DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS
CICLO I /22

GUIA 3 DE LABORATORIO EN MATLAB PARA APLICACIÓN DE METODOS NUMERICOS SOBRE DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICA

DERIVACIÓN NUMERICA

Para poder efectuar la derivación numérica, se podría generar un programa basándose en las ecuaciones que definen los diferentes métodos; además Matlab posee comandos que nos permitirán obtener la derivada numérica por aproximación, para ello se emplearán los siguientes comandos:

El comando ***diff***, se emplea para obtener la derivada; si la expresión a la cual se le desea obtener la derivada es un vector fila, entonces el resultado es un vector de n-1 elementos(columnas), dicho resultado se obtiene restando elementos adyacentes: **[X(2)-X(1) X(3)-X(2) ... X(n)-X(n-1)]**; si la expresión es una matriz de orden mxn entonces el resultado es una matriz de orden m-1xn, donde los elementos resultan de restar los elementos adyacentes de filas. La expresión puede ser una función como cadena de caracteres para la cual es necesario definir la variable como simbólica mediante el comando ***syms*** y para evaluarla se emplea el comando ***subs***, esto proporciona la derivada exacta.

A continuación, se muestra la derivación numérica empleando comandos de Matlab:

Cuando el espaciado es uniforme, podemos resolverlo así:

Ejemplo 1

```
>> x=1.2:0.2:2.8;y=x.^2+5*x+1;
>> derivada_aprox=diff(y)/0.2

derivada_aprox =

  7.6000e+000  8.0000e+000  8.4000e+000  8.8000e+000  9.2000e+000  9.6000e+000  1.0000e+001  1.0400e+001

>> derivada_exacta=2*x(1:length(x)-1)+5*ones(1,length(x)-1)

derivada_exacta =

  7.4000e+000  7.8000e+000  8.2000e+000  8.6000e+000  9.0000e+000  9.4000e+000  9.8000e+000  1.0200e+001

>> error=norm(derivada_aprox-derivada_exacta,inf)

error =

  2.0000e-001
```

Ejemplo 2

```
C: ▸ Program Files ▸ MATLAB ▸ R2015b ▸ bin ▸
>> h=0.01;x=-2.5:h:2.5;y=-6./(x.^2+1);
>> deriv_aprox=diff(y)/h;
>> syms t
>> f=-6/(t^2+1);
>> deriv_exacta=double(subs(diff(f,t),t,x(1:end-1)));
>> error=norm(deriv_exacta-deriv_aprox,inf)

error =

   0.059994000599950

>>
```

Cuando el espaciado no es uniforme o aunque lo sea, se resuelve así:

```
C: ▸ Program Files ▸ MATLAB ▸ R2015b ▸ bin ▸
>> x=[-0.2 0 0.1 0.5 0.75 1.2];y=x.*exp(-2*x);
>> derivada_aprox=diff(y)./diff(x)

derivada_aprox =

  1.491824697641270   0.818730753077982   0.255166613194807  -0.066368401897595  -0.129969058142283

>> syms t
>> f=t*exp(-2*t);
>> derivada_exacta=double(subs(diff(f,t),t,x(1:end-1)))

derivada_exacta =

  2.088554576697779   1.000000000000000   0.654984602462385                   0  -0.111565080074215

>> error=norm(derivada_exacta-derivada_aprox,inf)

error =

fx  0.596729879056508
```

La forma anterior sólo se emplea cuando el vector x e y es de orden mayor de 1x1.

Para obtener la segunda derivada, se procede así:

```
C: ▸ Program Files ▸ MATLAB ▸ R2015b ▸ bin ▸
>> x=[2 2.4 2.9 3.2 3.8 4.1 4.7 5.6];y=2*(log(x)).^2+3*sin(x);
>> m=diff(y)./diff(x);
>> m2=diff(m)./diff(x(1:end-1))

m2 =

  -2.062087420653676  -0.731066078719960   0.592568141194995   1.105403903832646   3.706012615686426   3.439131753577763

>> syms x
>> a=[2 2.4 2.9 3.2 3.8 4.1 4.7 5.6];f=2*(log(x))^2+3*sin(x);
>> exacta=double(subs(diff(f,x,2),x,a(1:end-2)))

exacta =

  -2.421039461036990  -1.939909498149217  -0.748525983833352   0.111391645202396   1.742775593400916   2.357035503636953

>> error=norm(exacta-m2,inf)

error =

   1.963237022285510
```

INTEGRACIÓN NUMERICA

Para poder efectuar la integración numérica, se puede hacer uso de programas basados en las ecuaciones definidas para los diferentes métodos; además Matlab posee comandos que nos permitirán obtener la integración numérica por aproximación, para ello se emplearán los siguientes comandos:

El comando ***trapz(X,Y)***, resuelve la integral de Y respecto a X empleando el método trapezoidal con un espaciado unitario, si se desea un espaciado diferente, debe multiplicar el comando por el espaciado deseado.

