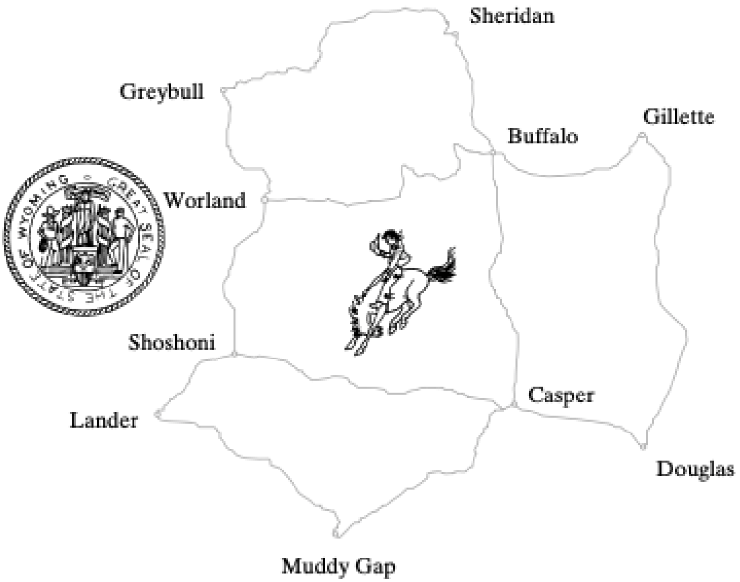
x

Teoría de grafos - introducción

May 12, 2023

Contenido

Introducción



Introducción

Dado el mapa de carreteras de Wyoming el inspector de carreteras que vive en Greybull, quiere recorrer cada carretera exactamente una vez y volver a Greybull

Introducción

Dado el mapa de carreteras de Wyoming el inspector de carreteras que vive en Greybull, quiere recorrer cada carretera exactamente una vez y volver a Greybull

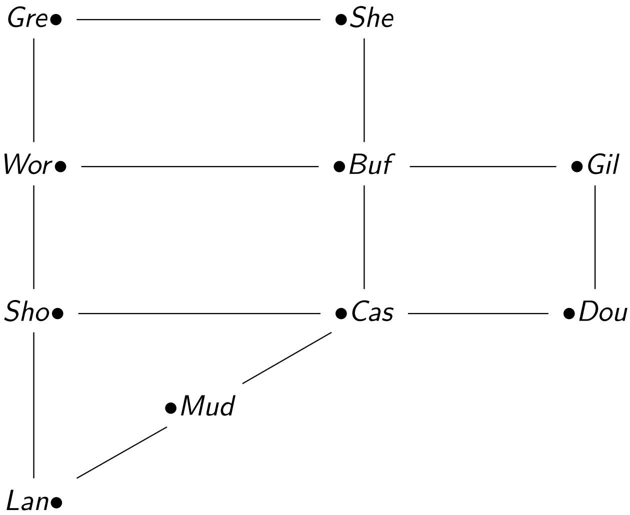
- ¿Es esto posible?

Introducción

Dado el mapa de carreteras de Wyoming el inspector de carreteras que vive en Greybull, quiere recorrer cada carretera exactamente una vez y volver a Greybull

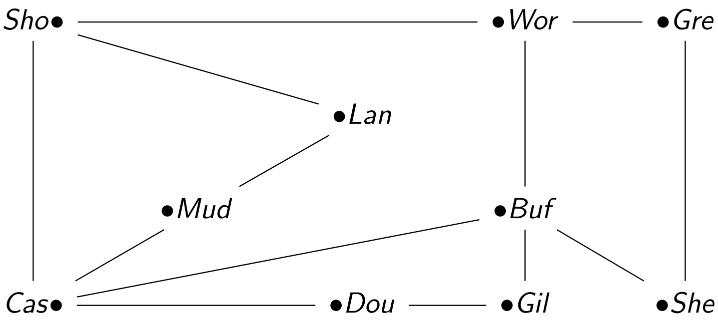
- ¿Es esto posible?

