из некоторого подмножества T множества действительных чисел ($t \in T$, $T \subset R$).

В рамках классического математического анализа под функцией y=f(t) понимается такой тип зависимости переменных величин t и y, когда конкретному числовому значению аргумента t соответствует и притом единственное числовое значение функции y. Для случайных процессов ситуация принципиально иная: задание конкретного аргумента t приводит к появлению случайной величины X(t) с известным законом распределения (если это дискретная случайная величина) или с заданной плотностью распределения (если это непрерывная случайная величина). Другими словами, исследуемая характеристика в каждый момент времени носит случайный характер с неслучайным распределением.

Значения, которые принимает обычная функция y=f(t) в каждый момент времени, полностью определяет структуру и свойства этой функции. Для случайных процессов дело обстоит иным образом: здесь совершенно не достаточно знать распределение случайной величины X(t) при каждом значении t, необходима информация об ожидаемых изменениях и их вероятностях, то есть информация о степени зависимости предстоящего значения случайного процесса от его предыстории.

***Наиболее общий подход в описании случайных процессов состоит в задании всех его многомерных распределений, когда определена вероятность одновременного выполнения следующих событий:***

$\forall t_1, t_2,\ldots,t_n \in T,\ n \in N:\ X(t_i) \le x_i;\ i=1,2,\ldots,n;$

$F(t_1;t_2;\ldots;t_n;x_1;x_2;\ldots;x_n)=P(X(t_1)\le x_1;\ X(t_2)\le x_2;\ldots;\ X(t_n)\le x_n).$

Такой способ описания случайных процессов универсален, но весьма громоздок. Для получения существенных результатов выделяют наиболее важные частные случаи, допускающие применение более совершенного аналитического аппарата. В частности, удобно рассматривать ***случайный процесс X(t, ω) как функцию двух переменных:*** $t \in T$, $\omega \in \Omega$, которая при любом фиксированном значении $t \in T$ становится случайной величиной, определенной на вероятностном пространстве ($\Omega$, $\mathcal{A}$, P), где $\Omega$ - непустое множество элементарных событий ω; $\mathcal{A}$ - σ-алгебра подмножеств множества Ω, то есть множество событий; P - вероятностная мера, определенная на $\mathcal{A}$.

***Неслучайная числовая функция x(t)=X(t, ω₀) называется реализацией (траекторией) случайного процесса X(t, ω).***

***Сечением случайного процесса X(t, ω) называется случайная величина, которая соответствует значению $t=t_0$.***

Если аргумент t принимает все действительные значения или все значения из некоторого интервала T действительной оси, то говорят о случайном процессе **с непрерывным временем**. Если t принимает только фиксированные значения, то говорят о случайном процессе **с дискретным временем**.

Если сечение случайного процесса - дискретная случайная величина, то такой процесс называется **процессом с дискретными состояниями**. Если же любое сечение - непрерывная случайная величина, то случайный процесс называется **процессом с непрерывными состояниями**.

В общем случае задать случайный процесс аналитически невозможно. Исключение составляют так называемые **элементарные случайные процессы**, вид которых известен, а случайные величины входят как параметры:

$X(t)=X(t,A_1,\ldots,A_n)$, где $A_i$, $i=1,\ldots,n$ - произвольные случайные величины с конкретным распределением.

## 1.2. Некоторые классы и виды случайных процессов

### *1.1.1. Гауссовские случайные процессы*

Случайный процесс X(t) называется ***гауссовским***, если все его конечномерные распределения являются нормальными, то есть

$$\forall\, t_1, t_2,\ldots,t_n \in T$$

случайный вектор

$$(X(t_1); X(t_2);\ldots; X(t_n))$$

имеет следующую плотность распределения:

$$p(X(t_1); X(t_2);...; X(t_n)) = \frac{1}{(2\cdot\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{2|C|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|C_{ij}|\cdot(x_i-a_i)\cdot(x_j-a_j)},$$

где $a_i=MX(t_i)$; $\sigma_i^2=M(X(t_i)-a_i)^2$; $c_{ij}= M((X(t_i)-a_i)\cdot(X(t_j)-a_j))$; $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$;

$|C_{ij}|$ -алгебраическое дополнение элемента $c_{ij}$.

### *1.1.2. Случайные процессы с независимыми приращениями*

Случайный процесс X(t) называется процессом ***с независимыми приращениями***, если его приращения на непересекающихся временных промежутках не зависят друг от друга:

$\forall\, t_1, t_2,\ldots,t_n \in T$: $t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n$,

случайные величины

$X(t_2)-X(t_1)$; $X(t_3)-X(t_2)$; …; $X(t_n)-X(t_{n-1})$

независимы.

### *1.1.3. Случайные процессы с некоррелированными приращениями*

Случайный процесс X(t) называется процессом ***с некоррелированными приращениями,*** если выполняются следующие условия:

1) $\forall\, t \in T$: $MX^2(t) < \infty$;
2) $\forall\, t_1, t_2, t_3, t_4 \in T$: $t_1 \le t_2 \le t_3 \le t_4$ : $M((X(t_2)-X(t_1))\cdot(X(t_4)-X(t_3)))=0$.

### *1.1.4. Стационарные случайные процессы (см. Глава 5)*

### *1.1.5. Марковские случайные процессы*

Ограничимся определением ***марковского*** случайного процесса с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова).