El comando ***quad(@fun,a,b)***, resuelve la integral de la función ***fun***, definida en un ***archivo M tipo function***, mediante el método adaptativo de cuadratura de Simpson, ***quadl(@fun,a,b)***, emplea el método adaptativo de cuadratura de lobatto, ***quadgk(@fun,a,b)***, emplea el método adaptativo de cuadratura de Gauss-Kronrod, ***quadv(@fun,a,b)***, emplea el método adaptativo de cuadratura de Simpson.

El comando **dblquad(*@fun,xmin,xmax,ymin,ymax*)** resuelve la integral doble de la función ***fun***, definida en un ***archivo M tipo function.***

El comando **integral2(fun,*xmin,xmax,ymin,ymax*)** resuelve la integral doble de la función **fun**, definida como **function handle** en la ventana de comandos.

El comando **triplequad(@*fun,xmin,xmax,ymin,ymax,zmin,zmax*)** resuelve la integral triple de la función ***fun***, definida en un ***archivo M tipo function.***

El comando **integral3(*fun,xmin,xmax,ymin,ymax,zmin,zmax*)** resuelve la integral triple de la función ***fun***, definida como **function handle** en la ventana de comandos.

El comando ***int(f,x)***, se emplea para obtener la integral de una función expresada como una cadena de caracteres y para ello la variable debe considerarse como simbólica mediante el comando ***syms***, además puede obtenerse el valor numérico exacto de la integral mediante el comando ***int(f,x,a,b)***. El comando ***double***, se emplea para que los resultados los presente en forma decimal, cuando no se muestren así.

A continuación, se presentan los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Obtenga el valor exacto y aproximado de la siguiente integral:

$$\int_{0}^{\pi/4} sec^2(x)\sqrt{tan(x)}\ dx$$

Para el valor aproximado emplee el comando trapz.

C: ▸ Program Files ▸ MATLAB ▸ R2015b ▸ bin ▸

```
>> x=linspace(0,pi/4);y=sec(x).^2.*sqrt(tan(x));
>> integral_aprox=trapz(x,y)

integral_aprox =

  0.665551239778355

>> syms x
>> integral_exacta=double(int(sec(x)^2*sqrt(tan(x)),x,0,pi/4))

integral_exacta =

  0.666666666666667

>> error=abs(integral_exacta-integral_aprox)

error =

   1.154268883115650e-04
```

A continuación, se presentan ejemplos sobre la utilización de los comandos ***quad, quadl, quadgk, quadv, int***; se muestra además el archivo M que contiene la función ***f1 y f2:***

Ejemplo2

Obtenga el área del sólido de revolución que se obtiene al girar la curva:

$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln(x)$, **alrededor del eje x, desde 2 ≤ x ≤ 9.**

Archivo m:

f2.m

```
function y=f2(x)
y=2*pi*(0.5*x.^2-0.25*log(x)).*sqrt(1+(x-1./(4*x)).^2);
```

Corrida:

```
C: ▸ Program Files ▸ MATLAB ▸ R2015b ▸ bin ▸
>> Area_superficie=quad(@f2,2,9)

Area_superficie =

   5.062449237382254e+03

>> Area_superficie=quadl(@f2,2,9)

Area_superficie =

   5.062449237383219e+03

>> Area_superficie=quadgk(@f2,2,9)

Area_superficie =

   5.062449237383212e+03
```

```
>> Area_superficie=quadv(@f2,2,9)

Area_superficie =

   5.062449237382254e+03

>> syms x
>> Area_superficie=double(int(2*pi*(0.5*x^2-0.25*log(x))*sqrt(1+(x-1/(4*x))^2),2,9))

Area_superficie =

   5.062449237383213e+03
```