De estas preguntas (y muchas otras!) se encarga una rama de la matemática y las ciencias de la computación llamada **teoría de grafos**. Diremos que el problema se puede modelar como un **grafo**. Es común dar representaciones simplificadas de un **grafo**, dibujando solamente los puntos y las líneas. A los puntos los llamamos **vértices** o **nodos** y a las líneas que los unen, las llamamos **aristas**.


Gre
She
Wor
Buf
Gil
Sho
Cas
Dou
Mud
Lan

Dibujando grafos...

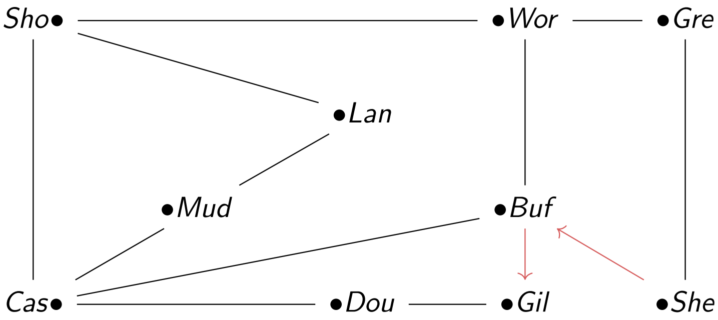
Cuando se dibuja un grafo, lo importante es cuales vértices se conectan con cuales aristas, no el diseño en sí. El siguiente dibujo representa el mismo grafo que los dos anteriores:


Sho
Wor
Gre
Lan
Mud
Buf
Cas
Dou
Gil
She

Camino

Si se inicia en el vértice v_0, se viaja por una arista al vértice v_1, por otra arista al vértice v_2, etc., el viaje completo recibe el nombre de **camino** de v_0 a v_n. En el grafo siguiente, veremos resaltado el camino que inicia en *She*, sigue por *Buf* y finaliza en *Gil*.

Camino



Razonando con grafos

La pregunta de si el inspector puede salir de Greybull, recorrer cada carretera exactamente una vez y volver a Greybull, se enuncia en términos de grafos como sigue:

Razonando con grafos

La pregunta de si el inspector puede salir de Greybull, recorrer cada carretera exactamente una vez y volver a Greybull, se enuncia en términos de grafos como sigue:

- ¿Existe un camino del vértice *Gre* al vértice *Gre* que pase exactamente una vez por todas las aristas?

Razonando con grafos

La pregunta de si el inspector puede salir de Greybull, recorrer cada carretera exactamente una vez y volver a Greybull, se enuncia en términos de grafos como sigue:

- ¿Existe un camino del vértice *Gre* al vértice *Gre* que pase exactamente una vez por todas las aristas?

Es posible demostrar que dicho camino es imposible.

Razonando con grafos

La pregunta de si el inspector puede salir de Greybull, recorrer cada carretera exactamente una vez y volver a Greybull, se enuncia en términos de grafos como sigue:

- ¿Existe un camino del vértice *Gre* al vértice *Gre* que pase exactamente una vez por todas las aristas?

Es posible demostrar que dicho camino es imposible. Cualquier camino que querríamos deberá pasar inevitablemente por *Wor*, dado que queremos recorrer todas las aristas.

Razonando con grafos

La pregunta de si el inspector puede salir de Greybull, recorrer cada carretera exactamente una vez y volver a Greybull, se enuncia en términos de grafos como sigue:

- ¿Existe un camino del vértice *Gre* al vértice *Gre* que pase exactamente una vez por todas las aristas?

Es posible demostrar que dicho camino es imposible. Cualquier camino que querríamos deberá pasar inevitablemente por *Wor*, dado que queremos recorrer todas las aristas. Cada vez que llegamos a *Wor* por una arista, debemos salir por una arista distinta, dado que queremos pasar por cada una exactamente una vez.

Razonando con grafos

La pregunta de si el inspector puede salir de Greybull, recorrer cada carretera exactamente una vez y volver a Greybull, se enuncia en términos de grafos como sigue:

- ¿Existe un camino del vértice *Gre* al vértice *Gre* que pase exactamente una vez por todas las aristas?

