

## Capítulo 8

# TEORÍA DE GRÁFICAS

- 8.1 Introducción
- 8.2 Trayectorias y ciclos  
Rincón de solución de  
problemas: gráficas
- 8.3 Ciclos hamiltonianos y el  
problema del agente viajero
- 8.4 Un algoritmo de la ruta más  
corta
- 8.5 Representaciones de  
gráficas
- 8.6 Isomorfismos de gráficas
- 8.7 Gráficas planas
- † 8.8 Locura instantánea  
Notas  
Repaso del capítulo  
Autoevaluación del capítulo  
Ejercicios para computadora

*Bueno, salí de viaje, y fui al norte, a Providence.  
Conocí al alcalde.*

*¡El alcalde de Providence!*

*Estaba sentado en el lobby del hotel.*

*¿Qué dijo?*

*Dijo "Buenos días", y yo dije: "Tiene una linda ciudad,  
alcalde". Y después tomó café conmigo. Luego fui a Waterbury,  
que es una ciudad agradable, una ciudad con un gran reloj, el  
famoso reloj de Waterbury. Vendí una buena factura ahí. Y  
después Boston; Boston es la cuna de la revolución. Una hermosa  
ciudad. Luego un par de pueblos en Massachussets, y seguí a  
Portland y Bangor y ¡de regreso a casa!*

DE MUERTE DE UN VENDEDOR

Aunque la primera publicación de teoría de gráficas data de 1736 (vea el ejemplo 8.2.16) y varios resultados importantes de teoría de gráficas se obtuvieron en el siglo XIX, no fue sino hasta 1920 que surgió un interés sostenido, amplio e intenso en la teoría de gráficas. En realidad, el primer libro de texto de este tema ([König]) apareció en 1936. Sin duda, una de las razones del reciente interés en la teoría de gráficas es su aplicabilidad en muchos campos, incluyendo ciencias de la computación, química, investigación de operaciones, ingeniería eléctrica, lingüística y economía.

En este capítulo, primero se expone cierta terminología básica y ejemplos de gráficas. Después se analizan algunos conceptos importantes en la teoría de gráficas, que incluyen trayectorias y ciclos. Luego se presentan dos problemas clásicos, los ciclos hamiltonianos y el problema del agente viajero. Se presenta un algoritmo de la ruta más corta que encuentra con eficiencia la trayectoria más corta entre dos puntos dados. Después de exponer las maneras de representar las gráficas, se estudiará el tema de cuándo dos gráficas son en esencia la misma (es decir, cuándo dos gráficas son isomorfas) y cuándo una gráfica se puede dibujar en el plano sin que sus aristas se crucen. Se concluirá con la presentación de una solución basada en un modelo de gráfica para el juego de Locura instantánea.

## 8.1 → Introducción

La figura 8.1.1 muestra el sistema de carreteras de Wyoming; cierta persona es responsable de inspeccionar este sistema. En particular, el inspector de carreteras debe recorrerlas y entregar in-

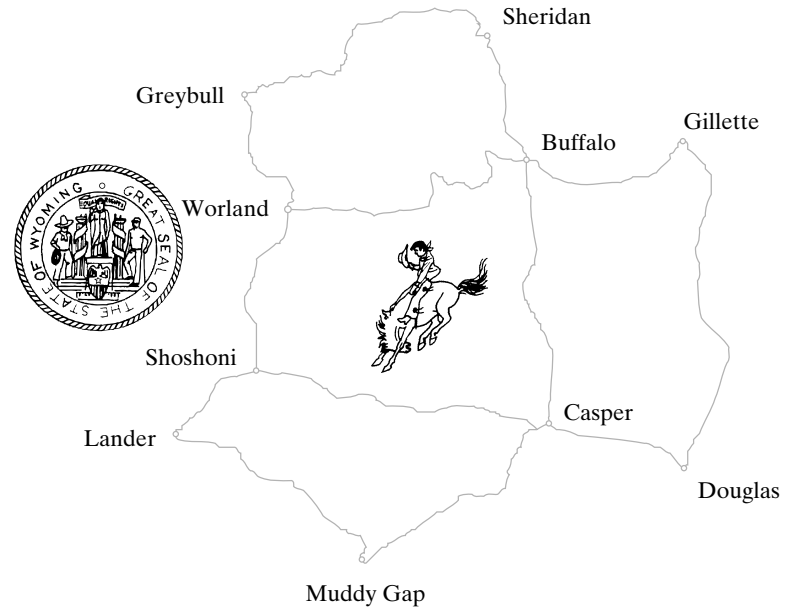


Figura 8.1.1 Parte del sistema de carreteras de Wyoming.

www

formas de las condiciones de los caminos, la visibilidad de las líneas pintadas, el estado de las señales, etcétera. Como el inspector vive en Greybull, la manera más económica de inspeccionar todos los caminos sería comenzar en Greybull, recorrer cada carretera exactamente una vez y regresar a Greybull. ¿Es esto posible? ¿Puede decidir antes de seguir leyendo?

El problema se puede modelar como una **gráfica**. De hecho, como las gráficas se dibujan con puntos y líneas, tienen la apariencia de mapas de carreteras. La figura 8.1.2, contiene el dibujo de una gráfica  $G$  que modela el mapa de la figura 8.1.1. Los puntos se llaman **vértices** y las líneas que conectan a los vértices se llaman **aristas**. (Más adelante en esta sección, se definirán todos los términos con cuidado). Cada vértice se etiquetó con las primeras tres letras de la ciudad correspondiente. Las aristas se etiquetaron  $e_1, \dots, e_{13}$ . Cuando se dibuja una gráfica, la única información de importancia es qué vértices se conectan con qué aristas. Por esta razón, la gráfica de la figura 8.1.2 pudo haberse dibujado como la figura 8.1.3.

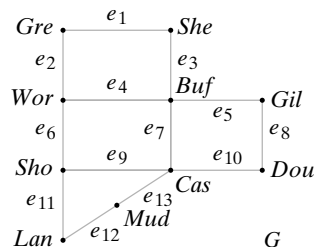


Figura 8.1.2 Modelo de gráficas para el sistema de carreteras de la figura 8.1.1.

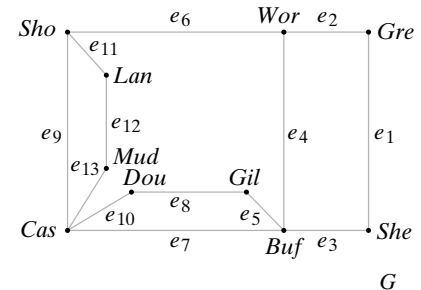


Figura 8.1.3 Modelo de gráficas alternativo, pero equivalente, del sistema de carreteras de la figura 8.1.1.

Si se inicia en el vértice  $v_0$ , se viaja por una arista al vértice  $v_1$ , por otra arista al vértice  $v_2$ , etcétera, y con el tiempo se llega al vértice  $v_n$ ; este viaje completo recibe el nombre de **trayectoria** o **ruta** de  $v_0$  a  $v_n$ . La trayectoria que comienza en *She*, va a *Buf* y termina en *Gil* corresponde a un viaje en el mapa de la figura 8.1.1 que comienza en Sheridan, va a Buffalo y termina en Gillette. El problema del inspector de carreteras se enuncia de otra manera para el modelo de gráficas  $G$ : ¿Existe una ruta del vértice *Gre* al vértice *Gre* que pase una vez por todas las aristas?

Es posible demostrar que el inspector de carreteras no puede comenzar en Greybull, viajar por cada camino justo una vez y regresar a Greybull. Para poner la respuesta en términos de gráficas, no existe una trayectoria del vértice *Gre* al vértice *Gre* en la figura 8.1.2 que recorra todas las aristas una vez. Para ver esto, suponga que existe tal trayectoria y considere el vértice *Wor*. Cada vez que se llega a *Wor* por alguna arista, se debe salir de *Wor* por una arista diferente. Más aún, cada arista que toca *Wor* se debe usar. Entonces las aristas en *Wor* ocurren en pares. Se concluye que un número par de aristas debe tocar *Wor*. Como tres aristas tocan a *Wor*, se tiene una contradicción. Por lo tanto, no existe una trayectoria del vértice *Gre* al vértice *Gre* en la figura 8.1.2 que recorra todas las aristas justo una vez. El argumento se aplica a una gráfica arbitraria  $G$ . Si  $G$  tiene una trayectoria del vértice  $v$  al vértice  $v$  que recorre todas las aristas exactamente una vez, un número par de aristas deben tocar cada vértice. Este problema se estudia con más detalle en la sección 8.2.

Por el momento, se dan algunas definiciones formales.

### Definición 8.1.1 ►

Una *gráfica* (o *gráfica no dirigida*)  $G$  consiste en un conjunto  $V$  de *vértices* (o *nodos*) y un conjunto  $E$  de *aristas* (o *arcos*) tal que cada arista  $e \in E$  se asocia con un par no ordenado de vértices. Si existe una arista única  $e$  asociada con los vértices  $u$  y  $w$ , se escribe  $e = (v, w)$  o  $e = (w, v)$ . En este contexto,  $(v, w)$  denota una arista entre  $v$  y  $w$  en una gráfica no dirigida y *no* es un par ordenado.

Una *gráfica dirigida* (o *digráfica*)  $G$  consiste en un conjunto  $V$  de *vértices* (o *nodos*) y un conjunto  $E$  de *aristas* (o *arcos*) tales que cada arista  $e \in E$  está asociada con un par ordenado de vértices. Si hay una arista única  $e$  asociada con el par ordenado  $(v, w)$  de vértices, se escribe  $e = (v, w)$ , que denota una arista de  $v$  a  $w$ .

Se dice que una arista  $e$  en una gráfica (no dirigida o dirigida) que se asocia con el par de vértices  $v$  y  $w$  es *incidente sobre*  $v$  y  $w$ , y se dice que  $v$  y  $w$  son *incidentes sobre*  $e$  y son *vértices adyacentes*.

Si  $G$  es una gráfica (no dirigida o dirigida) con vértices  $V$  y aristas  $E$ , se escribe  $G = (V, E)$ .

A menos que se especifique lo contrario, se supone que los conjuntos  $E$  y  $V$  son finitos y que  $V$  es no vacío. ◀

### Ejemplo 8.1.2 ►

En la figura 8.1.2 la gráfica (no dirigida)  $G$  consiste en el conjunto de vértices

$$V = \{Gre, She, Wor, Buf, Gil, Sho, Cas, Dou, Lan, Mud\}$$

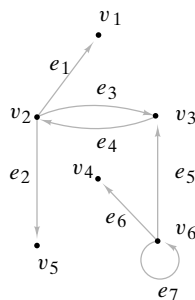
y el conjunto de aristas

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_{13}\}$$

La arista  $e_1$  se asocia con un par no ordenado de vértices  $\{Gre, She\}$ , y la arista  $e_{10}$  se asocia con el par no ordenado de vértices  $\{Cas, Dou\}$ . La arista  $e_1$  se denota por  $(Gre, She)$  o  $(She, Gre)$ , y la arista  $e_{10}$  se denota por  $(Cas, Dou)$  o  $(Dou, Cas)$ . La arista  $e_4$  es incidente sobre *Wor* y *Buf*, y los vértices *Wor* y *Buf* son adyacentes. ◀

### Ejemplo 8.1.3 ►

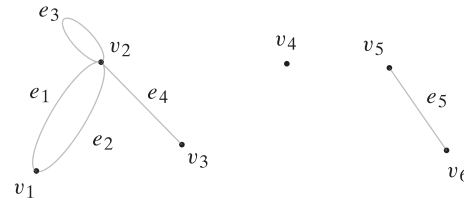
La figura 8.1.4 muestra una gráfica dirigida. Las aristas dirigidas se indican por flechas. La arista  $e_1$  se asocia con el par ordenado de vértices  $(v_2, v_1)$  y la arista  $e_7$  se asocia con



**Figura 8.1.4** Una gráfica dirigida.

el par ordenado de vértices  $(v_6, v_6)$ . La arista  $e_1$  se denota  $(v_2, v_1)$ , y la arista  $e_7$  se denota  $(v_6, v_6)$ . ◀

La definición 8.1.1 permite que diferentes aristas se asocien con el mismo par de vértices. Por ejemplo, en la figura 8.1.5, las aristas  $e_1$  y  $e_2$  se asocian ambas con el par de vértices  $\{v_1, v_2\}$ . Estas aristas se llaman **aristas paralelas**. Una arista incidente en un mismo vértice se llama **lazo**. Por ejemplo, en la figura 8.1.5, la arista  $e_3 = (v_2, v_2)$  es un lazo. Un vértice como  $v_4$  en la figura 8.1.5, que no incide en ninguna arista, se llama **vértice aislado**. Una gráfica sin lazos ni aristas paralelas se llama **gráfica simple**.



**Figura 8.1.5** Una gráfica con aristas paralelas y un lazo.

#### Ejemplo 8.1.4 ▶

Como la gráfica de la figura 8.1.2 no tiene aristas paralelas ni lazos, es una gráfica simple. ◀

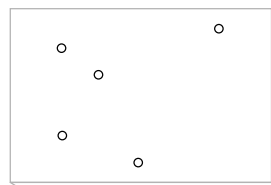
Algunos autores no permiten lazos o aristas paralelas cuando definen las gráficas. Se esperaría que si no se ha llegado a un acuerdo acerca de la definición de “gráfica”, muchos de los términos en la teoría de gráficas tampoco tendrían definiciones estándar. Sin duda, esto es cierto. Al leer artículos y libros de gráficas, es necesario verificar las definiciones que se emplean.

Se dará un ejemplo que muestra cómo se utiliza un modelo de gráficas para analizar un problema de manufactura.

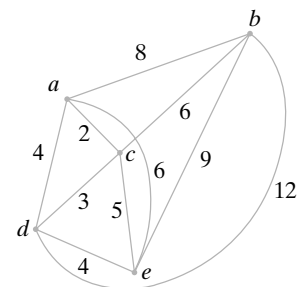
#### Ejemplo 8.1.5 ▶

Con frecuencia en la manufactura, es necesario hacer agujeros en hojas de metal (vea la figura 8.1.6). Luego se atornillan las componentes a estas hojas de metal. Los agujeros se perforan usando un taladro controlado por computadora. Para ahorrar tiempo y dinero, el taladro debe moverse tan rápido como sea posible. Se modelará la situación como una gráfica.

Los vértices de la gráfica corresponden a los agujeros (figura 8.1.7). Cada par de vértices se conecta por una arista. En cada arista se escribe el tiempo para mover el taladro entre los hoyos correspondientes. Una gráfica con números en las aristas (como en la figura 8.1.7) se llama **gráfica ponderada**. Si la arista  $e$  se etiqueta  $k$ , se dice que el **peso de la**



**Figura 8.1.6** Hoja de metal con agujeros para tornillos.



**Figura 8.1.7** Modelo de gráficas de la hoja de metal de la figura 8.1.6. El peso de la arista es el tiempo para mover el taladro.

**arista**  $e$  es  $k$ . Por ejemplo, en la figura 8.1.7 el peso de la arista  $(c, e)$  es 5. En una gráfica ponderada, la **longitud de una ruta** es la suma de los pesos de las aristas en la ruta. Por ejemplo, en la figura 8.1.7 la longitud de la ruta que comienza en  $a$ , visita  $c$  y termina en  $b$  es 8. En este problema, la longitud de una trayectoria que comienza en el vértice  $v_1$  y luego visita  $v_2, v_3, \dots$ , en este orden, y termina en  $v_n$  representa el tiempo que toma al taladro comenzar en el agujero  $h_1$  y luego moverse a  $h_2, h_3, \dots$ , en ese orden y terminar en  $h_n$ , donde el agujero  $h_i$  corresponde el vértice  $v_i$ . Una ruta de longitud mínima que visita todos los vértices exactamente una vez representa la ruta óptima que debe seguir el taladro.

Suponga que en este problema se requiere que la trayectoria comience en el vértice  $a$  y termine en el vértice  $e$ . Se puede encontrar la ruta de longitud mínima numerando todas las rutas posibles de  $a$  a  $e$  que pasan por todos los vértices justo una vez y eligiendo la menor (vea la tabla 8.1.1). Se ve que la ruta que visita los vértices  $a, b, c, d, e$ , en ese orden, tiene longitud mínima. Por supuesto, un par diferente de vértices de inicio y terminación produciría una ruta aún más corta.

**TABLA 8.1.1** ■ Trayectorias en la gráfica de la figura 8.1.7 de  $a$  a  $e$  que pasan por todos los vértices justo una vez, y sus longitudes.

Trayectoria	Longitud
$a, b, c, d, e$	21
$a, b, d, c, e$	28
$a, c, b, d, e$	24
$a, c, d, b, e$	26
$a, d, b, c, e$	27
$a, d, c, b, e$	22

Numerar todas las trayectorias de un vértice  $v$  a un vértice  $w$ , como se hizo en el ejemplo 8.1.5, es una manera bastante tardada para encontrar la trayectoria de longitud mínima de  $v$  a  $w$  que visita todos los vértices una vez. Por desgracia, nadie conoce un método que sea mucho más práctico para gráficas arbitrarias. Este problema es una versión del **problema del agente viajero**. Se estudiará ese problema en la sección 8.3.

**Ejemplo 8.1.6** ►

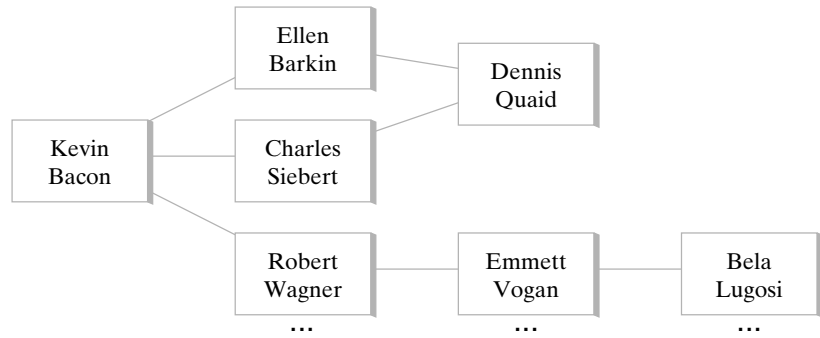
WWW

**Números de Bacon**

El actor Kevin Bacon ha aparecido en numerosas películas que incluyen *Diner* y *Apollo 13*. Se dice que los actores que han aparecido en una película con Bacon tienen un *uno de número Bacon*. Por ejemplo, Ellen Barkin tiene un uno de número Bacon porque apareció con Bacon en *Diner*. Los actores que no hicieron una película con Bacon pero que trabajaron con un actor cuyo número Bacon es uno, se dice que tienen *dos de número de Bacon*. Los números de Bacon más altos se definen de manera similar. Por ejemplo, Bela Lugosi tiene un número de Bacon de tres. Lugosi actuó en *Black Friday* con Emmett Vogan, quien estuvo en *With a Song in My Heart* con Robert Wagner y Wagner trabajó en *Wild Things* con Bacon. Se desarrollará un modelo de gráficas para los números de Bacon.

Los vértices denotan actores; se coloca una arista entre dos actores diferentes si aparecieron juntos en al menos una película (vea la figura 8.1.8). En una gráfica no ponderada, la longitud de una ruta es el número de aristas en ella. Entonces el número de Bacon de un actor es la longitud de la ruta más corta desde el vértice correspondiente a ese actor hasta el vértice de Bacon. En la sección 8.4 se analiza el problema general de encontrar la ruta más corta en una gráfica. A diferencia de la situación del ejemplo 8.1.5, existen algoritmos eficientes para encontrar la ruta más corta.

Es interesante que la *mayoría* de los actores, incluso aquellos que murieron hace años, tienen números de Bacon de tres o menos. La página de Internet de este libro tiene un enlace a una página que verifica los números de Bacon de actores arbitrarios. Vea en el ejercicio 30 un modelo de gráficas similar.



**Figura 8.1.8** Parte de una gráfica que modela los números de Bacon. Los vértices denotan actores. Existe una arista entre dos actores si aparecieron juntos en al menos una película. Por ejemplo, hay una arista entre Ellen Barkin y Dennis Quaid porque ambos aparecieron en *The Big Easy*. El número de Bacon de un actor es la longitud de la ruta más corta entre el actor y Bacon. Por ejemplo, el número de Bacon de Bela Lugosi es tres porque la longitud de la ruta más corta entre Lugosi y Bacon es tres. ◀

### Ejemplo 8.1.7 ▶

#### Gráficas de similitud

Este ejemplo trata el problema de agrupar objetos “similares” en clases basadas en las propiedades de los objetos. Por ejemplo, suponga que cierto número de personas implementan en C++ un algoritmo dado y que se quiere agrupar los programas “parecidos” en clases determinadas por ciertas propiedades de los programas (vea la tabla 8.1.2). Suponga que se seleccionan como propiedades

1. El número de líneas en el programa
2. El número de instrucciones para regresar (*return*) en el programa
3. El número de llamadas de funciones en el programa

**TABLA 8.1.2** ■ Programas en C++ que implementan el mismo algoritmo

Programa	Número de líneas de programa	Número de instrucciones “return”	Número de llamadas de funciones
1	66	20	1
2	41	10	2
3	68	5	8
4	90	34	5
5	75	12	14

Una **gráfica de similitud**  $G$  se construye como sigue. Los vértices corresponden a los programas. Un vértice se denota por  $(p_1, p_2, p_3)$ , donde  $p_i$  es el valor de la propiedad  $i$ . Se define una **función de disimilitud**  $s$  como sigue. Para cada par de vértices  $v = (p_1, p_2, p_3)$  y  $w = (q_1, q_2, q_3)$  se establece

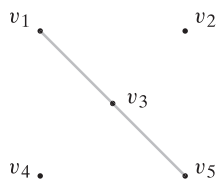
$$s(v, w) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| + |p_3 - q_3|.$$

Si  $v_i$  es el vértice correspondiente al programa  $i$ , se obtiene

$$\begin{array}{llll} s(v_1, v_2) = 36, & s(v_1, v_3) = 24, & s(v_1, v_4) = 42, & s(v_1, v_5) = 30, \\ s(v_2, v_3) = 38, & s(v_2, v_4) = 76, & s(v_2, v_5) = 48, & s(v_3, v_4) = 54, \\ & s(v_3, v_5) = 20, & s(v_4, v_5) = 46. \end{array}$$

Si  $v$  y  $w$  son vértices correspondientes a dos programas,  $s(v, w)$  es una medida de qué tan disímiles son los programas. Un valor grande de  $s(v, w)$  indica disimilitud, mientras que un valor pequeño indica similitud.

Para un número fijo  $S$ , se inserta una arista entre dos vértices  $v$  y  $w$  si  $s(v, w) < S$ . (En general, habrá gráficas de similitud diferentes para valores distintos de  $S$ .) Se dice que  $v$  y  $w$  están **en la misma clase** si  $v = w$  o si hay una trayectoria de  $v$  a  $w$ . En la figura 8.1.9



**Figura 8.1.9** Una gráfica de similitud correspondiente a los programas de la tabla 8.1.2 con  $S = 25$ .

se muestra la gráfica correspondiente a los programas de la tabla 8.1.2 con  $S = 25$ . En ella, los programas se agrupan en tres clases:  $\{1, 3, 5\}$ ,  $\{2\}$  y  $\{4\}$ . En un problema real, un valor adecuado para  $S$  podría seleccionarse por prueba y error o el valor de  $S$  podría elegirse de manera automática de acuerdo con algunos criterios predeterminados. ◀

### Ejemplo 8.1.8 ►

WWW

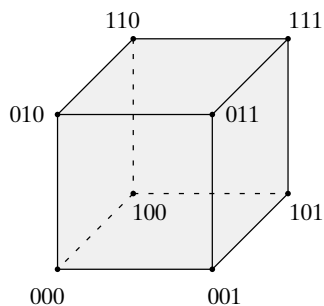


Figura 8.1.10 El cubo-3.

### El cubo- $n$ (hipercubo)

La computadora tradicional, con frecuencia llamada **computadora serial**, ejecuta una instrucción a la vez. Nuestra definición de “algoritmo” también supone que se ejecuta una instrucción a la vez. Estos algoritmos se llaman **algoritmos seriales**. Conforme los costos del hardware han disminuido, se ha vuelto factible construir **computadoras paralelas** con muchos procesadores que son capaces de ejecutar varias instrucciones a la vez. Las gráficas con frecuencia son modelos convenientes para describir estas máquinas. Los algoritmos asociados se conocen como **algoritmos paralelos**. Muchos problemas se resuelven con mayor rapidez usando computadoras paralelas en lugar de seriales. Se analizará un modelo de computación paralela conocido como el **cubo- $n$  o hipercubo**.

El cubo- $n$  tiene  $2^n$  procesadores,  $n \geq 1$ , que se representan por vértices (figura 8.1.10) etiquetados  $0, 1, \dots, 2^n - 1$ . Cada procesador tiene su propia memoria local. Una arista conecta a dos vértices si la representación binaria de sus etiquetas difiere exactamente en un bit. Durante una unidad de tiempo, todos los procesadores en el cubo- $n$  pueden ejecutar una instrucción simultáneamente y después comunicarse con el procesador adyacente. Si un procesador necesita comunicarse con uno no adyacente, el primer procesador envía un mensaje que incluye la ruta al receptor, y el destino final del mismo. Puede tomar varias unidades de tiempo que un procesador se comunique con otro no adyacente.

También es posible describir el cubo- $n$  de manera recursiva. El cubo-1 tiene dos procesadores, etiquetados 0 y 1, y una arista. Sean  $H_1$  y  $H_2$  dos cubos- $(n-1)$  cuyos vértices se etiquetan en binarios  $0, \dots, 2^{n-1} - 1$  (vea la figura 8.1.11). Se coloca una arista entre cada par de vértices, una desde  $H_1$  y otra desde  $H_2$ , siempre que los vértices tengan etiquetas idénticas. Se cambia la etiqueta  $L$  en cada vértice de  $H_1$  a  $0L$  y la etiqueta  $L$  en cada vértice de  $H_2$  se cambia a  $1L$ . Se obtiene un cubo- $n$  (ejercicio 39). Vea en los ejercicios 43 a 45 una manera alternativa de construir el cubo- $n$ .

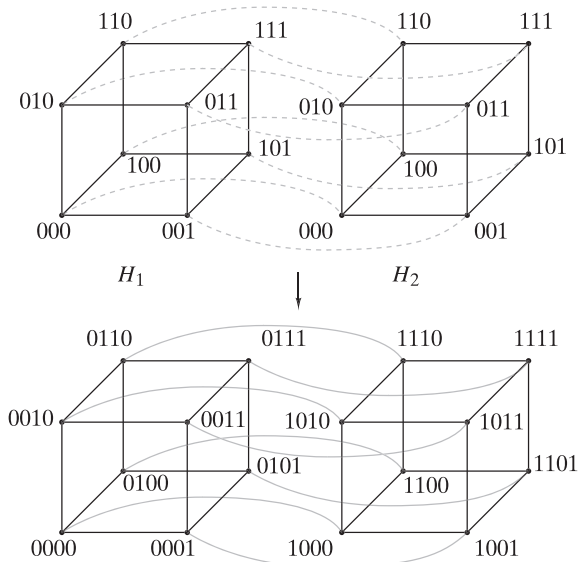


Figura 8.1.11 Combinación de dos cubos-3 para obtener un cubo-4.

El cubo- $n$  es un modelo importante de computación porque se han construido varias máquinas de este tipo y están trabajando. Todavía más, algunos otros modelos de computación paralela se pueden simular con el hipercubo. Este último punto se considera con más detalle en los ejemplos 8.3.5 y 8.6.3. ◀

Se concluye esta sección de introducción con las definiciones de algunas gráficas especiales que aparecen con frecuencia en la teoría de gráficas.

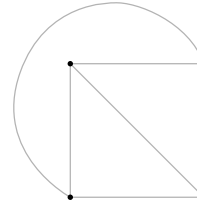


**Definición 8.1.9** ▶

La *gráfica completa sobre  $n$  vértices*, denotada por  $K_n$ , es la gráfica simple con  $n$  vértices en la que hay una arista entre cada par de vértices distintos. ◀

**Ejemplo 8.1.10** ▶

La gráfica completa sobre cuatro vértices,  $K_4$ , se reproduce en la figura 8.1.12.