***Пусть система А может находиться в одном из несовместных состояний $A_1$; $A_2$;…;$A_n$, и при этом вероятность $P_{ij}(s)$ того, что в s-ом испытании система переходит из состояния $A_i$ в состояние $A_j$, не зависит от состояния системы в испытаниях, предшествующих s-1-ому. Случайный процесс данного типа называется цепью Маркова.***

#### *1.1.6. Пуассоновские случайные процессы*

Случайный процесс X(t) называется ***пуассоновским*** процессом с параметром a (a>0), если он обладает следующими свойствами:

1) $t \in T$; T=[0, +∞);
2) X(0)=0;
3) $\forall\, t_1, t_2, \ldots, t_n$: $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ случайные величины $X(t_2)-X(t_1)$; $X(t_3)-X(t_2)$; …; $X(t_n)-X(t_{n-1})$ независимы;
4) случайная величина X(t)-X(s), 0≤s≤t имеет распределение Пуассона с параметром a·(t-s): $P(X(t)-X(s)=i)=(a(t-s))^i\cdot\frac{e^{-a(t-s)}}{i!}$; i=0;1;2;…

#### *1.1.7. Винеровский случайный процесс*

Случайный процесс X(t) называется ***винеровским***, если он обладает свойствами:

1)-3) пуассоновского случайного процесса;
4) случайная величина X(t)-X(s), 0≤s≤t имеет нормальное распределение с параметрами **(0;** $\sqrt{t-s}$**):**

$$p(x;t-s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\pi(-s)}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}.$$

# ТЕМА 2. ЭЛЕМЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

## 2.1. Понятие корреляционной теории случайных процессов

В рамках общего подхода к описанию случайных процессов характеристика сечений и любых их совокупностей осуществляется с помощью многомерных распределений. В частности, любое сечение характеризуется либо одномерной плотностью вероятности $p_1(t;\ x)$, либо одномерной функцией распределения $F(t;\ x)=P(X(t)\le x)$. Взаимосвязь любой пары сечений характеризуется двумерной плотностью вероятности $p_2(t_1;\ t_2;\ x_1;\ x_2)$ или двумерной функцией распределения $F(t_1;\ t_2;\ x_1;\ x_2)=P(X(t_1)\le x_1;\ X(t_2)\le x_2)$, где $t_{1,2}$-два фиксированных момента времени; $x_{1,2}$-возможные значения случайных величин, соответствующих этим сечениям.

Аналогично вводятся плотности и функции распределения трех и более сечений, однако для большого числа случайных процессов оказывается достаточным ограничиться одномерными и двумерными распределениями.

***Теория случайных процессов, основанная на изучении моментов первого и второго порядка, называется корреляционной теорией случайных процессов.***

## 2.2. Математическое ожидание и дисперсия случайного процесса. Среднеквадратическое отклонение

***Если в каждом сечении случайного процесса существует математическое ожидание, то математическим ожиданием случайного процесса X(t) называется неслучайная функция $m_X(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении t равно***

***математическому ожиданию соответствующего сечения:***
***$m_X(t)=MX(t)$.***

Основные свойства математического ожидания случайного процесса: если $\varphi(t)$ - неслучайная функция, то

$$M\,\varphi(t)=\varphi(t);\ M(\varphi(t)\cdot X(t))=\varphi(t)\cdot m_X(t);$$

$$M(X_1(t)+X_2(t))=m_{X_1}(t)+m_{X_2}(t);\ M(X(t)+\varphi(t))=m_X(t)+\varphi(t).$$

***Если в каждом сечении случайного процесса существует дисперсия, то дисперсией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $D_X(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента $t$ равно дисперсии соответствующего сечения:***

$$D_X(t)=DX(t)=M(X(t)-m_X(t))^2.$$

Основные свойства дисперсии случайного процесса:
если $\varphi(t)$ - неслучайная функция, то
$D(\varphi(t))=0$; $D(\varphi(t)\cdot X(t))=\varphi^2(t)\cdot D_X(t)$;

$$D(X(t)+\varphi(t))=D_X(t);\ D_X(t)=m_{X^2}(t)-m_X^2(t).$$

***Среднеквадратическим отклонением случайного процесса $X(t)$ называется арифметический квадратный корень из его дисперсии:***

$$\sigma_X(t)=\sqrt{D_X(t)}.$$

## 2.3. Корреляционная функция случайного процесса и ее свойства. Нормированная корреляционная функция

***Корреляционной функцией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $K_X(t_1;t_2)$ двух независимых аргументов, значение которой равно корреляционному моменту сечений, соответствующих моментам времени $t_1$ и $t_2$:***

$$K_X(t_1;t_2)=M((X(t_1)-m_X(t_1))\cdot(X(t_2)-m_X(t_2))).$$

Основные свойства корреляционной функции:

1) $$K_X(t_1;t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1-m_X(t_1))\cdot(x_2-m_X(t_2))\cdot p(t_1;t_2;x_1;x_2)\,dx_1dx_2=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2\cdot p(t_1;t_2;x_1;x_2)\,dx_1dx_2-m_X(t_1)\cdot m_X(t_2);$$

2) $K_X(t;t)=D_X(t)$;
3) $K_X(t_1;t_2)=K_X(t_2;t_1)$;
4) если $\varphi(t)$ - неслучайная функция, то

$K_{\varphi(t)}(t_1;t_2)=0$; $K_{\varphi(t)+X(t)}(t_1;t_2)=K_{X(t)}(t_1;t_2)$;
$K_{\varphi(t)\cdot X(t)}(t_1;t_2)=\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)\cdot K_{X(t)}(t_1;t_2)$;

5) $\left|K_X(t_1;t_2)\right|\le\sqrt{D_X(t_1)\cdot D_X(t_2)}$;
6) $\forall a(t);\forall B\subset T:\quad \int_B\int_B a(t_1)\cdot a(t_2)\cdot K_X(t_1;t_2)\,dt_1dt_2\ge 0.$

***Функция вида*** $r_X(t_1;t_2)=\dfrac{K_X(t_1;t_2)}{\sigma_X(t_1)\cdot\sigma_X(t_2)}=\dfrac{K_X(t_1;t_2)}{\sqrt{K_X(t_1;t_1)\cdot K_X(t_2;t_2)}}$ ***называется нормированной корреляционной функцией.***

