Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Mathematik

Kurs auf erhöhtem Anforderungsniveau

mit CAS

Aufgabenvorschlag Teil 2 für Prüflinge

Hilfsmittel:
Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist
CAS, das zugelassen und an der Schule eingeführt ist

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 4

Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 4.1 oder 4.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 2.1 CAS: Fischlogo

Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch $f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right)$; $a \in IR$; $a > 0$.

Die zugehörigen Graphen sind G_a.

Des Weiteren ist die Funktion h durch $h(x) = \frac{1}{10}e^{x-1} + 2$ gegeben.

Der Graph dieser Funktion ist K.

a) Geben Sie den Definitionsbereich von f_a an.
Berechnen Sie die Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von *a.*
Der Punkt $T(x\,|\,1)$ liegt auf dem Graphen G_4.
Ermitteln Sie dessen Koordinaten.

b) Alle Graphen G_a der Funktionenschar f_a besitzen genau einen lokalen Extrempunkt $E(x\,|\,f_a(x))$.
Zeigen Sie, dass die *x*-Koordinate dieses Punktes $x = \frac{a}{e}$ ist und bestimmen Sie die Art des Extrempunktes.
Begründen Sie, dass für den Wertebereich *W* aller Funktionen der Schar f_a gilt:
$W = \{y \mid y \in IR, y \geq -e^{-1}\}$.

c) Die Funktionenschar $\tilde{f}_a$ ist durch $\tilde{f}_a(x) = \frac{x}{a} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right)$; $a \in IR$; $a < 0$ gegeben.
Geben Sie den Definitionsbereich von $\tilde{f}_a$ an.
Erläutern Sie, wie sich die Lage und die Art des Extrempunktes der Graphen von $\tilde{f}_a$ ohne Rechnung aus der Lage und der Art des Extrempunktes der Graphen von f_a ergeben.

d) Untersuchen Sie *K* auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von h für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ an.

e) An die Graphen der Funktionen h und ihrer Ableitungsfunktion h' wird in den Punkten $B(u\,|\,h(u))$ und $B^*(u\,|\,h'(u))$ mit $u \in IR$ jeweils eine Tangente gelegt.
Beschreiben Sie die besondere Lage dieser beiden Tangenten zueinander.
Begründen Sie Ihre Aussage.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 2.1 CAS: Fischlogo (Fortsetzung)

Der Inhaber eines Geschäftes für Anglerbedarf möchte seine Außenwerbung verbessern. Er entwirft als Logo einen großen Fisch, dessen Konturen durch Lichtschläuche gebildet werden. Der Durchmesser der Lichtschläuche kann vernachlässigt werden.
Der Fisch kann modellhaft in einem Koordinatensystem durch Funktionsgraphen veranschaulicht werden. (siehe Abbildung). Die Spitze des Fischmauls liegt im Punkt $P(4\,|\,4)$. Der höchste Punkt des Logos befindet sich im Punkt $Q(-1\,|\,6)$.
Es gilt: 1 LE = 1 m.

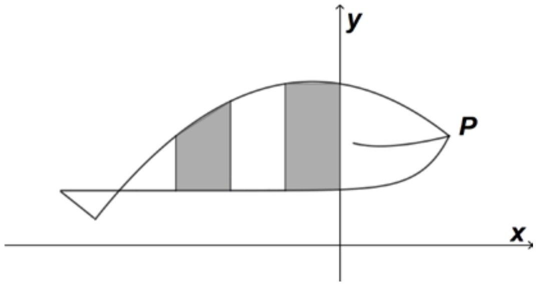


Abbildung nicht maßstabsgerecht

f) Der Fischrücken soll durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion p zweiten Grades im Intervall $-9 \le x \le 4$ modelliert werden.
Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung für p.