Ejemplo3

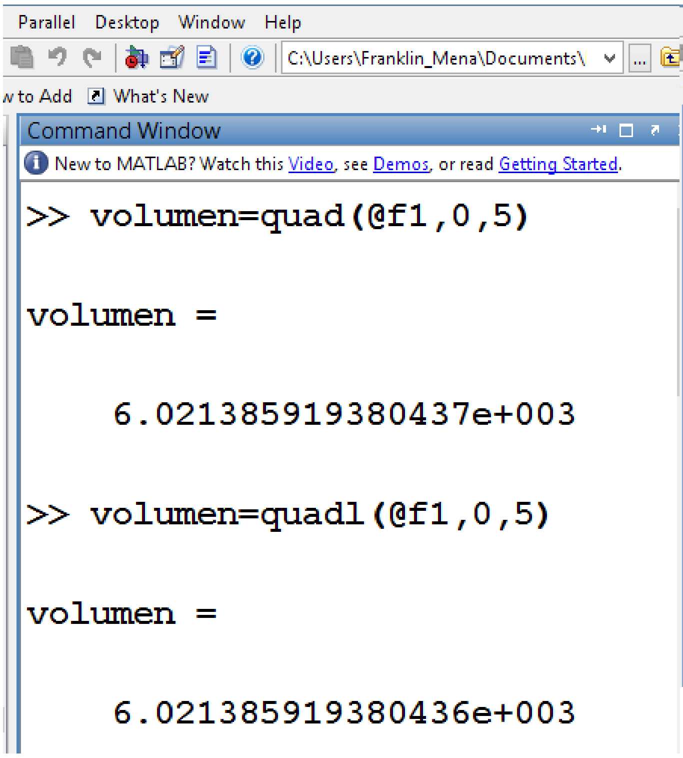
Obtenga el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje x, la región acotada por: $y = x + 20$, $y = x^2$, eje y, $x \geq 0$.

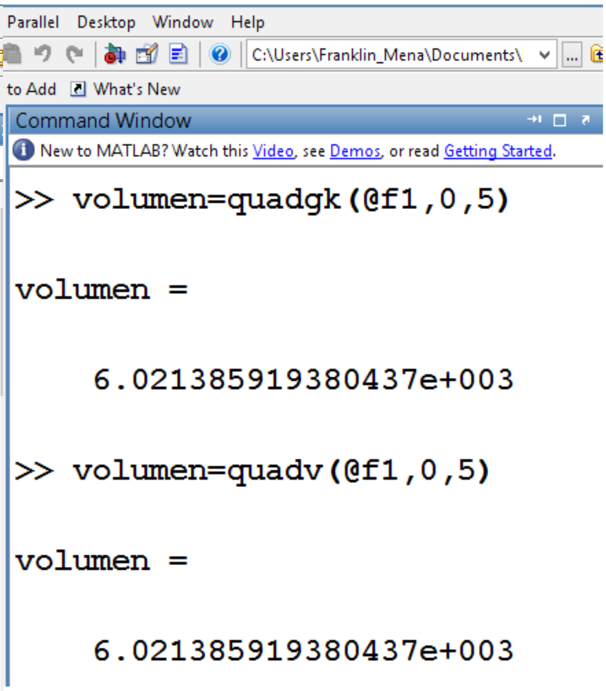
Archivo m:

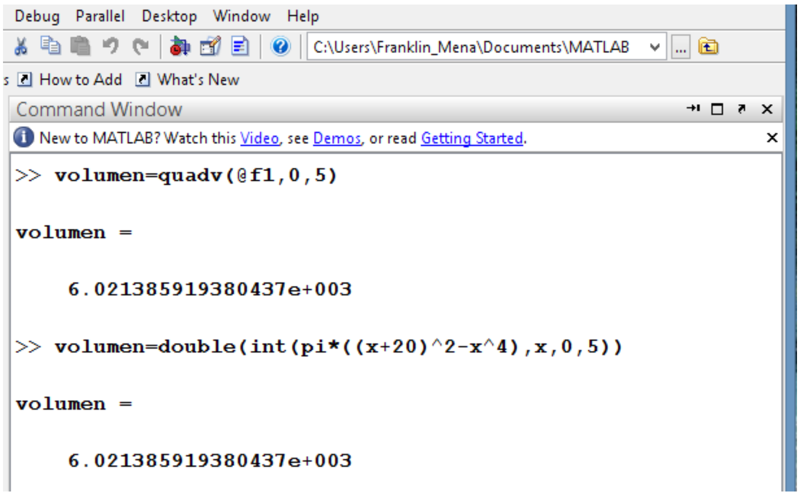
```
Editor - C:\Users\Franklin_Mena\Documents\MAT...
File  Edit  Text  Go  Cell  Tools  Debug  Desktop  Window  Help
function y=f1(x)
y=pi*((x+20).^2-x.^4);

f1    Ln 2    Col 23    OVR
```

Corrida:







Para evaluar una integral múltiple, se utiliza el comando **int** más de una vez.