## 2.4. Взаимная корреляционная функция и нормированная взаимная

**корреляционная функция двух случайных процессов**

***Взаимной корреляционной функцией двух случайных процессов X(t) и Y(t) называют неслучайную функцию $R_{XY}(t_1; t_2)$ двух независимых аргументов $t_1$ и $t_2$, значение которой равно корреляционному моменту сечений этих случайных процессов в соответствующие моменты времени:***

$$R_{XY}(t_1; t_2)= M((X(t_1)-m_X(t_1))\cdot(Y(t_2)-m_Y(t_2))).$$

Свойства взаимной корреляционной функции:
если φ(t) и Ψ(t) - неслучайные функции, то

$$R_{X(t)+\varphi(t)\ Y(t)+\Psi(t)}(t_1; t_2)= R_{XY}(t_1; t_2);$$

$$R_{X(t)\cdot\varphi(t)\ Y(t)\cdot\Psi(t)}(t_1; t_2)= \varphi(t_1)\cdot \Psi(t_2)\cdot R_{XY}(t_1; t_2);$$

$$R_{XY}(t_1; t_2)=R_{YX}(t_2; t_1);\ \left|R_{XY}(t_1;t_2)\right| \le \sqrt{D_X(t_1)\cdot D_Y(t_2)}.$$

***Функция вида*** $r_{XY}(t_1;t_2)=\dfrac{R_{XY}(t_1;t_2)}{\sqrt{D_X(t_1)\cdot D_Y(t_2)}}$ ***называется нормированной взаимной корреляционной функцией случайных процессов X(t) и Y(t).***

## 2.5 Вероятностные характеристики суммы двух случайных величин

**Теорема 1**. Математическое ожидание суммы двух случайных процессов X(t) и Y(t) равно сумме их математических ожиданий: $m_{X+Y}(t)= m_X(t)+m_Y(t)$.

**Теорема 2**. Корреляционная функция суммы двух случайных процессов X(t) и Y(t) имеет вид: $K_{X+Y}(t_1; t_2)=K_X(t_1; t_2)+K_Y(t_1; t_2)+R_{XY}(t_1; t_2)+R_{YX}(t_2; t_1)$.

**Следствие 1**. Если случайные процессы X(t) и Y(t) некоррелированны, то

$$K_{X+Y}(t_1; t_2)=K_X(t_1; t_2)+K_Y(t_1; t_2);\ D_{X+Y}(t)=D_X(t)+D_Y(t).$$

**Следствие 2**. Если случайный процесс X(t) и случайная величина Y некоррелированны, то

$$K_{X+Y}(t_1; t_2)=K_X(t_1; t_2)+D_Y.$$

# ТЕМА 3. ЭЛЕМЕНТЫ СЛУЧАЙНОГО АНАЛИЗА

## 3.1. Сходимость и непрерывность

***1. Классические виды сходимости***

В стандартном курсе математического анализа вводятся следующие типы сходимости.

а) Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется ***сходящейся к числу*** x при $n\to\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ (сколь угодно малого) существует номер $N_\varepsilon$, начиная с которого все последующие элементы последовательности принадлежат ε-окрестности точки x:

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall n>N_\varepsilon : \quad |x_n-x|<\varepsilon\ ;$$

б) Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется ***поточечно сходящейся*** на множестве X к функции f(x), если она сходится (как числовая последовательность) при каждом фиксированном $x\in X$ к значению f(x).

Частным случаем поточечной сходимости является ***равномерная*** сходимость.

в) Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется ***сходящейся почти всюду*** на множестве X к функции f(x), если она сходится поточечно к f(x) на множестве X за исключением множества точек $X_0$ меры нуль.

В теории вероятности такое понимание сходимости (кроме в)) мало содержательно. Тем не менее, приведенные здесь определения позволяют в полной мере ощутить разницу классических подходов и их вероятностных аналогов.

***2. Сходимость по вероятности***

Говорят, что последовательность случайных величин $\{X_n\}$ сходится по ***вероятности*** к случайной величине X при $n\to\infty$, если

$$\forall\varepsilon>0: \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - X\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Обозначение: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{вер.} X$

Обратите внимание, что при $n\to\infty$ имеет место классическая сходимость вероятности $\mathrm{P}(|X_n - X| < \varepsilon)$ к 1, то есть с возрастанием номера n можно гарантировать сколь угодно близкие к 1 значения вероятности. Но при этом нельзя гарантировать близости значений случайных величин $X_n$ к значениям случайной величины X ни при каких сколь угодно больших значениях n, поскольку мы имеем дело со случайными величинами.

Случайный процесс X(t), $t\in T$ называется ***стохастически непрерывным в точке*** $t_0\in T$, если

$$\mathrm{X(t)} \xrightarrow[t\to t_0]{\text{вер.}} \mathrm{X}(t_0).$$

***3. Сходимость в среднем в степени p≥1***

Говорят, что последовательность случайных величин $\{X_n\}$ ***сходится в среднем в степени p≥1*** к случайной величине X, если

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\left(X_n - X\right)^p\right) = 0.$$

Обозначение: $X_n \xrightarrow{p} X$.

В частности, $\{X_n\}$ сходится ***в среднеквадратичном*** к случайной величине X, если

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\left(X_n - X\right)^2\right) = 0.$$

Обозначение: $X = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} X_n$ или $X_n \xrightarrow{2} X$.

Случайный процесс X(t), $t\in T$ называется ***непрерывным в среднеквадратичном*** в точке $t_0\in T$, если $\mathrm{X}(t_0) = \underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m.}}\ \mathrm{X(t)}.$

***4. Сходимость почти наверное (сходимость с вероятностью единица)***

Говорят, что последовательность случайных величин $\{X_n\}$ сходится почти наверное к случайной величине X, если

$$P\left\{\omega : \left|X_n(\omega) - X(\omega)\right| \to 0\right\} = 1,$$

где $\omega\in\Omega$ - элементарное событие вероятностного пространства ($\Omega$, $\mathcal{A}$, P).

Обозначение: $\mathrm{X_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathrm{X}$.

***5. Слабая сходимость***

Говорят, что последовательность { $\mathrm{F}_{X_n}(x)$ } функций распределения случайных величин $X_n$ ***слабо сходится*** к функции распределения $F_X(x)$ случайной величины X, если имеет место поточечная сходимость в каждой точке непрерывности функции $F_X(x)$.