**Figura 8.1.12** Gráfica completa  $K_4$ .

**Definición 8.1.11** ▶

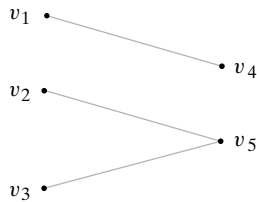
Una gráfica  $G = (V, E)$  es *bipartita* si existen subconjuntos  $V_1$  y  $V_2$  (cualquiera de los dos posiblemente vacío) de  $V$  tales que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $V_1 \cup V_2 = V$ , y cada arista en  $E$  es incidente sobre un vértice en  $V_1$  y un vértice en  $V_2$ . ◀

**Ejemplo 8.1.12** ▶

La gráfica de la figura 8.1.13 es bipartita ya que si se deja

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_3\} \quad \text{y} \quad V_2 = \{v_4, v_5\},$$

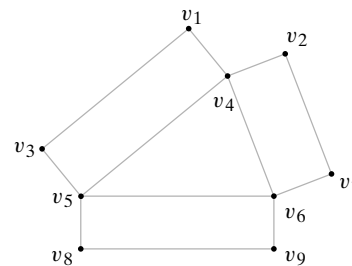
cada arista incide en un vértice en  $V_1$  y en un vértice en  $V_2$ . ◀



**Figura 8.1.13** Gráfica bipartita.

**Ejemplo 8.1.13** ▶

La gráfica de la figura 8.1.14 *no* es bipartita. A menudo es más fácil probar que una gráfica no es bipartita por contradicción. ◀



**Figura 8.1.14** Gráfica que no es bipartita.

Suponga que la gráfica de la figura 8.1.14 es bipartita. Entonces se puede hacer una partición del conjunto de vértices en dos subconjuntos  $V_1$  y  $V_2$  tal que cada arista incida en un vértice en  $V_1$  y un vértice en  $V_2$ . Ahora considere los vértices  $v_4$ ,  $v_5$  y  $v_6$ . Como  $v_4$  y  $v_5$  son adyacentes, uno está en  $V_1$  y el otro en  $V_2$ . Se puede suponer que  $v_4$  está en  $V_1$  y  $v_5$  en  $V_2$ . Como  $v_5$  y  $v_6$  son adyacentes y  $v_5$  está en  $V_2$ ,  $v_6$  está en  $V_1$ . Como  $v_4$  y  $v_6$  son adyacentes y  $v_4$  está en  $V_1$ ,  $v_6$  está en  $V_2$ . Pero resulta que  $v_6$  está en  $V_1$  y en  $V_2$ , lo cual es una contradicción ya que  $V_1$  y  $V_2$  son ajenos. Por lo tanto, la gráfica de la figura 8.1.14 no es bipartita. ◀



**Ejemplo 8.1.14 ►**

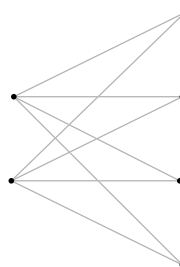
La gráfica completa  $K_1$  sobre un vértice es bipartita. Se puede establecer que  $V_1$  es el conjunto que contiene el único vértice y  $V_2$  es el conjunto vacío. Entonces cada arista (de hecho, ¡ninguna!) es incidente sobre un vértice en  $V_1$  y un vértice en  $V_2$ . ◀

**Definición 8.1.15 ►**

La *gráfica bipartita completa sobre  $m$  y  $n$  vértices*, denotada por  $K_{m,n}$ , es la gráfica simple donde el conjunto de vértices tiene una partición en  $V_1$  con  $m$  vértices y  $V_2$  con  $n$  vértices y donde el conjunto de aristas consiste en todas las aristas de la forma  $(v_1, v_2)$  con  $v_1 \in V_1$  y  $v_2 \in V_2$ . ▶

**Ejemplo 8.1.16 ►**

La gráfica bipartita completa sobre dos y cuatro vértices,  $K_{2,4}$ , se ilustra en la figura 8.1.15.



**Figura 8.1.15**  
Gráfica bipartita completa  $K_{2,4}$ . ◀

**Sugerencias para resolver problemas**

Para modelar una situación dada como una gráfica, primero debe decidirse qué representan los vértices. Después una arista entre dos vértices representa algún tipo de relación. Por ejemplo, si varios equipos se enfrentan en juegos de fútbol, los vértices podrían ser los equipos. Después se podría poner una arista entre dos vértices (equipos) si los dos equipos representados por los vértices participan al menos en un juego. La gráfica mostraría entonces qué equipos se enfrentaron.

Para determinar si una gráfica es bipartita, intente separar los vértices en dos conjuntos ajenos  $V_1$  y  $V_2$  de manera que cada arista incida en un vértice de un conjunto y un vértice del otro conjunto. Si tiene éxito, la gráfica es bipartita y cuenta con los conjuntos  $V_1$  y  $V_2$ . Si fracasa, la gráfica no es bipartita. Para tratar de separar los vértices en dos conjuntos ajenos, elija un vértice de inicio. Ponga  $v \in V_1$ . Coloque todos los vértices adyacentes a  $v$  en  $V_2$ . Elija un vértice  $w \in V_2$ . Coloque todos los vértices adyacentes a  $w$  en  $V_1$ . Elija un vértice  $v' \in V_2$ ,  $v' \neq v$ . Ponga todos los vértices adyacentes a  $v'$  en  $V_2$ . Continúe de esta manera. Si puede colocar cada vértice ya sea en  $V_1$  o en  $V_2$ , pero no en ambos, la gráfica es bipartita. Si en algún momento se ve forzado a colocar un vértice en ambos conjuntos  $V_1$  y  $V_2$ , la gráfica no es bipartita.

**Sección de ejercicios de repaso**

1. Defina *gráfica no dirigida*.
2. Dé un ejemplo de algo en la vida real que se pueda modelar por medio de una gráfica no dirigida.
3. Defina *gráfica dirigida*.
4. Dé un ejemplo de algo en la vida real que se pueda modelar por medio de una gráfica dirigida.
5. ¿Qué significa para una arista ser *incidente sobre un vértice*?
6. ¿Qué significa para un vértice ser *incidente sobre una arista*?
7. ¿Qué significa para  $v$  y  $w$  ser *vértices adyacentes*?
8. ¿Qué son aristas paralelas?
9. ¿Qué es un lazo?
10. ¿Qué es un vértice aislado?
11. ¿Qué es una gráfica simple?
12. ¿Qué es una gráfica ponderada?
13. Dé un ejemplo de algo en la vida real que se pueda modelar por medio de una gráfica ponderada.
14. Defina la *longitud de una trayectoria* en una gráfica ponderada.
15. ¿Qué es una gráfica de similitud?

16. Defina un *cubo- $n$* .
17. ¿Qué es una computadora serial?
18. ¿Qué es un algoritmo serial?
19. ¿Qué es una computadora paralela?
20. ¿Qué es un algoritmo paralelo?

21. ¿Qué es una gráfica completa sobre  $n$  vértices? ¿Cómo se denota?
22. Defina *gráfica bipartita*.
23. ¿Qué es una gráfica bipartita completa sobre  $m$  y  $n$  vértices? ¿Cómo se denota?

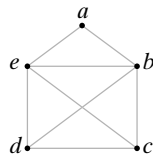
## Ejercicios

En un torneo, el Nieve venció a los Faisanes una vez, el Rascacielos venció al Tuna una vez, el Nieve venció al Rascacielos dos veces, los Faisanes vencieron al Tuna una vez y los Faisanes vencieron al Rascacielos una vez. En los ejercicios 1 al 4, use una gráfica para modelar el torneo. Los equipos son los vértices. Describa el tipo de gráfica usada (no dirigida, dirigida, simple).

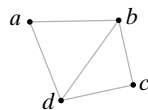
1. Hay una arista entre los equipos si los equipos jugaron.
2. Hay una arista entre los equipos para cada juego jugado.
3. Hay una arista del equipo  $t_i$  al equipo  $t_j$  si  $t_i$  venció a  $t_j$  al menos una vez.
4. Hay una arista del equipo  $t_i$  al equipo  $t_j$  por cada victoria de  $t_i$  sobre  $t_j$ .

Explique por qué ninguna gráfica en los ejercicios 5 al 7 tiene una trayectoria del vértice a al vértice a que pasa por cada arista justo una vez.

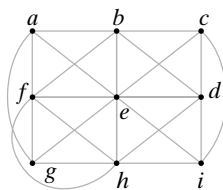
5.



6.

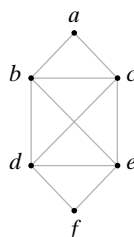


7.

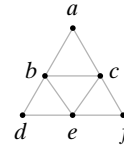


Pruebe que cada gráfica en los ejercicios 8 al 10 tiene una trayectoria del vértice a al vértice a que pasa por cada arista justo una vez, encontrando la trayectoria por inspección.

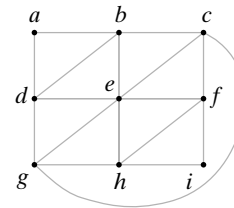
8.



9.

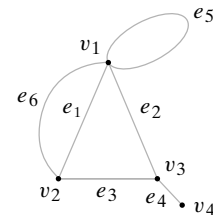


10.

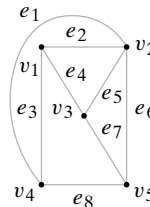


Para cada gráfica  $G = (V, E)$  en los ejercicios 11 al 13, encuentre  $V$ ,  $E$ , todas las aristas paralelas, lazos, vértices aislados, y diga si  $G$  es una gráfica simple. Además, diga sobre qué vértices incide la arista  $e_1$ .

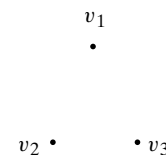
11.



12.



13.



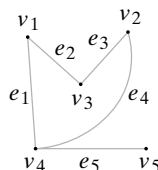
14. Dibuje  $K_3$  y  $K_5$ .

15. Encuentre una fórmula para el número de aristas en  $K_n$ .

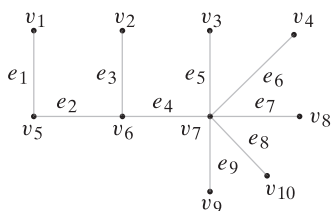
16. Dé un ejemplo de una gráfica bipartita diferente de los ejemplos de esta sección. Especifique los conjuntos ajenos de vértices.

Determine qué gráficas en los ejercicios 17 al 23 son bipartitas. Si la gráfica es bipartita, especifique los conjuntos ajenos de vértices.

17.



18.



19. Figura 8.1.2

20. Figura 8.1.5

21. Ejercicio 11

22. Ejercicio 12

23. Ejercicio 13

24. Dibuje  $K_{2,3}$  y  $K_{3,3}$ .

25. Encuentre una fórmula para el número de aristas en  $K_{m,n}$ .

26. Muchos autores requieren que  $V_1$  y  $V_2$  sean no vacíos en la definición 8.1.11. Según estos autores, ¿cuáles gráficas en los ejemplos 8.1.12 a 8.1.14 son bipartitas?

En los ejercicios 27 al 29, encuentre una trayectoria de longitud mínima de  $v$  a  $w$  en la gráfica de la figura 8.1.7 que pase por cada vértice exactamente una vez.

27.  $v = b, w = e$

28.  $v = c, w = d$

29.  $v = a, w = b$

30. Paul Erdős (1913–1996) fue uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos. Fue autor o coautor en cerca de 1500 artículos. Se dice que los matemáticos que trabajaron en un artículo con Erdős tienen un *número de Erdős de uno*. Los matemáticos que no son coautores con Erdős pero que publicaron con un matemático que tiene número de Erdős de uno, tienen un *número de Erdős de dos*. Los números de Erdős mayores se definen de manera similar. Por ejemplo, el autor de este libro tiene un número de Erdős de cinco. Johnsonbaugh es coautor de un artículo con Tadao Murata, quien es coautor con A. T. Amin; Amin es coautor con Peter J. Slater; Slater es coautor con Frank Harary; y Harary es coautor de un artículo con Erdős. Desarrolle un modelo de gráficas para los números de Erdős. En su modelo, ¿qué es un número de Erdős?

31. El modelo de gráficas para los números de Bacon (vea el ejemplo 8.1.6), ¿es una gráfica simple?

32. Dibuje la gráfica de similitud que se obtiene al hacer  $S = 40$  en el ejemplo 8.1.7. ¿Cuántas clases hay?

33. Dibuje la gráfica de similitud que se obtiene al hacer  $S = 50$  en el ejemplo 8.1.7. ¿Cuántas clases hay?

34. En general, ¿“es similar a” es una relación de equivalencia?

35. Sugiera propiedades adicionales para el ejemplo 8.1.7 que resulten útiles al comparar programas.

36. ¿Cómo se puede automatizar la selección de  $S$  para agrupar datos en clases usando un gráfica de similitud?

37. Dibuje un cubo-2.

38. Haga un dibujo como el de la figura 8.1.11 para mostrar cómo se construye un cubo-3 a partir de dos cubos-2.

39. Pruebe que la construcción recursiva en el ejemplo 8.1.8 de hecho lleva a un cubo- $n$ .

40. ¿Cuántas aristas inciden en un vértice en un cubo- $n$ ?

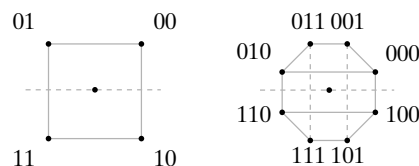
41. ¿Cuántas aristas hay en un cubo- $n$ ?

★42. ¿De cuántas maneras pueden etiquetarse los vértices de un cubo- $n$  como  $0, \dots, 2^n - 1$ , de forma que haya una arista entre dos vértices si y sólo si la representación binaria de sus etiquetas difiere exactamente en un bit.

[Bain] inventó un algoritmo para dibujar el cubo- $n$  en el plano. En el algoritmo, todos los vértices están en el círculo de unidad en el plano  $xy$ . El ángulo de un punto es el ángulo desde el lado positivo del eje  $x$  en sentido contrario a las manecillas del reloj hasta el rayo que va del origen al punto. La entrada es  $n$ .

1. Si  $n = 0$ , se coloca un vértice sin etiqueta en  $(-1, 0)$  y se detiene.
2. Se invoca recursivamente este algoritmo con entrada  $n - 1$ .
3. Se mueve cada vértice para que su nuevo ángulo sea la mitad del actual, manteniendo las aristas conectadas.
4. Se refleja cada vértice y arista respecto al eje  $x$ .
5. Se conecta cada vértice arriba del eje  $x$  con su imagen de espejo abajo del eje  $x$ .
6. Se antepone 0 a las etiquetas de cada vértice arriba del eje  $x$ , y 1 a las etiquetas de los vértices abajo del eje  $x$ .

Las siguientes figuras muestran la manera en que el algoritmo dibuja un cubo-2 y un cubo-3.

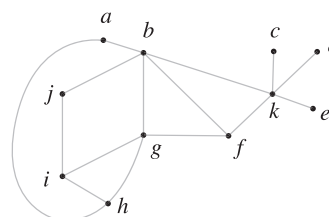


43. Muestre cómo el algoritmo construye el cubo-2 a partir del cubo-1.

44. Muestre cómo el algoritmo construye el cubo-3 a partir del cubo-2.

45. Muestre cómo el algoritmo construye el cubo-4 a partir del cubo-3.

Los ejercicios 46 al 48 se refieren a la siguiente gráfica. Los vértices representan oficinas. Una arista conecta dos oficinas si hay un enlace de comunicación entre las dos. Observe que cualquier oficina se puede comunicar con cualquier otra con un enlace de comunicación directo o haciendo que otros pasen el mensaje.

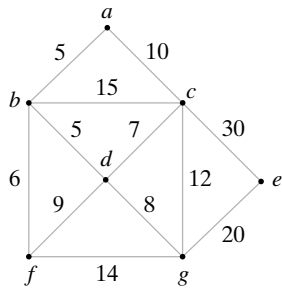


46. Muestre, dando un ejemplo, que la comunicación entre las oficinas es posible aun cuando se rompan algunos enlaces de comunicación.

47. ¿Cuál es el número máximo de enlaces de comunicación que se pueden romper teniendo todavía comunicación entre todas las oficinas?

48. Muestre una configuración en la que se rompió el número máximo de enlaces de comunicación y todavía es posible la comunicación entre todas las oficinas.

49. En la siguiente gráfica los vértices representan ciudades y los números sobre las aristas son los costos de construir las carreteras indicadas. Encuentre el sistema de carreteras menos costoso que conecte todas las ciudades.



En una gráfica de precedencias, los vértices modelan ciertas acciones. Por ejemplo, un vértice puede modelar una instrucción en un programa de computadora.

Hay una arista del vértice  $v$  al vértice  $w$  si la acción modelada por  $v$  debe ocurrir antes que la acción modelada por  $w$ . Dibuje una gráfica de precedencias para cada programa de computadora en los ejercicios 50 al 52.

50.  $x = 1$   
 $y = 2$   
 $z = x + y$   
 $z = z + 1$

51.  $x = 1$   
 $y = 2$   
 $z = y + 2$   
 $w = x + 5$   
 $x = z + w$

52.  $x = 1$   
 $y = 2$   
 $z = 3$   
 $a = x + y$   
 $b = y + z$   
 $c = x + z$   
 $c = c + 1$   
 $x = a + b + c$

## 8.2 → Trayectorias y ciclos

Si se piensa en los vértices de una gráfica como ciudades y las aristas como carreteras, una trayectoria (o ruta) corresponde a un viaje que comienza en alguna ciudad, pasa por varias ciudades y termina en alguna otra. Comenzaremos por dar una definición formal de trayectoria.

### Definición 8.2.1 ►

Sean  $v_0$  y  $v_n$  vértices en una gráfica. Una *trayectoria* de  $v_0$  a  $v_n$  de longitud  $n$  es una sucesión alternante de  $n + 1$  vértices y  $n$  aristas que comienza en el vértice  $v_0$  y termina en el vértice  $v_n$ ,

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n),$$

donde la arista  $e_i$  es incidente sobre los vértices  $v_{i-1}$  y  $v_i$  para  $i = 1, \dots, n$ .

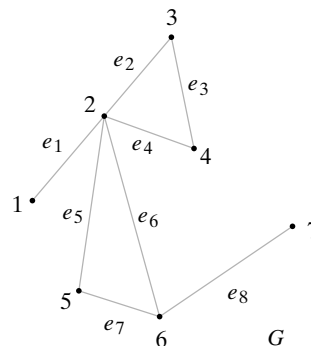
El formalismo en la definición 8.2.1 significa: Comience en el vértice  $v_0$ ; recorra la arista  $e_1$  hasta  $v_1$ ; siga por la arista  $e_2$  hasta  $v_2$ , y así sucesivamente.

### Ejemplo 8.2.2 ►

En la gráfica de la figura 8.2.1,

$$(1, e_1, 2, e_2, 3, e_3, 4, e_4, 2) \quad (8.2.1)$$

es una trayectoria de longitud 4 del vértice 1 al vértice 2.



**Figura 8.2.1** Gráfica conexa con trayectorias  $(1, e_1, 2, e_2, 3, e_3, 4, e_4, 2)$  de longitud 4 y  $(6)$  de longitud 0.

**Ejemplo 8.2.3 ►**

En la gráfica de la figura 8.2.1, la trayectoria (6) que consiste sólo en el vértice 6 es una trayectoria de longitud 0 del vértice 6 al vértice 6. ◀

En ausencia de aristas paralelas, al denotar una trayectoria se pueden suprimir las aristas. Por ejemplo, la trayectoria (8.2.1) también se puede escribir

$$(1, 2, 3, 4, 2).$$

Una **gráfica conexa** es una gráfica en la que se puede ir de cualquier vértice a cualquier otro vértice por una trayectoria. A continuación se da la definición formal.

**Definición 8.2.4 ►**

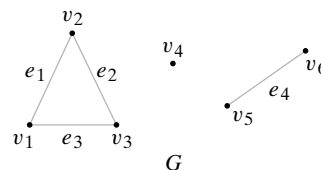
Una gráfica  $G$  es *conexa* si dados cualesquiera dos vértices  $v$  y  $w$  en  $G$ , existe una trayectoria de  $v$  a  $w$ . ◀

**Ejemplo 8.2.5 ►**

La gráfica  $G$  de la figura 8.2.1 es conexa ya que, dados cualesquiera dos vértices  $v$  y  $w$  en  $G$ , existe una trayectoria de  $v$  a  $w$ . ◀

**Ejemplo 8.2.6 ►**

La gráfica  $G$  de la figura 8.2.2 no es conexa ya que, por ejemplo, no hay trayectoria del vértice  $v_2$  al vértice  $v_5$ .



**Figura 8.2.2** Gráfica no conexa. ◀

**Ejemplo 8.2.7 ►**

Sea  $G$  una gráfica cuyo conjunto de vértices consiste en los 50 estados de Estados Unidos. Coloque una arista entre los estados  $v$  y  $w$  con una frontera común. Por ejemplo, hay una arista entre California y Oregon y entre Illinois y Missouri. No hay arista entre Georgia y Nueva York, como tampoco entre Utah y Nuevo México. (No cuenta si se tocan; los estados deben tener una frontera común). La gráfica  $G$  no es conexa porque no hay trayectoria de Hawái a California (o de Hawái a cualquier otro estado). ◀

Como se ve a partir de las figuras 8.2.1 y 8.2.2, una gráfica conexa es de una “pieza”, mientras que una gráfica no conexa consiste en varias “piezas”. Estas “piezas” son **subgráficas** de la gráfica original y se llaman **componentes**. Se darán las definiciones formales comenzando con la de subgráfica.

Una subgráfica  $G'$  de una gráfica  $G$  se obtiene seleccionando ciertas aristas y vértices de  $G$  sujetas a la restricción de que si se selecciona una arista  $e$  en  $G$  que incide en los vértices  $v$  y  $w$ , deben incluirse  $v$  y  $w$  en  $G'$ . La restricción asegura que  $G'$  sea de hecho una gráfica. La siguiente es la definición formal.

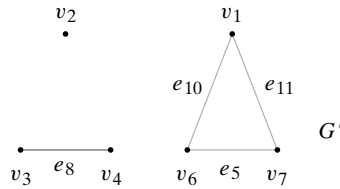
**Definición 8.2.8 ►**

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica.  $(V', E')$  es una *subgráfica* de  $G$  si

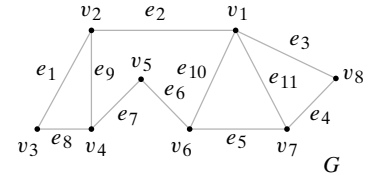
- $V' \subseteq V$  y  $E' \subseteq E$ .
- Para toda arista  $e' \in E'$ , si  $e'$  incide en  $v'$  y  $w'$ , entonces  $v', w' \in V'$ . ◀

**Ejemplo 8.2.9 ►**

La gráfica  $G' = (V', E')$  de la figura 8.2.3 es una subgráfica de la gráfica  $G = (V, E)$  de la figura 8.2.4 puesto que  $V' \subseteq V$  y  $E' \subseteq E$ .



**Figura 8.2.3** Una subgráfica de la gráfica de la figura 8.2.4.

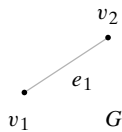


**Figura 8.2.4** Gráfica, una de cuyas subgráficas aparece en la figura 8.2.3.

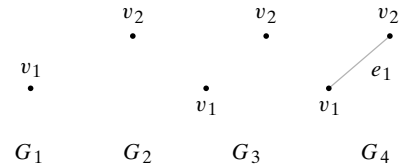
### Ejemplo 8.2.10 ►

Encuentre todas las subgráficas de la gráfica  $G$  de la figura 8.2.5 que tengan al menos un vértice.

Si no se seleccionan aristas, se puede seleccionar uno o los dos vértices, lo que lleva a las subgráficas  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$  mostradas en la figura 8.2.6. Si se selecciona la única arista disponible  $e_1$ , deben seleccionarse los dos vértices en los que  $e_1$  es incidente. En este caso, se obtiene la subgráfica  $G_4$  de la figura 8.2.6. Entonces  $G$  tiene las cuatro subgráficas mostradas en la figura 8.2.6.



**Figura 8.2.5** Gráfica para el ejemplo 8.2.10.



**Figura 8.2.6** Las cuatro subgráficas de la gráfica de la figura 8.2.5.

Ahora se definirá “componente”.

### Definición 8.2.11 ►

Sea  $G$  una gráfica y sea  $v$  un vértice en  $G$ . La subgráfica  $G'$  de  $G$  que consiste en todas las aristas y vértices de  $G$  que están contenidos en alguna trayectoria que comienza en  $v$  se llama *componente* de  $G$  que contiene a  $v$ .

### Ejemplo 8.2.12 ►

La gráfica  $G$  de la figura 8.2.1 tiene una componente, a saber, ella misma. Sin duda, una gráfica es conexa si y sólo si tiene exactamente una componente.

### Ejemplo 8.2.13 ►

Sea  $G$  la gráfica de la figura 8.2.2. La componente de  $G$  que contiene a  $v_3$  es la subgráfica

$$G_1 = (V_1, E_1), \quad V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad E_1 = \{e_1, e_2, e_3\}.$$

La componente de  $G$  que contiene a  $v_4$  es la subgráfica

$$G_2 = (V_2, E_2), \quad V_2 = \{v_4\}, \quad E_2 = \emptyset.$$

La componente de  $G$  que contiene a  $v_5$  es la subgráfica

$$G_3 = (V_3, E_3), \quad V_3 = \{v_5, v_6\}, \quad E_3 = \{e_4\}.$$

Otra caracterización de las componentes de una gráfica  $G = (V, E)$  se obtiene al definir una relación  $R$  en el conjunto de vértices  $V$  mediante la regla

$$v_1 R v_2 \text{ si hay una trayectoria de } v_1 \text{ a } v_2.$$

Es posible demostrar (ejercicio 68) que  $R$  es una relación de equivalencia en  $V$  y que si  $v \in V$ , el conjunto de vértices en la componente que contiene a  $v$  es la clase de equivalencia

$$[v] = \{w \in V \mid w R v\}.$$

Observe que la definición de “trayectoria” permite repeticiones de vértices o aristas, o ambos. En la trayectoria (8.2.1), el vértice 2 aparece dos veces.

Las subclases de trayectorias se obtienen prohibiendo vértices o aristas duplicados o haciendo idénticos los vértices  $v_0$  y  $v_n$  de la definición 8.2.1.

**Definición 8.2.14** ▶

Sean  $v$  y  $w$  vértices en una gráfica  $G$ .  
Una *trayectoria simple* de  $v$  a  $w$  es una ruta de  $v$  a  $w$  sin vértices repetidos.  
Un *ciclo* (o *circuito*) es una trayectoria de longitud diferente de cero de  $v$  a  $v$  sin aristas repetidas.  
Un *ciclo simple* es un ciclo de  $v$  a  $v$  en el que no hay vértices repetidos, excepto por el inicio y el fin que son iguales a  $v$ . ◀

**Ejemplo 8.2.15** ▶

Para la gráfica de la figura 8.2.1, se tiene la siguiente información.

Trayectoria	¿Trayectoria simple?	¿Ciclo?	¿Ciclo simple?
(6, 5, 2, 4, 3, 2, 1)	No	No	No
(6, 5, 2, 4)	Sí	No	No
(2, 6, 5, 2, 4, 3, 2)	No	Sí	No
(5, 6, 2, 5)	No	Sí	Sí
(7)	Sí	No	No

Ahora se examina de nuevo el problema introducido en la sección 8.1 de encontrar en una gráfica un ciclo que recorre cada arista exactamente una vez. ◀

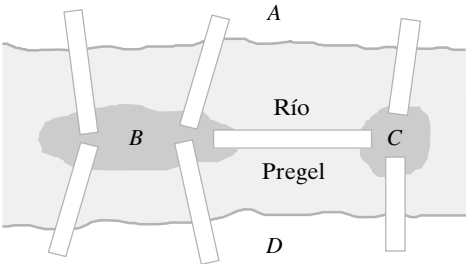
**Ejemplo 8.2.16** ▶

**Problema de los puentes de Königsberg**

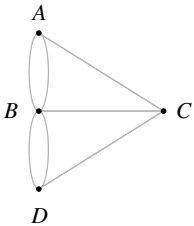
El primer artículo referente a la teoría de gráficas fue de Leonhard Euler en 1736. El artículo presentaba una teoría general que incluía una solución a lo que ahora se llama el problema de los puentes de Königsberg.

WWW Dos islas en el río Pregel en Königsberg (ahora Kaliningrado en Rusia) estaban conectadas entre sí y con las orillas de río por puentes, como se aprecia en la figura 8.2.7. El problema es comenzar en cualquier lugar:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  o  $D$ ; cruzar cada puente exactamente una vez; luego regresar al lugar de inicio.

La configuración de los puentes se puede modelar como una gráfica, como se ve en la figura 8.2.8. Los vértices representan los lugares y las aristas representan los puentes. El problema de los puentes de Königsberg ahora se reduce a encontrar un ciclo en la gráfica de la figura 8.2.8 que incluya todas las aristas y todos los vértices. En honor a Euler, un ciclo en una gráfica  $G$  que incluye todas las aristas y todos los vértices de  $G$  se llama **ciclo de Euler**<sup>†</sup>. A partir del análisis en la sección 8.1, se ve que no hay un ciclo de Euler en la gráfica de la figura 8.2.8 porque hay un número impar de aristas incidentes en el vértice  $A$ . (De hecho, en la gráfica de la figura 8.2.8, cada vértice es incidente en un número impar de aristas).



**Figura 8.2.7** Los puentes de Königsberg.



**Figura 8.2.8** Gráfica que modela los puentes de Königsberg. ◀

<sup>†</sup> Por razones técnicas, si  $G$  consiste en un vértice  $v$  sin aristas, llamamos a la trayectoria ( $v$ ) un ciclo de Euler para  $G$ .



La solución a la existencia de ciclos de Euler se establece mejor con la introducción del grado de un vértice. El **grado de un vértice**  $v$ ,  $\delta(v)$ , es el número de aristas que inciden en  $v$ . (Por definición, cada ciclo sobre  $v$  contribuye con 2 al grado de  $v$ ). En la sección 8.1 se encontró que si una gráfica  $G$  tiene un ciclo de Euler, entonces todo vértice en  $G$  tiene grado par. También es posible probar que  $G$  es conexa.