Es posible demostrar que dicho camino es imposible. Cualquier camino que querríamos deberá pasar inevitablemente por *Wor*, dado que queremos recorrer todas las aristas. Cada vez que llegamos a *Wor* por una arista, debemos salir por una arista distinta, dado que queremos pasar por cada una exactamente una vez. Mas aún, cada arista que toca el vértice *Wor* se debe recorrer.

Razonando con grafos

La pregunta de si el inspector puede salir de Greybull, recorrer cada carretera exactamente una vez y volver a Greybull, se enuncia en términos de grafos como sigue:

- ¿Existe un camino del vértice *Gre* al vértice *Gre* que pase exactamente una vez por todas las aristas?

Es posible demostrar que dicho camino es imposible. Cualquier camino que querríamos deberá pasar inevitablemente por *Wor*, dado que queremos recorrer todas las aristas. Cada vez que llegamos a *Wor* por una arista, debemos salir por una arista distinta, dado que queremos pasar por cada una exactamente una vez. Mas aún, cada arista que toca el vértice *Wor* se debe recorrer. Supongamos que vamos de *Gre* a *Wor* y salimos de *Wor* yendo hacia *Buf*.

Razonando con grafos

La pregunta de si el inspector puede salir de Greybull, recorrer cada carretera exactamente una vez y volver a Greybull, se enuncia en términos de grafos como sigue:

- ¿Existe un camino del vértice *Gre* al vértice *Gre* que pase exactamente una vez por todas las aristas?

Es posible demostrar que dicho camino es imposible. Cualquier camino que querríamos deberá pasar inevitablemente por *Wor*, dado que queremos recorrer todas las aristas. Cada vez que llegamos a *Wor* por una arista, debemos salir por una arista distinta, dado que queremos pasar por cada una exactamente una vez. Mas aún, cada arista que toca el vértice *Wor* se debe recorrer. Supongamos que vamos de *Gre* a *Wor* y salimos de *Wor* yendo hacia *Buf*. Cualquier camino que recorra todas las aristas volverá a pasar por *Wor*, pues la arista (Sho, Wor) aun no fue transitada.

Razonando con grafos

La pregunta de si el inspector puede salir de Greybull, recorrer cada carretera exactamente una vez y volver a Greybull, se enuncia en términos de grafos como sigue:

- ¿Existe un camino del vértice *Gre* al vértice *Gre* que pase exactamente una vez por todas las aristas?

Es posible demostrar que dicho camino es imposible. Cualquier camino que querríamos deberá pasar inevitablemente por *Wor*, dado que queremos recorrer todas las aristas. Cada vez que llegamos a *Wor* por una arista, debemos salir por una arista distinta, dado que queremos pasar por cada una exactamente una vez. Mas aún, cada arista que toca el vértice *Wor* se debe recorrer. Supongamos que vamos de *Gre* a *Wor* y salimos de *Wor* yendo hacia *Buf*. Cualquier camino que recorra todas las aristas volverá a pasar por *Wor*, pues la arista (Sho, Wor) aun no fue transitada. Pero una vez que volvamos a *Wor* por la arista (Sho, Wor) ya no podremos salir de ahí.

Razonando con grafos

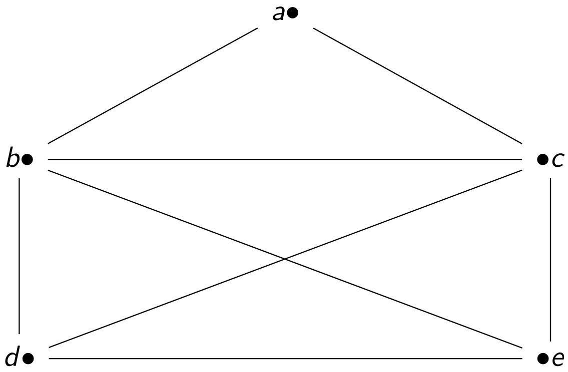
La pregunta de si el inspector puede salir de Greybull, recorrer cada carretera exactamente una vez y volver a Greybull, se enuncia en términos de grafos como sigue:

- ¿Existe un camino del vértice *Gre* al vértice *Gre* que pase exactamente una vez por todas las aristas?