Обозначение: $\mathrm{F}_{X_n}(x) \Rightarrow F_X(x)$.

***6. Связь различных типов сходимости***

$$\begin{tikzcd}
\boxed{X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X} \arrow[dr] & & \\
& \boxed{X_n \overset{\text{вер.}}{\to} X} \arrow[r] & \boxed{F_{X_n}(x) \Rightarrow F_X(x)} \\
\boxed{X_n \xrightarrow{p} X} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Если последовательность случайных величин $\{X_n\}$ сходится к случайной величине X почти наверное или в среднем в степени p≥1, то она автоматически сходится к X и по вероятности. В свою очередь, сходимость по вероятности гарантирует слабую сходимость последовательности функций распределения.

## 3.2. Производная случайного процесса и ее свойства

В соответствии с классическим определением, производная случайного процесса X(t) должна быть определена как предел разностного отношения $\frac{X(t+h)-X(t)}{h}$ при h→0 в смысле соответствующей сходимости. Можно показать, что сходимость по вероятности обладает рядом недостатков, которые делают этот подход практически бесполезным.

***Случайный процесс X(t) называется дифференцируемым, если существует случайный процесс*** $X'(t)$ ***такой, что*** $\lim\limits_{\Delta t\to 0} M\left(\frac{X(\Delta t+t)-X(t)}{\Delta t}-X'(t)\right)^2=0.$

***При этом случайный процесс*** $X'(t)$ ***называется производной случайного процесса X(t) и обозначается следующим образом:*** $X'(t)=\underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m.}}\frac{X(\Delta t+t)-X(t)}{\Delta t}$.

**Теорема 1.** Математическое ожидание производной случайного процесса равно производной от математического ожидания самого случайного процесса: $m_{X'}(t)=m_X'(t)$.

**Следствие.** $m_{X^{(n)}}(t)=m_X^{(n)}(t)$.

**Теорема 2.** Корреляционная функция производной случайного процесса X(t) равна второй смешанной производной от его корреляционной функции: $K_{X'}(t_1;t_2)=\frac{\partial^2 K_X(t_1;t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2}$.

**Теорема 3.** Взаимная корреляционная функция случайного процесса X(t) и его производной $X'(t)$ равна частной производной его корреляционной функции по переменной, соответствующей производной: $R_{XX'}(t_1;t_2)=\frac{\partial K_X(t_1;t_2)}{\partial t_2}$; $\quad R_{X'X}(t_1;t_2)=\frac{\partial K_X(t_1;t_2)}{\partial t_1}$.

## 3.3. Интеграл от случайного процесса и его свойства

***Интегралом от случайного процесса X(t) на отрезке [0, t] называется предел в среднеквадратичном при λ→0 (n→0)***

$$Y(t)=\underset{\lambda\to 0}{\text{l.i.m.}}\ \sigma=\int_0^t X(s)ds$$

***интегральных сумм*** $\sigma=\sum\limits_{i=0}^{n-1}X(s_i)(t_{i+1}-t_i)$, ***где*** $s_i\in(t_i;t_{i+1})$***;*** $\lambda=\max(t_{i+1}-t_i)$***,*** $i=0,\dots,n-1$***.***

**Теорема 4.** Математическое ожидание интеграла от случайного процесса равно интегралу от его математического ожидания: $m_Y(t)=\int_0^t m_X(s)ds$, $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

**Теорема 5.** Корреляционная функция интеграла от случайного процесса X(t) равна двойному интегралу от его корреляционной функции: $K_Y(t_1;t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}K_X(s_1;s_2)ds_1ds_2$.

**Теорема 6.** Взаимная корреляционная функция случайного процесса X(t) и его интеграла равна интегралу от корреляционной функции случайного процесса X(t):

$$R_{XY}(t_1;t_2)=\int_0^{t_2}K_X(t_1;s)ds;\quad R_{YX}(t_1;t_2)=\int_0^{t_1}K_X(s;t_2)ds.$$

# ТЕМА 4. КАНОНИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

## 4.1. Понятие канонического разложения случайного процесса

Случайная величина V называется ***центрированной***, если ее математическое ожидание равно 0. Элементарным центрированным случайным процессом называется произведение центрированной случайной величины V на неслучайную функцию φ(t): X(t)=V φ(t). Элементарный центрированный случайный процесс имеет следующие характеристики:

$$\mathrm{MX(t)} = \mathrm{M(V}\varphi(\mathrm{t})) = \varphi(\mathrm{t})\ \mathrm{MV} = 0;$$

$$\mathrm{DX(t)} = \mathrm{D(V}\varphi(\mathrm{t})) = \varphi^2(\mathrm{t})\ \mathrm{D_V}; \qquad \sigma_X(\mathrm{t}) = |\varphi(\mathrm{t})| \cdot \sigma_v;$$

$$\mathrm{K_X(t_1;t_2)} = \mathrm{M((X(t_1) - MX(t_1)) \cdot (X(t_2) - MX(t_2)))} = \\ = \mathrm{M(V}\varphi(\mathrm{t_1}) \cdot \mathrm{V}\varphi(\mathrm{t_2})) = \varphi(\mathrm{t_1})\ \varphi(\mathrm{t_2})\,\mathrm{D_V};$$

$$\mathrm{r_X(t_1;t_2)} = \frac{\mathrm{K_X(t_1;t_2)}}{\sigma_X(\mathrm{t_1}) \cdot \sigma_X(\mathrm{t_2})} = \pm 1.$$

***Выражение вида*** $\mathrm{X(t)} = \varphi_0(\mathrm{t}) + \sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} \mathrm{V_k} \cdot \varphi_{\mathrm{k}}(\mathrm{t})$***, где φ<sub>k</sub>(t), k=1;2;…-неслучайные функции;***

