Введение в корреляционную Т. СП.

конкретное сечение в момент времени t

$$p(t;x) \sim F(t;x) = P(X(t) \le x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t;s)\,ds;$$

$$p(t;x) = F_x'(t;x)$$

Δ

для пары сечений

$$p(t_1;t_2;x_1;x_2) \sim F(t_1;t_2;x_1;x_2) = P\big(X(t_1) \le x_1; X(t_2) \le x_2\big) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} p(t_1;t_2;s_1;s_2)\,ds_1\,ds_2;$$

$$p(t_1;t_2;x_1;x_2) = F''_{x_1x_2}(t_1;t_2;x_1;x_2)$$

$\Delta\Delta$

$$p(t_1;t_2;t_3;x_1;x_2;x_3) \sim F(t_1;t_2;t_3;x_1;x_2;x_3) = P\big(X(t_1) \le x_1; X(t_2) \le x_2; X(t_3) \le x_3\big) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{x_3} p(t_1;t_2;t_3;s_1;s_2;s_3)\,ds_1\,ds_2\,ds_3;$$

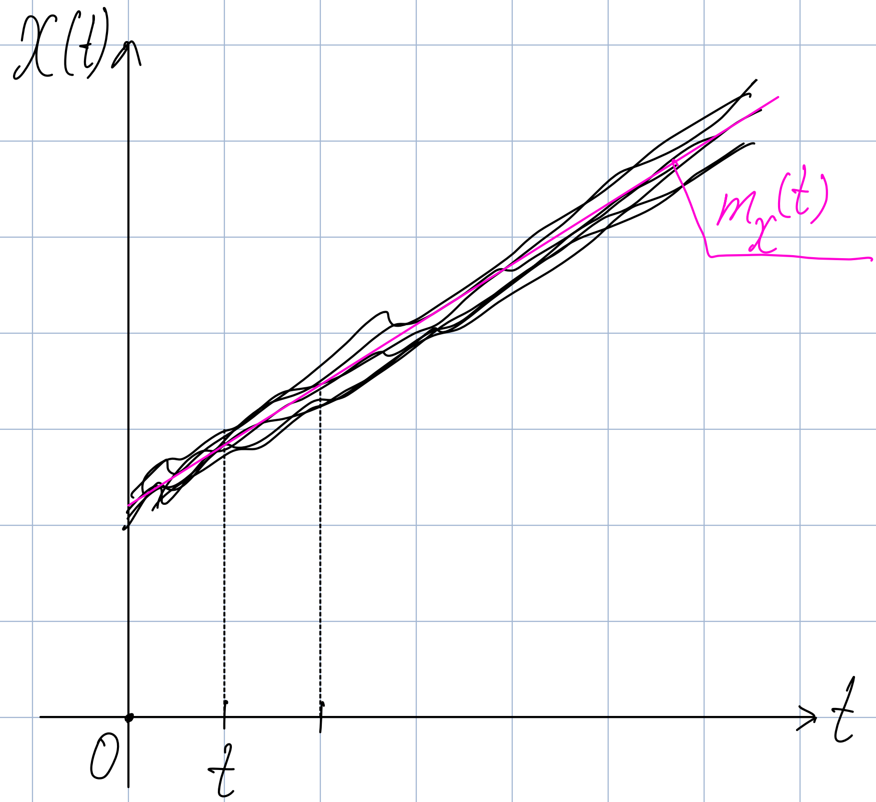
$$p(t_1;t_2;t_3;x_1;x_2;x_3) = F'''_{x_1x_2x_3}(t_1;t_2;t_3;x_1;x_2;x_3)$$

Теория СП, основанная на использ. исключительных хар-ик Δ, $\Delta\Delta$ наз. корр. теорией СП

М.О. СП и его св-ва:

Если в каждый мом. времени СП обл. конеч. М.О, то М.О самого СП наз. неслуч. ф. $m_x(t)$ значениями кот. в каждый момент t явл. М.О. соот. сечения

Обозн.: $m_x(t) = M(X(t))$



1) Если $\varphi(t)$ - неслуч. ф.

$$M(\varphi(t)) = \varphi(t)$$

$$M(\varphi(t) \cdot X(t)) = \varphi(t) \cdot m_x(t)$$

$$M(\varphi(t) + X(t)) = \varphi(t) + m_x(t)$$

2) $M(Y(t)+X(t)) = m_y(t) + m_x(t)$

Д. С.П. станд. откл. Св-ва.