### Teorema 8.2.17

*Si una gráfica  $G$  tiene un ciclo de Euler, entonces  $G$  es conexa y todo vértice tiene grado par.*

**Demostración** Suponga que  $G$  tiene un ciclo de Euler. Se argumentó en la sección 8.1 que todo vértice en  $G$  tiene grado par. Si  $v$  y  $w$  son vértices en  $G$ , la porción del ciclo de Euler que lleva de  $v$  a  $w$  sirve como trayectoria de  $v$  a  $w$ . Por lo tanto,  $G$  es conexa.

El inverso del Teorema 8.2.17 también es cierto. Se da una prueba por inducción matemática que ideó [Fowler].

### Teorema 8.2.18

*Si  $G$  es una gráfica conexa y cada vértice tiene grado par, entonces  $G$  tiene un ciclo de Euler.*

**Demostración** La prueba se hace por inducción sobre el número  $n$  de aristas en  $G$ .

#### Paso básico ( $n = 0$ )

Como  $G$  es conexa, si  $G$  no tiene aristas,  $G$  consiste en un solo vértice. Un ciclo de Euler consiste en un solo vértice, sin aristas.

#### Paso inductivo

Suponga que  $G$  tiene  $n$  aristas,  $n > 0$ , y que cualquier gráfica conexa con  $k$  aristas,  $k < n$ , donde todos los vértices tienen grado par tiene un ciclo de Euler.

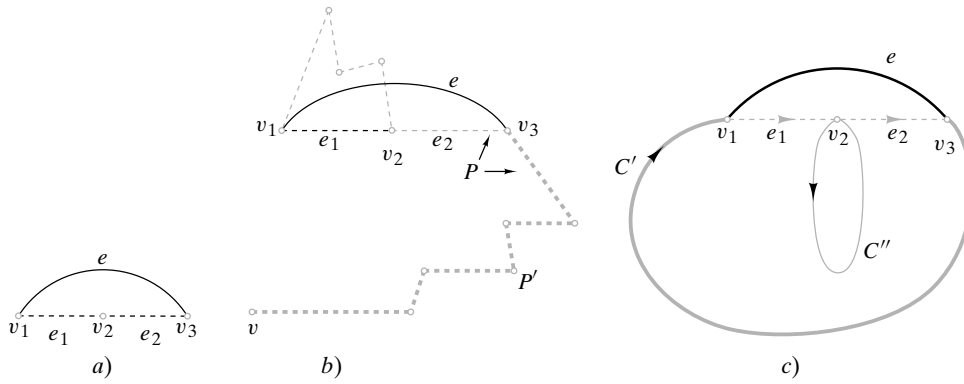
Es directo verificar que una gráfica conexa con uno o dos vértices, cada uno con grado par, tiene un ciclo de Euler (vea el ejercicio 69); entonces, se supone que la gráfica tiene al menos tres vértices.

Como  $G$  es conexa, hay vértices  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  en  $G$  con la arista  $e_1$  incidente en  $v_1$  y  $v_2$  y la arista  $e_2$  que incide en  $v_2$  y  $v_3$ . Se eliminan las aristas  $e_1$  y  $e_2$  pero no los vértices, y se agrega la arista  $e$  incidente en  $v_1$  y  $v_3$  para obtener la gráfica  $G'$  [vea la figura 8.2.9a)]. Observe que cada componente de la gráfica  $G'$  tiene menos de  $n$  aristas y que en cada componente de la gráfica  $G'$ , todos los vértices tienen grado par. Se demostrará que  $G'$  tiene ya sea una o dos componentes.

Sea  $v$  un vértice. Como  $G$  es conexa, existe una trayectoria  $P$  en  $G$  de  $v$  a  $v_1$ . Sea  $P'$  una porción de la trayectoria  $P$  que comienza en  $v$  cuyas aristas también están en  $G'$ . Ahora bien,  $P'$  termina en  $v_1$ ,  $v_2$  o  $v_3$  porque la única manera de que  $P$  no sea una trayectoria en  $G'$  es que  $P$  contenga una de las aristas eliminadas  $e_1$  o  $e_2$ . Si  $P'$  termina en  $v_1$ , entonces  $v$  está en la misma componente que  $v_1$  en  $G'$ . Si  $P'$  termina en  $v_3$  [vea figura 8.2.9b)], entonces  $v$  está en la misma componente que  $v_3$  en  $G'$ , que está en la misma componente que  $v_1$  en  $G'$  (ya que la arista  $e$  en  $G'$  incide en  $v_1$  y  $v_3$ ). Si  $P'$  termina en  $v_2$ , entonces  $v_2$  está en la misma componente que  $v$ . Por lo tanto, cualquier vértice en  $G'$  está en la misma componente que  $v_1$  o que  $v_2$ . Entonces,  $G'$  tiene una o dos componentes.

Si  $G'$  tiene una componente, es decir, si  $G'$  es conexa, se aplica la hipótesis inductiva para concluir que  $G'$  tiene un ciclo de Euler  $C'$ . Este ciclo de Euler se puede modificar para producir un ciclo de Euler en  $G$ . Simplemente se sustituye la ocurrencia de la arista  $e$  en  $C'$  por las aristas  $e_1$  y  $e_2$ .

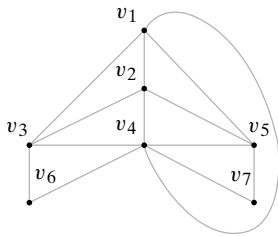
Suponga que  $G'$  tiene dos componentes [vea la figura 8.2.9c)]. Por la hipótesis inductiva, la componente que contiene a  $v_1$  tiene un ciclo de Euler  $C'$  y la componente que contiene a  $v_2$  tiene un ciclo de Euler  $C''$  que comienza y termina en  $v_2$ . Un ciclo de Euler en  $G$  se obtiene al modificar  $C'$  sustituyendo  $(v_1, v_3)$  en  $C'$  por  $(v_1, v_2)$  seguido de  $C''$  seguido de  $(v_2, v_3)$  o sustituyendo  $(v_3, v_1)$  en  $C'$  por  $(v_3, v_2)$  seguido de  $C''$  seguido de  $(v_2, v_1)$ . El paso inductivo queda completo.  $G$  es un ciclo de Euler.



**Figura 8.2.9** La prueba del Teorema 8.2.18. En *a*), se eliminan las aristas  $e_1$  y  $e_2$  y se agrega la arista  $e$ . En *b*),  $P$  (discontinua clara) es una trayectoria en  $G$  de  $v$  a  $v_1$ , y  $P'$  (discontinua gruesa) es la porción de  $P$  que inicia en  $v$  cuyas aristas también están en  $G'$ . Como se muestra,  $P'$  termina en  $v_3$ . Como la arista  $e$  está en  $G$ , hay una trayectoria en  $G'$  de  $v$  a  $v_1$ . Entonces  $v$  y  $v_1$  están en la misma componente. En *c*),  $C'$  es un ciclo de Euler para una componente, y  $C''$  es un ciclo de Euler para la otra componente. Si se sustituye  $e$  en  $C'$  por  $e_1, C''$ ,  $e_2$ , se obtiene un ciclo de Euler para  $G$ .

Si  $G$  es una gráfica conexa y todo vértice tiene grado par y  $G$  tiene sólo unas cuantas aristas, casi siempre se encuentra un ciclo de Euler por inspección.

### Ejemplo 8.2.19 ►



**Figura 8.2.10** Gráfica para el ejemplo 8.2.19.

Sea  $G$  la gráfica de la figura 8.2.10. Use el Teorema 8.2.18 para verificar que  $G$  tiene un ciclo de Euler. Encuentre un ciclo de Euler para  $G$ .

Se observa que  $G$  es conexa y que

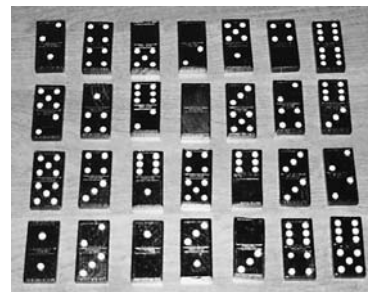
$$\delta(v_1) = \delta(v_2) = \delta(v_3) = \delta(v_5) = 4, \quad \delta(v_4) = 6, \quad \delta(v_6) = \delta(v_7) = 2.$$

Como el grado de cada vértice es par, por el Teorema 8.2.18,  $G$  tiene un ciclo de Euler. Por inspección, se encuentra el ciclo de Euler

$$(v_6, v_4, v_7, v_5, v_1, v_3, v_4, v_1, v_2, v_5, v_4, v_2, v_3, v_6).$$

### Ejemplo 8.2.20 ►

Una ficha de dominó es un rectángulo dividido en dos cuadrados, cada uno con un número comprendido entre el 0 y el 6 (vea la figura 8.2.11). Los dos cuadrados en una misma ficha pueden tener el mismo número. Se demuestra que las diferentes fichas se pueden arreglar en un círculo de manera que las fichas que se tocan tengan cuadrados adyacentes con números idénticos.



**Figura 8.2.11** Dominó. [Foto del autor].

Se modela la situación como una gráfica  $G$  con siete vértices etiquetados  $0, 1, \dots, 6$ . Las aristas representan las fichas. Hay una arista entre cada par de vértices y hay un ciclo en cada vértice. Note que  $G$  es conexa. Ahora las fichas se pueden arreglar en un círculo de manera que las que se tocan tengan cuadrados adyacentes con números idénticos si y sólo

si  $G$  contiene un ciclo de Euler. Como el grado de cada vértice es 8 (recuerde que un ciclo contribuye con 2 al grado), cada vértice tiene grado par. Por el teorema 8.2.18,  $G$  tiene un ciclo de Euler. Por lo tanto, las fichas de dominó se pueden arreglar en círculo de manera que las que se tocan tengan cuadrados adyacentes con números idénticos. ◀

¿Qué se podría decir de una gráfica conexa en la que no todos los vértices tienen grado par? La primera observación (corolario 8.2.22) es que existe un número par de vértices con grado impar. Esto se deriva del hecho de que (Teorema 8.2.21) la suma de todos los grados en una gráfica es un número par.

### Teorema 8.2.21

Si  $G$  es una gráfica con  $m$  aristas y vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , entonces

$$\sum_{i=1}^n \delta(v_i) = 2m.$$

En particular, la suma de los grados de todos los vértices en una gráfica es par.

**Demostración** Cuando se suman los grados de todos los vértices, se cuenta cada arista  $(v_i, v_j)$  dos veces: una cuando se cuenta como  $(v_i, v_j)$  en los grados de  $v_i$  y de nuevo cuando se cuenta como  $(v_j, v_i)$  en los grados de  $v_j$ . Esto lleva a la conclusión.

### Corolario 8.2.22

En una gráfica, existe un número par de vértices de grado impar.

**Demostración** Se dividen los vértices en dos grupos: los de grado par  $x_1, \dots, x_m$  y los de grado impar  $y_1, \dots, y_n$ . Sea

$$S = \delta(x_1) + \delta(x_2) + \dots + \delta(x_m), \quad T = \delta(y_1) + \delta(y_2) + \dots + \delta(y_n).$$

Por el Teorema 8.2.21,  $S + T$  es par. Como  $S$  es la suma de números pares,  $S$  es par. Entonces  $T$  es par. Pero  $T$  es la suma de  $n$  números impares, y por lo tanto,  $n$  es par.

Suponga que una gráfica conexa  $G$  tiene exactamente dos vértices  $v$  y  $w$  de grado impar. Temporalmente se inserta una arista  $e$  de  $v$  a  $w$ . La gráfica  $G'$  que se obtiene es conexa y cada vértice tiene grado par. Por el Teorema 8.2.18,  $G'$  tiene un ciclo de Euler. Si se elimina  $e$  de este ciclo de Euler, se obtiene una trayectoria sin aristas repetidas de  $v$  a  $w$  que contiene todas las aristas y vértices de  $G$ . Se demostró que si una gráfica tiene exactamente dos vértices  $v$  y  $w$  de grado impar, existe una trayectoria con aristas repetidas que contiene todas las aristas y vértices de  $v$  a  $w$ . La demostración del inverso es similar.

### Teorema 8.2.23

Una gráfica tiene una trayectoria sin aristas repetidas de  $v$  a  $w$  ( $v \neq w$ ) que contiene todas las aristas y vértices si y sólo si es conexa y  $v$  y  $w$  son los únicos vértices que tienen grado impar.

**Demostración** Suponga que una gráfica tiene una trayectoria  $P$  sin aristas repetidas de  $v$  a  $w$  que contiene todas las aristas y vértices. Sin duda, la gráfica es conexa. Si se agrega una arista de  $v$  a  $w$ , la gráfica resultante tiene un ciclo de Euler, a saber, la trayectoria  $P$  junto con la arista agregada. Por el Teorema 8.2.17, cada vértice tiene grado par. Eliminar la arista agregada afecta sólo los grados de  $v$  y  $w$ , que se reducen en 1. Entonces, en la trayectoria original,  $v$  y  $w$  tienen grado impar y todos los otros vértices tienen grado par.

El inverso se analizó antes de enunciar el teorema.

En los ejercicios 42 y 44 se dan generalizaciones del Teorema 8.2.23.

Se concluye con la prueba de un resultado bastante especial que se usará en la sección 9.2.

**Teorema 8.2.24**

Si una gráfica  $G$  contiene un ciclo de  $v$  a  $v$ ,  $G$  contiene un ciclo simple de  $v$  a  $v$ .

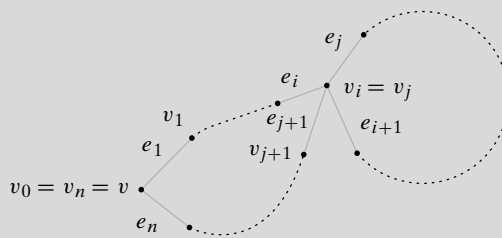
**Demostración** Sea

$$C = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i, e_{i+1}, \dots, e_j, v_j, e_{j+1}, v_{j+1}, \dots, e_n, v_n)$$

un ciclo de  $v$  a  $v$  donde  $v = v_0 = v_n$  (figura 8.2.12). Si  $C$  no es un ciclo simple, entonces  $v_i = v_j$  para alguna  $i < j < n$ . Se puede sustituir  $C$  por el ciclo

$$C' = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i, e_{j+1}, v_{j+1}, \dots, e_n, v_n).$$

Si  $C'$  no es un ciclo simple de  $v$  a  $v$ , se repite el procedimiento anterior. En algún momento se obtiene un ciclo simple de  $v$  a  $v$ .



**Figura 8.2.12** Ciclo que, o bien es simple, o se puede reducir a un ciclo simple.

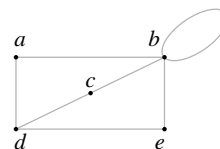
## Sección de ejercicios de repaso

- ¿Qué es una trayectoria?
- ¿Qué es una trayectoria simple?
- Dé un ejemplo de una trayectoria que no sea simple.
- ¿Qué es un ciclo?
- ¿Qué es un ciclo simple?
- Dé un ejemplo de un ciclo que no sea simple.
- Defina *gráfica conexa*.
- Dé un ejemplo de una gráfica conexa.
- Dé un ejemplo de una gráfica no conexa.
- ¿Qué es una subgráfica?
- Dé un ejemplo de una subgráfica.
- ¿Qué es una componente de una gráfica?
- Dé un ejemplo de una componente de una gráfica.
- Si una gráfica es conexa, ¿cuántas componentes debe tener?
- Defina *grado de un vértice*  $v$ .
- ¿Qué es un ciclo de Euler?
- Establezca una condición necesaria y suficiente para que una gráfica tenga un ciclo de Euler.
- Dé un ejemplo de una gráfica que tenga un ciclo de Euler. Especifique el ciclo de Euler.
- Dé un ejemplo de una gráfica que *no* tenga un ciclo de Euler. Pruebe que no tiene un ciclo de Euler.
- ¿Cuál es la relación entre la suma de los grados de los vértices en una gráfica y el número de aristas en la gráfica?
- En una gráfica, ¿debe ser par el número de vértices de grado impar?
- Establezca una condición necesaria y suficiente para que una gráfica tenga una trayectoria sin aristas repetidas de  $v$  a  $w$  ( $v \neq w$ ) que contenga todas las aristas y vértices.
- Si una gráfica  $G$  contiene un ciclo de  $v$  a  $v$ , ¿debe  $G$  contener un ciclo simple de  $v$  a  $v$ ?

## Ejercicios

En los ejercicios 1 al 9, diga si la trayectoria indicada en la gráfica es

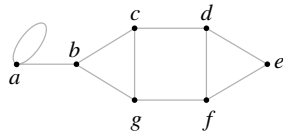
- una trayectoria simple,
- un ciclo,
- un ciclo simple.



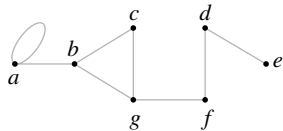
1.  $(b, b)$
2.  $(e, d, c, b)$
3.  $(a, d, c, d, e)$
4.  $(d, c, b, e, d)$
5.  $(b, c, d, a, b, e, d, c, b)$
6.  $(b, c, d, e, b, b)$
7.  $(a, d, c, b, e)$
8.  $(d)$
9.  $(d, c, b)$

En los ejercicios 10 al 18, dibuje una gráfica que tenga las propiedades indicadas o explique por qué no existe esa gráfica.

10. Seis vértices cada uno de grado 3
11. Cinco vértices cada uno de grado 3
12. Cuatro vértices cada uno de grado 1
13. Seis vértices; cuatro aristas
14. Cuatro aristas; cuatro vértices de grados 1, 2, 3, 4
15. Cuatro vértices con grados 1, 2, 3, 4
16. Gráfica simple; seis vértices con grados 1, 2, 3, 4, 5, 5
17. Gráfica simple; cinco vértices con grados 2, 3, 3, 4, 4
18. Gráfica simple; cinco vértices con grados 2, 2, 4, 4, 4
19. Encuentre todas las trayectorias simples en la siguiente gráfica

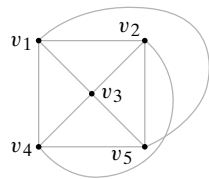


20. Encuentre todas las trayectorias simples de  $a$  a  $e$  en la gráfica del ejercicio 19.
21. Encuentre todas las subgráficas conexas de la siguiente gráfica, que contengan todos los vértices de la gráfica original y tengan tan pocas aristas como sea posible. ¿Cuáles son trayectorias simples? ¿Cuáles son ciclos? ¿Cuáles son ciclos simples?

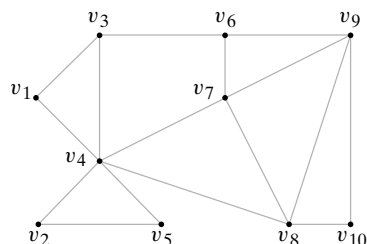


Encuentre el grado de cada vértice para las siguientes gráficas.

22.

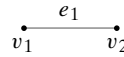


23.

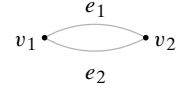


En los ejercicios 24 al 27, encuentre todas las subgráficas que tienen al menos un vértice de la gráfica dada.

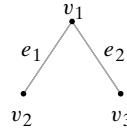
24.



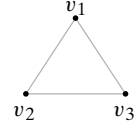
25.



26.



★ 27.



En los ejercicios 28 al 33, decida si las gráficas tienen un ciclo de Euler. Si lo tienen, muestre uno.

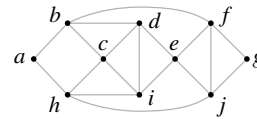
28. Ejercicio 21

29. Ejercicio 22

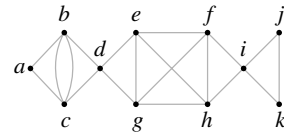
30. Ejercicio 23

31. Figura 8.2.4

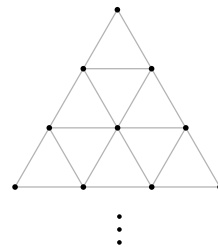
32.



33.



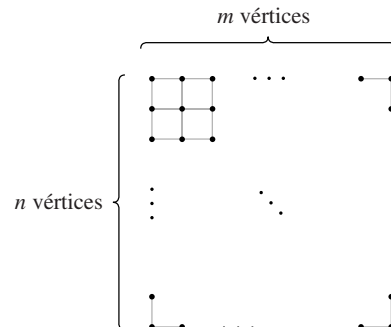
34. La siguiente gráfica se continúa hasta una profundidad finita, arbitraria. ¿Contiene la gráfica un ciclo de Euler? Si la respuesta es afirmativa, describa uno.



35. Una gráfica completa  $K_n$ , ¿cuándo contiene un ciclo de Euler?

36. Una gráfica bipartita  $K_{m,n}$ , ¿cuándo contiene un ciclo de Euler?

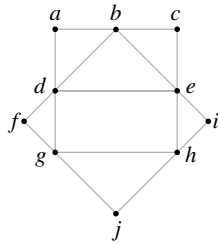
37. ¿Para qué valores de  $m$  y  $n$  una gráfica contiene un ciclo de Euler?



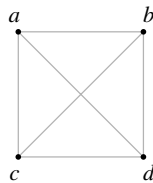
38. ¿Para qué valores de  $n$ , el cubo- $n$  contiene un ciclo de Euler?

En los ejercicios 39 y 40, verifique que hay un número par de vértices de grado impar en la gráfica.

39.



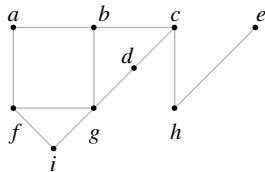
40.



41. Para la gráfica del ejercicio 39, encuentre una trayectoria sin aristas repetidas de  $d$  a  $e$  que contenga todas las aristas.

42. Sea  $G$  una gráfica conexa con cuatro vértices  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$  de grado impar. Demuestre que existen trayectorias sin aristas repetidas de  $v_1$  a  $v_2$  y de  $v_3$  a  $v_4$  tales que cada arista en  $G$  está exactamente en una de las trayectorias.

43. Ilustre el ejercicio 42 usando la siguiente gráfica.



★

44. Establezca y pruebe una generalización del ejercicio 42 donde hay un número arbitrario de vértices de grado impar.

En los ejercicios 45 y 46, diga si cada afirmación es falsa o verdadera. Si es falsa dé un contraejemplo y si es verdadera, explique.

45. Sea  $G$  una gráfica y sean  $v$  y  $w$  vértices distintos. Si hay una trayectoria de  $v$  a  $w$ , existe una trayectoria simple de  $v$  a  $w$ .

46. Si una gráfica contiene un ciclo que incluye todas las aristas, se trata de un ciclo de Euler.

47. Sea  $G$  una gráfica conexa. Suponga que una arista  $e$  está en un ciclo. Demuestre que  $G$  con  $e$  eliminada sigue siendo conexa.

48. Dé un ejemplo de una gráfica conexa tal que la eliminación de cualquier arista produzca una gráfica no conexa. (Suponga que eliminar una arista no implica eliminar los vértices).

49. ¿Puede un caballo moverse en un tablero de ajedrez y regresar a su posición original haciendo cada movimiento exactamente una vez? (Un movimiento se considera hecho cuando se mueve en cualquiera de las dos direcciones).

50. Demuestre que si  $G'$  es una subgráfica conexa de una gráfica  $G$ , entonces  $G'$  está contenida en una componente.

51. Demuestre que si se hace una partición de una gráfica  $G$  en subgráficas conexas de manera que cada arista y cada vértice en  $G$  pertenezca a una de las subgráficas, las subgráficas son componentes.

52. Sea  $G$  una gráfica dirigida y sea  $G'$  la gráfica no dirigida que se obtiene de  $G$  si se ignora la dirección de las aristas. Suponga que  $G$  es conexa. Si  $v$  es un vértice en  $G$ , se dice que la *paridad* de  $v$  es *par* si el número de aristas de la forma  $(v, w)$  es par; la *paridad impar* se define de manera similar. Pruebe que si  $v$  y  $w$  son vértices en  $G$  que tienen paridad impar, es posible cambiar la orientación de ciertas aristas en  $G$  de manera que  $v$  y  $w$  tengan paridad par y la paridad de todos los otros vértices en  $G$  permanezca inalterable.

53. Demuestre que el número máximo de aristas en una gráfica simple, no conexa con  $n$  vértices es  $(n-1)(n-2)/2$ .

54. Demuestre que el número máximo de aristas en una gráfica bipartita simple con  $n$  vértices es  $\lfloor n^2/4 \rfloor$ .

Un vértice  $v$  en una gráfica conexa  $G$  es un punto de articulación si la eliminación de  $v$  y todas las aristas incidentes en  $v$  desconecta a  $G$ .

55. Dé un ejemplo de una gráfica con seis vértices que tenga exactamente dos puntos de articulación.

56. Dé un ejemplo de una gráfica con seis vértices que no tenga puntos de articulación.

57. Demuestre que un vértice  $v$  en una gráfica conexa  $G$  es un punto de articulación si y sólo si existen vértices  $w$  y  $x$  en  $G$  que tengan la propiedad de que toda trayectoria de  $w$  a  $x$  pasa por  $v$ .

Sea  $G$  una gráfica dirigida y sea  $v$  un vértice en  $G$ . El grado de entrada a  $v$ ,  $\text{in}(v)$ , es el número de aristas de la forma  $(w, v)$ . El grado de salida de  $v$ ,  $\text{out}(v)$ , es el número de aristas de la forma  $(v, w)$ . Un ciclo de Euler dirigido en  $G$  es una sucesión de aristas de la forma

$$(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n),$$

donde  $v_0 = v_n$ , cada arista en  $G$  ocurre exactamente una vez, y todos los vértices aparecen.

58. Demuestre que una gráfica dirigida  $G$  contiene un ciclo de Euler dirigido si y sólo si la gráfica no dirigida que se obtiene al ignorar la dirección de las aristas de  $G$  es conexa y además  $\text{in}(v) = \text{out}(v)$  para todo vértice  $v$  en  $G$ .

★  
★

Una sucesión de Bruijn para  $n$  (en ceros y unos) es una sucesión

$$a_1, \dots, a_{2^n}$$

de  $2^n$  bits que tiene la propiedad de que si  $s$  es una cadena de bits de longitud  $n$ , para alguna  $m$ ,

$$s = a_m a_{m+1} \dots a_{m+n-1}. \quad (8.2.2)$$

En (8.2.2), se define  $a_{2^n+i} = a_i$  para  $i = 1, \dots, 2^n - 1$ .

59. Verifique que 00011101 es una sucesión de Bruijn para  $n = 3$ .

60. Sea  $G$  una gráfica dirigida con vértices correspondientes a todas las cadenas de bits de longitud  $n-1$ . Existe una arista dirigida del vértice  $x_1 \dots x_{n-1}$  a  $x_2 \dots x_n$ . Demuestre que un ciclo de Euler dirigido corresponde a la sucesión de Bruijn.

61. Demuestre que existe una sucesión de Bruijn para cada  $n = 1, 2, \dots$ .

62. Una *trayectoria cerrada* es una trayectoria de  $v$  a  $v$ . Demuestre que una gráfica conexa  $G$  es bipartita si y sólo si toda trayectoria cerrada en  $G$  tiene longitud par.

63. ¿Cuántas trayectorias de longitud  $k \geq 1$  hay en  $K_n$ ?

64. Demuestre que hay

$$\frac{n(n-1)[(n-1)^k - 1]}{n-2}$$

trayectorias cuyas longitudes están entre 1 y  $k$ , inclusive, en  $K_n$ ,  $n > 2$ .

65. Sean  $v$  y  $w$  vértices distintos en  $K_n$ . Sea  $p_m$  el número de trayectorias de longitud  $m$  de  $v$  a  $w$  en  $K_n$ ,  $1 \leq m \leq n$ .

- a) Derive una relación de recurrencia para  $p_m$ .  
 b) Encuentre una fórmula explícita para  $p_m$ .

66. Sean  $v$  y  $w$  vértices distintos en  $K_n$ ,  $n \geq 2$ . Demuestre que el número de trayectorias simples de  $v$  a  $w$  es

$$(n-2)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}.$$

- ★ 67. [Requiere cálculo] Demuestre que hay  $\lfloor n!e - 1 \rfloor$  trayectorias simples en  $K_n$ . ( $e = 2.71828 \dots$  es la base del logaritmo natural).  
 68. Sea  $G$  una gráfica. Defina una relación  $R$  en el conjunto  $V$  de vértices de  $G$  como  $vRw$  si hay una trayectoria de  $v$  a  $w$ . Pruebe que  $R$  es una relación de equivalencia en  $V$ .  
 69. Pruebe que una gráfica conexa con uno o dos vértices, cada uno con grado par, tiene un ciclo de Euler.

Sea  $G$  una gráfica conexa. La distancia entre los vértices  $v$  y  $w$  en  $G$ ,  $\text{dist}(v, w)$ , es la longitud de una ruta más corta de  $v$  a  $w$ . El diámetro de  $G$  es

$$d(G) = \max\{\text{dist}(v, w) \mid v \text{ y } w \text{ son vértices en } G\}.$$

70. Encuentre el diámetro de la gráfica de la figura 8.2.10.  
 71. Encuentre el diámetro del cubo- $n$ . En el contexto de computación en paralelo, ¿qué significa este valor?  
 72. Encuentre el diámetro de  $K_n$ , la gráfica completa de  $n$  vértices.  
 73. Demuestre que el número de trayectorias en la siguiente gráfica de  $v_1$  a  $v_2$  de longitud  $n$  es igual al  $(n+1)$ -ésimo número de Fibonacci  $f_{n+1}$ .