***$V_k$, k=1;2;…-некоррелированные центрированные случайные величины, называется каноническим разложением случайного процесса X(t), при этом случайные величины $V_k$ называются коэффициентами канонического разложения; а неслучайные функции $\varphi_k$(t) - координатными функциями канонического разложения.***

Рассмотрим характеристики случайного процесса

$$\mathrm{X(t)} = \varphi_0(\mathrm{t}) + \sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} \mathrm{V_k}\varphi_{\mathrm{k}}(\mathrm{t}):$$

$$\mathrm{MX(t)} = \mathrm{M}\varphi_0(\mathrm{t}) + \sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} \varphi_k(\mathrm{t})\mathrm{MV_k} = \mathrm{M}\varphi_0(\mathrm{t}) = \varphi_0(\mathrm{t});\ \varphi_0(\mathrm{t}) = \mathrm{m_X(t)};$$

$$\mathrm{K_X(t_1;t_2)} = \mathrm{M}\left(\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} \varphi_k(\mathrm{t_1})\mathrm{V_k} \cdot \sum_{\mathrm{m=1}}^{\infty} \varphi_m(\mathrm{t_2})\mathrm{V_m}\right) =$$

$$= \mathrm{M}\left(\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty}\sum_{\mathrm{m=1}}^{\infty} \mathrm{V_k V_m}\varphi_k(\mathrm{t_1})\varphi_m(\mathrm{t_2})\right) = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty}\sum_{\mathrm{m=1}}^{\infty} \varphi_k(\mathrm{t_1})\varphi_m(\mathrm{t_2}) \cdot \mathrm{M(V_k V_m)}.$$

Так как по условию $\mathrm{M(V_k V_m)} = \begin{cases} 0, & \mathrm{k \neq m}; \\ \mathrm{D_{V_k}}, & \mathrm{k = m}, \end{cases}$ то

$$\mathrm{K_X(t_1;t_2)} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} \varphi_k(\mathrm{t_1})\varphi_k(\mathrm{t_2}) \cdot \mathrm{D_{V_k}};\quad \mathrm{D_X(t)} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} \varphi_k^2(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{D_{V_k}};$$

$$\mathrm{r_X(t_1;t_2)} = \frac{\mathrm{K_X(t_1;t_2)}}{\sqrt{\mathrm{D_X(t_1) \cdot D_X(t_2)}}} = \frac{\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} \varphi_k(\mathrm{t_1})\varphi_k(\mathrm{t_2}) \cdot \mathrm{D_{V_k}}}{\sqrt{\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} \varphi_k^2(\mathrm{t_1})\mathrm{D_{V_k}} \cdot \sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} \varphi_k^2(\mathrm{t_2})\mathrm{D_{V_k}}}}.$$

Очевидно, что один и тот же случайный процесс имеет различные виды канонического разложения в зависимости от выбора координатных функций. Более того, даже при состоявшемся выборе координатных функций существует произвол в распределении случайных величин $V_к$. На практике по итогам экспериментов получают оценки для математического ожидания и корреляционной функции: $\hat{m}_X(t)$ и $\hat{K}_X(t_1;t_2)$. После разложения $\hat{K}_X(t_1;t_2)$ в двойной ряд Фурье по координатным функциям $\varphi_k(t)$:

$$\hat{K}_X(t_1;t_2) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t_1)\,\varphi_k(t_2)\cdot D_{V_k}$$

получают значения дисперсий $D_{V_k}$ случайных величин $V_k$.

## 4.2. Понятие обобщенной функции. Дельта-функция Дирака. Интегральное каноническое представление случайных процессов.

***Обобщенной функцией*** называется предел последовательности однопараметрического семейства непрерывных функций.

***Дельта-функция Дирака*** $\delta(t)$**-** это обобщенная функция, являющаяся результатом предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ в семействе функций $\delta_\varepsilon(t)$

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & |t| \ge \varepsilon; \\ (2\varepsilon 2^{-1}, & |t| < \varepsilon. \end{cases}$$

Среди свойств $\delta$-функции отметим следующее:

1. $\delta(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\omega}\,d\omega = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\omega o d\omega = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \cos\omega o d\omega$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1;$

3. Если f(t)- непрерывная функция, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(t)\,\delta(t)dt = f(0);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0).$$

***Случайный процесс X(t), корреляционная функция которого имеет вид*** $K_X(t_1;t_2) = W(t_1)\cdot\delta(t_1 - t_2)$, ***называется нестационарным «белым шумом». Если*** $W(t_1)=W$ ***- const, то X(t)-стационарный «белый шум».***

Как следует из определения, никакие два, даже сколь угодные близкие, сечения «белого шума» не коррелированны. Выражение W(t) называется ***интенсивностью «белого шума».***

***Интегральным каноническим представлением случайного процесса X(t) называется выражение вида*** $X(t) = m_X(t) + \displaystyle\int_\Lambda Z(\lambda)\cdot\varphi(\lambda;t)\,d\lambda\lambda$ ***где*** $Z(\lambda)$ ***- случайная центрированная функция;*** $\varphi(\lambda;t)$***- неслучайная функция непрерывных аргументов*** $\lambda$ и $t$.

Корреляционная функция такого случайного процесса имеет вид:

$$K_X(t_1;t_2) = M(\int_\Lambda Z(\lambda)\cdot\varphi(\lambda;t_1)\,d\lambda\cdot\int_\Lambda Z(\lambda)\cdot\varphi(\lambda;t_2)\,d\lambda\lambda =$$

$$= \int_\Lambda\int_\Lambda \varphi(\lambda_1;t_1)\cdot\varphi(\lambda_2;t_2)\cdot M(Z(\lambda_1)\cdot Z(\lambda_2))\,d\lambda_1 d\lambda_2\,.$$

Можно показать, что существует неслучайная функция G(λ) такая, что

$$M(Z(\lambda_1)\cdot Z(\lambda_2)) = G(\lambda_1)\cdot\delta(\lambda_1 - \lambda_2),$$