Если в каждый мом. времени СП обл. конеч. Д., то Д самого СП наз. неслуч. ф. $D_x(t)$ значениями кот. в каждый момент времени явл. Д. соотв. сечения.

$$D_x(t) = D(X(t)) = M(X(t) - m_x(t))^2$$

Св-ва:

1) Если $\varphi(t)$ - неслуч. ф.

$$D(\varphi(t)) = 0$$

$$D(\varphi(t) \cdot X(t)) = \varphi^2(t) \cdot D_x(t)$$

$$D(\varphi(t) + X(t)) = D_x(t)$$

2) $D_x(t) = M(X^2(t)) - (m_x(t))^2$

Станд. откл. СП наз. арифметический кв. корень из Д.

$$\sigma_x(t)=\sqrt{D_x(t)}$$

Корр. ф. СП. Св-ва. Нормир. корр. ф.

Корр. ф. СП наз. неслуч. ф 2ух нез. аргументов

$K_x(t_1;t_2)$ значениями кот. явл корр. мом-ты сечений

СП в мом-ты времени t_1, t_2

$$K_x(t_1;t_2)=M\left(\left(x(t_1)-m_x(t_1)\right)\left(x(t_2)-m_x(t_2)\right)\right)$$

св-ва:

1) $$K_x(t_1;t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x_1-m_x(t_1)\right)\left(x_2-m_x(t_2)\right)\cdot$$

$$\cdot p(t_1;t_2;x_1;x_2)\,dx_1\,dx_2$$

[ ] = ( ) – для визуального удобства

$$K_x(t_1;t_2)=M\left[\left(X(t_1)-m_x(t_1)\right)\cdot\left(X(t_2)-m_x(t_2)\right)\right]=$$

$$=M\left(x(t_1)\cdot x(t_2)\right)-\underset{M(X(t_1))}{m_x(t_1)}\,m_x(t_2)-\cancel{m_x(t_1)m_x(t_2)}+\cancel{m_x(t_1)m_x(t_2)}=$$

$$=M\left(x(t_1)\cdot x(t_2)\right)-m_x(t_1)\,m_x(t_2)\quad QED$$

2. $K_x(t;t) = D_x(t)$

3. $K_x(t_1;t_2) = K_x(t_2;t_1)$

4. Пусть $\varphi(t)$ - неслуч. ф.

$$K_{\varphi(t)}(t_1;t_2) = 0$$

$$K_{\varphi(t)\cdot x(t)}(t_1;t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)\cdot K_x(t_1;t_2)$$

$$K_{\varphi(t)+x(t)}(t_1;t_2) = K_x(t_1;t_2)$$

5. $|K_x(t_1;t_2)| \leq \sigma_x(t_1)\cdot\sigma_x(t_2)$

6. Корр. ф. явл. полож. определённой.

$\forall \varphi(t)$ - неслуч. ф.
$\forall T$ - врем. пром

$$\iint\limits_{T\,T} \varphi(t_1)\varphi(t_2)\cdot K_x(t_1;t_2)\,dt_1 dt_2 \geq 0$$

⟨7⟩ Норм. корр. ф. наз. ф. след. вида:

$$r_x(t_1;t_2)=\frac{K_x(t_1;t_2)}{\sigma_x(t_1)\,\sigma_x(t_2)}$$

св-ва

7.1. $r_x(t;t)=1$

7.2. $|r_x(t_1;t_2)|\le 1$

7.3. $r_x(t_1;t_2)=r_x(t_2;t_1)$

7.4. сохр. полож. опр.

7.5. НКФ явл. мерой ЛЗ 2ух любых произв. сечений СП

взаимная

Взаимная К.Ф.; Н.В.К.Ф.

