# Формальная постановка задачи планирования работ с критерием K2

Поваров А.А.

9 ноября 2025 г.

## Формальная постановка задачи

### ДАНО:

- Множество процессоров $P = \{1, 2, \ldots, M\}$, где $M \in \mathbb{N}$ — количество процессоров.
- Множество работ $J = \{1, 2, \ldots, N\}$, где $N \in \mathbb{N}$ — количество работ.
- Для каждой работы $j \in J$ задано время выполнения $p_j \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- Работы независимы и не могут прерываться во время выполнения.

### ТРЕБУЕТСЯ:

Построить матрицу расписания $HP = (hp_{ij}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{N \times M}$, где $hp_{ij} = 0$ означает, что работа $i$ не назначена на процессор $j$, а $hp_{ij} \in \{1, 2, \ldots\}$ — порядковый номер выполнения работы $i$ на процессоре $j$. Ограничения:

$$hp_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \;\; \forall i, j, \qquad \Big|\{j \in [1, M] : hp_{ij} > 0\}\Big| = 1 \;\; \forall i \in [1, N].$$

Явное ограничение на количество назначений (число ненулевых элементов равно $N$):

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \mathbf{1}[\, hp_{ij} > 0 \,] = N,$$

где $\mathbf{1}[\cdot]$ — индикаторная функция.

Уникальность и плотность порядков на каждом процессоре $j$:

$$\forall j \in [1, M], \; \forall i_1 \neq i_2 : \; (hp_{i_1 j} > 0 \wedge hp_{i_2 j} > 0) \Rightarrow hp_{i_1 j} \neq hp_{i_2 j}.$$

Обозначим $R_j = \max\limits_i hp_{ij}$. Тогда для всех $s = 1, \ldots, R_j$ существует $i$ такое, что $hp_{ij} = s$ (номера образуют непрерывную последовательность от 1 без пропусков).

## МИНИМИЗИРУЕМЫЙ КРИТЕРИЙ:

Вариант 2 (K2): минимизировать сумму времён завершения всех работ. Интуитивно: $C_i = S_i + p_i$, где $S_i$ — время старта, равное сумме длительностей всех работ на том же процессоре, которые выполняются раньше $i$ по их порядковым номерам.

Определим для работы $i$ её процессор как $m(i) = \arg\max_j \mathbf{1}[hp_{ij} > 0]$ (единственный столбец с положительным $hp_{ij}$). Тогда

$$S_i(HP) = \sum_{k:\ hp_{k\,m(i)}>0,\quad hp_{k\,m(i)}<hp_{i\,m(i)}} p_k, \qquad C_i(HP) = S_i(HP) + p_i.$$

Критерий K2:

$$K_2(HP) = \sum_{i=1}^{N} C_i(HP) \quad \to \quad \min\,.$$