74. Sea  $G$  una gráfica simple con  $n$  vértices cada uno con grado  $k$  y

$$k \geq \frac{n-3}{2} \quad \text{si } n \bmod 4 = 1$$

$$k \geq \frac{n-1}{2} \quad \text{si } n \bmod 4 \neq 1.$$

Demuestre que  $G$  es conexa.

Un ciclo en una gráfica dirigida simple [es decir, una gráfica dirigida que tiene cuando mucho una arista de la forma  $(v, w)$  y ninguna arista de la forma  $(w, v)$ ] es una sucesión de tres vértices o más

$$(v_0, v_1, \dots, v_n)$$

en la que  $(v_{i-1}, v_i)$  es una arista para  $i = 1, \dots, n$  y  $v_0 = v_n$ . Una gráfica acíclica dirigida (gad) es una gráfica dirigida simple sin ciclos.

75. Demuestre que una gad tiene el menos un vértice sin aristas que salen [es decir, hay al menos un vértice  $v$  tal que no tiene aristas de la forma  $(v, w)$ ].  
 76. Demuestre que el número máximo de aristas en una gad de  $n$  vértices es  $n(n-1)/2$ .  
 77. Un conjunto independiente en una gráfica  $G$  es un subconjunto  $S$  de los vértices de  $G$  que tienen la propiedad de que hay dos vértices adyacentes en  $S$ . (Observe que  $\emptyset$  es un conjunto independiente para cualquier gráfica). Pruebe el siguiente resultado que se debe a [Prodinger].

Sea  $P_n$  la gráfica que consiste en una trayectoria simple con  $n$  vértices. Pruebe que el número de conjuntos independientes en  $P_n$  es igual a  $f_{n+2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , donde  $\{f_n\}$  es la sucesión de Fibonacci.

78. Sea  $G$  una gráfica. Suponga que para cada par de vértices distintos  $v_1$  y  $v_2$  en  $G$ , existe un vértice único  $w$  en  $G$  tal que  $v_1$  y  $w$  son adyacentes y  $v_2$  y  $w$  son adyacentes.

- a) Pruebe que si  $v$  y  $w$  son vértices no adyacentes en  $G$ , entonces  $\delta(v) = \delta(w)$ .  
 b) Pruebe que si existe un vértice con grado  $k > 1$  y no hay vértices adyacentes a los otros vértices, entonces el grado de cada vértice es  $k$ .

## Rincón de solución de problemas

### Gráficas

#### Problemas

¿Será posible que en un departamento de 25 personas, abrumado por el desacuerdo, cada persona se lleve bien con exactamente cinco personas?

#### Cómo atacar el problema

¿Por dónde empezar? Como este problema está en el capítulo 8, que trata de gráficas, tal vez fuera una buena idea intentar modelarlo como una gráfica. Si el problema no estuviera asociado con una sección o capítulo específico del libro, quizá intentaríamos varios enfoques, uno de los cuales podría ser modelarlo como una gráfica. Muchos problemas discretos se resuelven usando gráficas. Esto no quiere decir que éste sea el único enfoque posible. Muchas veces al tomar enfoques diferentes, el mismo problema se puede resolver de varias maneras. (Un buen ejemplo se encuentra en [Wagon]).

#### Cómo encontrar una solución

Un aspecto fundamental al construir un modelo de gráficas es averiguar de qué gráfica se trata, es decir, cuáles son los vértices y cuáles las aristas. En este problema no hay muchas opciones; existen personas y desacuerdos. Se intentará haciendo que los vértices sean personas. Es muy común que en un modelo de gráficas las aristas indiquen una relación entre los vértices. En este caso la relación es “se lleva bien con”, de manera que se pondrá una arista entre dos vértices (personas) si se llevan bien.

Ahora suponga que cada persona se lleva bien con exactamente otras cinco. Por ejemplo, en la figura que sigue, que muestra parte de la gráfica, Jeremías se lleva con Samanta, Alejandra, Laura, Berenice y Teodoro, y nadie más.





Se deduce que el grado de cada vértice es 5. Ahora se revisará la situación: se tienen 25 vértices y cada uno tiene grado 5. Antes de seguir leyendo, intente determinar si esto es posible.

El corolario 8.2.22 dice que existe un número par de vértices de grado impar. Se tiene una contradicción porque hay un número *impar* de vértices con grado impar. Por lo tanto, no es posible en un departamento con 25 personas abrumadas por el desacuerdo que cada una se lleve bien con exactamente cinco personas.

### Solución formal

No. No es posible que en un departamento con 25 personas abrumadas por el desacuerdo, cada una se lleve bien con exactamente cinco personas. Suponga, a manera de contradicción, que sí es posible. Considere una gráfica donde los vértices son las personas y una arista conecta dos vértices (personas) si se llevan bien. Como cada vértice tiene grado impar, existe un número impar de vértices con grado impar, lo cual es una contradicción.

### Resumen de las técnicas de solución de problemas

- Muchos problemas discretos se resuelven mediante modelos de gráficas.
- Para construir un modelo de gráficas, se determina qué representan los vértices y las aristas.
- Es muy común en un modelo de gráficas que las aristas indiquen una relación entre los vértices.

## 8.3 → Ciclos hamiltonianos y el problema del agente viajero

Sir William Rowan Hamilton comercializó un juego a mediados del siglo XIX en la forma de un dodecaedro (vea la figura 8.3.1). Cada esquina tiene el nombre de una ciudad y el problema era comenzar en cualquier ciudad, viajar por las aristas, visitar cada ciudad justo una vez y regresar a la ciudad inicial. La gráfica de las aristas del dodecaedro se reproduce en la figura 8.3.2. El juego de Hamilton se resuelve si se encuentra un ciclo en la gráfica de la figura 8.3.2 que contenga cada vértice justo una vez (excepto por el vértice inicial y final, que aparece dos veces). Intente encontrar una solución antes de ver la que se da en la figura 8.3.3.

WWW

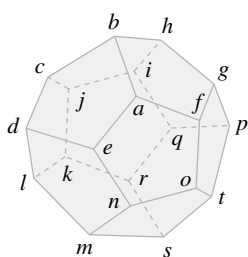


Figura 8.3.1 Juego de Hamilton.

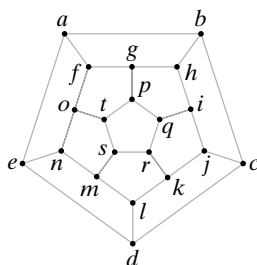


Figura 8.3.2 Gráfica del juego de Hamilton.

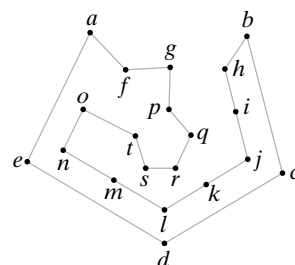
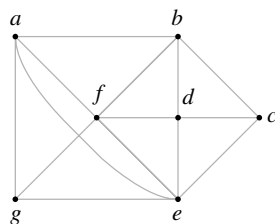


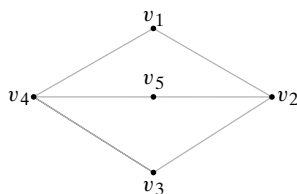
Figura 8.3.3 Recorrido de cada vértice una vez en la gráfica de la figura 8.3.2.

En honor a Hamilton, un ciclo en la gráfica  $G$  que contiene cada vértice en  $G$  justo una vez, excepto por el vértice inicial y final que aparece dos veces, recibe el nombre de **ciclo hamiltoniano**.

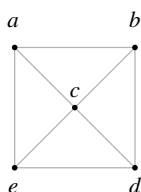
Hamilton (1805–1865) fue uno de los académicos más importantes de Irlanda. Fue profesor de astronomía en la Universidad de Dublín, donde publicó artículos de física y matemáticas. En esta última disciplina, Hamilton es famoso por inventar los cuaterniones, una generalización del sistema de números complejos. Los cuaterniones proporcionaron la inspiración para el desarrollo del álgebra moderna abstracta. En relación con esto, Hamilton introdujo el término *vector*.

**Ejemplo 8.3.1 ►**

**Figura 8.3.4** Gráfica con un ciclo hamiltoniano.

**Ejemplo 8.3.2 ►**

**Figura 8.3.5** Una gráfica sin ciclo de Hamilton.



**Figura 8.3.6** Gráfica con un ciclo hamiltoniano.

**Ejemplo 8.3.3 ►**

El ciclo  $(a, b, c, d, e, f, g, a)$  es un ciclo hamiltoniano para la gráfica de la figura 8.3.4. ◀

El problema de encontrar un ciclo hamiltoniano en una gráfica parece similar al de encontrar un ciclo de Euler en una gráfica. Un ciclo de Euler visita cada arista una vez, mientras que un ciclo de Hamilton visita cada vértice una vez; sin embargo, los problemas son en realidad bastante diferentes. Por ejemplo, la gráfica  $G$  de la figura 8.3.4 no tiene un ciclo de Euler ya que hay vértices de grado impar, pero el ejemplo 8.3.1 muestra que  $G$  tiene un ciclo hamiltoniano. Todavía más, a diferencia de la situación para los ciclos de Euler (vea los teoremas 8.2.17 y 8.2.18), no se conocen condiciones necesarias y suficientes que se verifiquen con facilidad para la existencia de un ciclo de Hamilton en una gráfica.

Los siguientes ejemplos muestran que algunas veces es posible afirmar que una gráfica no contiene un ciclo hamiltoniano.

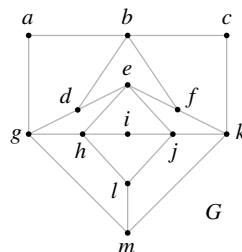
Muestre que la gráfica de la figura 8.3.5 no contiene un ciclo de Hamilton.

Como hay cinco vértices, un ciclo hamiltoniano debe tener cinco aristas. Suponga que se pueden eliminar aristas de la gráfica y dejar sólo el ciclo de Hamilton. Tendría que eliminarse una arista incidente en  $v_2$  y una arista incidente en  $v_4$ , ya que cada vértice en un ciclo de Hamilton tiene grado 2. Pero esto deja sólo cuatro aristas que no son suficientes para un ciclo de Hamilton de longitud 5. Por lo tanto, la gráfica de la figura 8.3.5 no contiene un ciclo de Hamilton. ◀

Debe tenerse cuidado de no contar una arista eliminada más de una vez cuando se usa un argumento como el del ejemplo 8.3.2 para probar que una gráfica no tiene un ciclo hamiltoniano. Observe en el ejemplo 8.3.2 (que se refiere a la figura 8.3.5) que si se elimina una arista incidente en  $v_2$  y una arista incidente en  $v_4$ , estas aristas son diferentes. Por lo tanto, es correcto el razonamiento de que deben eliminarse dos aristas de la gráfica de la figura 8.3.5 para producir un ciclo hamiltoniano.

Como ejemplo de doble conteo, considere el siguiente argumento *incorrecto* que pretende demostrar que la gráfica de la figura 8.3.6 no tiene un ciclo hamiltoniano. Como hay cinco vértices, un ciclo de Hamilton debe tener cinco aristas. Suponga que se pueden eliminar aristas de la gráfica de manera que se obtenga un ciclo de Hamilton. Tendrían que eliminarse dos aristas incidentes en  $c$  y una arista incidente en cada vértice  $a, b, d$  y  $e$ . Esto deja dos aristas, que no son suficientes para un ciclo hamiltoniano. Por lo tanto, la gráfica de la figura 8.3.6 no contiene un ciclo hamiltoniano. El error en este argumento es que si se eliminan dos aristas incidentes en  $c$  (como debe hacerse), también se eliminan aristas incidentes en dos de  $a, b, d$  o  $e$ . No deben contarse otra vez las dos aristas eliminadas incidentes en los dos vértices. Observe que la gráfica de la figura 8.3.6 sí tiene un ciclo de Hamilton.

Demuestre que la gráfica  $G$  de la figura 8.3.7 no contiene un ciclo hamiltoniano.



**Figura 8.3.7** Gráfica sin ciclo de Hamilton.

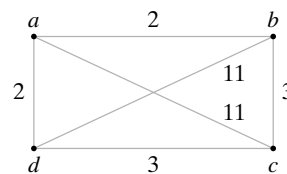
Suponga que  $G$  tiene un ciclo de Hamilton  $H$ . Las aristas  $(a, b)$ ,  $(a, g)$ ,  $(b, c)$  y  $(c, k)$  deben estar en  $H$  puesto que cada vértice tiene grado 2. Entonces las aristas  $(b, d)$  y  $(b, f)$  no están en  $H$ . Por lo tanto, las aristas  $(g, d)$ ,  $(d, e)$ ,  $(e, f)$  y  $(f, k)$  están en  $H$ . Las aristas que, ahora se sabe

que están en  $H$ , forman un ciclo  $C$ . Al agregar una arista adicional a  $C$  se obtiene un vértice en  $H$  con grado mayor que 2. Esta contradicción muestra que  $G$  no tiene ciclos de Hamilton. ◀

El **problema del agente viajero** se relaciona con el problema de encontrar un ciclo hamiltoniano en una gráfica. (Se hizo una referencia breve a una variante del problema del agente viajero en la sección 8.1). El problema es: Dada una gráfica ponderada  $G$ , encuentre en  $G$  un ciclo de Hamilton con longitud mínima. Si se piensa en los vértices de una gráfica ponderada como ciudades y en los pesos de las aristas como distancias, el problema del agente viajero consiste en encontrar una ruta más corta en la que el agente viajero pueda visitar cada ciudad una vez, comenzando y terminando en la misma ciudad.

### Ejemplo 8.3.4 ▶

El ciclo  $C = (a, b, c, d, a)$  es un ciclo hamiltoniano para la gráfica  $G$  de la figura 8.3.8. Al sustituir cualquiera de las aristas en  $C$  por cualquiera de las aristas con etiqueta 11 aumentaría la longitud de  $C$ ; entonces  $C$  es un ciclo hamiltoniano de longitud mínima para  $G$ . Así,  $C$  resuelve el problema del agente viajero para  $G$ .



**Figura 8.3.8** Gráfica para el problema del agente viajero.

Aunque existen algoritmos (vea por ejemplo [Even, 1979]) para encontrar un ciclo de Euler, si existe, en un tiempo  $\Theta(n)$  para una gráfica con  $n$  aristas, todos los algoritmos conocidos para encontrar ciclos de Hamilton requieren un tiempo ya sea exponencial o factorial en el peor caso. Por esta razón, los métodos que producen ciclos cercanos a la longitud mínima se usan con frecuencia en problemas que piden una solución al problema del agente viajero. La fama instantánea espera al descubridor de un algoritmo en tiempo polinomial para resolver el problema del ciclo de Hamilton (o del agente viajero) o de una demostración de que no existe un algoritmo en tiempo polinomial para estos problemas.

Se concluye esta sección con el estudio de ciclos hamiltonianos en el cubo- $n$ .

### Ejemplo 8.3.5 ▶

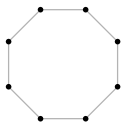
#### Códigos Gray y ciclos hamiltonianos en el cubo- $n$

Considere el **modelo de anillo** para la computación en paralelo que, al representarse por una gráfica, es un ciclo simple (figura 8.3.9). Los vértices representan procesadores. Una arista entre los procesadores  $p$  y  $q$  indica que  $p$  y  $q$  se pueden comunicar directamente entre sí. Se ve que cada procesador se puede comunicar directamente con exactamente otros dos procesadores. Los procesadores no adyacentes se comunican enviando mensajes.

El cubo- $n$  (vea el ejemplo 8.1.7) es otro modelo para computación en paralelo. El cubo- $n$  tiene un grado mayor de conectividad entre sus procesadores. Se considera el aspecto de cuándo un cubo- $n$  puede simular un modelo de anillo con  $2^n$  procesadores. En la terminología de gráficas, la pregunta es cuándo un cubo- $n$  contiene un ciclo simple de  $2^n$  vértices como una subgráfica o, dado que el cubo- $n$  tiene  $2^n$  procesadores, cuándo contiene un ciclo de Hamilton. [Se deja como ejercicio la pregunta de cuándo un cubo- $n$  puede simular un modelo de anillo con un número arbitrario de procesadores (vea el ejercicio 18)].

Primero se observa que si el cubo- $n$  contiene un ciclo de Hamilton, debe tenerse  $n \geq 2$  puesto que el cubo-1 no tiene ciclos.

Recuerde (vea el ejemplo 8.1.7) que podemos etiquetar los vértices del cubo- $n$   $0, 1, \dots, 2^n - 1$  de tal manera que una arista se conecte con dos vértices si y sólo si la representación binaria de sus etiquetas difiere en exactamente un bit. Entonces el cubo- $n$  tiene



**Figura 8.3.9** El modelo de anillo para la computación en paralelo.

un ciclo hamiltoniano si y sólo si  $n \geq 2$  y existe una sucesión,

$$s_1, s_2, \dots, s_{2^n} \quad (8.3.1)$$

donde cada  $s_i$  es una cadena de  $n$  bits que satisface:

- Toda cadena de  $n$  bits aparece en algún lugar de la sucesión.
- $s_i$  y  $s_{i+1}$  difieren exactamente en un bit,  $i = 1, \dots, 2^n - 1$ .
- $s_{2^n}$  y  $s_1$  difieren exactamente en un bit.

Una sucesión (8.3.1) se llama **código Gray**. Cuando  $n \geq 2$ , un código Gray (8.3.1) corresponde al ciclo hamiltoniano

$$s_1, s_2, \dots, s_{2^n}, s_1$$

ya que cada vértice aparece y las aristas  $(s_i, s_{i+1})$ ,  $i = 1, \dots, 2^n - 1$ , y  $(s_{2^n}, s_1)$  son diferentes. Cuando  $n = 1$ , el código Gray 0, 1 corresponde a la trayectoria (0, 1, 0), que no es un ciclo porque la arista (0, 1) se repite.

El código Gray ha sido objeto de extensos estudios en otros contextos. Por ejemplo, se han usado códigos Gray al convertir información analógica en digital (vea [Deo]). Se mostrará cómo construir un código Gray para cada entero positivo  $n$ , lo que prueba que el cubo- $n$  tiene un ciclo de Hamilton para todo entero positivo  $n \geq 2$ . ◀

### Teorema 8.3.6

Sea  $G_1$  la sucesión 0, 1. Se define  $G_n$  en términos de  $G_{n-1}$  de acuerdo con las siguientes reglas:

- a) Sea  $G_{n-1}^R$  la sucesión  $G_{n-1}$  escrita al revés.
- b) Sea  $G_{n-1}'$  la sucesión obtenida al colocar un 0 como prefijo en cada miembro de  $G_{n-1}$ .
- c) Sea  $G_{n-1}''$  la sucesión obtenida al colocar un 1 como prefijo en cada miembro de  $G_{n-1}^R$ .
- d) Sea  $G_n$  la sucesión formada por  $G_{n-1}'$  seguida de  $G_{n-1}''$ .

Entonces  $G_n$  es un código Gray para cada entero positivo  $n$ .

**Demostración** Se prueba el teorema por inducción sobre  $n$ .

#### Paso base ( $n = 1$ )

Como la sucesión 0, 1 es un código Gray, el teorema se cumple cuando  $n$  es 1.

#### Paso inductivo

Suponga que  $G_{n-1}$  es un código Gray. Cada cadena en  $G_{n-1}'$  comienza con 0, de manera que cualquier diferencia entre cadenas consecutivas debe ser el resultado de bits distintos en las cadenas correspondientes en  $G_{n-1}$ . Pero como  $G_{n-1}$  es un código Gray, cada par consecutivo de cadenas en  $G_{n-1}'$  difiere exactamente en un bit. Por lo tanto, cada par consecutivo de cadenas en  $G_{n-1}'$  difiere exactamente en un bit. De manera similar, cada par consecutivo de cadenas en  $G_{n-1}''$  difiere exactamente en un bit.

Sea  $\alpha$  la última cadena en  $G_{n-1}'$ , y sea  $\beta$  la primera cadena en  $G_{n-1}''$ . Si se elimina el primer bit de  $\alpha$  y el primer bit de  $\beta$ , las cadenas obtenidas son idénticas. Como el primer bit en  $\alpha$  es 0 y el primer bit en  $\beta$  es 1, la última cadena en  $G_{n-1}'$  y la primera cadena en  $G_{n-1}''$  difieren exactamente en un bit. De manera similar, la primera cadena en  $G_{n-1}'$  y la última cadena en  $G_{n-1}''$  difieren exactamente en un bit. Por lo tanto,  $G_n$  es un código Gray.

### Corolario 8.3.7

El cubo- $n$  tiene un ciclo hamiltoniano para cada entero positivo  $n \geq 2$ .

Ejemplo 8.3.8 ▶

Se usa el Teorema 8.3.6 para construir el código Gray de  $G_3$  comenzando con  $G_1$ .

$G_1$ :	0	1						
$G_1^R$ :	1	0						
$G_1'$ :	00	01						
$G_1''$ :	11	10						
$G_2$ :	00	01	11	10				
$G_2^R$ :	10	11	01	00				
$G_2'$ :	000	001	011	010				
$G_2''$ :	110	111	101	100				
$G_3$ :	000	001	011	010	110	111	101	100

Esta sección termina con el examen de un problema que data de hace unos 200 años.

Ejemplo 8.3.9 ▶

Recorrido del caballo

En ajedrez, el movimiento del caballo consiste en recorrer dos cuadros en sentido horizontal o vertical y un cuadro en dirección perpendicular. Por ejemplo, en la figura 8.3.10 un caballo en el cuadro marcado con  $K$  se puede mover a cualquiera de los cuadros marcados con  $X$ . El **recorrido del caballo de un tablero de  $n \times n$**  comienza en algún cuadro, visita cada cuadro exactamente una vez con movimientos permitidos, y regresa al cuadro inicial. El problema es determinar para qué valores de  $n$  existe el recorrido del caballo.

Se puede usar una gráfica para modelar este problema. Los cuadros del tablero, con color alternado en blanco y negro de la manera usual, son los vértices de la gráfica y hay una arista entre dos vértices si los cuadros correspondientes en el tablero representan un movimiento permitido para el caballo (figura 8.3.11). Se denota la gráfica por  $GK_n$ . Entonces hay un recorrido del caballo en el tablero de  $n \times n$  si y sólo si  $GK_n$  tiene un ciclo de Hamilton.

Se demuestra que si  $GK_n$  tiene un ciclo de Hamilton,  $n$  es par. Para ver esto, observe que  $GK_n$  es bipartita. Se puede hacer una partición de los vértices en dos conjuntos:  $V_1$  correspondiente a los cuadros blancos y  $V_2$  correspondiente a los negros. Cada arista incide en un vértice de  $V_1$  y uno de  $V_2$ . Como cualquier ciclo debe alternar entre un vértice en  $V_1$  y uno en  $V_2$ , cualquier ciclo en  $GK_n$  debe tener longitud par. Pero como un ciclo hamiltoniano debe visitar cada vértice exactamente una vez, un ciclo hamiltoniano en  $GK_n$  debe tener longitud  $n^2$ . Entonces,  $n$  debe ser par.

En vista del resultado anterior, el tablero más pequeño posible que podría tener un recorrido del caballo es de  $2 \times 2$ , pero no tiene un recorrido porque es tan pequeño que el caballo no tendría movimientos permitidos. El siguiente tablero más pequeño es de  $4 \times 4$ , aunque se demostrará que tampoco tiene un recorrido del caballo.

Se da un argumento por contradicción para demostrar que  $GK_4$  no tiene un ciclo de Hamilton. Suponga que  $GK_4$  tiene un ciclo de Hamilton  $C = (v_1, v_2, \dots, v_{17})$ . Se supone que  $v_1$  corresponde al cuadro en la esquina superior izquierda. Los ocho cuadros en la fila superior e inferior del tablero se llaman *cuadros exteriores*, y los ocho cuadros de las filas centrales se llaman *cuadros interiores*. Observe que el caballo debe llegar a un cuadro exterior si está en uno interior y que de un cuadro exterior se mueve a uno interior. Entonces en el ciclo  $C$ , cada vértice que corresponde a un cuadro exterior debe ir precedido y seguido por un vértice que corresponde a un cuadro interior. Como hay el mismo número de cuadros exteriores e interiores, los vértices  $v_i$  donde  $i$  es impar corresponden a cuadros exteriores, y los vértices  $v_i$  donde  $i$  es par corresponden a cuadros interiores. Pero al observar los movimientos del caballo, se ve que los vértices  $v_i$  donde  $i$  es impar corresponden a cuadros blancos y los vértices  $v_i$  para  $i$  par corresponden a cuadros negros. Por lo tanto, los únicos cuadros exteriores que se visitan son blancos y los únicos cuadros interiores que se visitan son negros. Entonces  $C$  no es un ciclo de Hamilton. Esta contradicción completa la prueba de que  $GK_4$  no tiene un ciclo de Hamilton. Este argumento lo expuso Louis Pósa cuando era adolescente.

La gráfica  $GK_6$  tiene un ciclo de Hamilton. Este hecho se prueba simplemente exhibiendo uno (vea el ejercicio 21). Se puede probar, usando métodos elementales, que  $GK_n$  tie-

WWW

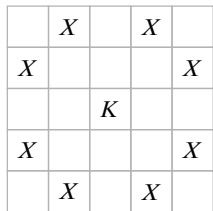


Figura 8.3.10  
Movimientos permitidos para el caballo en ajedrez.

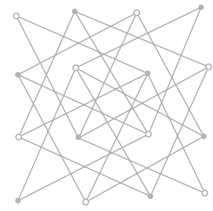
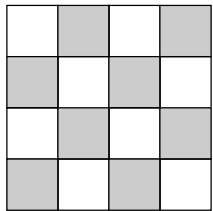
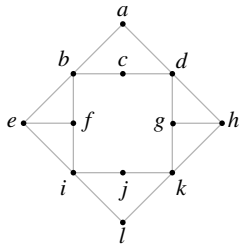


Figura 8.3.11  
Tablero de ajedrez de  $4 \times 4$  y la gráfica  $GK_4$ .

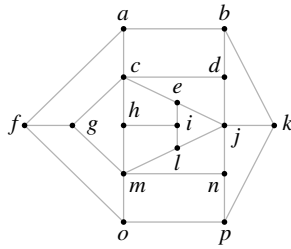


Demuestre que ninguna gráfica contiene un ciclo hamiltoniano.

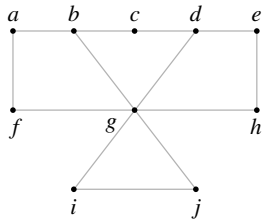
3.



4.

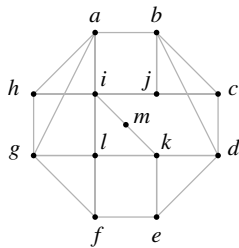


5.

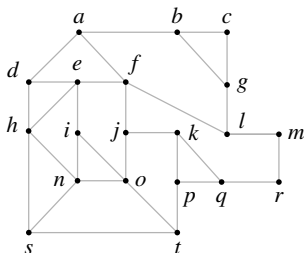


Determine si cada gráfica contiene un ciclo de Hamilton. Si así es, exhiba uno; de otra manera, dé un argumento para demostrar que no hay un ciclo de Hamilton.

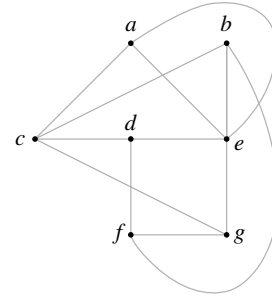
6.



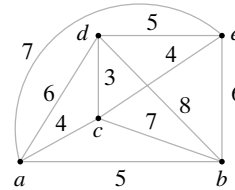
7.



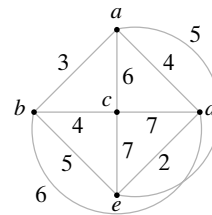
8.



9. Dé un ejemplo de una gráfica que tiene un ciclo de Euler pero no contenga un ciclo de Hamilton.
10. Dé un ejemplo de una gráfica que tiene un ciclo de Euler que también es un ciclo de Hamilton.
11. Dé un ejemplo de una gráfica que tiene un ciclo de Euler y un ciclo de Hamilton que no son idénticos.
- ★12. ¿Para qué valores de  $m$  y  $n$  la gráfica del ejercicio 37, sección 8.2, contiene un ciclo de Hamilton?
13. Modifique la gráfica del ejercicio 37, sección 8.2, insertando una arista entre el vértice en la fila  $i$ , columna 1, y el vértice en la fila  $i$ , columna  $m$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Demuestre que la gráfica obtenida siempre tiene un ciclo de Hamilton.
14. Demuestre que si  $n \geq 3$ , la gráfica completa sobre  $n$  vértices  $K_n$  contiene un ciclo hamiltoniano.
15. ¿Cuándo la gráfica completa bipartita  $K_{m,n}$  contiene un ciclo hamiltoniano?
16. Demuestre que el ciclo  $(e, b, a, c, d, e)$  proporciona una solución al problema del agente viajero para la gráfica mostrada.