Es posible demostrar que dicho camino es imposible. Cualquier camino que querríamos deberá pasar inevitablemente por *Wor*, dado que queremos recorrer todas las aristas. Cada vez que llegamos a *Wor* por una arista, debemos salir por una arista distinta, dado que queremos pasar por cada una exactamente una vez. Mas aún, cada arista que toca el vértice *Wor* se debe recorrer. Supongamos que vamos de *Gre* a *Wor* y salimos de *Wor* yendo hacia *Buf*. Cualquier camino que recorra todas las aristas volverá a pasar por *Wor*, pues la arista (Sho, Wor) aun no fue transitada. Pero una vez que volvamos a *Wor* por la arista (Sho, Wor) ya no podremos salir de ahí. Por lo tanto, es imposible recorrer todas las rutas exactamente una vez y volver al punto de inicio.

Ejercicio 1

Decida si el siguiente grafo tiene un camino del vértice a al vértice a que pasa por cada arista justo una vez.

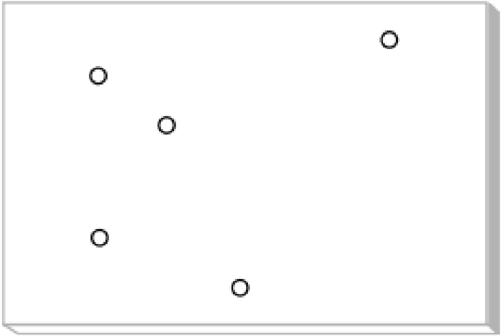


Definición formal de grafo

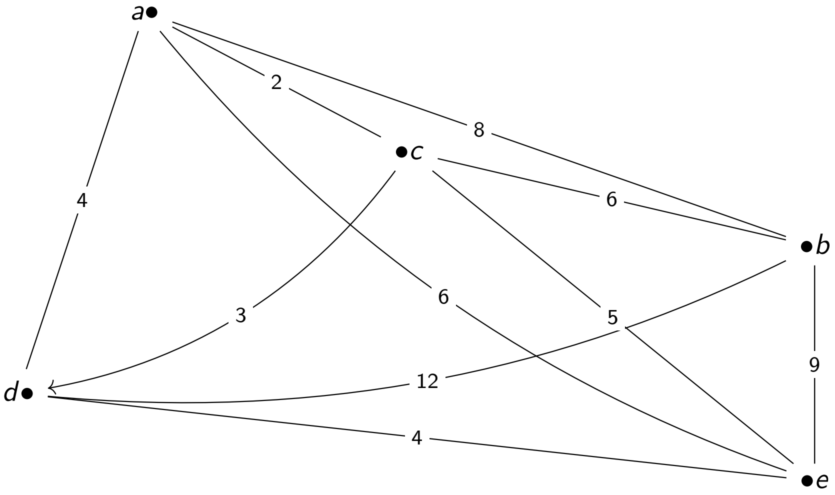
Definición Un grafo $G = (V, E)$ consiste de un conjunto V de vértices o nodos y un conjunto E de aristas tal que cada arista $e \in E$ se asocia con un par no ordenado de vértices. Normalmente, si e es una arista asociada a los nodos v y w, escribimos simplemente $e = (v, w)$ o $e = (w, v)$, o más simple aún, (v, w). En este contexto, es importante notar que (v, w) y (w, v) son exactamente la misma arista.
Si $e = (v, w)$ decimos que la arista e es *incidente* sobre v y w, que v y w son incidentes en e y además diremos que los vértices v y w son *adyacentes*.
Nota A menos que se indique lo contrario, suponemos que V y E son conjuntos finitos y que V es no vacío (es decir, tenemos al menos un nodo).

Ejemplo

Con frecuencia en la manufactura, es necesario hacer agujeros en hojas de metal. Luego se atornillan distintos componentes a estas hojas de metal. Los agujeros se realizan utilizando un taladro controlado por computadora. Para ahorrar tiempo y dinero, el taladro debe moverse lo más rápido posible. Veremos como modelar este problema con un grafo.