Ejemplos

Resolver:

$$a)\ \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 4-(x^2+y^2)\,dydx$$

$$b)\ \int_{0}^{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{1-x} x\cos(y)\,dzdydx$$

$$c)\ \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{3}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{3}}}\int_{5+2z^2+x^2}^{13-4z^2-x^2} dydzdx$$

C: ▸ Program Files ▸ MATLAB ▸ R2015b ▸ bin ▸

```
>> syms x y z
>> int(int(4-x^2-y^2,y,-sqrt(4-x^2),sqrt(4-x^2)),x,-2,2)

ans =

8*pi

>> int(int(int(x*cos(y),z,0,1-x),y,0,pi/2),x,0,4)

ans =

-40/3

>> int(int(int(1,y,5+2*z^2+x^2,13-4*z^2-x^2),z,-sqrt((4-x^2)/3),sqrt((4-x^2)/3)),x,-2,2)

ans =

(16*pi*3^(1/2))/3
```

A continuación, se presentan ejemplos sobre la utilización de los comandos ***dblquad, triplequad***; además se muestra el archivo M que contiene la función ***f3 y f4:***

$$d)\ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 1-(x^2+y^2)\,dydx$$

$$e)\ \int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{16-(x^2+y^2+z^2)}\,dzdydx$$

Archivos m:

```
function f=f3(x,y)
f=1-x.^2-y.^2;
```

```
function f=f4(x,y,z)
f=sqrt(16-x.^2-y.^2-z.^2);
```

Corrida:

```
>> v=dblquad(@f3,-1,1,-1,1)

v =

   1.333333333333333

>> v=triplequad(@f4,-3,3,-2,2,-1,1)

v =

     1.600267519208782e+02
```

A continuación, se presentan ejemplos sobre la utilización de los comandos ***integral2, integral3:***

$$f)\quad \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} 9 - x^2 - y^2 \, dydx$$

$$g)\quad \int_{0}^{4} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{0}^{4-x} xcos(y)dzdydx$$

Corrida:

```
Command Window
New to MATLAB? See resources for Getting Started.
>> f=@(x,y)9-x.^2-y.^2;
>> ymin=@(x)-sqrt(9-x.^2);ymax=@(x)sqrt(9-x.^2);xmin=-3;xmax=3;
>> I=integral2(f,xmin,xmax,ymin,ymax)

I =

    1.272345024703450e+02

>> Iex=double(int(int(f,y,ymin,ymax),x,xmin,xmax))

Iex =

    1.272345024703866e+02
```

```
>> f=@(x,y,z)x.*cos(y);
>> zmin=0;zmax=@(x,y)4-x;ymin=pi/12;ymax=pi/3;xmin=0;xmax=4;
>> I=integral3(f,xmin,xmax,ymin,ymax,zmin,zmax)

I =

   6.476867825940478

>> syms x y z
>> Iex=double(int(int(int(f,z,zmin,zmax),y,ymin,ymax),x,xmin,xmax))

Iex =

   6.476867825940458
```

RESUELVA LOS SIGUIENTES EJERCICIOS

1. Dados los siguientes datos:

x	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
F(x)	-1.709847	-1.373823	-1.119214	-0.916014	-0.747022	-0.601597

Determine el valor aproximado de la **primera derivada** y **segunda derivada** de F(x)

2. Los datos mostrados en la siguiente tabla se han obtenido a partir de la función **f(x) = xcot(x) – x^2sen(2x)**:

x	0.5	0.8	1.4	1.6	1.9
F(x)	0.70487611	0.13724457	–0.41510936	0.10269864	1.55969981

Determine:
a) El valor aproximado de la **primera derivada** de F(x)
b) El valor exacto de la **primera derivada** de F(x) y el error
c) El valor aproximado de la **segunda derivada** de F(x)

3. Los datos de la siguiente tabla se han obtenido a partir de la siguiente función **f(x) = x(log₈(x))² - sec(3x)**: $f(x) = x(\log_8(x))^2 - \sec(3x)$

x	0.2	0.9	1.5	2.6	3.5	4.1
F(x)	-1.09182054	1.10841691	4.80095774	-17.98484512	3.37320404	0.85115839

Determine:
a) El valor aproximado de la **segunda derivada** de F(x)
b) El valor exacto de la **segunda derivada** de F(x) y el error
c) El valor exacto de la segunda derivada en cada valor de x

4. La distancia $D_{(t)}$ recorrida por un automóvil se muestra en la siguiente tabla, partiendo que $\mathbf{D_{(t)} = -70 + 7t + 70e^{-t/10}}$:

T	9.0	9.8	10.9	11.2	13.5	17.5
$D_{(t)}$	21.459876	24.871777	29.835155	31.239586	42.646818	64.664176