17. Resuelva el problema del agente viajero para la gráfica dada.



- ★18. Sean  $m$  y  $n$  enteros que satisfacen  $1 \leq m \leq 2^n$ . Pruebe que el cubo- $n$  tiene un ciclo simple de longitud  $m$  si y sólo si  $m \geq 4$  y  $m$  es par.
19. Use el Teorema 8.3.6 para calcular el código Gray  $G_4$ .
20. Sea  $G$  una gráfica bipartita con conjuntos ajenos de vértices  $V_1$  y  $V_2$ , como en la definición 8.1.11. Demuestre que si  $G$  tiene un ciclo de Hamilton,  $V_1$  y  $V_2$  tienen el mismo número de elementos.
21. Encuentre un ciclo de Hamilton en  $GK_6$  (vea el ejemplo 8.3.9).
22. Describa un modelo de gráficas adecuado para resolver el siguiente problema: ¿Pueden arreglarse las permutaciones de  $\{1, 2, \dots, n\}$



en una sucesión de manera que las permutaciones adyacentes

$$P: p_1, \dots, p_n \quad \text{y} \quad Q: q_1, \dots, q_n$$

satisfagan  $p_i \neq q_i$  para  $i = 1, \dots, n$ ?

23. Resuelva el problema del ejercicio 22 para  $n = 1, 2, 3, 4$ . (La respuesta a la pregunta es “sí” para  $n \geq 5$ ; vea [problema 1186] en las referencias).
  24. Demuestre que las etiquetas consecutivas de los vértices en el círculo unitario de la descripción de Bain del cubo- $n$  dan un código Gray (vea los ejercicios 43 a 45, sección 8.1).
- Una trayectoria de Hamilton en una gráfica  $G$  es un trayectoria simple que contiene todos los vértices en  $G$  exactamente una vez. (Una trayectoria de Hamilton inicia y termina en vértices diferentes).*
25. Si una gráfica tiene ciclo de Hamilton, ¿debe tener una trayectoria de Hamilton? Explique.

26. Si una gráfica tiene una trayectoria de Hamilton, ¿debe tener un ciclo de Hamilton? Explique.
27. ¿La gráfica de la figura 8.3.5 tiene una trayectoria de Hamilton?
28. ¿La gráfica de la figura 8.3.7 tiene una trayectoria de Hamilton?
29. ¿La gráfica del ejercicio 3 tiene una trayectoria de Hamilton?
30. ¿La gráfica del ejercicio 4 tiene una trayectoria de Hamilton?
31. ¿La gráfica del ejercicio 5 tiene una trayectoria de Hamilton?
32. ¿La gráfica del ejercicio 6 tiene una trayectoria de Hamilton?
33. ¿La gráfica del ejercicio 7 tiene una trayectoria de Hamilton?
34. ¿La gráfica del ejercicio 8 tiene una trayectoria de Hamilton?
35. ¿Para qué valores de  $m$  y  $n$  la gráfica del ejercicio 37, sección 8.2, tiene una trayectoria de Hamilton?
36. ¿Para qué valor de  $n$  la gráfica completa sobre  $n$  vértices tiene una trayectoria de Hamilton?

## 8.4 → Un algoritmo de la ruta más corta

Recuerde (de la sección 8.1) que una gráfica ponderada es una gráfica en la que se asignan valores a las aristas y que la longitud de una trayectoria en una gráfica ponderada es la suma de los pesos de las aristas en la trayectoria. Sea  $w(i, j)$  el peso de la arista  $(i, j)$ . En las gráficas ponderadas con frecuencia se desea encontrar la **ruta más corta** (es decir, una trayectoria que tiene la longitud mínima) entre dos vértices dados. El algoritmo 8.4.1, ideado por E. W. Dijkstra, que resuelve con eficiencia este problema, es el tema de esta sección.

Edgar W. Dijkstra (1930-2002) nació en Holanda. Fue uno de los primeros en proponer la programación como una ciencia. Estaba tan dedicado a la programación que, cuando se casó en 1957, dejó asentado que su profesión era la de programador. Sin embargo, las autoridades holandesas dijeron que esa profesión no existía y tuvo que cambiar el dato a “físico teórico”. Ganó el prestigioso premio Turing Award de la Association for Computing Machinery en 1972. Fue designado para presidir el Schlumberger Centennial en Ciencias de la Computación en la Universidad de Texas en Austin, en 1984, y se retiró como profesor emérito en 1999.

En esta sección,  $G$  denota una gráfica conexa ponderada. Se supone que los pesos son números positivos y que se quiere encontrar la ruta más corta del vértice  $a$  al vértice  $z$ . La suposición de que  $G$  es conexa se puede excluir (vea el ejercicio 9).

El algoritmo de Dijkstra implica asignar etiquetas a los vértices. Sea  $L(v)$  la etiqueta del vértice  $v$ . En cualquier punto, algunos vértices tienen etiquetas temporales y el resto son permanentes. Sea  $T$  el conjunto de vértices que tienen etiquetas temporales. Al ilustrar el algoritmo, se marcarán con un círculo los vértices que tienen etiquetas permanentes. Se demostrará después que si  $L(v)$  es la etiqueta permanente del vértice  $v$ , entonces  $L(v)$  es la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $v$ . Al inicio, todos los vértices tienen etiquetas temporales. Cada iteración del algoritmo cambia el estado de una etiqueta de temporal a permanente; entonces el algoritmo puede terminar cuando  $z$  recibe una etiqueta permanente. En este punto  $L(v)$  da la longitud de la ruta más corta de  $a$  a  $z$ .

### Algoritmo 8.4.1

#### Algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra

Este algoritmo encuentra la longitud de una ruta más corta del vértice  $a$  al vértice  $z$  en una gráfica ponderada conexa. El peso de la arista  $(i, j)$  es  $w(i, j) > 0$ , y la etiqueta del vértice  $x$  es  $L(x)$ . Al terminar,  $L(z)$  es la longitud de la ruta más corta de  $a$  a  $z$ .

Entrada: Una gráfica conexa ponderada en la que todos los pesos son positivos; vértices  $a$  a  $z$

Salida:  $L(z)$ , la longitud de la ruta más corta de  $a$  a  $z$

1.  $dijkstra(w, a, z, L)$  {
2.  $L(a) = 0$

```

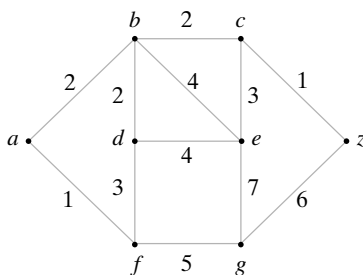
3.   para todos los vértices  $x \neq a$ 
4.    $L(x) = \infty$ 
5.    $T =$  conjunto de todos los vértices
6.   //  $T$  es el conjunto de todos los vértices cuyas distancias más cortas desde  $a$ 
7.   // no se han encontrado
8.   while( $z \in T$ ) {
9.       seleccionar  $v \in T$  con  $L(v)$  mínimo
10.       $T = T - \{v\}$ 
11.      para cada  $x \in T$  adyacente a  $v$ 
12.           $L(x) = \min\{L(x), L(v) + w(v, x)\}$ 
13.      }
14.  }
```

**Ejemplo 8.4.2 ►**

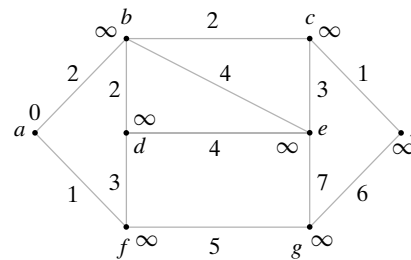
Se mostrará la manera en que el algoritmo 8.4.1 encuentra la ruta más corta de  $a$  a  $z$  en la gráfica de la figura 8.4.1. (Los vértices en  $T$  no están marcados con círculos y tienen etiquetas temporales). La figura 8.4.2 muestra el resultado de ejecutar las líneas 2 a la 5. En la línea 8,  $z$  no tiene círculo. Se procede a la línea 9, donde se elige el vértice  $a$ , el vértice sin círculo con la etiqueta menor, y se marca con un círculo (figura 8.4.3). En las líneas 11 y 12 se actualiza cada uno de los vértices que no tienen círculo,  $b$  y  $f$ , adyacentes a  $a$ . Se obtienen las nuevas etiquetas

$$L(b) = \min\{\infty, 0 + 2\} = 2, \quad L(f) = \min\{\infty, 0 + 1\} = 1$$

(vea la figura 8.4.3). En este punto, se regresa a la línea 8.

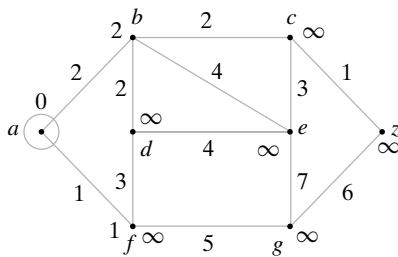


**Figura 8.4.1** Gráfica para el ejemplo 8.4.2.

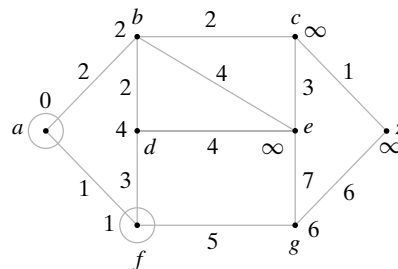


**Figura 8.4.2** Inicialización del algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra.

Como  $z$  no tiene círculo, se procede a la línea 9, donde se selecciona el vértice  $f$ , el vértice sin círculo con la etiqueta menor, y se marca con un círculo (figura 8.4.4). En las líneas 11 y 12 se actualizan las etiquetas de los vértices sin círculo,  $d$  y  $g$ , adyacentes a  $f$ . Se obtienen las etiquetas de la figura 8.4.4.

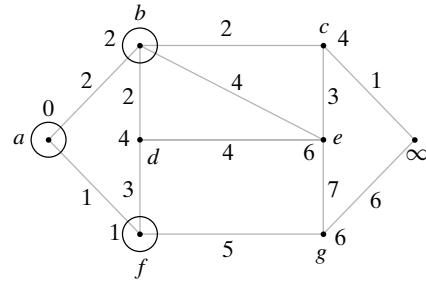


**Figura 8.4.3** Primera iteración del algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra.



**Figura 8.4.4** Segunda iteración del algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra.

Debe verificarse que la siguiente iteración del algoritmo produce las etiquetas dadas en la figura 8.4.5 y que al terminar el algoritmo,  $z$  tiene la etiqueta 5, lo que indica que la longitud de la ruta más corta de  $a$  a  $z$  es 5. Una ruta más corta está dada por  $(a, b, c, z)$ .



**Figura 8.4.5** Tercera iteración del algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra.

Ahora se demostrará que el algoritmo 8.4.1 es correcto. La prueba se relaciona con el hecho de que el algoritmo de Dijkstra encuentra las longitudes de las rutas más cortas desde  $a$  en orden no decreciente.

### Teorema 8.4.3

*El algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra (algoritmo 8.4.1) encuentra correctamente la longitud de una ruta más corta desde  $a$  hasta  $z$ .*

**Demostración** Se usa inducción matemática sobre  $i$  para probar que la  $i$ -ésima vez que se lleva a la línea 9,  $L(v)$  es la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $v$ . Cuando se prueba esto, se deduce que el algoritmo es correcto porque cuando se elige  $z$  en la línea 9,  $L(z)$  dará la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $z$ .

#### Paso base ( $i = 1$ )

La primera vez que se llega a la línea 9, a causa de los pasos de inicialización (líneas 2 a la 4),  $L(a)$  es cero y todos los otros valores de  $L$  son  $\infty$ . Entonces  $a$  se selecciona la primera vez que se llega la línea 9. Como  $L(a)$  es cero,  $L(a)$  es la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $a$ .

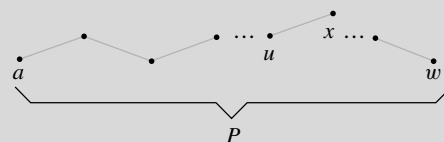
#### Paso inductivo

Suponga que para toda  $k < i$ , la  $k$ -ésima vez que se llega a la línea 9,  $L(v)$  es la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $v$ .

Suponga que es la  $i$ -ésima vez que estamos en la línea 9 y que se elige  $v$  en  $T$  con valor mínimo de  $L(v)$ .

Primero se demuestra que si existe una trayectoria de  $a$  a un vértice  $w$  cuya longitud es menor que  $L(v)$ , entonces  $w$  no está en  $T$  (es decir,  $w$  ya se había seleccionado en la línea 9). Suponga a manera de contradicción que  $w$  está en  $T$ . Sea  $P$  una ruta más corta de  $a$  a  $w$ , sea  $x$  el vértice más cercano a  $a$  en  $P$  que está en  $T$ , y sea  $u$  el predecesor de  $x$  en  $P$  (vea la figura 8.4.6). Entonces  $u$  no está en  $T$ , de manera que  $u$  ya se había seleccionado en la línea 9 en una iteración anterior del ciclo “while”. Por la suposición inductiva,  $L(u)$  es la longitud de la ruta más corta de  $a$  a  $u$ . Ahora

$$L(x) \leq L(u) + w(u, x) \leq \text{longitud de } P < L(v).$$



**Figura 8.4.6** Prueba del Teorema 8.4.3.

$P$  es la ruta más corta de  $a$  a  $w$ ,  $x$  es el vértice más cercano a  $a$  en  $P$  que está en  $T$ , y  $u$  es el predecesor de  $x$  en  $P$ .

Pero esta desigualdad muestra que  $v$  no es el vértice en  $T$  con  $L(v)$  mínimo [ $L(x)$  es menor]. Esta contradicción completa la prueba de que si hay una trayectoria de  $a$  al vértice  $w$  cuya longitud es menor que  $L(v)$ , entonces  $w$  no está en  $T$ .

El resultado anterior muestra, en particular, que si hubiera una trayectoria de  $a$  a  $v$  cuya longitud fuera menor que  $L(v)$ ,  $v$  ya se habría seleccionado en la línea 9 y eliminado de  $T$ . Por lo tanto, cada ruta de  $a$  a  $v$  tiene longitud al menos de  $L(v)$ . Por construcción, existe una ruta de  $a$  a  $v$  de longitud  $L(v)$ , de manera que ésta es una ruta más corta de  $a$  a  $v$ . La prueba queda completa.

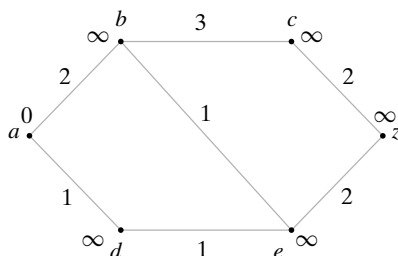
El algoritmo 8.4.1 encuentra la longitud de la ruta más corta de  $a$  a  $z$ . En la mayoría de las aplicaciones, también se desea identificar una ruta más corta. En pequeña modificación al algoritmo 8.4.1 muestra cómo encontrar una ruta más corta.

### Ejemplo 8.4.4 ►

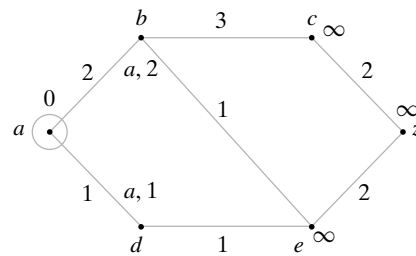
Encuentre una ruta más corta de  $a$  a  $z$  y su longitud para la gráfica de la figura 8.4.7.

Se aplicará el algoritmo 8.4.1 con una ligera modificación. Además de marcar el vértice con un círculo, también se etiquetará con el nombre del vértice por el que se marca.

La figura 8.4.7 muestra el resultado de ejecutar las líneas 2 a la 4 del algoritmo 8.4.1. Primero, se pone un círculo en  $a$  (figura 8.4.8). Después, se etiquetan los vértices  $b$  y  $d$  adyacentes a  $a$ . El vértice  $b$  se etiqueta “ $a, 2$ ” para indicar su valor y el hecho de que se etiqueta desde  $a$ . De manera similar, el vértice  $d$  se etiqueta “ $a, 1$ ”.

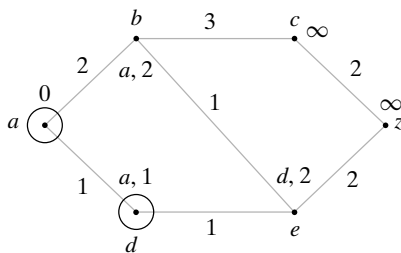


**Figura 8.4.7** Inicialización del algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra.

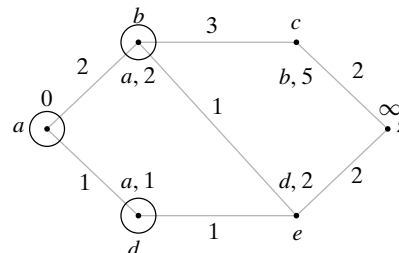


**Figura 8.4.8** Primera iteración del algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra.

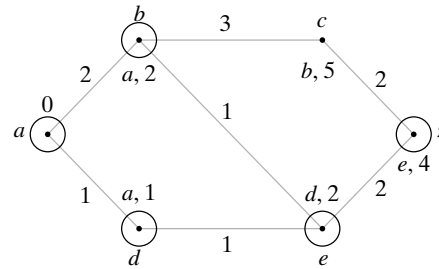
Luego, se pone un círculo en el vértice  $d$  y se actualiza la etiqueta del vértice  $e$  adyacente a  $d$  (vea la figura 8.4.9). Después se pone un círculo en el vértice  $b$  y se actualizan las etiquetas de los vértices  $c$  y  $e$  (vea la figura 8.4.10). Se pone un círculo en el vértice  $e$  y se actualiza la etiqueta del vértice  $z$  (figura 8.4.11). En este punto, puede ponerse un círculo en  $z$ , y el algoritmo termina. La longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $z$  es 4. Comenzando con  $z$ , nos movemos hacia atrás por las etiquetas para encontrar la ruta más corta.



**Figura 8.4.9** Segunda iteración del algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra.



**Figura 8.4.10** Tercera iteración del algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra.



**Figura 8.4.11** Conclusión del algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra.

El siguiente teorema muestra que el algoritmo de Dijkstra tiene un tiempo de  $\Theta(n^2)$  en el peor caso.

### Teorema 8.4.5

Para una entrada que consiste en una gráfica ponderada de  $n$  vértices, simple y conexa, el algoritmo de Dijkstra (algoritmo 8.4.1) tiene un tiempo de corrida en el peor caso de  $\Theta(n^2)$ .

**Demostración** Se considera el tiempo gastado en ciclos, que proporciona una cota superior en el tiempo total. La línea 4 se ejecuta  $O(n)$  veces. Dentro del ciclo “while”, la línea 9 toma un tiempo  $O(n)$  [se podría encontrar  $L(v)$  mínimo examinando todos los vértices en  $T$ ]. El cuerpo del ciclo “for” (línea 12) toma un tiempo  $O(n)$ . Como las líneas 9 y 12 están anidadas en el ciclo “while” que toma un tiempo  $O(n)$ , el tiempo total para las líneas 9 y 12 es  $O(n^2)$ . Entonces el algoritmo de Dijkstra corre en un tiempo  $O(n^2)$ .

De hecho, para una selección adecuada de  $z$ , el tiempo es  $\Omega(n^2)$  para  $K_n$ , la gráfica completa sobre  $n$  vértices, porque cada vértice es adyacente a los otros. Entonces el tiempo de corrida en el peor caso es  $\Theta(n^2)$ .

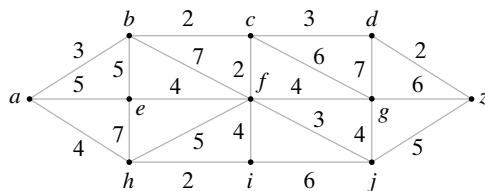
Cualquier algoritmo de la ruta más corta que recibe como entrada  $K_n$ , la gráfica completa sobre  $n$  vértices, debe examinar todas las aristas de  $K_n$  al menos una vez. Como  $K_n$  tiene  $n(n-1)/2$  aristas (vea el ejercicio 15, sección 8.1), su tiempo de corrida en el peor caso debe ser al menos  $n(n-1)/2 = \Omega(n^2)$ . Se concluye a partir del Teorema 8.4.5 que el algoritmo 8.4.1 es óptimo.

## Sección de ejercicios de repaso

1. Describa el algoritmo de una ruta más corta de Dijkstra.
2. Dé un ejemplo para mostrar la manera en que el algoritmo de Dijkstra encuentra una ruta más corta.
3. Pruebe que el algoritmo de Dijkstra encuentra correctamente una ruta más corta.

## Ejercicios

En los ejercicios 1 al 5, encuentre la longitud de una ruta más corta entre cada par de vértices en la gráfica ponderada.



1.  $a, f$
2.  $a, g$
3.  $a, z$
4.  $b, j$
5.  $h, d$
6. Escriba un algoritmo que encuentre la longitud de una ruta más corta entre dos vértices dados en una gráfica conexa ponderada y también encuentre una ruta más corta.
7. Escriba un algoritmo que encuentre las longitudes de las rutas más cortas de un vértice dado a todos los demás vértices en una gráfica  $G$  conexa ponderada.
- ★ 8. Escriba un algoritmo que encuentre las longitudes de las rutas más cortas entre todos los pares de vértices en una gráfica conexa ponderada simple que tiene  $n$  vértices con tiempo  $O(n^3)$ .
9. Modifique el algoritmo 8.4.1 para que acepte una gráfica ponderada que no necesariamente sea conexa. Al terminar, ¿qué es  $L(z)$  si no hay trayectoria de  $a$  a  $z$ ?
10. ¿Falso o verdadero? Cuando una gráfica conexa ponderada y los vértices  $a$  y  $z$  son la entrada al siguiente algoritmo, regresa la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $z$ . Si el algoritmo es correcto, pruébelo; de otra manera, dé un ejemplo de una gráfica conexa ponderada y vértices  $a$  y  $z$  para los que falla.

**Algoritmo 8.4.6**

```

algor(w, a, z) {
  longitud = 0
  v = a
  T = conjunto de todos los vértices
  while(v ≠ z) {
    T = T - {v}
    seleccionar x ∈ T con w(v, x) mínimo
    longitud = longitud + w(v, x)
  }
}

```

```

    v = x
  }
  return longitud
}

```

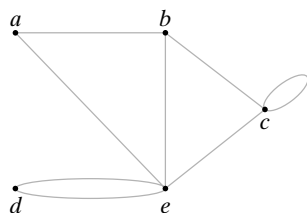
11. ¿Falso o verdadero? El algoritmo 8.4.1 encuentra la longitud de una ruta más corta en una gráfica conexa ponderada incluso si algunos pesos son negativos. Si es verdadero, pruébelo; de otra manera, proporcione un contraejemplo.

## 8.5 → Representaciones de gráficas

En las secciones anteriores se representó una gráfica con un dibujo. En ocasiones, como por ejemplo al usar una computadora para analizar una gráfica, se necesita una representación más formal. El primer método de representación de una gráfica usa la **matriz de adyacencia**.

**Ejemplo 8.5.1 ►**

WWW



**Figura 8.5.1** Gráfica para el ejemplo 8.5.1.

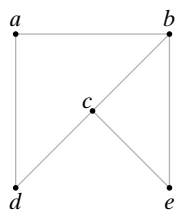
**Matriz de adyacencia**

Considere la gráfica de la figura 8.5.1. Para obtener la matriz de adyacencia de esta gráfica, primero se selecciona un orden de los vértices, por ejemplo,  $a, b, c, d, e$ . Después se etiquetan los renglones y columnas de una matriz con los vértices ordenados. El elemento en esta matriz en el renglón  $i$  y la columna  $j$ ,  $i \neq j$ , es el número de aristas incidentes en  $i$  y  $j$ . Si  $i = j$ , el elemento es dos veces el número de ciclos que inciden en  $i$ . La matriz de adyacencia para esta gráfica es

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Observe que es posible obtener el grado de un vértice  $v$  en una gráfica  $G$  sumando el renglón  $v$  o la columna  $v$  en la matriz de adyacencia de  $G$ .

La matriz de adyacencia no es una manera muy eficiente para representar una gráfica. Como la matriz es simétrica respecto a la diagonal principal (los elementos en la línea de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha), la información aparece dos veces, excepto la de la diagonal principal.

**Ejemplo 8.5.2 ►**

**Figura 8.5.2** Gráfica para el ejemplo 8.5.2.

La matriz de adyacencia de la gráfica simple de la figura 8.5.2 es

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Se demostrará que si  $A$  es la matriz de adyacencia de una gráfica simple  $G$ , las potencias de  $A$ ,

$$A, A^2, A^3, \dots,$$

cuentan el número de diferentes longitudes. De manera más precisa, si los vértices de  $G$  se etiquetan  $1, 2, \dots$ , el elemento  $ij$  de la matriz  $A^n$  es igual al número de trayectorias de  $i$  a  $j$  de longitud  $n$ . Por ejemplo, suponga que se eleva al cuadrado la matriz  $A$  del ejemplo 8.5.2

para obtener

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} a & b & c & d & e \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Considere el elemento del renglón  $a$  y la columna  $c$  en  $A^2$ , obtenido al multiplicar los elementos del renglón  $a$  por los de la columna  $c$  de la matriz  $A$  y sumarlos

$$\begin{matrix} & & & & c \\ & & & & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ a & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} b & & & & d \end{matrix} \end{matrix} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2.$$

La única manera de que aparezca un producto diferente de cero en esta suma es que los dos elementos que se multiplican sean 1. Esto ocurre si hay un vértice  $v$  cuyo elemento en el renglón  $a$  es 1 y cuyo elemento en la columna  $c$  es 1. En otras palabras, debe haber aristas de la forma  $(a, v)$  y  $(v, c)$ . Estas aristas forman la trayectoria  $(a, v, c)$  de longitud 2 de  $a$  a  $c$  y cada trayectoria aumenta la suma en 1. En este ejemplo, la suma es 2 porque hay dos trayectorias

$$(a, b, c), \quad (a, d, c)$$

de longitud 2 de  $a$  a  $c$ . En general, el elemento en el renglón  $x$  y la columna  $y$  de la matriz  $A^2$  es el número de trayectorias de longitud 2 del vértice  $x$  al vértice  $y$ .

Los elementos en la diagonal principal de  $A^2$  dan los grados de los vértices (cuando se trata de una gráfica simple). Considere, por ejemplo, el vértice  $c$ . El grado de  $c$  es 3 ya que  $c$  es incidente en las tres aristas  $(c, b)$ ,  $(c, d)$  y  $(c, e)$ . Pero cada una de estas aristas se puede convertir en una trayectoria de longitud 2 de  $c$  a  $c$ :

$$(c, b, c), \quad (c, d, c), \quad (c, e, c).$$

De manera similar, una trayectoria de longitud 2 de  $c$  a  $c$  define una arista incidente en  $c$ . Entonces, el número de trayectorias de longitud 2 de  $c$  a  $c$  es 3, el grado de  $c$ .

Ahora se usará inducción para demostrar que los elementos de la  $n$ -ésima potencia de una matriz de adyacencia dan el número de trayectorias de longitud  $n$ .

### Teorema 8.5.3

*Si  $A$  es la matriz de adyacencia de una gráfica simple, el elemento  $ij$  de  $A^n$  es igual al número de trayectorias de longitud  $n$  del vértice  $i$  al vértice  $j$ ,  $n = 1, 2, \dots$*

**Demostración** Se usará inducción sobre  $n$ .

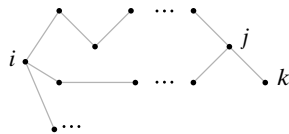
Si  $n = 1$ ,  $A^1$  es simplemente  $A$ . El elemento  $ij$  es 1 si hay una arista de  $i$  a  $j$ , que es una trayectoria de longitud 1, y 0 de otra manera. Entonces, el teorema se cumple si  $n = 1$ . Esto verifica el paso base.

Suponga que el teorema es cierto para  $n$ . Ahora

$$A^{n+1} = A^n A$$

de manera que el elemento  $i$  en  $A^{n+1}$  se obtiene al multiplicar por pares los elementos en





**Figura 8.5.3** Prueba del Teorema 8.5.3. Una trayectoria de  $i$  a  $k$  de longitud  $n + 1$  cuyo penúltimo vértice es  $j$  consiste en una trayectoria de longitud  $n$  de  $i$  a  $j$  seguida de la arista  $(j, k)$ . Si hay  $s_j$  trayectorias de longitud  $n$  de  $i$  a  $j$  y  $t_j$  es 1 si la arista  $(i, k)$  existe y 0 de otra manera, la suma de  $s_j t_j$  sobre toda  $j$  da el número de trayectorias de longitud  $n + 1$  de  $i$  a  $k$ .

el renglón  $i$  de  $A^n$  por los elementos en la columna  $k$  de  $A$  y sumarlos.  
columna  $k$  de  $A$

$$\begin{aligned} \text{renglón } i \text{ de } A^n \quad (s_1, s_2, \dots, s_j, \dots, s_m) & \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_j \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} \\ &= s_1 t_1 + s_2 t_2 + \dots + s_j t_j + \dots + s_m t_m \\ &= \text{elemento } ik \text{ de } A^{n+1}. \end{aligned}$$

Por inducción,  $s_j$  da el número de trayectorias de longitud  $n$  de  $i$  a  $j$  en la gráfica  $G$ . Ahora  $t_j$  es 0 o 1. Si  $t_j$  es 0, no hay arista de  $j$  a  $k$ , por lo que hay  $s_j t_j = 0$  trayectorias de longitud  $n + 1$  de  $i$  a  $k$ , donde la última arista es  $(j, k)$ . Si  $t_j$  es 1, hay una arista del vértice  $j$  al vértice  $k$  (figura 5.8.3). Como hay  $s_j$  trayectorias de longitud  $n$  del vértice  $i$  al vértice  $j$ , hay  $s_j t_j = s_j$  trayectorias de longitud  $n + 1$  de  $i$  a  $k$ , donde la última arista es  $(j, k)$  (figura 8.5.3). Al sumar sobre  $j$  se cuentan todas las trayectorias de longitud  $n + 1$  de  $i$  a  $k$ . Entonces, el elemento  $ik$  en  $A^{n+1}$  da el número de trayectorias de longitud  $n + 1$  de  $i$  a  $k$ , y esto verifica el paso inductivo.