Ejemplo



Ejemplo

Los vértices en el grafo se corresponden con los agujeros. Cada par de vértices se conecta por una arista. En cada arista escribimos el tiempo que necesita el taladro para moverse entre los agujeros correspondientes.

Un grafo como este, con números en las aristas, se llama **grafo ponderado** o **grafo con pesos**. Si la arista e tiene la etiqueta k decimos que la arista e tiene peso k. Por ejemplo, decimos que el peso de la arista (b, c) es 6.

En un grafo con pesos, la **longitud de un camino** es la suma de los pesos de las aristas en ese camino. Por ejemplo, el camino $a \to c \to b$ tiene longitud 8.

Nota Por más que usamos el término longitud, no siempre se representa una longitud. Por ejemplo, en este problema, la longitud del camino representa cuanto tiempo nos lleva recorrer ese camino con el taladro computarizado.

Un camino de longitud mínima que visita todos los vértices exactamente una vez representa un camino óptimo para el taladro computarizado. Supongamos que se requiere que el camino comience en a y termine en e. Se puede encontrar el camino más corto numerando todos los posibles caminos de a a e que pasan por todos los nodos y calculando su longitud.

Un camino de longitud mínima que visita todos los vértices exactamente una vez representa un camino óptimo para el taladro computarizado. Supongamos que se requiere que el camino comience en a y termine en e. Se puede encontrar el camino más corto numerando todos los posibles caminos de a a e que pasan por todos los nodos y calculando su longitud.

Camino	Longitud
$a \to b \to c \to d \to e$	21
$a \to b \to d \to d \to e$	28
$a \to c \to b \to d \to e$	24
$a \to c \to d \to b \to e$	26
$a \to d \to b \to c \to e$	27
$a \to c \to c \to b \to e$	22

El problema del agente viajero (TSP)

Por supuesto, si eligiéramos otros vértices de inicio y final tendríamos rutas más óptimas para el taladro computarizado.

El problema del agente viajero (TSP)

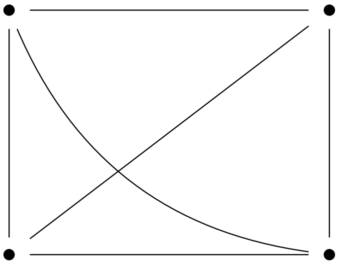
Por supuesto, si eligiéramos otros vértices de inicio y final tendríamos rutas más óptimas para el taladro computarizado.
Enumerar todos los posibles caminos y sus costos es imposible en casos reales dado que la cantidad de caminos crece exponencialmente en la mayoría de los casos.
Este problema se conoce como **el problema del agente viajero**.

Grafos importantes: el grafo completo

Definición El grafo completo de n vértices, denotado por K_n es el grafo con n vértices en la que hay una arista entre cada para de vértices distintos. Se muestra como ejemplo el grafo K_4.

Grafos importantes: el grafo completo

Definición El grafo completo de n vértices, denotado por K_n es el grafo con n vértices en la que hay una arista entre cada para de vértices distintos. Se muestra como ejemplo el grafo K_4.