где $G(\lambda_1)$ - плотность дисперсии; $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака. Получаем

$$K_X(t_1;t_2)=\int_\Lambda \varphi(\lambda_1;t_1)\cdot\left(\int_\Lambda \varphi(\lambda_2;t_2)\cdot G(\lambda_1)\cdot\delta(\lambda_1-\lambda_2)\,d\lambda_2\right)d\lambda_1=\int_\Lambda \varphi(\lambda_1;t_1)\varphi(\lambda_1;t_2)\,G(\lambda_1)\,d\lambda_1.$$

Следовательно, дисперсия случайного процесса X(t):

$$D_X(t)=K_X(t;t)=\int_\Lambda \varphi^2(\lambda;t)\cdot G(\lambda)\,d\lambda.$$

## 4.3. Линейные и нелинейные преобразования случайных процессов

Рассматривается следующая задача: на вход системы (устройства, преобразователя) S подается «входной сигнал», имеющий характер случайного процесса X(t). Система преобразовывает его в «выходной сигнал» Y(t):

$X(t)\to S\to Y(t)$.

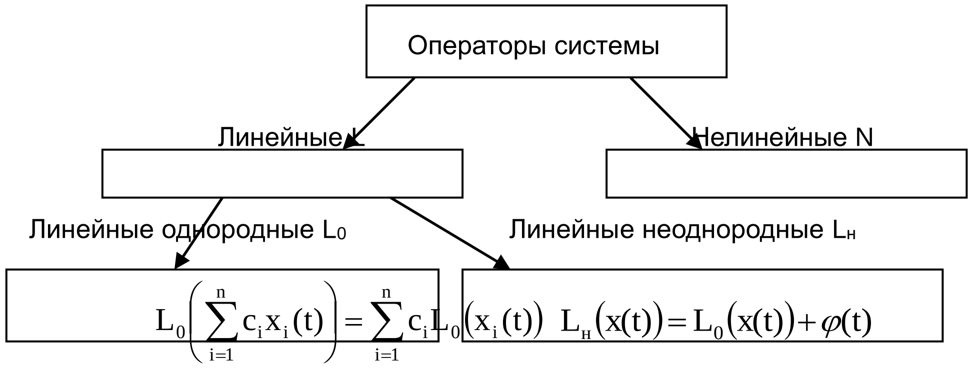
Формально преобразование случайного процесса X(t) в Y(t) может быть описано с помощью так называемого оператора системы $A_t$:

$Y(t)=A_t(X(t))$.

Индекс t показывает, что данный оператор осуществляет преобразование по времени. Возможны следующие постановки задачи о преобразовании случайного процесса.

1. Известны законы распределения или общие характеристики случайного процесса X(t) на входе в систему S, задан оператор $A_t$ системы S, требуется определить закон распределения или общие характеристики случайного процесса Y(t) на выходе системы S.
2. Известны законы распределения (общие характеристики) случайного процесса X(t) и требования к случайному процессу Y(t); надо определить вид оператора $A_t$ системы S, наилучшим образом удовлетворяющего заданным требованиям к Y(t).
3. Известны законы распределения (общие характеристики) случайного процесса Y(t) и задан оператор $A_t$ системы S; требуется определить законы распределения или общие характеристики случайного процесса X(t).

Принята следующая классификация операторов $A_t$ системы S:




1. Рассмотрим воздействие линейной неоднородной системы

$L_н(...)=L_0(…)+\varphi(t)$

на случайный процесс X(t), имеющий следующее каноническое разложение:

$$X(t)=m_X(t)+\sum_{k=1}^{\infty} V_k\cdot\varphi_k(t).$$

Получаем:

$$Y(t)=L_н(X(t))=L_0(m_X(t))+\sum_{k=1}^{\infty} L_0(V_k(\varphi_k(t))+\varphi(t)=$$

$$=L_0(m_X(t))+\sum_{k=1}^{\infty} V_k\cdot L_0(\varphi_k(t))+\varphi(t);$$

введем обозначения

$$L_0(m_X(t))=\psi_0(t);\ L_0(\varphi_k(t)=\psi_k(t);\ k\in N,$$

тогда каноническое разложение Y(t) приобретает вид:

$$Y(t)=\varphi(t)+\psi_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty} V_k\ \psi_k(t).$$

Математическое ожидание случайного процессаY(t):

$$MY(t)=M(\varphi(t)+\psi_0(t))+\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t)\,MV_k=\varphi(t)+\psi_0(t)=m_Y(t);$$

корреляционная функция случайного процесса Y(t):

$$K_Y(t_1;t_2)=M((Y(t_1)-m_Y(t_1))\cdot(Y(t_2)-m_Y(t_2)))=$$

$$=M(\sum_{k=1}^{\infty}V_kL_0(\varphi_k(t_1)\cdot\sum_{m=1}^{\infty}V_mL_0(\varphi_m(t_2)))=\sum_{k=1}^{\infty}L_0(\varphi_k(t_1))\cdot L_0(\varphi_k(t_2))\cdot D_{V_k}=$$

$$=L_{0_{t_1}}(L_{0_{t_2}}(\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t_1)\cdot\varphi_k(t_2)D_{V_k}));$$

следовательно,

$$K_Y(t_1;t_2)=L_{0_{t_1}}(L_{0_{t_2}}(K_X(t_1;t_2)))=L_{0_{t_2}}(L_{0_{t_1}}(K_X(t_1;t_2))).$$

С другой стороны

$$K_X(t_1;t_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t_1)\cdot\psi_k(t_2)D_{V_k}.$$

Дисперсия случайного процесса Y(t):

$$D_Y(t)=K_Y(t;t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k^2(t)D_{V_k}=\lim_{t_2\to t}L_{0_{t_2}}(L_{0_t}(K_X(t;t_2))).$$

В заключении этого пункта отметим, что операторы дифференцирования и интегрирования случайных процессов являются линейными однородными.