Por el principio de inducción matemática, el teorema queda establecido.

### Ejemplo 8.5.4 ►

Después del ejemplo 8.5.2, se demostró que si  $A$  es la matriz de la gráfica de la figura 8.5.2, entonces

$$A^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Al multiplicar,

$$A^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

se encuentra que

$$A^4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 9 & 3 & 11 & 1 & 6 \\ 3 & 15 & 7 & 11 & 8 \\ 11 & 7 & 15 & 3 & 8 \\ 1 & 11 & 3 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 8 & 6 & 8 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

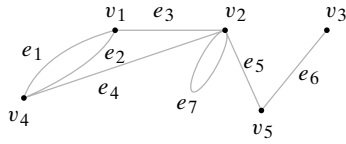
El elemento en el renglón  $d$  y la columna  $e$  es 6, lo que significa que hay seis trayectorias de longitud 4 de  $d$  a  $e$ . Por inspección, se encuentra que son

$$\begin{aligned} (d, a, d, c, e), & \quad (d, c, d, c, e), & \quad (d, a, b, c, e), \\ (d, c, e, c, e), & \quad (d, c, e, b, e), & \quad (d, c, b, c, e). \end{aligned}$$

Otra representación matricial útil de una gráfica se conoce como **matriz de incidencia**.

**Ejemplo 8.5.5 ►****Matriz de incidencia**

Para obtener la matriz de incidencia de la gráfica en la figura 8.5.4, se etiquetan los renglones con los vértices y las columnas con las aristas (en algún orden arbitrario). El elemento en el renglón  $v$  y la columna  $e$  es 1 si  $e$  es incidente en  $v$ , y 0 de otra manera. Entonces, la matriz de incidencia para la gráfica de la figura 8.5.4 es



**Figura 8.5.4** Gráfica para el ejemplo 8.5.5.

$$\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Se entiende que una columna como  $e_7$  representa un lazo. ◀

Observe que en una gráfica sin lazos cada columna tiene dos números 1 y que la suma de un renglón da el grado del vértice identificado con ese renglón.

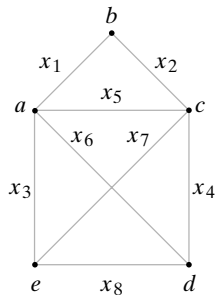
**Sección de ejercicios de repaso**

1. ¿Qué es una matriz de adyacencia?
2. Si  $A$  es la matriz de adyacencia de una gráfica simple, ¿Cuáles son los valores de los elementos de  $A^n$ ?
3. ¿Qué es una matriz de incidencia?

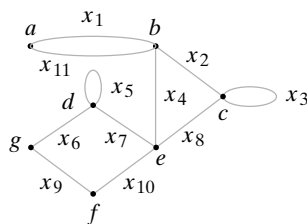
**Ejercicios**

En los ejercicios 1 al 6, escriba la matriz de adyacencia de cada gráfica.

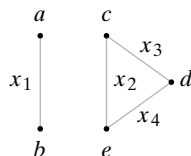
1.



2.



3.



4. La gráfica de la figura 8.2.2
5. La gráfica completa sobre cinco vértices  $K_5$
6. La gráfica completa bipartita  $K_{2,3}$

En los ejercicios 7 al 12, escriba la matriz de incidencia de cada gráfica.

7. La gráfica del ejercicio 1
8. La gráfica del ejercicio 2
9. La gráfica del ejercicio 3
10. La gráfica de la figura 8.2.1
11. La gráfica completa sobre cinco vértices  $K_5$
12. La gráfica completa bipartita  $K_{2,3}$

En los ejercicios 13 al 17, dibuje la gráfica representada por cada matriz de adyacencia.

$$\begin{matrix} 13. & \begin{matrix} a & b & c & d & e \\ a & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} & 14. & \begin{matrix} a & b & c & d & e \\ a & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 15. & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \\ a & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} & 16. & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \\ a & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

17. La matriz de  $7 \times 7$  cuyo elemento  $ij$  es 1 si  $i + 1$  divide a  $j + 1$  o  $j + 1$  divide a  $i + 1$ ,  $i \neq j$ ; cuyo elemento  $ij$  es 2 si  $i = j$ , y cuyo elemento  $ij$  es 0 en otros casos.
18. Escriba la matriz de adyacencia de las componentes de las gráficas dadas por las matrices de adyacencia de los ejercicios 13 al 17.

19. Calcule los cuadrados de las matrices de adyacencia de  $K_5$  y las gráficas de los ejercicios 1 y 3.
20. Sea  $A$  la matriz de adyacencia para la gráfica del ejercicio 1. ¿Cuál es el elemento en el renglón  $a$  y la columna  $d$  de  $A^3$ ?
21. Suponga que una gráfica tiene una matriz de adyacencia de la forma

$$A = \begin{pmatrix} & A' \\ A'' & \end{pmatrix},$$

donde todos los elementos de las submatrices  $A'$  y  $A''$  son 0. ¿Cómo se ve la gráfica?

22. Repita el ejercicio 21 con “incidencia” en lugar de “adyacencia”.
23. Sea  $A$  una matriz de adyacencia de una gráfica. ¿Por qué  $A^n$  es simétrica respecto a la diagonal principal para todo entero positivo  $n$ ?

En los ejercicios 24 y 25, dibuje las gráficas representadas por las matrices de incidencia.

24. 
$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
25. 
$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

26. ¿Cómo debe verse una gráfica si algún renglón de su matriz de incidencia tiene sólo ceros?

27. Sea  $A$  la matriz de adyacencia de una gráfica  $G$  con  $n$  vértices. Sea

$$Y = A + A^2 + \cdots + A^{n-1}.$$

Si algún elemento fuera de la diagonal en la matriz  $Y$  es cero, ¿qué se puede decir de la gráfica  $G$ ?

Los ejercicios 28 al 31 se refieren a la matriz de adyacencia  $A$  de  $K_5$ .

28. Sea  $n$  un entero positivo. Explique por qué todos los elementos de la diagonal de  $A^n$  son iguales y todos los elementos fuera de la diagonal de  $A^n$  son iguales.

Sea  $d_n$  el valor común de los elementos de la diagonal de  $A^n$  y sea  $a_n$  el valor común de los elementos fuera de la diagonal de  $A^n$ .

- ★29. Demuestre que

$$d_{n+1} = 4a_n; \quad a_{n+1} = d_n + 3a_n; \quad a_{n+1} = 3a_n + 4a_{n-1}.$$

- ★30. Demuestre que

$$a_n = \frac{1}{5}[4^n + (-1)^{n+1}].$$

31. Demuestre que

$$d_n = \frac{4}{5}[4^{n-1} + (-1)^n].$$

- ★32. Derive resultados similares a los de los ejercicios 29 al 31 para la matriz de adyacencia  $A$  de la gráfica  $K_m$ .

- ★33. Sea  $A$  la matriz de adyacencia de la gráfica  $K_{m,n}$ . Encuentre una fórmula para los elementos de  $A^l$ .

## 8.6 → Isomorfismos de gráficas

Las siguientes instrucciones se dan a dos personas que no pueden ver el papel de la otra: “Dibuje y etiquete cinco vértices  $a, b, c, d$  y  $e$ . Conecte  $a$  con  $b, b$  con  $c, c$  con  $d, d$  con  $e$ , y  $a$  con  $e$ ”. Las gráficas producidas se aprecian en la figura 8.6.1. Sin duda estas figuras definen la misma gráfica aun cuando parezcan diferentes. Se dice que estas gráficas son **isomorfas**.

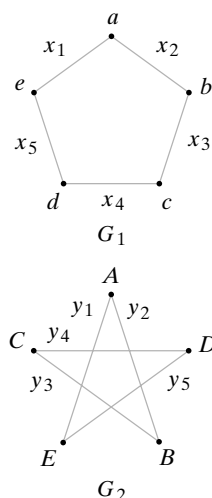


Figura 8.6.1 Gráficas isomorfas.

### Definición 8.6.1 ►

Las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son *isomorfas* si existe una función  $f$  uno a uno y sobre de los vértices de  $G_1$  a los vértices de  $G_2$  y una función  $g$  uno a uno y sobre de las aristas de  $G_1$  a las aristas de  $G_2$ , de manera que una arista  $e$  es incidente en  $v$  y  $w$  en  $G_1$  si y sólo si la arista

$g(e)$  es incidente en  $f(v)$  y  $f(w)$  en  $G_2$ . El par de funciones  $f$  y  $g$  reciben el nombre de *isomorfismo* de  $G_1$  en  $G_2$ .

### Ejemplo 8.6.2 ►

Un isomorfismo para las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  de la figura 8.6.1 se define por

$$\begin{aligned} f(a) = A, \quad f(b) = B, \quad f(c) = C, \quad f(d) = D, \quad f(e) = E, \\ g(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

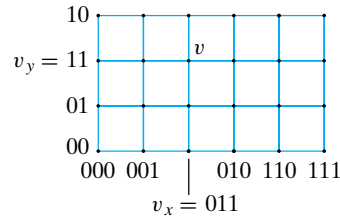
Si se define una relación  $R$  en un conjunto de gráficas mediante la regla  $G_1 R G_2$  si  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas,  $R$  es una relación de equivalencia. Cada clase de equivalencia consiste en un conjunto de gráficas isomorfas mutuamente excluyentes.

### Ejemplo 8.6.3 ►

#### Modelo de rejilla para computación en paralelo

Antes se estudió el problema de cuándo el cubo- $n$  podía simular un modelo de anillo para computación en paralelo (vea el ejercicio 8.3.5). Ahora consideramos cuándo el cubo- $n$  puede simular el **modelo de rejilla para computación en paralelo**.

El modelo de rejilla de dos dimensiones para computación en paralelo, cuando se describe como una gráfica, consiste en un arreglo rectangular de vértices conectados como se indica (figura 8.6.2). El problema “¿Cuándo puede un cubo- $n$  simular una rejilla de dos dimensiones?” se enuncia de otra manera en la terminología de gráficas como “¿Cuándo un cubo- $n$  contiene una subgráfica isomorfa a una rejilla de dos dimensiones?” Se mostrará que si  $M$  es una rejilla de  $p$  vértices por  $q$  vértices, donde  $p \leq 2^i$  y  $q \leq 2^j$ , entonces el cubo- $(i+j)$  contiene una subgráfica isomorfa a  $M$ . (En la figura 8.6.2, se puede tomar  $p = 6$ ,  $q = 4$ ,  $i = 3$  y  $j = 2$ . Entonces, el resultado indica que el cubo-5 contiene una subgráfica isomorfa a la gráfica de la figura 8.6.2).



**Figura 8.6.2** Modelo de rejilla para computación en paralelo.

Sea  $M$  una rejilla de  $p$  por  $q$  vértices, donde  $p \leq 2^i$  y  $q \leq 2^j$ . Se considera que  $M$  es un arreglo rectangular en el espacio de 2 dimensiones ordinario con  $p$  vértices en dirección horizontal y  $q$  vértices en dirección vertical (figura 8.6.2). Como coordenadas para los vértices se usan elementos de los códigos Gray. (Los códigos Gray se explican en el ejemplo 8.3.5). Las coordenadas en dirección horizontal son los primeros  $p$  miembros de un código Gray de  $i$  bits y las coordenadas en dirección vertical son los primeros  $q$  miembros de un código Gray de  $j$  bits (vea la figura 8.6.2). Si un vértice  $v$  está en la rejilla, sean  $v_x$  la coordenada horizontal de  $v$  y  $v_y$  la coordenada vertical de  $v$ . Entonces se define una función  $f$  sobre los vértices de  $M$  por

$$f(v) = v_x v_y.$$

(La cadena  $v_x v_y$  es la cadena  $v_x$  seguida de la cadena  $v_y$ ). Observe que  $f$  es uno a uno.

Si  $(v, w)$  es una arista en  $M$ , las cadenas de bits  $v_x v_y$  y  $w_x w_y$  difieren exactamente en un bit. Entonces  $(v_x v_y, w_x w_y)$  es una arista en el cubo- $(i+j)$ . Se define la función  $g$  en las aristas de  $M$  por

$$g((v, w)) = (v_x v_y, w_x w_y).$$

Note que  $g$  es uno a uno. El par de funciones  $f, g$  es un isomorfismo de  $M$  sobre la subgráfica  $(V, E)$  del cubo- $(i + j)$ , donde

$$V = \{f(v) \mid v \text{ es un vértice en } M\}, \quad E = \{g(e) \mid e \text{ es una arista en } M\}.$$

Por lo tanto, si  $M$  es una rejilla de  $p$  por  $q$  vértices, donde  $p \leq 2^i$  y  $q \leq 2^j$ , el cubo- $(i + j)$  contiene una subgráfica isomorfa a  $M$ .

El argumento dado se extiende a un número arbitrario de dimensiones (vea el ejercicio 11); es decir, si  $M$  es una rejilla de  $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k$ , donde  $p_i \leq 2^{t_i}$  para  $i = 1, \dots, k$ , entonces el cubo- $(t_1 + t_2 + \cdots + t_k)$  contiene una subgráfica isomorfa a  $M$ . ◀

En general, la matriz de adyacencia de una gráfica cambia cuando se modifica el orden de sus vértices. También es posible demostrar que las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son isomórficas si y sólo si *para algún* orden de los vértices, sus matrices de adyacencia son iguales.

### Teorema 8.6.4

*Las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas si y sólo si, para algún orden de sus vértices, sus matrices de adyacencia son iguales.*

**Demostración** Suponga que  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas. Entonces existe una función  $f$  uno a uno y sobre, de los vértices de  $G_1$  a los vértices de  $G_2$ , y una función  $g$  uno a uno y sobre de las aristas de  $G_1$  a las aristas de  $G_2$ , de manera que una arista  $e$  es incidente en  $v$  y  $w$  si y sólo si la arista  $g(e)$  incide en  $f(v)$  y  $f(w)$  en  $G_2$ .

Sea  $v_1, \dots, v_n$  un orden de los vértices de  $G_1$ . Sea  $A_1$  la matriz de adyacencia de  $G_1$  relativa al orden  $v_1, \dots, v_n$ , y sea  $A_2$  la matriz de adyacencia de  $G_2$  relativa al orden  $f(v_1), \dots, f(v_n)$ . Suponga que el elemento en el renglón  $i$  y la columna  $j$ ,  $i \neq j$ , de  $A_1$  es igual a  $k$ . Entonces existen  $k$  aristas, digamos  $e_1, \dots, e_k$ , incidentes en  $v_i$  y  $v_j$ . Por lo tanto, hay exactamente  $k$  aristas  $g(e_1), \dots, g(e_k)$  incidentes en  $f(v_i)$  y  $f(v_j)$  en  $G_2$ . Entonces el elemento en el renglón  $i$ , columna  $j$  en  $A_2$ , que cuenta el número de aristas que inciden en  $f(v_i)$  y  $f(v_j)$  también es igual a  $k$ . Un argumento similar señala que los elementos en las diagonales de  $A_1$  y  $A_2$  son iguales. Por lo tanto,  $A_1 = A_2$ .

El inverso es similar y se deja como ejercicio (vea el ejercicio 25).

### Corolario 8.6.5

*Sean  $G_1$  y  $G_2$  gráficas simples. Las siguientes son equivalentes:*

- $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas.
- Existe una función  $f$  uno a uno y sobre del conjunto de vértices de  $G_1$  al conjunto de vértices de  $G_2$  que satisface lo siguiente: los vértices  $v$  y  $w$  son adyacentes en  $G_1$  si y sólo si los vértices  $f(v)$  y  $f(w)$  son adyacentes en  $G_2$ .

**Demostración** A partir de la definición 8.6.1 se concluye de inmediato que *a)* implica *b)*.

Se probará que *b)* implica *a)*. Suponga que existe una función  $f$  uno a uno y sobre del conjunto de vértices en  $G_1$  al conjunto de vértices en  $G_2$  que satisface lo siguiente: los vértices  $v$  y  $w$  son adyacentes en  $G_1$  si y sólo si los vértices  $f(v)$  y  $f(w)$  son adyacentes en  $G_2$ .

Sea  $v_1, \dots, v_n$  un orden de los vértices de  $G_1$ . Sea  $A_1$  la matriz de adyacencia de  $G_1$  relativa al orden  $v_1, \dots, v_n$  y sea  $A_2$  la matriz de adyacencia de  $G_2$  relativa al orden  $f(v_1), \dots, f(v_n)$ . Como  $G_1$  y  $G_2$  son gráficas simples, los elementos de las matrices de adyacencia son 1 (para indicar que los vértices son adyacentes) o 0 (para indicar que los vértices no son adyacentes). Como los vértices  $v$  y  $w$  son adyacentes en  $G_1$  si y sólo si los vértices  $f(v)$  y  $f(w)$  son adyacentes en  $G_2$ , se concluye que  $A_1 = A_2$ . Por el Teorema 8.6.4,  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas.

**Ejemplo 8.6.6 ►**

La matriz de adyacencia de la gráfica  $G_1$  en la figura 8.6.1 relativa al orden de los vértices  $a, b, c, d, e$ ,

$$\begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

es igual a la matriz de adyacencia de la gráfica  $G_2$  en la figura 8.6.1 relativa al orden de los vértices  $A, B, C, D, E$ ,

$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

De nuevo, se ve que  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas. ◀

Un problema interesante es determinar si dos gráficas son isomorfas. Aunque todos los algoritmos conocidos para probar un isomorfismo entre dos gráficas requieren tiempo exponencial o factorial en el peor caso, existen algoritmos que pueden determinar si un par de gráficas son isomorfas en tiempo lineal en el caso promedio (vea [Read] y [Babai]).

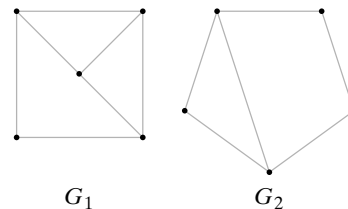
La siguiente es una forma de demostrar que dos gráficas simples  $G_1$  y  $G_2$  *no* son isomorfas. Encuentre una propiedad de  $G_1$  que  $G_2$  *no* tenga, pero que  $G_2$  *tendría* si  $G_1$  y  $G_2$  fueran isomorfas. Esta propiedad se llama **invariante**. De forma más precisa, una propiedad  $P$  es una invariante si siempre que  $G_1$  y  $G_2$  sean gráficas isomorfas:

Si  $G_1$  tiene la propiedad  $P$ ,  $G_2$  también tiene la propiedad  $P$ .

Por la definición 8.6.1, si las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas, existen funciones uno a uno y sobre de las aristas (y vértices, respectivamente) de  $G_1$  a las aristas (y vértices respectivamente) de  $G_2$ . Así, si  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas,  $G_1$  y  $G_2$  tienen el mismo número de aristas y el mismo número de vértices. Por lo tanto, si  $e$  y  $n$  son enteros no negativos, las propiedades “tiene  $e$  aristas” y “tiene  $n$  vértices” son invariantes.

**Ejemplo 8.6.7 ►**

Las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  en la figura 8.6.3 no son isomorfas, ya que  $G_1$  tiene siete aristas y  $G_2$  tiene seis, y “tiene siete aristas” es una invariante.



**Figura 8.6.3** Gráficas no isomorfas.  $G_1$  tiene siete aristas,  $G_2$  tiene seis aristas. ◀

**Ejemplo 8.6.8 ►**

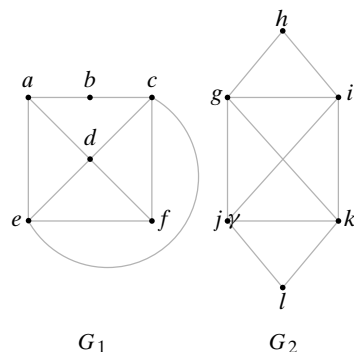
Demuestre que si  $k$  es un entero positivo, “tiene un vértice de grado  $k$ ” es una invariante.

Suponga que  $G_1$  y  $G_2$  son gráficas isomorfas y  $f$  (o  $g$ ) es una función uno a uno y sobre de los vértices (o aristas) de  $G_1$  sobre los vértices (o aristas) de  $G_2$ . Suponga que  $G_1$  tiene un vértice  $v$  de grado  $k$ . Entonces hay  $k$  aristas  $e_1, \dots, e_k$  que inciden en  $v$ . Por la definición 8.6.1,  $g(e_1), \dots, g(e_k)$  son incidentes en  $f(v)$ . Como  $g$  es uno a uno,  $\delta(f(v)) \geq k$ .

Sea  $E$  una arista que incide en  $f(v)$  en  $G_2$ . Como  $g$  es sobre, existe una arista  $e$  en  $G_1$  con  $g(e) = E$ . Puesto que  $g(e)$  incide en  $f(v)$  en  $G_2$ , por la definición 8.6.1,  $e$  incide sobre  $v$  en  $G_1$ . Como  $e_1, \dots, e_k$  son las únicas aristas en  $G_1$  que inciden en  $v$ ,  $e = e_i$  para alguna  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Ahora bien,  $g(e_i) = g(e) = E$ . Entonces  $\delta(f(v)) \geq k$ , de manera que  $G_2$  tiene un vértice, a saber  $f(v)$ , de grado  $k$ . ◀

### Ejemplo 8.6.9 ▶

Puesto que “tiene un vértice de grado 3” es una invariante, las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  de la figura 8.6.4 no son isomorfas;  $G_1$  tiene vértices ( $a$  y  $f$ ) de grado 3, pero  $G_2$  no tiene vértices de grado 3. Observe que  $G_1$  y  $G_2$  tiene el mismo número de vértices y aristas.

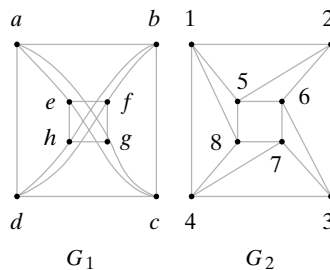


**Figura 8.6.4** Gráficas no isomorfas.  $G_1$  tiene vértices de grado 3, pero  $G_2$  no tiene vértices de grado 3. ◀

Otra invariante frecuentemente útil es “tiene un ciclo simple de longitud  $k$ ”. Se deja la prueba de esta propiedad como una invariante para los ejercicios (ejercicio 12).

### Ejemplo 8.6.10 ▶

Dado que “tienen un ciclo simple de longitud 3” es una invariante, las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  de la figura 8.6.5 no son isomorfas; la gráfica  $G_2$  tiene un ciclo simple de longitud 3, pero todos los ciclos simples en  $G_1$  tienen longitud de al menos 4. Observe que  $G_1$  y  $G_2$  tienen el mismo número de aristas y vértices y que cada vértice en  $G_1$  o  $G_2$  tiene grado 4.



**Figura 8.6.5** Gráficas no isomorfas.  $G_2$  tiene un ciclo simple de longitud 3, pero  $G_1$  no tiene ciclos simples de longitud 3. ◀

Sería sencillo probar si un par de gráficas son isomorfas si se pudiera encontrar un pequeño número de invariantes que fuera fácil verificar y que *sólo* las gráficas isomorfas compartieran. Desafortunadamente, nadie ha tenido éxito en encontrar tal conjunto de invariantes.



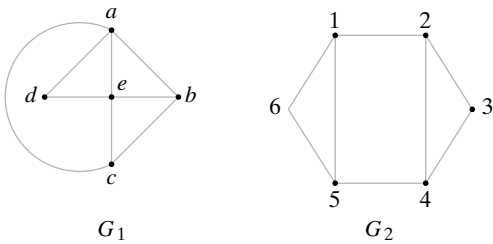
## Sección de ejercicios de repaso

1. Establezca qué significa que dos gráficas sean isomorfas.
2. Dé un ejemplo de gráficas no idénticas isomorfas. Explique por qué son isomorfas.
3. Dé un ejemplo de dos gráficas que *no* sean isomorfas. Explique por qué no lo son.
4. ¿Qué es una invariante en una gráfica?
5. ¿Cuál es la relación de una “invariante” con un isomorfismo?
6. ¿Cómo se puede determinar si las gráficas son isomorfas a partir de sus matrices de adyacencia?
7. ¿Cuál es el modelo de rejilla para computación en paralelo?

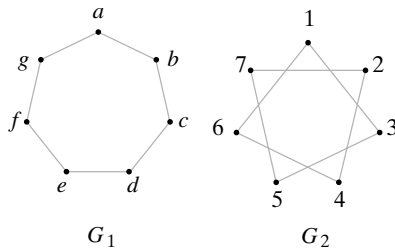
## Ejercicios

En los ejercicios 1 al 10, determine si las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas. Si las gráficas son isomorfas, encuentre funciones  $f$  y  $g$  para la definición 8.6.1; de otra manera, dé una invariante que las gráficas no compartan.

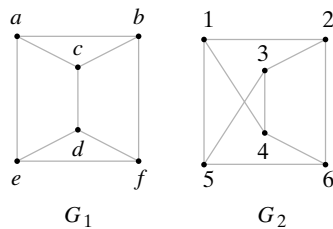
1.



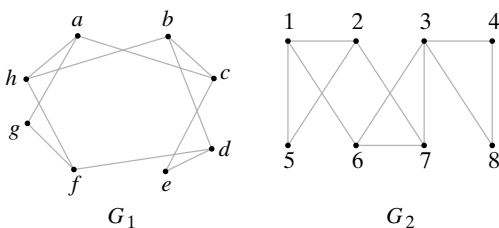
2.



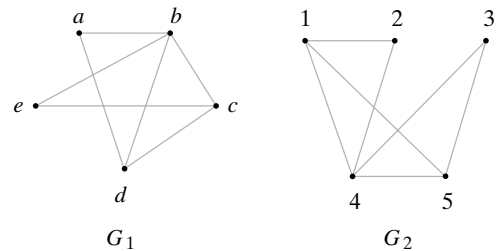
3.



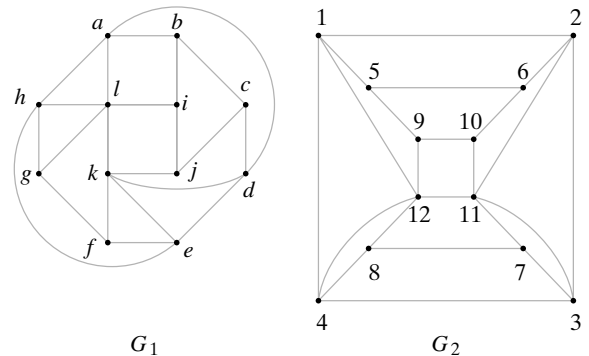
4.



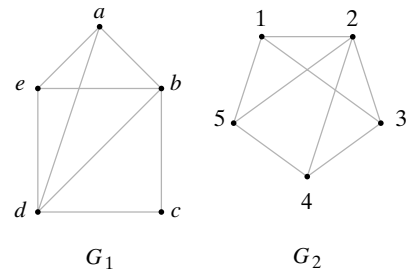
5.



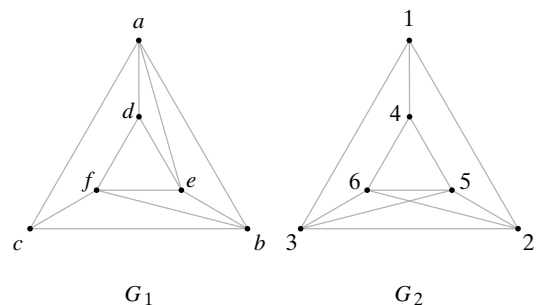
6.



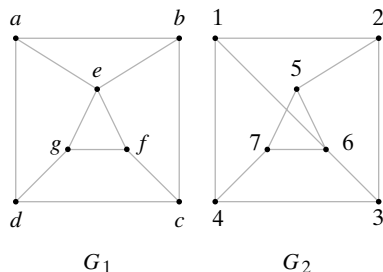
7.



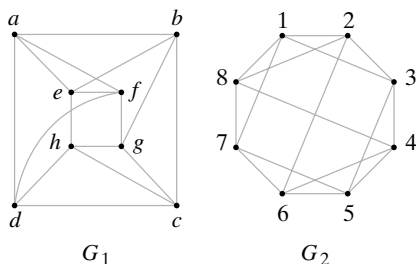
★ 8.



★ 9.



★10.



11. Demuestre que si  $M$  es una rejilla de  $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k$ , donde  $p_i \leq 2^{t_i}$ , para  $i = 1, \dots, k$ , entonces el cubo- $(t_1 + t_2 + \cdots + t_k)$  contiene una subgráfica isomorfa a  $M$ .

En los ejercicios 12 al 16, muestre que la propiedad indicada es una invariante.