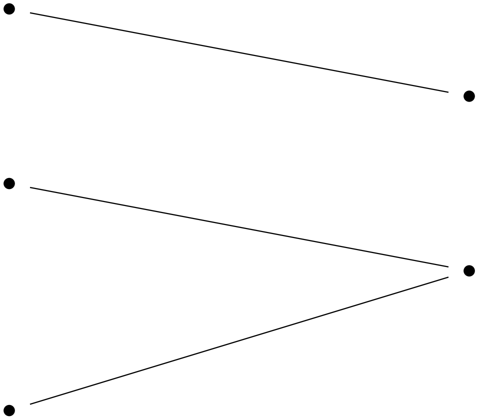


Ejercicio 2

1. Dibuje los grafos K_3 y K_5.
2. Encuentre una fórmula para la cantidad de aristas de un grafo completo.

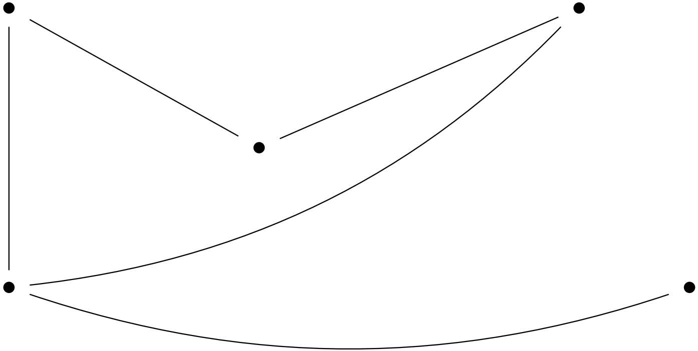
Grafos bipartitos

Se dice que un grafo es *bipartito* si existen subconjuntos V_1 y V_2 de V tales que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$ y cada arista $e \in E$ es incidente sobre un vértice de V_1 y sobre un vértice en V_2. Por ejemplo, el siguiente grafo es bipartito:



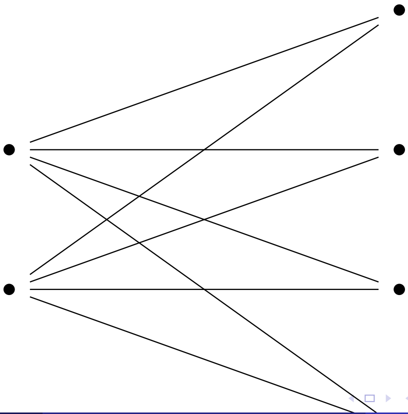
Ejercicio 3

Decida si el siguiente grafo es bipartito. Justifique.



Grafos bipartitos completos

El grafo bipartito completo de m y n vértices, que notamos $K_{m,n}$ es el grafo donde el conjunto de vértices tiene una partición V_1 con m vértices y V_2 con n vértices y donde el conjunto de aristas consiste de **todas** las aristas de la forma (v_1, v_2) con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$. Por ejemplo, el siguiente es el grafo $K_{2,4}$

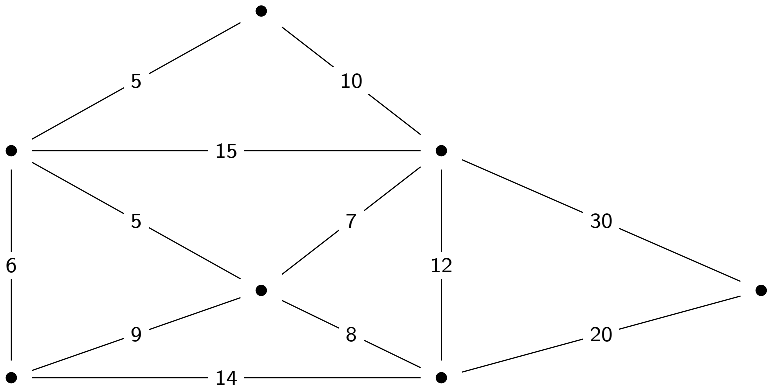


Ejercicio 4

1. Dibuje los grafos bipartitos completos $K_{1,3}$ y $K_{7,2}$.
2. Encuentre una fórmula para la cantidad de aristas del grafo $K_{n,m}$.

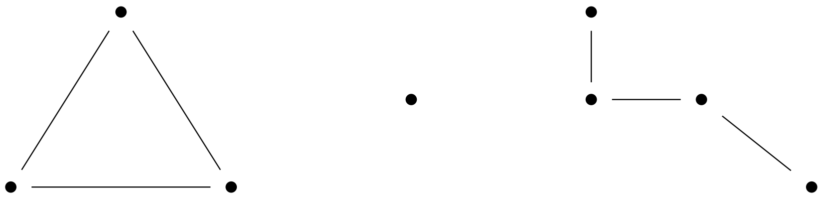
Ejercicio 5

En el siguiente grafo, los nodos representan ciudades y los pesos son los costos de construir las carreteras indicadas. Encuentre el sistema de carreteras menos costoso que conecte todas las ciudades.