Determine:
a) El valor aproximado de la **velocidad**
b) El valor exacto de la **velocidad**
c) El valor exacto de la **velocidad** en cada valor de t
d) El valor aproximado de la **aceleración**

5. Dada la siguiente integral: $\int_{0.01}^{0.03} e^x \cos(x)dx$, resuélvala así:
a) Mediante el comando ***trapz***
b) Utilice el comando ***quad***
c) Emplee el comando ***quadv***
d) Empleando el comando ***int***

6. Dada la siguiente integral: $\int_{2.5}^{3.5} \frac{\sqrt{100 - x^2}}{x^2} dx$, resuélvala así:
a) Utilice el comando ***trapz***
b) Utilice el comando ***quad***
c) Emplee el comando ***int***

7. Dada la siguiente integral: $\int_{2.1}^{2.9} \left(11 - \frac{1}{t}\right)^2 \left(\frac{1}{t^2}\right) dt$, resuélvala así:
a) Mediante el comando ***trapz***
b) Utilice el comando ***quadgk***
c) Empleando el comando ***int***

8. Dada la siguiente integral: $\int_{2.5}^{3.2} \frac{e^{2/x}}{x^2} dx$, resuélvala así:

   a) Utilice el comando ***trapz***
   b) Utilice el comando ***quadl***
   c) Emplee el comando ***int***

9. Dada la siguiente integral: $\int_{9.5}^{10.5} \frac{3}{x^2\sqrt{x^2-49}} dx$, resuélvala así:

   d) Utilice el comando ***trapz***
   e) Utilice el comando ***quadv***
   f) Emplee el comando ***int***

10. Un automóvil recorre una pista de carreras en 84 segundos. Su velocidad se determina mediante una pistola de radar y está dada, en pies/seg, los datos se muestran en la siguiente tabla:

T	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
V	124	134	148	156	147	133	121	109	99	85	78	89	104	116	123

Determine la longitud de la pista

11. Dada la función $\mathbf{f_{(x)} = \ln(\sec x)}$, para $\mathbf{0 \leq x \leq \pi/4}$ determine:

   a) La longitud de arco de f(x) empleando el comando ***quad***, ***quadl***, ***trapz, int.***
   b) El área de la superficie de revolución del sólido que se obtiene al girar alrededor del eje Y la curva f(x), empleando el comando ***quad***, ***quadv***, ***trapz, int***.
   c) El volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje X la región limitada por la curva f(x), empleando el comando ***quadgk***, ***quad***, ***trapz, int.***

12. Determine el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje X la región limitada por $\mathbf{y = 9 - x^2}$, $\mathbf{y = 4 + x}$, empleando el comando ***quadv***, ***quadl***, ***trapz, int.***

13. Aproxime el área de la superficie de revolución generada al girar alrededor del eje y, la curva y $=\sqrt{4x-8}$, desde $\mathbf{x = 3}$ hasta $\mathbf{x = 10}$, empleando el comando ***quadv***, ***quadgk***, ***trapz, int.***

14. Aproxime la longitud de la curva $f_{(y)} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{(y^2+2)^3}\right)$ desde $\mathbf{y = 1}$ hasta $\mathbf{y = 6}$ empleando el comando ***quadv***, ***quadgk***, ***trapz, int.***

15. Un automóvil realiza un recorrido por una carretera recta y se cronometra su recorrido en varios puntos. Los datos de las observaciones se incluyen en la tabla adjunta, donde el tiempo se indica en segundos, la velocidad en pies por segundo.

Tiempo	**1**	**1.5**	**2**	**2.5**	**3**
Velocidad	**35**	**77**	**98**	**118**	**145**

Determine el valor aproximado de la aceleración

16. Aproxime el área de la superficie de revolución generada al girar alrededor del eje x, la curva $\mathbf{y = 2 + \sqrt{x}}$, desde $\mathbf{x = 1}$ hasta $\mathbf{x = 12}$, empleando el comando ***quadl***, ***quadv***, ***trapz, int.***

17. Determine el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de $\mathbf{y = -x^2}$, $\mathbf{y = -4x + x^2}$, alrededor de la recta $\mathbf{y = 5}$, empleando el comando ***quadl***, ***quadgk***, ***trapz, int.***

18. Aproxime el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región acotada por: $\mathbf{y = x^2 + 1,\ y = -x^2 + 4x + 5}$, **desde** $\mathbf{x = 0}$ **hasta** $\mathbf{x = 4}$, empleando el comando ***quad***, ***quadl***, ***trapz, int.***

19. Aproxime la longitud de la curva $\mathbf{f_{(x)} = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}}$, **desde** $\mathbf{x = 2}$ **hasta** $\mathbf{x = 5}$, empleando el comando ***quadl***, ***quadv***, ***trapz, int.***