2. Рассматривается квадратичное преобразование:

$$Y(t)=(X(t))^2,\ X(t)=m_X(t)+\sum_{k=1}^{n}V_k\,\varphi_k(t)=m_X(t)+\overset{\circ}{X}(t),$$

$V_k$-центрированные случайные величины, имеющие симметричное относительно нуля распределение; любые четыре из них независимы в совокупности. Тогда

$$Y(t)=(X(t))^2=(m_X(t)+\sum_{k=1}^{\infty}V_k\ \varphi_k(t))^2=$$

$$=m_X^2(t)+2m_X(t)\sum_{k=1}^{n}V_k\,\varphi_k(t)+\sum_{k=1}^{n}V_k^2\,\varphi_k^2(t)+2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=k+1}^{n}V_kV_m\,\varphi_k(t)\varphi_m(t);$$

$$m_Y(t)=M(m_X(t)+\overset{\circ}{X}(t))^2=m_X^2(t)+2m_X(t)\cdot M(\overset{\circ}{X}(t))+M(\overset{\circ}{X}{}^2(t))==m_X^2(t)+D_X(t)=$$

$$m_X^2(t)+\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^2(t)\,D_{V_k}.$$

Введем неслучайные функции

$$\psi_k(t)=2m_X(t)\cdot\varphi_k(t);\quad \nu_k(t)=\varphi_k^2(t);\quad \varphi_{km}(t)=2\varphi_k(t)\cdot\varphi_m(t)$$

и случайные величины

$$U_k=V_k^2-D_{V_k},\quad W_{km}=V_k\cdot V_m,$$

тогда случайный процесс Y(t) приобретает вид

$$Y(t)=m_Y(t)+\sum_{\kappa=1}^{n}V_k\ \psi_k(t)+\sum_{k=1}^{n}U_k\ \nu_k(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=k+1}^{n}W_{km}\varphi_{km}(t).$$

Получено каноническое разложение случайного процесса Y(t). Корреляционная функция Y(t):

$$K_Y(t_1;t_2)=M((Y(t_1)-m_Y(t_1))\cdot(Y(t_2)-m_Y(t_2))=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\psi_k(t_1)\ \psi_k(t_2)\ D_{V_k}+\sum_{k=1}^{n}\nu_k(t_1)\ \nu_k(t_2)\ D_{U_k}+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=k+1}^{n}\varphi_{km}(t_1)\ \varphi_{km}(t_2)D_{W_{km}};$$

$$D_{U_k} = D\left(V_k^2 - D_{V_k}\right) = M\left(V_k^2 - D_{V_k}\right)^2 = MV_k^2 - D_{V_k}^2;$$
$$D_{W_{km}} = D\left(V_k V_m\right) = M\left(V_k^2 V_m^2\right) = D_{V_k} D_{V_m}.$$

Дисперсия: $D_Y(t) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k^2(t)\, D_{V_k} + \sum_{k=1}^{n} \nu_k^2(t)\, D_{U_k} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=k+1}^{n} \varphi_{km}^2(t)\, D_{W_{km}}.$

# ГЛАВА 5. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

## 5.1. Понятие стационарного случайного процесса. Стационарность в узком и широком смыслах

***Стационарным (однородным во времени) называют случайный процесс, статистические характеристики которого не меняются с течением времени, то есть являются инвариантными относительно временных сдвигов.***

Различают случайные процессы стационарные в широком и узком смысле.

***Стационарным случайным процессом в узком смысле называется случайный процесс X(t), все вероятностные характеристики которого не меняются со временем, то есть*** $\forall n \in N$ и $\forall \tau, t_i;\quad i = 1; 2; ...; n$ ***таких, что*** $t_i; \tau; t_i + \tau \in [0; T]$ ***выполняется условие F($t_1$; $t_2$;… ;$t_n$; $x_1$; $x_2$;…; $x_n$)=F($t_1$+τ; $t_2$+τ;… ;$t_n$+τ; $x_1$; $x_2$;…; $x_n$), и, следовательно, все n-мерные распределения зависят не от моментов времени $t_1$; $t_2$;… ;$t_n$, а от длительности временных промежутков $\tau_i$:*** $\tau_1 = t_2 - t_1;\ \tau_2 = t_3 - t_2;\ \ldots; \tau_{n-1} = t_n - t_{n-1}$.

В частности, одномерная плотность распределения вообще не зависит от времени t:
$$p_1(t; x) = p_1(x),$$
двумерная плотность сечений в моменты времени $t_1$ и $t_2$
$$p_2(t_1; t_2; x_1; x_2) = p_2(t_1; t_1 + \tau_1; x_1; x_2) = p_2(\tau_1; x_1; x_2)$$
n-мерная плотность сечений в моменты времени $t_1$; $t_2$...; $t_n$:
$$p_n(t_1; t_2; ...; t_n; x_1; x_2; ...; x_n) = p_n(t_1; t_1 + \tau_1; t_1 + \tau_2; ...; t_1 + \tau_{n-1}; x_1; x_2; ...; x_n) =$$
$$= p_n(\tau_1; \tau_2; ...; \tau_{n-1}; x_1; x_2; ...; x_n).$$

***Случайный процесс X(t) называется стационарным в широком смысле, если его моменты первого и второго порядка инвариантны относительно временного сдвига, то есть его математическое ожидание не зависит от времени t и является константой, а корреляционная функция зависит только от длины временного промежутка между сечениями:*** $m_X(t) = m;\ K_X(t_1; t_2) = k(t_2 - t_1) = k(\tau($

Очевидно, что стационарный случайный процесс в узком смысле является стационарным случайным процессом и в широком смысле; обратное утверждение не верно.