Взаимной К.Ф. С.П.ов $X(t)$, $Y(t)$ наз неслуч. ф. 2ух нез. аргументов t_1, t_2, значениями кот. явл К.мом-ты СП $X(t), Y(t)$ в мом-ты времени t_1, t_2

$$R_{xy}(t_1;t_2)=M\Big(\big(X(t_1)-m_x(t_1)\big)\big(Y(t_2)-m_y(t_2)\big)\Big)$$

⟨1⟩ Если $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – неслуч. ф-ии

$$R_{\varphi(t)+X(t);\psi(t)+Y(t)}(t_1;t_2)=R_{xy}(t_1;t_2)$$

1) $\varphi(t)$; $\psi(t)$ – неслуч. ф.

$$R_{\varphi\psi}(t_1;t_2)=0$$

$$R_{\varphi(t)X(t)+\psi(t)\cdot Y(t)}(t_1;t_2)=\varphi(t_1)\psi(t_2)\cdot R_{xy}(t_1;t_2)$$

$$R_{\varphi(t)X(t)\ \psi(t)\cdot Y(t)}(t_1;t_2)=R_{xy}(t_1;t_2)$$

2) $R_{xy}(t_1;t_2)=R_{yx}(t_2;t_1)$

3) $|R_{xy}(t_1;t_2)|\le \sigma_x(t_1)\cdot\sigma_y(t_1)$

4) Норм взаим. корр. ф. СП $X(t)$ $Y(t)$ наз. ф след. вида:

$$r_{xy}(t_1;t_2)=\frac{R_{xy}(t_1;t_2)}{\sigma_x(t_1)\cdot\sigma_y(t_2)}$$

Вероятностные хар-ки суммы 2ух СП

T_1

М.О. суммы 2ух СП $X(t)$ $Y(t)$ = сумме их М.О-ий

$$m_{x+y}(t)=m_x(t)+m_y(t)$$

T_2

Корр. ф. суммы 2ух СП имеет след. вид:

$$K_{x+y}(t_1;t_2)=M\big[(X(t_1)+Y(t_1)-m_{x+y}(t_1))(X(t_2)+Y(t_2)-m_{x+y}(t_2))\big]=$$

$$=\Big[M(X(t_1)X(t_2))+M(X(t_1)Y(t_2))-M(X(t_1))(m_x(t_2)+m_y(t_2))\Big]^1+$$

$$+\Big[M(Y(t_1)X(t_2))+M(Y(t_1)Y(t_2))-M(Y(t_1))(m_x(t_2)+m_y(t_2))\Big]^2-$$

$$-\Big[M(X(t_2))(m_x(t_1)+m_y(t_1))\Big]^3-\Big[M(Y(t_2))(m_x(t_1)+m_y(t_1))\Big]^4+$$

$$+\Big[(m_x(t_1)+m_y(t_1))(m_x(t_2)+m_y(t_2))\Big]^5=$$

$$=\cancel{M(X(t_1)X(t_2))}+\cancel{M(X(t_1)Y(t_2))}+\cancel{M(Y(t_1)X(t_2))}+\cancel{M(Y(t_1)Y(t_2))}-$$

$$-\cancel{m_x(t_1)m_x(t_2)}-\cancel{m_x(t_2)m_y(t_1)}-\cancel{m_x(t_1)m_y(t_2)}-\cancel{m_y(t_1)m_y(t_2)}=$$

$$K_x(t_1;t_2)+R_{xy}(t_1;t_2)+K_y(t_1;t_2)+R_{xy}(t_2;t_1)$$

$$R_{xy}(t_1;t_2)=M\big[(X(t_1)-m_x(t_1))(Y(t_2)-m_y(t_2))\big]=M(X(t_1)Y(t_2))-$$

$$-m_x(t_1)m_y(t_2)-\cancel{m_x(t_1)m_y(t_2)}+\cancel{m_x(t_1)m_y(t_2)}$$

След.

Если СПсл $X(t); Y(t)$ не корр-ют, тогда:

$$K_{x+y}(t_1;t_2) = K_x(t_1;t_2) + K_y(t_1;t_2)$$

$$D_{x+y}(t) = D_x(t) + D_y(t)$$