20. Aproxime el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región limitada por las gráficas de $\mathbf{y = -2x}$, $\mathbf{y = x^2}$, alrededor de $\mathbf{x = -5}$, empleando el comando ***quad***, ***quadgk***, ***trapz, int.***

21. Aproxime la longitud de la curva $\mathbf{f_{(x)} = x^{3/2}}$, desde $\mathbf{x = 3}$ hasta $\mathbf{x = 12}$, empleando el comando ***quadv***, ***quadl***, ***trapz, int.***

22. Aproxime el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región limitada por: $\mathbf{x = y - y^2,\ x = y^2 - 3}$, alrededor de la recta $\mathbf{x = 8}$, empleando el comando ***quadv***, ***quadgk***, ***trapz, int.***

23. Determine la longitud de arco para la función: $\mathbf{y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}}$, en el intervalo: $\mathbf{3 \leq x \leq 10}$,empleando el comando ***quad***, ***quadl***, ***trapz, int***

24. Resuelva las siguientes integrales, empleando comando **int**:

$$\boldsymbol{a)} \int_{-6}^{6} \int_{-\sqrt{36-x^2}}^{\sqrt{36-x^2}} (x^2 + y^2)\, dydx \qquad \boldsymbol{b)} \int_{0}^{8} \int_{-\sqrt{64-x^2}}^{\sqrt{64-x^2}} dydx$$

$$c)\ \iint_R e^{3x^2+3y^2}\, dxdy$$

$donde\ R\ est\acute{a}\ acotada\ por\!: y = 0.5x, x^2 + y^2 = 81, x = 0, primer\ cuadrante$

$$d)\ \iint_R \sqrt{81 - x^2 - y^2}\, dA$$

$donde\ R\ est\acute{a}\ limitada\ por\ x^2 + y^2 = 49$

$$e)\ \iint_R (x^2 + y^2)\, dydx$$

$donde\ R\ est\acute{a}\ acotada\ por\ y = 2x, y = 4x, x = 2, x = 5$

25. Determinar el volumen, en el primer octante, del sólido acotado por: $\mathbf{z = 6 - x^2 - y^2}$, $\mathbf{z = x^2 + y^2}$, empleando una integral triple, donde **dV=dzdydx**. Además, obtenga el valor aproximado.

26. Determinar el volumen del sólido acotado por $\mathbf{z = 1 - x^2 - y^2}$, $\mathbf{z = 1 - y}$, mediante integral doble, emplee **dA = dxdy.** Además, obtenga el valor aproximado.

27. Calcular el momento de inercia respecto al origen para una lámina en la forma de la región acotada por $\mathbf{y = x^2}$, $\mathbf{x = y^2}$, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{x^2 + y^2}$, emplee **dA =dydx.** Además, obtenga el valor aproximado.

28. Se tiene una lámina en la forma de la región acotada por las siguientes gráficas: $\mathbf{y = \sqrt{x}}$, $\mathbf{y = \frac{x}{2}}$. La densidad de área varía con la distancia al eje Y. Determine la **Masa, el Centro de masa,** mediante una integral doble, emplee **dA = dydx.** Además, obtenga el valor aproximado.

29. Una ventana circular de observación en un buque para la investigación marina tiene un radio de 2.5 pie, y el centro de la ventana se encuentra a 50 pies de distancia del nivel del agua. Determine la fuerza del fluido sobre la ventana, considere el peso específico del agua de mar igual a 64 lb/pie^3, empleando **quadl, trapz, int**.

30. Una compuerta de una presa vertical en un dique tiene la forma de un trapecio, con 80 pies en la parte superior y 25 pies en la parte inferior, con una altura de 28 pies. ¿Cuál será la fuerza del fluido en la compuerta cuando la parte superior está 20 pies debajo de la superficie del agua?, considere el peso específico del agua igual a 62.4 lb/pie^3, empleando **quadgk, trapz, int**.

31. Un tanque de gasolina cilíndrico está colocado con su eje en posición horizontal. Obtenga la fuerza del fluido sobre una de las paredes del tanque si éste está medio lleno, considere el diámetro igual a 25 pies y que la gasolina pesa 42 libras/pie^3, empleando **quadl, trapz, int**.

32. Un tanque abierto tiene la forma de un cono circular recto. El tanque tiene 80 pies de diámetro en la parte superior y 24 pies de altura. Si la altura de agua dentro del tanque es cinco sextos de su altura, ¿Cuánto trabajo se realiza bombeando el agua hasta 9 pies sobre la parte superior del tanque?, empleando **quadv, trapz, int**.