## 5.2 Свойства вероятностных характеристик стационарного случайного процесса

1. $m_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(t; x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)\, dx = m, \qquad m - const;$

2. $$K_X(t_1; t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m)(x_2 - m) \cdot p_2(t_1; t_2; x_1; x_2)\, dx_1 dx_2 =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m)(x_2 - m) \cdot p_2(\tau\tau x_1; x_2)\, dx_1 dx_2 = k_X(\tau\tau.$$

3. Корреляционная функция стационарного случайного процесса четна:

$$k_X(\tau\tau = k_X(-\tau).$$

4. Дисперсия стационарного случайного процесса есть константа, равная значению ее корреляционной функции в точке $\tau = 0$:

$$D_X(t) = K_X(t;t) = k_X(0); \qquad k_X(0) \geq 0.$$

5. $\left|k_X(\tau\tau\right| \leq k_X(0).$

6. Корреляционная функция стационарного случайного процесса является положительно определенной, то есть

$$\forall \varphi(t);\ \forall B \subset [0;T]:\ \int_B \int_B k_X(t_2 - t_1)\cdot\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)\, dt_1 dt_2 \geq 0.$$

***Нормированная корреляционная функция стационарного случайного процесса***

$r_X(\tau\tau = \dfrac{k_X(\tau\tau}{k_X(0)}$ также четна, положительно определена и при этом

$$\left|r_X(\tau\tau\right| \leq 1; \quad r_X(0) = 1.$$

## 5.3. Стационарно связанные случайные процессы. Производная и интеграл от стационарного случайного процесса

***Случайные процессы X(t) и Y(t) называются стационарно связанными, если их взаимная корреляционная функция зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$:***

***$R_{XY}(t_1;t_2) = r_{XY}(\tau)$.***

Стационарность самих случайных процессов X(t) и Y(t) не означает их стационарной связанности.

Отметим основные свойства стационарно связанных случайных процессов, производной и интеграла от стационарных случайных процессов,

1) $r_{XY}(\tau) = r_{YX}(-\tau)$.

2) $k_{X'}(\tau\tau = -k''_X(\tau\tau)\ k_{X^{(n)}}(\tau\tau = (-1)^n k_X^{(2n)}(\tau\tau)$

3) $r_{XX'}(\tau\tau = k'_X(\tau\tau)\ r_{X'X}(\tau\tau = -k'_X(\tau\tau)$

4) $K_Y(t_1;t_2) = \int\limits_0^{t_2}(t_2 - \tau)k_X(\tau\tau d\tau - \int\limits_0^{t_2 - t_1}(t_2 - t_1 - \tau)k_X(\tau\tau d\tau + \int\limits_0^{t_1}(t_1 - \tau)k_X(\tau\tau d\tau,$

где $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)ds;$

5) $D_Y(t) = 2\int\limits_0^t (t - \tau)k_X(\tau\tau d\tau\tau$ где $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)ds;$

6) $R_{XY}(t_1;t_2) = \int\limits_0^{t_2} k_X(s - t_1)\ ds = \int\limits_{-t_1}^{t_2 - t_1} k_X(\tau\tau\, d\tau;$

$R_{YX}(t_1;t_2) = \int\limits_0^{t_1} k_X(t_2 - s)\ ds = \int\limits_{t_2 - t_1}^{t_2} k_X(\tau\tau\, d\tau.$

## 5.4. Эргодические стационарные случайные процессы и их характеристики

Среди стационарных случайных процессов есть особый класс процессов, называемых ***эргодическими***, которые обладают следующим свойством: их ***характеристики, полученные***

***усреднением множества всех реализаций, совпадают с соответствующими характеристиками, полученными усреднением по времени одной реализации, наблюдаемой на интервале (0, T) достаточно большой продолжительности.*** То есть на достаточно большом временном промежутке любая реализация проходит через любое состояние независимо от того, каково было исходное состояние системы при t=0; и в этом смысле любая реализация полностью представляет всю совокупность реализаций.

**Эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина**

***Для любого стационарного случайного процесса в узком смысле X(t), имеющего конечное математическое ожидание*** $M|X(t)| < \infty$ ***с вероятностью 1 существует предел***

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt = M(X|J_X)$$ ***для ССП с непрерывным временем,***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(t_i) = M(X|J_X)$$ ***для ССП с дискретным временем.***

***Если при этом X(t) – эргодический стационарный случайный процесс, то*** $M(X|J_X) = MX(t) = m\ -\ \text{const}$.

В условии теоремы $M(X|J_X)$ - условное математическое ожидание случайного процесса X(t) относительно $J_x$; $J_x$ – $\sigma$-алгебра инвариантных по отношению к X(t) событий; событие A называется инвариантным относительно X(t), если $\exists B \in \mathcal{B}(R^T)$ такое, что A={ω: X(ω,t)$\in$B}.

**Достаточные условия эргодичности**

**Теорема 1.** Стационарный случайный процесс X(t) эргодичен относительно математического ожидания, если его корреляционная функция $k_X(\tau\tau$ стремится к нулю при τ→∞;

при этом: $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt = m_X$.

**Теорема 2.** Стационарный случайный процесс X(t) эргодичен относительно дисперсии, если корреляционная функция стационарного слу-чайного процесса $Y(t)=X^2(t)$ стремится к нулю при τ→∞;

при этом: $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (X(t)-m_X)^2 dt = D_X$.

**Теорема 3.** Стационарный случайный процесс X(t) эргодичен относительно корреляционной функции, если стремится к нулю при τ→∞ кор-реляционная функция стационарного случайного процесса

Z(t, τ)= $(X(t)-m_X)(X(t+\tau)-m_X)$;

при этом: $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}(X(t)-m_X)(X(t+\tau)-m_X)dt = k_X(\tau\tau)$

При практических расчетах интервал (0;T) разбивается на n равных частей $\Delta t = \frac{T}{n}$; в каждом промежутке выбирается точка $t_i$ (например, середина). Если ограничиться формулой прямоугольников, получаем

$$m_X \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(t_i);$$

$$D_X \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X(t_i)-m_X)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X^2(t_i)-m_X^2;$$

$$k_X(\tau\tau \approx k_X(\frac{mT}{n}) = \frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{n-m}(X(t_i) - m_X)\cdot(X(t_{i+m}) - m_X) =$$

$$= \frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{n-m} X(t_i)\, X(t_{i+m}) - m_X^2\ ; \qquad m = 0; 1; 2; ...; n-1 .$$