12. Tiene un ciclo simple de longitud  $k$
13. Tiene  $n$  vértices de grado  $k$
14. Es conexa
15. Tiene  $n$  ciclos simples de longitud  $k$
16. Tiene una arista  $(v, w)$ , donde  $\delta(v) = i$  y  $\delta(w) = j$
17. Encuentre una invariante que no esté dada en esta sección o en los ejercicios 12 al 16. Pruebe que su propiedad es invariante.

En los ejercicios 18 al 20, diga si cada propiedad es una invariante. Si es una invariante, pruebe que lo es; de otra manera, dé un contraejemplo.

18. Tiene un ciclo de Euler
19. Tiene un vértice dentro de algún ciclo simple
20. Es bipartita
21. Dibuje todas las gráficas simples no isomorfas de tres vértices.
22. Dibuje todas las gráficas simples no isomorfas de cuatro vértices.
23. Dibuje todas las gráficas no isomorfas, sin ciclos y conexas que tienen cinco vértices.
24. Dibuje todas las gráficas no isomorfas, sin ciclos y conexas que tienen seis vértices.
25. Demuestre que las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas si sus vértices se puede ordenar de manera que sus matrices de adyacencia sean iguales.

El complemento de una gráfica simple  $G$  es la gráfica simple  $\overline{G}$  con los mismos vértices que  $G$ . Una arista existe en  $\overline{G}$  si y sólo si no existe en  $G$ .

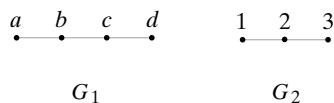
26. Dibuje el complemento de la gráfica  $G_1$  del ejercicio 1.
27. Dibuje el complemento de la gráfica  $G_2$  del ejercicio 1.
- ★28. Demuestre que si  $G$  es una gráfica simple,  $G_1$  o bien  $\overline{G}$  es conexa.
29. Una gráfica simple es **autocomplementaria** si  $G$  y  $\overline{G}$  son isomorfas.
  - a) Encuentre una gráfica autocomplementaria que tenga cinco vértices.
  - b) Encuentre otra gráfica autocomplementaria.
30. Sean  $G_1$  y  $G_2$  gráficas simples. Muestre que  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas si y sólo si  $\overline{G_1}$  y  $\overline{G_2}$  son isomorfas.
31. Dadas dos gráficas  $G_1$  y  $G_2$ , suponga que existe una función  $f$  uno a uno y sobre de los vértices de  $G_1$  a los vértices de  $G_2$ , y una función  $g$  uno a uno y sobre de las aristas de  $G_1$  a las aristas de  $G_2$ , de manera que si una arista  $e$  incide en  $v$  y  $w$  en  $G_1$ , la arista  $g(e)$  incide en  $f(v)$  y  $f(w)$  en  $G_2$ . ¿Son isomorfas  $G_1$  y  $G_2$ ?

Un homomorfismo de una gráfica  $G_1$  a una gráfica  $G_2$  es una función  $f$  del conjunto de vértices de  $G_1$  al conjunto de vértices de  $G_2$  con la propiedad de que si  $v$  y  $w$  son adyacentes en  $G_1$ , entonces  $f(v)$  y  $f(w)$  son adyacentes en  $G_2$ .

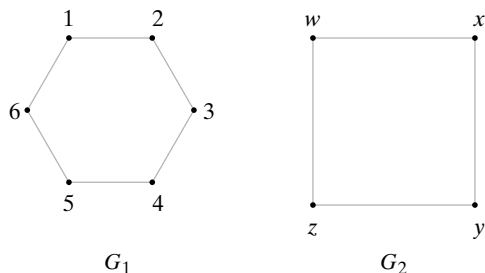
32. Suponga que  $G_1$  y  $G_2$  son gráficas simples. Demuestre que si  $f$  es un homomorfismo de  $G_1$  a  $G_2$  y  $f$  es uno a uno y sobre,  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas.

En los ejercicios 33 al 37, para cada par de gráficas, dé un ejemplo de un homomorfismo de  $G_1$  a  $G_2$ .

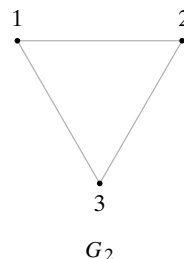
33.



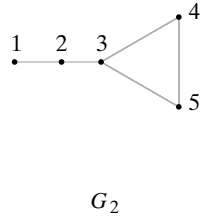
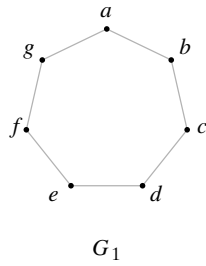
34.



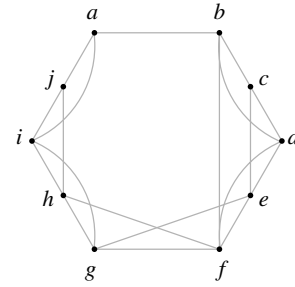
35.  $G_1 = G_1$  del ejercicio 34;  $G_2 = G_1$  del ejercicio 33
36.  $G_1 = G_1$  del ejercicio 33



37.



★ 38. [Hell] Demuestre que el único homomorfismo de una gráfica a sí misma es la función identidad.



## 8.7 → Gráficas planas

WWW

Tres ciudades,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , deberán conectarse en forma directa mediante autopistas con cada una de otras tres ciudades,  $C_4$ ,  $C_5$  y  $C_6$ . ¿Puede diseñarse este sistema de carreteras de manera que las autopistas no se crucen? La figura 8.7.1 ilustra una sistema en el que las autopistas se cruzan. Si usted intenta dibujar un sistema en el que las carreteras no se crucen, pronto se convencerá de que no puede hacerlo. Más adelante en esta sección se explicará con cuidado por qué no se puede hacer.

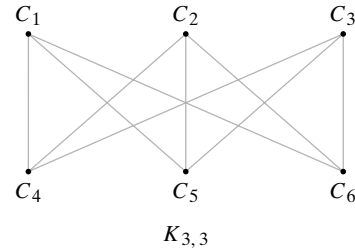


Figura 8.7.1 Ciudades conectadas por autopistas.

### Definición 8.7.1 ►

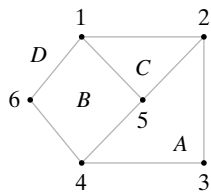


Figura 8.7.2 Gráfica plana conexa con  $f = 4$  caras ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ),  $e = 8$  aristas y  $v = 6$  vértices;  $f = e - v + 2$ .

Una gráfica es *plana* si se puede dibujar en el plano sin que sus aristas se crucen. ◀

Al diseñar circuitos impresos es deseable tener el menor número de cruces posible; así, el diseñador de circuitos impresos se enfrenta con el problema de gráficas planas.

Si una gráfica plana conexa se dibuja en el plano, éste se divide en regiones contiguas llamadas **caras**. Una cara se caracteriza por el ciclo que forma su frontera. Por ejemplo, en la gráfica de la figura 8.7.2, la cara  $A$  tiene como límite el ciclo  $(5, 2, 3, 4, 5)$  y el límite de la cara  $C$  es el ciclo  $(1, 2, 5, 1)$ . La cara exterior  $D$  se considera limitada por el ciclo  $(1, 2, 3, 4, 6, 1)$ . La gráfica de la figura 8.7.2 tiene  $f = 4$  caras,  $e = 8$  aristas y  $v = 6$  vértices. Observe que  $f$ ,  $e$  y  $v$  satisfacen la ecuación

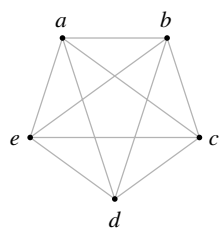
$$f = e - v + 2. \quad (8.7.1)$$

En 1752, Euler probó que la ecuación (8.7.1) se cumple para cualquier gráfica conexa plana. Al final de esta sección se verá cómo probar (8.7.1), pero por ahora se mostrará cómo es que (8.7.1) se puede utilizar para demostrar que ciertas gráficas no son planas.

### Ejemplo 8.7.2 ►

Demuestre que la gráfica  $K_{3,3}$  de la figura 8.7.1 no es plana.

Suponga que  $K_{3,3}$  es plana. Como cada ciclo tiene al menos cuatro aristas, cada cara está limitada por al menos cuatro aristas. Entonces, el número de aristas que acotan las ca-



**Figura 8.7.3** La gráfica no plana  $K_5$ .

ras es al menos  $4f$ . En una gráfica plana, cada arista pertenece al menos a dos ciclos frontera. Por lo tanto,

$$2e \geq 4f.$$

Usando (8.7.1), se encuentra que

$$2e \geq 4(e - v + 2). \quad (8.7.2)$$

Para la gráfica de la figura 8.7.1,  $e = 9$  y  $v = 6$ , de manera que (8.7.2.) se convierte en  $18 = 2 \cdot 9 \geq 4(9 - 6 + 2) = 20$ ,

que es una contradicción. Por lo tanto,  $K_{3,3}$  no es plana. ◀

Con un argumento similar (vea el ejercicio 15), es posible demostrar que la gráfica  $K_5$  de la figura 8.7.3 no es plana.

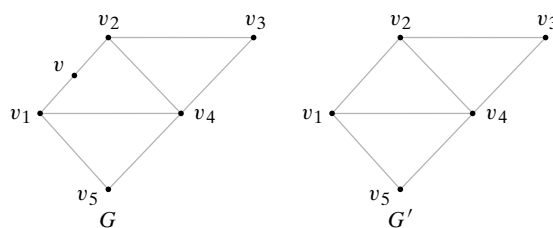
Es obvio que si una gráfica contiene a  $K_{3,3}$  o  $K_5$  como subgráfica, no puede ser plana. El inverso es casi verdadero. Para establecer la situación de manera más precisa, deben introducirse algunos términos nuevos.

### Definición 8.7.3 ▶

Si una gráfica  $G$  tiene un vértice  $v$  de grado 2 y aristas  $(v, v_1)$  y  $(v, v_2)$  con  $v_1 \neq v_2$ , se dice que las aristas  $(v, v_1)$  y  $(v, v_2)$  están en serie. La *reducción de una serie* consiste en eliminar el vértice  $v$  de la gráfica  $G$  y sustituir las aristas  $(v, v_1)$  y  $(v, v_2)$  por la arista  $(v_1, v_2)$ . Se dice que la gráfica  $G'$  que resulta *se obtiene de  $G$  al reducir una serie*. Por convención, se dice que  $G$  se puede obtener a partir de sí misma mediante una reducción de serie. ◀

### Ejemplo 8.7.4 ▶

En la gráfica  $G$  de la figura 8.7.4, las aristas  $(v, v_1)$  y  $(v, v_2)$  están en serie. La gráfica  $G'$  de la figura 8.7.4 se obtiene de  $G$  al reducir la serie.



**Figura 8.7.4**  $G'$  se obtiene de  $G$  al reducir una serie. ◀

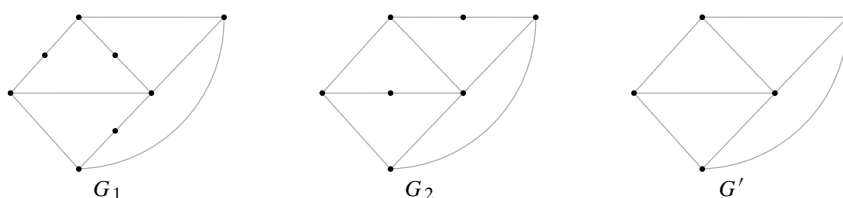
### Definición 8.7.5 ▶

Las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son un *homomorfismo* si  $G_1$  y  $G_2$  se pueden reducir a gráficas isomorfas mediante una secuencia de reducciones de serie. ◀

De acuerdo con las definiciones 8.7.3 y 8.7.5, cualquier gráfica es un homomorfismo de sí misma. Además, las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son un homomorfismo si  $G_1$  se puede reducir a una gráfica isomorfa a  $G_2$  o si  $G_2$  se puede reducir a una gráfica isomorfa a  $G_1$ .

### Ejemplo 8.7.6 ▶

Las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  de la figura 8.7.5 son homomorfas ya que ambas se pueden reducir a la gráfica  $G'$  de la figura 8.7.5 por una secuencia de reducciones de series.



**Figura 8.7.5**  $G_1$  y  $G_2$  son un homomorfismo; cada una se puede reducir a  $G'$ . ◀

Si se define una relación  $R$  en un conjunto de gráficas por la regla  $G_1 R G_2$  si  $G_1$  y  $G_2$  son un homomorfismo,  $R$  es una relación de equivalencia. Cada clase de equivalencia consiste en un conjunto de gráficas mutuamente homomorfas.

WWW

Ahora se establecerá una condición necesaria y suficiente para que una gráfica sea plana. Kuratowski fue el primero en establecer y probar el teorema en 1930. La demostración se encuentra en [Even, 1979].

### Teorema 8.7.7

#### Teorema de Kuratowski

Una gráfica  $G$  es plana si y sólo si  $G$  no contiene una subgráfica homomorfa a  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .

### Ejemplo 8.7.8 ►

Demuestre que la gráfica  $G$  de la figura 8.7.6 no es plana mediante el teorema de Kuratowski.

Se intentará encontrar  $K_{3,3}$  en la gráfica  $G$  de la figura 8.7.6. Primero observe que los vértices  $a, b, f$  y  $e$  tienen, cada uno, grado 4. En  $K_{3,3}$  cada vértice tiene grado 3, de manera que se eliminan las aristas  $(a, b)$  y  $(f, e)$  para que todos los vértices tengan grado 3 (vea la figura 8.7.6). Se observa que si se eliminan una o más aristas, se obtendrán dos vértices de grado 2 y luego se pueden realizar dos reducciones de series. La gráfica resultante tendrá nueve aristas; como  $K_{3,3}$  tiene nueve aristas, este enfoque parece prometedor. Por prueba y error, finalmente se ve que si se elimina la arista  $(g, h)$  y se realiza una reducción de serie, se obtiene una copia isomorfa de  $K_{3,3}$  (vea la figura 8.7.7). Por lo tanto, la gráfica  $G$  de la figura 8.7.6 no es plana, puesto que contiene una subgráfica homomorfa a  $K_{3,3}$ .

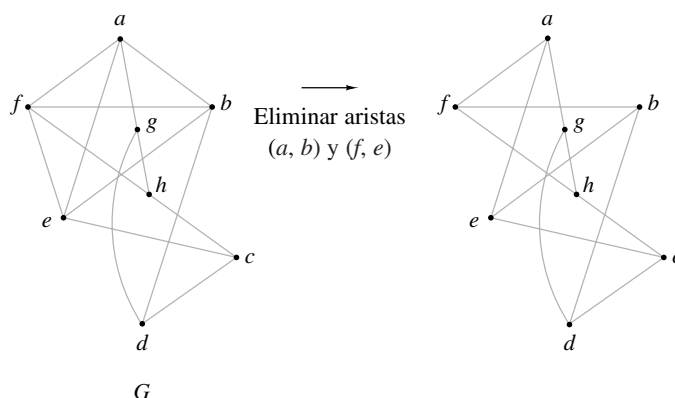


Figura 8.7.6 Eliminación de aristas para obtener una subgráfica.

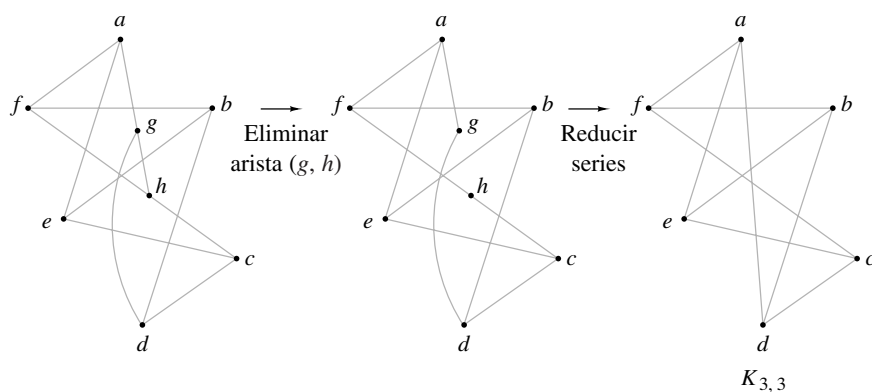
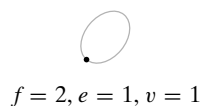
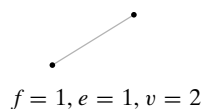


Figura 8.7.7 Eliminación de una arista para obtener una subgráfica, seguida de reducciones de series.

Aunque el Teorema 8.7.7 da una caracterización elegante de las gráficas planas, no lleva a un algoritmo eficiente para reconocerlas. Sin embargo, se conocen algoritmos que pueden determinar si una gráfica que tiene  $n$  vértices es plana en un tiempo  $O(n)$  (vea [Even, 1979]).

Esta sección concluye con la fórmula de Euler.

### Teorema 8.7.9



**Figura 8.7.8** Paso base del Teorema 8.7.9.

### Fórmula de Euler para gráficas

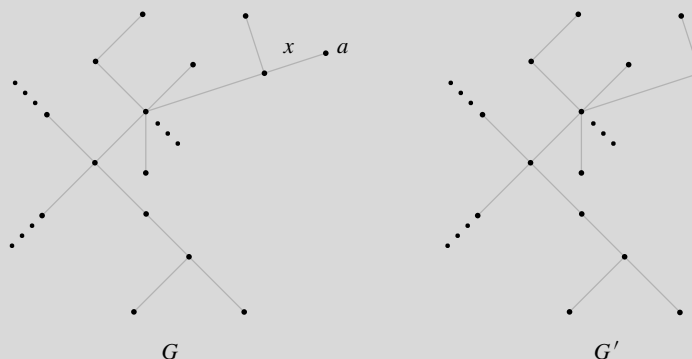
Si  $G$  es una gráfica plana conexa con  $e$  aristas,  $v$  vértices y  $f$  caras, entonces

$$f = e - v + 2 \quad (8.7.3)$$

**Demostración** Se usará inducción sobre el número de aristas.

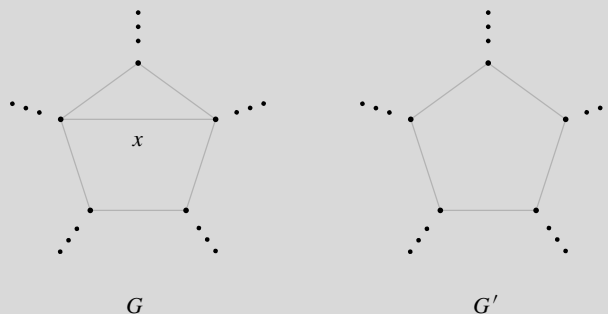
Suponga que  $e = 1$ . Entonces  $G$  es una de las dos gráficas mostradas en la figura 8.7.8. En cualquier caso, la fórmula se cumple. Esto verifica el paso base.

Suponga que la fórmula se cumple para gráficas planas conexas con  $n$  aristas. Sea  $G$  una gráfica con  $n + 1$  aristas. Primero suponga que  $G$  no contiene ciclos. Elija un vértice  $v$  y trace una trayectoria que inicie en  $v$ . Como  $G$  no tiene ciclos, cada vez que se traza una arista, se llega a un nuevo vértice. En algún momento, se llegará al vértice  $a$  con grado 1, que no se puede dejar (vea la figura 8.7.9). Se elimina  $a$  y la arista  $x$  incidente en  $a$  de la gráfica  $G$ . La gráfica  $G'$  que resulta tiene  $n$  aristas; así, por la suposición inductiva, (8.7.3) se cumple para  $G'$ . Como  $G$  tiene una arista más que  $G'$ , un vértice más que  $G'$  y el mismo número de caras, se concluye que (8.7.3) también se cumple para  $G$ .



**Figura 8.7.9** Prueba del Teorema 8.7.9 para el caso en que  $G$  no tiene ciclos. Se encuentra un vértice  $a$  con grado 1 y se elimina  $a$  y la arista  $x$  incidente en  $a$ .

Ahora suponga que  $G$  contiene un ciclo. Sea  $x$  una arista en un ciclo (figura 8.7.10). En este caso,  $x$  es parte de la frontera entre dos caras. Esta vez se elimina la arista  $x$  pero no los vértices, para obtener la gráfica  $G'$  (figura 8.7.10). De nuevo,  $G'$  tiene  $n$



**Figura 8.7.10** Prueba del Teorema 8.7.9 para el caso de que  $G$  tiene un ciclo. Se elimina la arista  $x$  en un ciclo.

aristas; entonces por la suposición inductiva, (8.7.3) se cumple para  $G'$ . Como  $G$  tiene una cara más que  $G'$ , una arista más que  $G'$  y el mismo número de vértices que  $G'$ , se concluye que (8.7.3) también se cumple para  $G$ .

Como esto verifica el paso inductivo, el principio de inducción matemática demuestra el teorema.

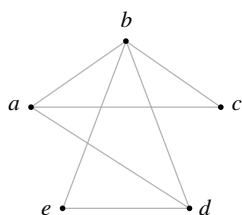
## Sección de ejercicios de repaso

1. ¿Qué es una gráfica plana?
2. ¿Qué es una cara?
3. Establezca la ecuación de Euler para una gráfica plana conexa.
4. ¿Qué son aristas en serie?
5. ¿Qué es la reducción de serie?
6. Defina gráficas homomorfas.
7. Enuncie el teorema de Kuratowski.

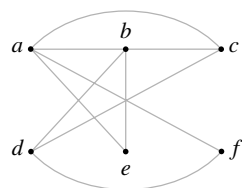
## Ejercicios

En los ejercicios 1 al 3, demuestre que la gráfica es plana dibujándola de nuevo sin que se crucen las aristas.

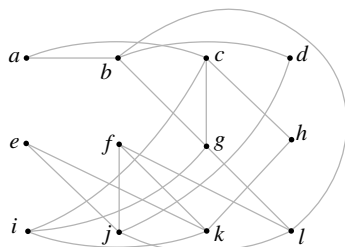
1.



2.

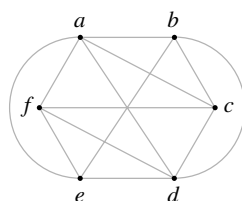


3.

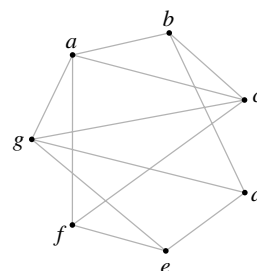


En los ejercicios 4 y 5, demuestre que la gráfica no es plana encontrando una subgráfica homomorfa a  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .

4.

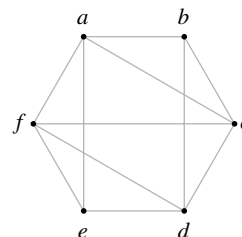


5.

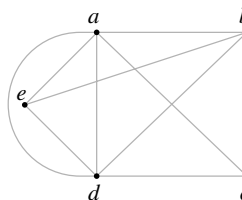


En los ejercicios 6 al 8, determine si la gráfica es plana. Si lo es, dibújela de nuevo sin que se crucen las aristas; de otra manera, encuentre una subgráfica homomorfa a  $K_5$  o bien  $K_{3,3}$ .

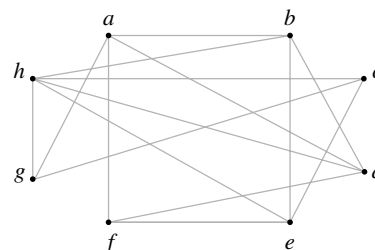
6.



7.



8.

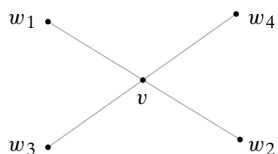




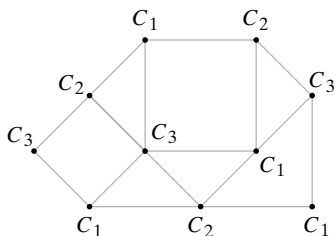
9. Una gráfica plana conexa tiene 9 vértices que tienen grados 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4 y 5. ¿Cuántas aristas hay? ¿Cuántas caras tiene?
10. Demuestre que agregar o eliminar ciclos, aristas paralelas o aristas en serie no afecta el hecho de que una gráfica sea plana.
11. Demuestre que cualquier gráfica que tiene 4 vértices o menos es plana.
12. Demuestre que cualquier gráfica que tiene 5 vértices o menos y un vértice de grado 2 es plana.
13. Demuestre que en cualquier gráfica simple, conexa, plana,  $e \leq 3v - 6$ .
14. Dé un ejemplo de una gráfica simple, conexa y no plana para la que  $e \geq 3v - 6$ .
15. Use el ejercicio 13 para demostrar que  $K_5$  no es plana.
- ★ 16. Demuestre que si una gráfica simple  $G$  tiene 11 vértices o más, entonces una de las dos,  $G$  o su complemento  $\bar{G}$ , no es plana.
- ★ 17. Demuestre que si una gráfica plana tiene un ciclo de Euler, tiene un ciclo de Euler sin cruces. Una trayectoria  $P$  en una gráfica plana tiene un cruce si un vértice  $v$  aparece al menos dos veces en  $P$  y  $P$  se cruza a sí misma en  $v$ ; es decir,

$$P = (\dots, w_1, v, w_2, \dots, w_3, v, w_4, \dots),$$

donde los vértices se arreglan de manera que  $w_1, v, w_2$  cruza a  $w_3, v, w_4$  en  $v$  como en la figura siguiente.

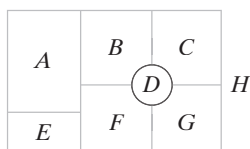


Un coloreado de una gráfica  $G$  con los colores  $C_1, C_2, \dots, C_n$  asigna a cada vértice un color  $C_i$  de manera que cada vértice tiene un color diferente del de los vértices adyacentes. Por ejemplo, la siguiente gráfica tiene tres colores. El resto de los ejercicios tienen que ver con colorear gráficas.

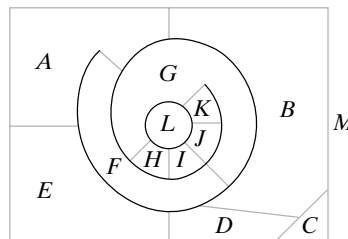


Un mapa plano es una gráfica plana donde las caras se interpretan como los países, las aristas son las fronteras entre esos países y los vértices representan las intersecciones de las fronteras. El problema de colorear un mapa plano  $G$ , de manera que los países con fronteras comunes no tengan el mismo color, se puede reducir al problema de colorear una gráfica construyendo primero la gráfica dual  $G'$  de  $G$  de la siguiente manera. Los vértices de la gráfica dual  $G'$  consisten en un punto en cada cara de  $G$ , incluso en la cara no acotada. Una arista en  $G'$  conecta dos vértices si las caras correspondientes en  $G$  están separadas por una frontera. Colorear el mapa  $G$  es equivalente a colorear los vértices de la gráfica dual  $G'$ .

18. Encuentre el dual del siguiente mapa.



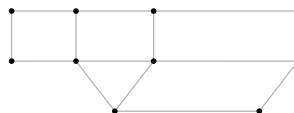
19. Demuestre que el dual de un mapa plano es una gráfica plana.
20. Demuestre que cualquier coloreado del mapa del ejercicio 18, excepto la región no acotada, requiere al menos 3 colores.
21. Coloree el mapa del ejercicio 18, excepto la región no acotada, usando tres colores.
22. Encuentre el dual del siguiente mapa.



23. Demuestre que cualquier coloreado del mapa del ejercicio 22, excepto la región no acotada, requiere al menos 4 colores.
24. Coloree el mapa del ejercicio 22, excepto la región no acotada, usando 4 colores.

Una triangulación de una gráfica  $G$  plana simple se obtiene de  $G$  conectando el mayor número de vértices posible al tiempo que se mantiene la naturaleza plana al no introducir lazos o aristas paralelas.

25. Encuentre una triangulación de la siguiente gráfica.



26. Demuestre que si una triangulación  $G'$  de una gráfica  $G$  plana simple se puede colorear con  $n$  colores, y también  $G$ .
27. Demuestre que en una triangulación de una gráfica  $G$  plana simple,  $3f = 2e$ .

Appel y Haken probaron (vea [Appel]) que toda gráfica plana simple se puede colorear con cuatro colores. El problema se planteó a mediados del siglo XIX y durante años nadie tuvo éxito en dar una prueba. Quienes trabajan en el problema de cuatro colores en años recientes han tenido una ventaja sobre sus predecesores: el uso de las computadoras electrónicas rápidas. El siguiente ejercicio muestra cómo comienza la prueba.

Suponga que se tiene una gráfica plana simple que requiere más de cuatro colores para colorearla. Entre este tipo de gráficas, existe una con el número mínimo de vértices. Sea  $G$  una triangulación de esta gráfica. Entonces  $G$  también tiene el número mínimo de vértices y por el ejercicio 26,  $G$  requiere más de cuatro colores para colorearla.

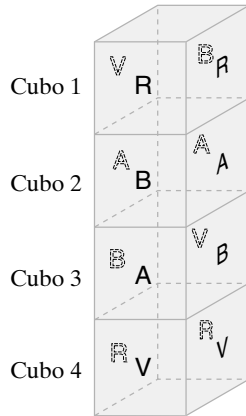
28. Si el dual de un mapa tiene un vértice de grado 3, ¿cuál es la apariencia del mapa original?
29. Demuestre que  $G$  no tiene un vértice de grado 3.
- ★ 30. Demuestre que  $G$  no tiene un vértice de grado 4.
- ★ 31. Demuestre que  $G$  tiene un vértice de grado 5.