33. Un tanque cilíndrico para agua de 30 mts de alto con un radio de 9 mts, está colocado de manera que su techo está 4 mts debajo del nivel del suelo. ¿Cuánto trabajo se realiza para bombear un tanque lleno las tres quintas partes de agua, hasta 7 mts por encima del suelo?, emplee **quadv, trapz, int**.

34. Un tanque esférico cuyo diámetro es de 50 pies está lleno de aceite, las tres cuartas partes. Obtenga el trabajo requerido para extraer el aceite a través de un orificio en la parte superior del tanque si se sabe que el aceite pesa 50 lb/pie^3, empleando **quadl, trapz, int**.

35. Resuelva las siguientes integrales mediante el comando **dblquad, integral2, triplequad, integral3,** según convenga:

a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^4 \frac{dxdy}{(x+1)(y+1)}$ b) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^2 x^2 y dydx$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi/3} \operatorname{senx} \operatorname{cosy} dxdy$ d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2y^2z^2 dxdydz$

e) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x+y+z) dxdydz$ f) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^4 \int_0^4 (y^2+z^2)(x^2+y^2) dxdydz$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} xysen(yz) dzdydx$ h) $\displaystyle\int_{-\pi}^{3\pi/2} \int_0^{2\pi} (ysenx + xcosy) dydx$

i) $\int_{1}^{3}\int_{-1}^{2}(3y-2x^2)dxdy$ j) $\int_{0}^{3}\int_{0}^{2}\left(4-\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{16}y^2\right)dydx$

k) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{4}\int_{0}^{3}(xy)dydzdx$ l) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}x(x^2+y^2+z^2)dzdydx$

m) $\int_{0}^{3}\int_{0}^{3}\int_{0}^{3}(xyz)dxdzdy$ n) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}(4+z^2)dydxdz$

O) $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(8-2x^2-2y^2)dydx$ *P*) $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\sqrt{(25-x^2-y^2)}dydx$

q) $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{3}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{3}}}\int_{5+2y^2+x^2}^{13-4y^2-x^2} dzdydx$

36. A continuación, se muestran datos de presión y volumen, en un proceso termodinámico a temperatura constante:

Presión (Kpa)	336	294.4	266.4	260.8	260.5	249.6	193.6	165.6
Volumen (m^3)	0.5	2	3	4	6	8	10	11

Determine el trabajo producido en dicho proceso.

37. A continuación, se proporcionan datos sobre la distancia recorrida por un cohete:

t (seg)	0	25	50	75	100	125
y(km)	0	32	58	78	92	100

Determine la velocidad y aceleración del cohete.

38. Se mide la velocidad **v** (m/s) del aire que fluye por una superficie plana a distintas distancias, **y** (m) de la superficie. Determine el esfuerzo cortante **τ** (N/m²) en la superficie, usando la ley de viscosidad de Newton: $\tau = \mu \frac{dv}{dy}$.

A continuación, se muestran los siguientes datos:

y (m)	0	0.002	0.006	0.012	0.018	0.024
v (m/s)	0	0.287	0.899	1.915	3.048	4.299

Suponga el valor de viscosidad dinámica $\mu = 1.8x10^{-5}$ **N.s/m²**.

39. Se midió la posición de un avión de combate durante su aterrizaje en la cubierta de un portaviones, a continuación, se muestran los datos:

t (seg)	0	0.52	1.04	1.75	2.37	3.25	3.83
x (m)	153	185	210	249	261	271	273

Donde x es la distancia desde el extremo del portaviones. Estime la velocidad y aceleración del avión.

40. A partir de los siguientes datos, determine el trabajo realizado por la compresión de un resorte cuya constante es k = 300 N/m:

x(m)	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
F (10^3N)	0	0.01	0.028	0.046	0.063	0.082	0.11	0.13

41. Inicialmente un capacitor no tiene carga, si C = 20µF, determine el voltaje en el capacitor, a partir de los siguientes datos:

t(seg)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
i(10^{-3}A)	0.2	0.3683	0.3819	0.2282	0.0486	0.0082	0.1441

42. La velocidad de un paracaidista en caída libre con arrastre lineal viene dada así: $\mathbf{v} = \frac{mg}{c}\left(1 - e^{\frac{-ct}{m}}\right)$, donde **g=9.81m/seg²**, **c**=coeficiente de arrastre lineal = **10kg/seg**, **m = 231 lb**. Calcule la distancia que viaja el paracaidista durante los primeros 10 segundos de caída libre, empleando **quadl, trapz**.