$\left[\text{Kontrollergebnis: } p(x) = -\frac{2}{25}x^2 - \frac{4}{25}x + \frac{148}{25}\right]$

g) Für den Bauch des Fisches wird der Graph K gewählt.
Es werden zwei senkrechte farbige Streifen zwischen dem Graphen K und dem Graphen der Funktion p gemalt.
Der erste Streifen liegt im Intervall $[-6;-4]$.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Streifens.

Der zweite Streifen liegt im Intervall $[b;0]$ mit $b \in IR$; $b < 0$ und hat die gleiche Breite wie der erste Streifen.
Ermitteln Sie, um wie viel Prozent der Flächeninhalt des zweiten Streifens größer ist als der Flächeninhalt des ersten Streifens.

h) Das Fischmaul wird durch den Graphen der Funktion m im Intervall $0{,}5 \le x \le 4$ beschrieben. Der Graph der Funktion m ist der um 4 Einheiten entlang der y-Achse nach oben verschobene Graph G_4.
Geben Sie eine zugehörige Funktionsgleichung für m an.

Das Fischauge befindet sich im Punkt A. Über die Lage des Punktes A ist Folgendes bekannt:

- A liegt auf der Strecke zwischen Rücken und Maul, die parallel zur y-Achse verläuft, für die der senkrechte Abstand von Rücken und Maul am größten ist.
- A liegt genau in der Mitte dieser Strecke.

Beschreiben Sie, wie die Koordinaten des Punktes A berechnet werden können.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben									
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	Summe
BE	6	8	4	4	3	5	6	4	40

Aufgabe 2.2 CAS: Funktionenschar

1. Für jeden Wert von $k \in IR^+$ ist eine Funktion f_k durch $f_k(x) = 8k \cdot (kx-1)^2 \cdot (kx+1)^2$; $x \in IR$ festgelegt. Die Graphen von f_k wird mit G_k bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, die G_k mit den Koordinatenachsen gemeinsam haben.
Skalieren Sie in der Abbildung 1 die beiden Achsen so, dass die gezeigte Kurve den Graphen $G_{0,25}$ darstellt.

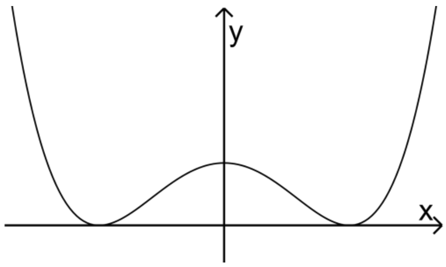


Abb. 1

b) Beschreiben Sie, wie die Graphen G_{2k} aus G_k hervorgeht.
Begründen Sie, dass $f_k(x) = 8k \cdot \left(k^2x^2 - 1\right)^2$ gilt, und zeigen Sie, dass G_k symmetrisch bezüglich der *y*-Achse sind.

c) Ermitteln Sie, für welchen Wert von $k > 0$ die Wendepunkte der Graphen G_k und G_{2k} im ersten Quadranten den Abstand 4 LE besitzen.

d) Für einen Wert von k gibt es einen Punkt $\left(x_1 \mid f_k(x_1)\right)$ mit $x_1 > 1$, für den die Gleichung
$$\frac{f_k(x_1) - 0}{x_1 - 0} = -\frac{1}{f_k'(x_1)}$$ gilt.
Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung dieser Gleichung.

G_k schließt im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück ein. Die Abbildung 2 zeigt dieses Flächenstück (grau markiert) sowie das Rechteck mit den Eckpunkten $\left(0 \mid f_k(0)\right)$ und $\left(\frac{1}{k} \mid 0\right)$, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind.