Grafo conexo

Un grado conexo es un grafo del cual podemos ir de cualquier vértice a cualquier otro por un camino, es decir, si dado cualquier par de vértices v y w en G, siempre existe un camino de v a w. Por ejemplo el siguiente grafo no es conexo:



Intuitivamente, un grafo conexo es "de una sola pieza", mientras que un grafo no conexo tiene "varias partes". Cada una de estas partes se llama **componente conexo** del grafo.

Subgrafos

Sea $G = (V, E)$ un grafo. $G' = (V', E')$ es un subgrafo de G si:

1. $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$
2. Para toda arista $e' \in E'$, si e' incide en v' y w', entonces $v', w' \in V'$

Ciclos

Un ciclo es un camino de longitud diferente de cero que empieza y termina en el mismo vértice.

Grado de un vértice

El **grado de un vértice** v, que denotamos como $\delta(v)$ es el número de aristas que inciden en v.

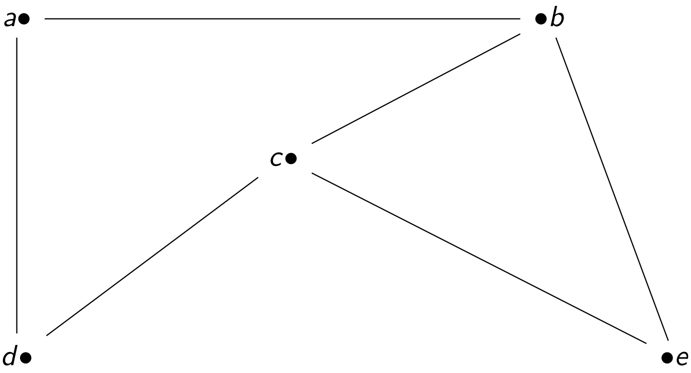
Contenido

Representación de grafos

Venimos representando a los grafos como simples dibujos. Sin embargo, para que una computadora pueda analizarlos, se necesita una representación más formal.

Matriz de adyacencia

Considere el grafo de la figura



Matriz de adyacencia

Para obtener la **matriz de adyacencia**, primero se elige un orden para los vértices, por ejemplo (a, b, c, d, e). Después, se construye una matriz tal que el elemento en la posición i, j tiene un 1 si los vértices en las posiciones i, j son adyacentes y 0 si no. Si $i == j$, ponemos un 0. La matriz de adyacencia para este grafo es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Propiedades

- El grado de un vértice v se puede obtener sumando el renglón o la columna que corresponda al vértice v.
- Es una matriz simétrica respecto a la diagonal.
- El elemento i, j de la matriz A^n es igual al número de caminos desde el vértice que corresponde a la posición i al vértice que corresponde a la posición j.

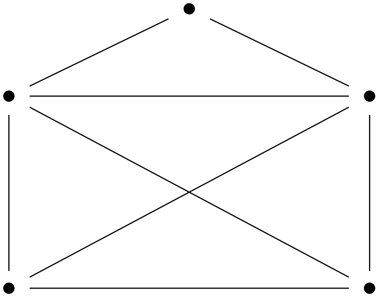
Matriz de incidencia

Para obtener la **matriz de incidencia**, se etiquetan los renglones con los vértices y las columnas con las aristas en algún orden arbitrario. El elemento en el renglón v y la columna e tiene un 1 si e es incidente en v, o un 0 si no. La matriz de incidencia para el grafo de ejemplo es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Ejercicio 6

Escriba las matrices de adyacencia y de incidencia para el siguiente grafo



Referencias

Johnsonbaugh
Matemáticas discretas. 6ta Edición.
Capítulos 8.1, 8.2 y 8.4

Grimaldi, R.
Matemáticas Discretas y Combinatoria.

Advertencia La terminología asociada a la teoría de grafos no se ha estandarizado aún. Al leer artículos y libros sobre grafos, es necesario verificar las definiciones que se emplean. Ante cualquier duda, consultar con los docentes de la cátedra.