43. La velocidad vertical de un cohete se calcula mediante la siguiente fórmula: $\mathbf{V} = u \ln\left(\frac{mo}{mo-qt}\right) - gt,$ donde **g = 9.81m/seg²**, **q** = tasa de consumo de combustible = **2500kg/seg**, **u** = velocidad con la que se expele el combustible = **7560km/h**, **mo** = masa inicial del cohete = **180000kg**. Calcule la altura que alcanzará el cohete en un vuelo de 25 segundos, empleando **quadgk, trapz**.

44. La distancia recorrida por un paracaidista viene dada por la siguiente ecuación: $S(t)=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}(1-e^{\frac{-kt}{m}})$, donde **m = 253 lb**, **k=12.5kg/seg**, **g=9.81m/s²**, determine el valor aproximado de la velocidad y aceleración del paracaidista, durante los primeros 9 segundos de su caída, a intervalos de 0.5 segundos.

45. Determine el momento de inercia con respecto al origen, de una lámina en la forma de la región acotada por: $\mathbf{y = x^2 - 4,\ y = -x + 2}$, empleando una integral doble, donde **dA=dydx**, la densidad de área varía conforme a la suma de las distancias hacia los ejes coordenados. Además, obtenga el valor aproximado.

46. Determine el momento de inercia con respecto al origen, de una lámina en la forma de la región acotada por: **y = lnx, x = 6, eje x**, empleando una integral doble, donde **dA=dydx**, la densidad de área varía conforme a la suma de los cuadrados de las distancias hacia los ejes coordenados. Además, obtenga el valor aproximado.

47. Determine el momento de inercia con respecto al origen, de una lámina en la forma de la región acotada por la gráfica de **y = sen(x) y el eje x, desde x = 0 hasta x = π**, empleando una integral doble, donde **dA=dydx**, la densidad de área varía conforme a la suma de las distancias hacia los ejes coordenados. Además, obtenga el valor aproximado.

48. Aproxime el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje x la curva: $\mathbf{9y^2 = x(1 - 3x)^2}$, en el primer cuadrante, desde el punto donde $\mathbf{x = \frac{1}{10}}$ hasta el punto donde $\mathbf{x = \frac{1}{3}}$, empleando **quadl, trapz, int**.

49. Aproxime el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región acotada por: $\mathbf{y = 4 - x^2,\ y = x^2 - 2x + 4}$, alrededor de la recta **y = 6**, empleando **quadv, trapz, int.**

50. Aproxime la longitud de la curva: $\mathbf{9y^2 = x(x - 3)^2}$, en el primer cuadrante, desde el punto donde **x = 1** hasta el punto donde **x = 3**, empleando **quadgk, trapz, int.**

51. Se tiene un tanque en la forma de cono circular recto invertido, el cual mide 80 pies de diámetro en su parte superior y 90 pies de profundidad. Si contiene aceite y la superficie del aceite está 2.5 pies por debajo de la tapa del tanque, determine el trabajo realizado al bombear el aceite hasta un depósito que se encuentra 10 pies por encima de la parte superior del tanque, peso del aceite igual a 50 lb/pie^3, empleando **quadl, trapz, int.**

52. Una piscina tiene 5 pies de profundidad en un extremo y 25 pies de profundidad en el otro, y el fondo es un plano inclinado. La longitud y anchura de la piscina son 82 y 33 pies respectivamente. Si la piscina está llena de agua, determine cuál es la fuerza del fluido en cada una de las paredes verticales, empleando **quadv, trapz, int.**

53. Un pozo de agua tiene 90 pulgadas de diámetro y 280 pies de profundidad. El agua llega a 8 pies de la parte superior del pozo. Determine la cantidad de trabajo realizado al vaciar el pozo, asumiendo que el agua no entra en él mientras está bombeándose, empleando **quadl, trapz, int.**

54. Se tiene una placa en la forma de un triángulo rectángulo, con 45 pies de alto y 12 pies en la base, sumergida, verticalmente, en agua, con la base en la parte inferior. ¿Cuál será la fuerza del fluido en la placa cuando la parte superior de la altura está 5 pies debajo de la superficie del agua?, considere el peso específico del agua igual a 62.4 lb/pie^3, empleando **quadv, trapz, int**.

55. Determinar el volumen, en el primer octante, del sólido acotado por: $\mathbf{z^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 4}$, empleando una integral triple, donde **dV=dydzdx**. Además, obtenga el valor aproximado.

56. Determinar el volumen del sólido que es interior a las siguientes superficies: $\mathbf{z^2 + y^2 + x^2 = 16,\ z^2 - x^2 - y^2 = 0}$, empleando una integral triple, donde **dV=dzdxdy**. Además, obtenga el valor aproximado.