La contribución de Appel y Haken fue demostrar que sólo era necesario considerar y analizar un número finito de casos que incluyen el vértice de grado 5, y demostrar que todos se pueden colorear usando 4 colores. La reducción a un número finito de casos se facilitó al usar la computadora para ayudar a encontrar los casos que requieren análisis. De nuevo se usó la computadora para analizar los casos que resultan.

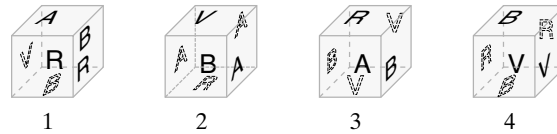
- ★ 32. Demuestre que cualquier gráfica simple plana se puede colorear usando 5 colores.

## 8.8 → Locura instantánea<sup>†</sup>

www



**Figura 8.8.2** Una solución al juego de Locura instantánea de la figura 8.8.1.

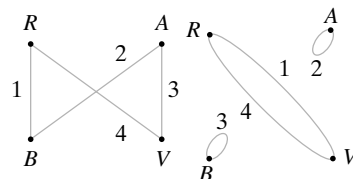


**Figura 8.8.1** Juego de Locura instantánea.

Primero observe que un apilado en particular se puede representar mediante dos gráficas, una para los colores del frente/atrás y otra para los de derecha/izquierda. Por ejemplo, en la figura 8.8.3 se representa el apilado de la figura 8.8.2. Los vértices representan los colores, y las aristas conectan dos vértices si las caras opuestas tienen esos colores. Por ejemplo, en la gráfica del frente/atrás, la arista con etiqueta 1 conecta *R* y *B*, ya que las caras de enfrente y atrás del cubo 1 son roja (*R*) y blanca (*B*). Como otro ejemplo, en la gráfica de derecha/izquierda, *B* tiene un lazo, pues las dos caras, izquierda y derecha del cubo 3 son blancas.

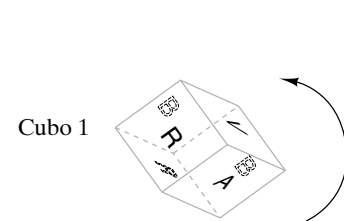
También es posible construir un apilado a partir de un par de gráficas como las de la figura 8.8.3, que representan una solución del juego de Locura instantánea. Comenzamos con la gráfica frente/atrás. El cubo 1 debe tener rojo y blanco en caras opuestas. De manera arbitraria, se asigna uno de estos colores, digamos rojo, al frente. Entonces el cubo 1 tiene una cara blanca atrás. La otra arista incidente en *B* es 2, de manera que la cara del frente del cubo 2 debe ser blanca. Esto da al cubo 2 una cara azul atrás. La otra arista incidente en *A* es 3, y se hace azul la cara de enfrente del cubo 3. Esto da al cubo 3 una cara verde atrás. La otra arista incidente en *V* es 4. El cubo 4 obtiene entonces una cara verde al frente y una roja atrás. Las caras de enfrente y atrás tienen una alineación adecuada. En este punto, las caras de izquierda y derecha se arreglan al azar; sin embargo, se demostrará cómo orientar de manera correcta las caras de izquierda y derecha sin alterar los colores de enfrente y atrás.

El cubo 1 debe tener rojo y verde en las caras opuestas izquierda y derecha. Se asigna uno de estos colores, por ejemplo verde, a la izquierda. Entonces el cubo 1 tiene una cara roja en la derecha. Observe que al rotar el cubo se puede obtener esta orientación izquierda/derecha sin cambiar los colores de frente/atrás (figura 8.8.4). Se pueden orien-



(a) Frente/atrás (b) Izquierda/derecha

**Figura 8.8.3** Gráficas que representan el apilado de la figura 8.8.2.



**Figura 8.8.4** El cubo se gira para obtener una orientación izquierda/derecha, sin cambiar los colores del frente/atrás.

<sup>†</sup> Esta sección se puede omitir sin pérdida de continuidad.

tar los cubos 2, 3 y 4 de manera similar. Observe que los cubos 2 y 3 tienen los mismos colores en lados opuestos. Se reconstruyó el apilado de la figura 8.8.2.

Es aparente a partir del análisis anterior que se puede obtener una solución al juego de Locura instantánea si se encuentran dos gráficas como las de la figura 8.8.3. Las propiedades necesarias son:

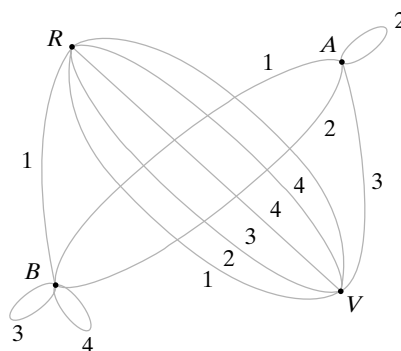
■ Cada vértice debe tener grado 2. (8.8.1)

■ Cada cubo debe estar representado por una arista exactamente una vez en cada gráfica. (8.8.2)

■ No debe haber aristas en común entre las dos gráficas. (8.8.3)

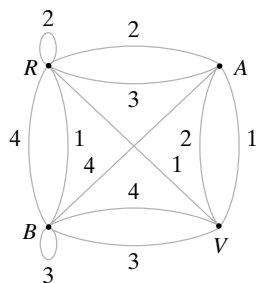
La propiedad (8.8.1) asegura que cada color se puede usar dos veces, una vez en el frente (o izquierda) y otra atrás (o derecha). La propiedad (8.8.2) asegura que cada cubo se usa exactamente una vez. La propiedad (8.8.3) asegura que, después de orientar los lados del frente y atrás, es posible orientar con éxito los lados izquierdo y derecho.

Para obtener una solución, primero se dibuja una gráfica  $G$  que representa todas las caras de todos los cubos. Los vértices de  $G$  representan los cuatro colores, y una arista con etiqueta  $i$  conecta dos vértices (colores) si las caras opuestas del cubo  $i$  tienen esos colores. En la figura 8.8.5 se dibujó la gráfica que representa a los cubos de la figura 8.8.1. Después, por inspección, se encuentran dos subgráficas de  $G$  que satisfacen las propiedades (8.8.1) a (8.8.3). Intente el método encontrando otra solución al juego representado en la figura 8.8.5.



**Figura 8.8.5** Representación gráfica del juego de Locura instantánea de la figura 8.8.1.

### Ejemplo 8.8.1 ►

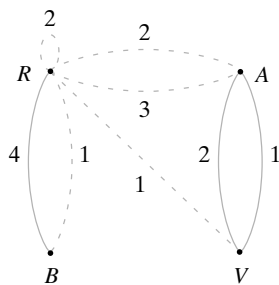


**Figura 8.8.6** El juego de la Locura instantánea para el ejemplo 8.8.1.

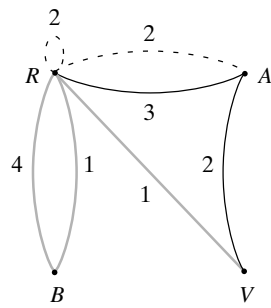
Encuentre una solución al juego de Locura instantánea de la figura 8.8.6.

Comenzamos por tratar de construir una subgráfica con las propiedades (8.8.1) y (8.8.2). De manera arbitraria se elige un vértice, digamos  $A$ , y dos aristas incidentes en  $A$ . Suponga que se seleccionan las dos aristas mostradas como líneas continuas en la figura 8.8.7. Ahora considere el problema de elegir dos aristas incidentes en  $R$ . No se pueden seleccionar aristas que inciden en  $A$  o  $V$  porque  $A$  y  $V$  deben tener grado 2. Como cada cubo debe aparecer en cada subgráfica exactamente una vez, no se puede seleccionar ninguna arista con etiqueta 1 o 2 porque ya se seleccionaron las aristas con estas etiquetas. Las aristas que inciden en  $R$  que no se pueden seleccionar se muestran punteadas en la figura 8.8.7. Esto deja sólo la arista con etiqueta 4. Dado que se necesitan dos aristas incidentes en  $R$ , la selección inicial de aristas incidentes en  $B$  debe revisarse.

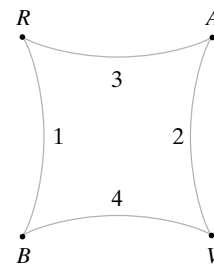
Para el siguiente intento de elegir dos aristas incidentes en el vértice  $A$ , se seleccionan dos aristas etiquetadas 2 y 3, como se indica en la figura 8.8.8. Como esta elección incluye una arista incidente en  $R$ , debemos elegir una arista adicional que incida en  $R$ . Se tienen tres posibilidades para escoger la arista adicional (mostradas con líneas gruesas en la figura 8.8.8). (El lazo incidente en  $R$  cuenta como dos aristas y no se puede elegir). Si se selecciona la arista con etiqueta 1 incidente en  $R$  y  $V$ , se necesita un lazo en  $B$  con etiqueta 4. Como no hay tal lazo, no se selecciona esta arista. Si se elige la arista con etiqueta 1 incidente en  $R$  y  $B$ , se puede después elegir la arista con etiqueta 4, incidente en  $B$  y  $V$  (vea la figura 8.8.9). Con esto se obtiene una de las gráficas.



**Figura 8.8.7** Intento para encontrar una subgráfica de la figura 8.8.6 que satisfaga (8.8.1) y (8.8.2).

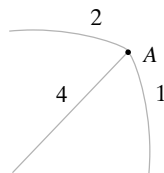


**Figura 8.8.8** Otro intento para encontrar una subgráfica de la figura 8.8.6 que satisfaga (8.8.1) y (8.8.2).

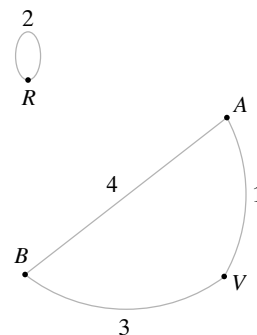


**Figura 8.8.9** Subgráfica de la figura 8.8.6 que satisfaga (8.8.1) y (8.8.2).

Ahora se buscará una segunda gráfica que no tenga aristas en común con la gráfica que acaba de elegirse. De nuevo se inicia seleccionando dos aristas incidentes en  $B$ . Como no es posible reutilizar aristas, las opciones están limitadas a tres aristas (figura 8.8.10). Elegir las aristas con etiquetas 1 y 4 lleva a la gráfica de la figura 8.8.11. Las gráficas de las figuras 8.8.9 y 8.8.11 resuelven el juego de Locura instantánea de la figura 8.8.6.



**Figura 8.8.10** Aristas incidentes en  $A$  no usadas en la figura 8.8.9.



**Figura 8.8.11** Otra subgráfica de la figura 8.8.6 sin aristas comunes con la figura 8.8.9, que satisfaga (8.8.1) y (8.8.2). Esta gráfica y la de la figura 8.8.9 resuelven el juego de Locura instantánea de la figura 8.8.6.

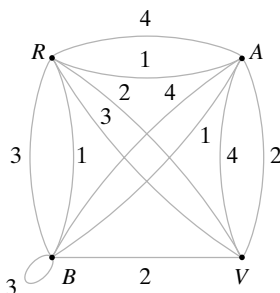
## Sección de ejercicios de repaso

1. Describa el juego de Locura instantánea.
2. Describa cómo resolver el juego de Locura instantánea.

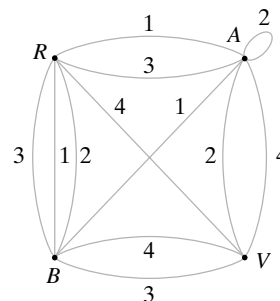
## Ejercicios

Encuentre soluciones a los siguientes juegos de Locura instantánea.

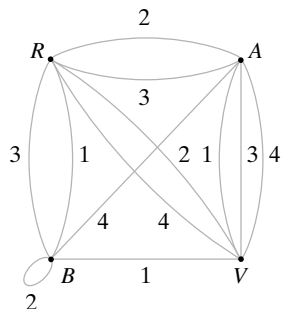
1.



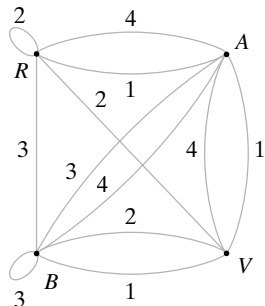
2.



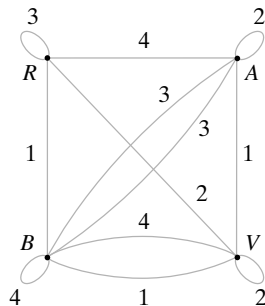
3.



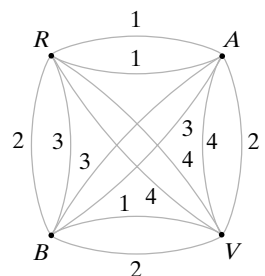
4.



5.



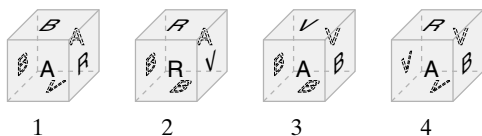
6.



7. a) Encuentre todas las subgráficas de la figura 8.8.5 que satisfacen las propiedades (8.8.1) y (8.8.2).

b) Encuentre todas las soluciones del juego de Locura instantánea de la figura 8.8.5.

8. a) Represente el juego de Locura instantánea mediante una gráfica.

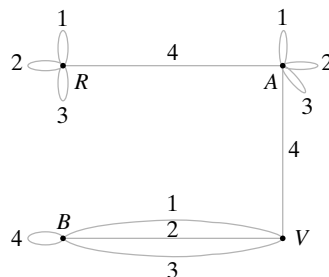


b) Encuentre una solución al juego.

c) Encuentre todas las subgráficas de la gráfica en el inciso a) que satisfacen las propiedades (8.8.1) y (8.8.2).

d) Use c) para demostrar que el juego tiene una solución única.

9. Demuestre que el siguiente juego de Locura instantánea no tiene solución, mediante un argumento para probar que ninguna subgráfica satisface las propiedades (8.8.1) y (8.8.2). Observe que no hay solución aun cuando cada cubo contiene los cuatro colores.



★10. Dé un ejemplo de un juego de Locura instantánea que satisfaga:

a) No tiene solución.

b) Cada cubo contiene los cuatro colores.

c) Hay una subgráfica que satisface las propiedades (8.8.1) y (8.8.2).

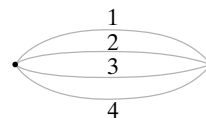
11. Demuestre que hay 24 orientaciones de un cubo.

12. Numere los cubos de un juego de Locura instantánea 1, 2, 3 y 4. Demuestre que el número de maneras en que se apilan los cubos 1, 2, 3 y 4, leyendo de abajo arriba, es 331,776.

★13. ¿Cuántas gráficas de Locura instantánea hay; es decir, cuántas gráficas hay con cuatro vértices y 12 aristas, tres de cada uno de los cuatro tipos?

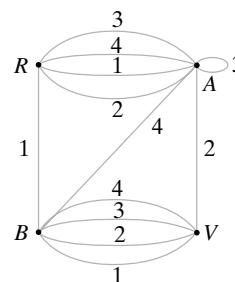
Los ejercicios 14 al 21 se refieren a una versión modificada de Locura instantánea donde una solución se define como un apilado que, al verse desde enfrente, atrás, izquierda o derecha muestra un solo color. (El frente, atrás, izquierda y derecha son de colores diferentes).

14. Dé un argumento que muestre que si se grafica el juego como la Locura instantánea normal, una solución para el juego modificado consiste en dos subgráficas de la forma mostrada en la figura, sin aristas o vértices en común.

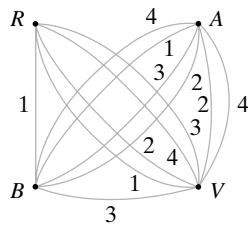


Encuentre soluciones a Locura instantánea modificado para los siguientes juegos.

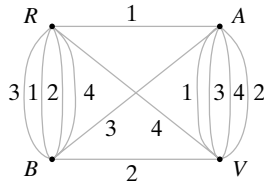
15.



16.



17.



18. Gráfica del ejercicio 6

19. Demuestre que para la figura 8.8.5, Locura instantánea, como se presenta en el texto, tiene una solución, pero la versión modificada no tiene solución.

★20. Demuestre que si Locura instantánea modificada tiene una solución, la versión presentada en el texto también debe tener una solución.

21. ¿Es posible que ninguna versión de Locura instantánea tenga una solución aun cuando cada cubo contenga los cuatro colores? Si la respuesta es sí, pruébelo; de otra manera, dé un contraejemplo.

## Notas

Prácticamente cualquier referencia de matemáticas discretas contiene un capítulo o más sobre teoría de gráficas. Los libros específicos de teoría de gráficas son [Berge; Bondy; Chartrand; Deo; Even, 1979; Gibbons; Harari; König; Ore; West, y Wilson]. [Deo; Even, 1979; y Gibbons] ponen énfasis en los algoritmos de gráficas. [Brassard, Cormen y Johnsonbaugh] también estudian las gráficas y los algoritmos de gráficas.

[Akl; Leighton; Lester; Lewis; Miller, y Quinn] analizan las computadoras en paralelo y los algoritmos para computación en paralelo. Nuestros resultados acerca de las subgráficas del hipercubo se tomaron de [Saad].

El artículo original de Euler de los puentes de Königsberg, editado por J. R. Newman, se reimprimió como [Newman].

En [Gardner, 1959], los ciclos hamiltonianos se relacionan con el juego de la Torre de Hanoi.

En muchos casos, los métodos llamados de ramificación y acotamiento (vea por ejemplo, [Tucker]) con frecuencia proporcionan soluciones al problema del agente viajero de manera más eficiente que la búsqueda exhaustiva.

El algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra aparece en [Dijkstra, 1959].

La complejidad del problema de isomorfismo entre gráficas se analiza en [Köbler].

Appel y Haken publicaron su solución para el problema de los cuatro colores en [Appel].

## Repaso del capítulo

### Sección 8.1

1. Gráfica  $G = (V, E)$  (no dirigida y dirigida)
2. Vértice
3. Arista
4. La arista  $e$  incide en el vértice  $v$
5. El vértice  $v$  es incidente en la arista  $e$
6.  $v$  y  $w$  son vértices adyacentes
7. Aristas paralelas
8. Lazo
9. Vértice aislado
10. Gráfica simple
11. Gráfica ponderada
12. Peso de una arista
13. Longitud de una trayectoria en una gráfica ponderada
14. Similitud gráfica
15. Función de disimilitud
16. Cubo- $n$  (hipercubo)
17. Computación en serie
18. Algoritmo en serie

19. Computación en paralelo
20. Algoritmo en paralelo
21. Gráfica completa sobre  $n$  vértices,  $K_n$
22. Gráfica bipartita
23. Gráfica bipartita completa sobre  $m$  y  $n$  vértices,  $K_{m,n}$

### Sección 8.2

24. Trayectoria o ruta
25. Trayectoria simple
26. Ciclo
27. Ciclo simple
28. Gráfica conexa
29. Subgráfica
30. Componente de una gráfica
31. Grado de un vértice  $\delta(v)$
32. Problema del puente de Königsberg
33. Ciclo de Euler
34. Una gráfica  $G$  tiene un ciclo de Euler si y sólo si  $G$  es conexa y todos los vértices tienen grado par.
35. La suma de los grados de todos los vértices en una gráfica es igual al doble del número de aristas.
36. En una gráfica, hay un número par de vértices de grado impar.
37. Una gráfica tiene una trayectoria sin aristas repetidas de  $v$  a  $w$  ( $v \neq w$ ) que contiene a todas las aristas y vértices si y sólo si es conexa y  $v$  y  $w$  son los únicos vértices que tienen grado impar.
38. Si una gráfica  $G$  contiene un ciclo de  $v$  a  $v$ ,  $G$  contiene un ciclo simple de  $v$  a  $v$ .

### Sección 8.3

39. Ciclo de Hamilton
40. Problema del agente viajero
41. Modelo de anillo para computación en paralelo
42. Código Gray

### Sección 8.4

43. Algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra

### Sección 8.5

44. Matriz de adyacencia
45. Si  $A$  es la matriz de una gráfica simple, el elemento  $ij$  de  $A^n$  es igual al número de trayectorias de longitud  $n$  del vértice  $i$  al vértice  $j$
46. Matriz de incidencia

### Sección 8.6

47. Las gráficas  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$  son isomorfas si existen funciones uno a uno y sobre  $f: V_1 \rightarrow V_2$  y  $g: E_1 \rightarrow E_2$  tales que  $e \in E_1$  incide en  $v, w \in V_1$  si y sólo si  $g(e)$  incide en  $f(v)$  y  $f(w)$ .
48. Las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas si y sólo si, para algún orden de sus vértices, sus matrices de adyacencia son iguales.
49. Modelo de rejilla para computación en paralelo
50. Invariante

### Sección 8.7

51. Gráfica plana
52. Cara
53. Ecuación de Euler para gráficas planas conexas:  $f = e - v + 2$
54. Aristas en serie
55. Reducción de serie
56. Gráficas homomorfas
57. Teorema de Kuratowski: una gráfica es plana si y sólo si no contiene una subgráfica homomorfa a  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .



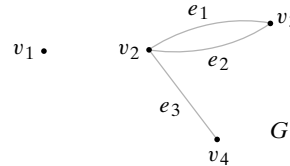
### Sección 8.8

58. Locura instantánea
59. Cómo resolver un juego de Locura instantánea

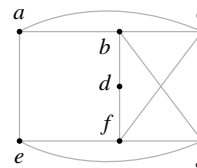
## Autoevaluación del capítulo

### Sección 8.1

1. Para la gráfica  $G = (V, E)$ , encuentre  $V$ ,  $E$  y todas las aristas paralelas, ciclos y vértices aislados, y establezca si  $G$  es una gráfica simple. Además establezca en qué vértices incide  $e_3$  y en qué aristas incide el vértice  $v_2$ .



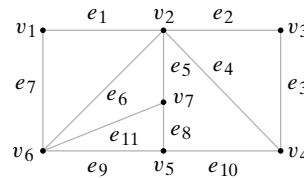
2. Explique por qué la gráfica no tiene una trayectoria de  $a$  a  $a$  que pase por cada arista exactamente una vez.



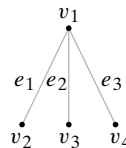
3. Dibuje  $K_{2,5}$ , la gráfica bipartita completa sobre 2 y 5 vértices.
4. Pruebe que el cubo- $n$  es bipartita para toda  $n \geq 1$ .

### Sección 8.2

5. Diga si la trayectoria  $(v_2, v_3, v_4, v_2, v_6, v_1, v_2)$  en la gráfica es una trayectoria simple, un ciclo, un ciclo simple, o ninguno de éstos.



6. Dibuje todas las subgráficas que contienen exactamente dos aristas de la siguiente gráfica.

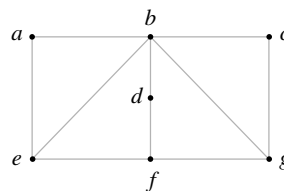


7. Encuentre una subgráfica conexa de la gráfica del ejercicio 5 que contenga todos los vértices de la gráfica original y tenga el menor número de aristas posible.
8. ¿Contiene la gráfica del ejercicio 5 un ciclo de Euler? Explique su respuesta.

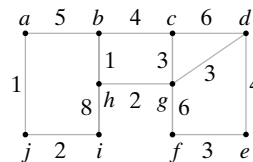
### Sección 8.3

9. Encuentre un ciclo de Hamilton en la gráfica del ejercicio 5.
10. Encuentre un ciclo de Hamilton en el cubo-3.

11. Demuestre que la gráfica no tiene un ciclo hamiltoniano.

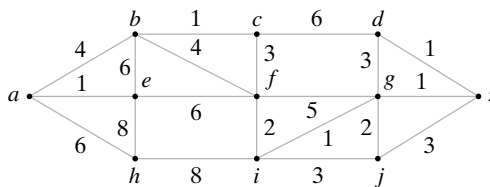


12. Demuestre que el ciclo  $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, a)$  proporciona una solución al problema del agente viajero para la gráfica mostrada.



### Sección 8.4

Los ejercicios 13 al 16 se refieren a la gráfica siguiente.



13. Encuentre la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $i$ .
14. Encuentre la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $z$ .
15. Encuentre una ruta más corta de  $a$  a  $z$ .
16. Encuentre la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $z$  que pase por  $c$ .

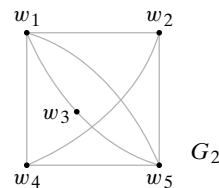
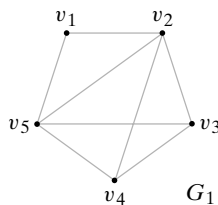
### Sección 8.5

17. Escriba la matriz de adyacencia de la gráfica del ejercicio 5.
18. Escriba la matriz de incidencia de la gráfica del ejercicio 5.
19. Si  $A$  es la matriz de adyacencia de la gráfica del ejercicio 5, ¿qué representa el elemento en el renglón  $v_2$  y la columna  $v_3$  de  $A^3$ ?
20. ¿Puede una columna de una matriz de incidencia tener sólo ceros? Explique.

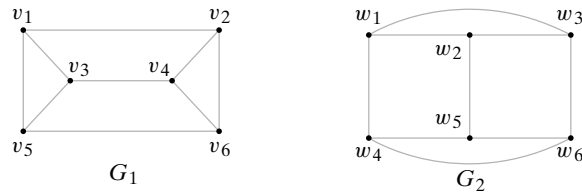
### Sección 8.6

En los ejercicios 21 y 22, determine si las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas. Si las gráficas son isomorfas, dé los ordenamientos de sus vértices que producen matrices de adyacencia iguales. Si las gráficas no son isomorfas, dé una invariante que no compartan las gráficas.

21.



22.



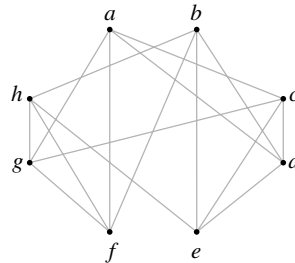
23. Dibuje todas las gráficas simples no isomorfas que tienen exactamente cinco vértices y dos aristas.

24. Dibuje todas las gráficas simples no isomorfas que tienen exactamente cinco vértices, dos componentes y ningún ciclo.

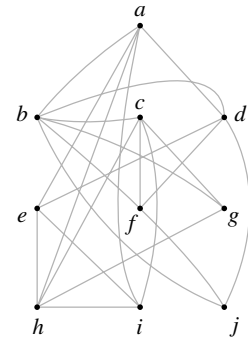
### Sección 8.7

En los ejercicios 25 y 26, determine si la gráfica es plana. Si lo es, dibújela de nuevo de manera que las aristas no se crucen; de otra manera, encuentre una subgráfica homomorfa a  $K_5$  o a  $K_{3,3}$ .

25.



26.

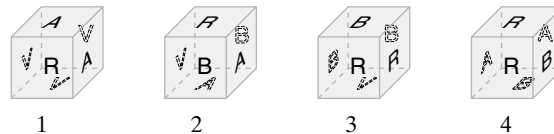


27. Demuestre que cualquier gráfica conexa simple con 31 aristas y 12 vértices no es plana.

28. Demuestre que el cubo- $n$  es plano si  $n \leq 3$  y no plana si  $n > 3$ .

### Sección 8.8

29. Represente el juego de Locura instantánea mediante una gráfica.



30. Encuentre una solución al juego del ejercicio 29.

31. Encuentre todas las subgráficas de la gráfica del ejercicio 29 que satisfacen las propiedades (6.8.1) y (6.8.2).

32. A partir del ejercicio 31 determine cuántas soluciones tiene el juego del ejercicio 29.

## Ejercicios para computadora

1. Escriba un programa que acepte como entrada cualquiera de los siguientes elementos:
  - una lista de las aristas de una gráfica dada como pares de enteros positivos
  - la matriz de adyacencia
  - la matriz de incidencia
 y proporcione como salida los otros dos.
2. Escriba un programa que determine si una gráfica contiene un ciclo de Euler.
3. Escriba un programa que encuentre un ciclo de Euler en una gráfica conexa en la que todos los vértices tienen grado par.

4. Escriba un programa que genere de manera aleatoria una matriz de adyacencia de  $n \times n$ . Haga que imprima la matriz de adyacencia, el número de aristas, el número de lazos y el grado de cada vértice.
5. Escriba un programa que determine si una gráfica es bipartita. Si lo es, el programa debe listar los conjuntos ajenos de vértices.
6. Escriba un programa que acepte como entrada las aristas de una gráfica y luego dibuje la gráfica usando el despliegue gráfico de la computadora.
7. Escriba un programa que liste todas las trayectorias simples entre dos vértices dados.
8. Escriba un programa que determine si una trayectoria es una trayectoria simple, un ciclo, o un ciclo simple.
9. Escriba un programa que verifique si un ciclo propuesto es un ciclo de Hamilton.
10. Escriba un programa que verifique si una trayectoria propuesta es una trayectoria de Hamilton.
11. Escriba un programa que construya un código Gray.
12. Implemente el algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra como un programa. Este programa debe encontrar una ruta más corta y su longitud.
13. Escriba un programa que pruebe si un isomorfismo propuesto es de hecho un isomorfismo.
14. Escriba un programa para determinar si una gráfica es plana.
15. Escriba un programa que resuelva un juego de Locura instantánea.