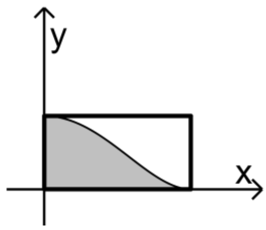


Abb. 2

e) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks.

f) Bei Rotation des Rechtecks um die *x*-Achse entsteht ein Körper, ebenso bei Rotation um die *y*-Achse.
Skizzieren Sie einen der beiden Körper und beschriften Sie die Skizze mit den Maßen des Körpers.
Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den die beiden Körper das gleiche Volumen haben.

g) Bei Rotation des grau markierten Flächenstücks um die *y*-Achse entsteht ein weiterer Körper.
Begründen Sie, dass das Volumen dieses Körpers mit zunehmendem Wert von k beliebig klein wird.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 2.2 CAS: Funktionenschar (Fortsetzung)

2. Im Folgenden werden die in $I\!R$ definierten Funktionen f mit $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+4$ und g mit $g(x)=(x-2)^2\cdot e^x$ betrachtet.

a) Die Funktion f ist eine Funktion der Schar aus Aufgabe 1.
Ermitteln Sie den zugehörigen Wert von k.
Zwei Extrempunkte des Graphen von f liegen auf dem Graphen von g.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

b) Die Abbildung 3 zeigt die Graphen von f und g für $0 \le x \le 2$.
Ordnen Sie jeden der Graphen I und II der passenden Funktion zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

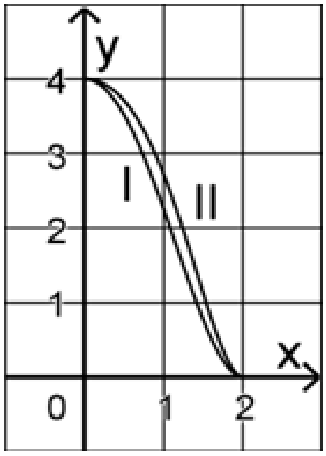


Abb. 3

c) Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von g im Punkt $P(p\,|\,g(p))$ mit $0<p<2$.
Ermitteln Sie rechnerisch denjenigen Wert von p, für den diese Tangente die x-Achse im Punkt $Q(2\,|\,0)$ schneidet.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben											
Teilaufgabe	1a)	1b)	1c)	1d)	1e)	1f)	1g)	2a)	2b)	2c)	Summe
BE	4	5	6	3	3	4	4	4	2	5	40

Aufgabe 3.1 CAS: Tunnel

Ein Berg wird von seiner Südseite zu seiner Nordseite durch einen Autotunnel unterquert. Der Verlauf des Autotunnels kann als Teil einer Geraden modelliert werden. Die *x*-*y*-Ebene befindet sich auf der Höhe des Meeresspiegels. (1 LE = 100 m)
Auf der Südseite beginnt der Tunnel im Punkt $S(0|40|6)$ und endet auf der Nordseite im Punkt $N(30|65|7)$.

a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, mit deren Hilfe man den Verlauf des Autotunnels modellieren kann.
Berechnen Sie die Länge des Autotunnels.
Ermitteln Sie den Winkel, in dem die Gerade zur *x*-*y*-Ebene ansteigt.

b) In der Mitte des Autotunnels befindet sich eine Nothaltebucht, die vereinfacht modellhaft als Punkt *L* beschrieben werden kann.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes *L* an.
Von der Nothaltebucht führt ein Lüftungsrohr senkrecht zum Meeresspiegel nach oben. Das Lüftungsrohr ragt 2 m aus der Oberfläche des Berges hinaus. Die Oberfläche des Berges kann in diesem Bereich durch eine Ebene *F* beschrieben werden mit
$F:\ 10x+5y+7z=475{,}5$.
Ermitteln Sie die Länge des Lüftungsrohrs.

Ein Bahntunnel verläuft geradlinig zwischen den Punkten $A(20|60|6{,}5)$ und $B(60|65|6)$.

c) Zeigen Sie, dass der Bahntunnel den Autotunnel nicht kreuzt.
Hinweis: Die Querschnitte der Tunnel können vernachlässigt werden.
Beschreiben Sie die Lagebeziehung der Geraden, durch die die beiden Tunnel modelliert werden.
Geben Sie eine Gleichung einer Ebene *E* an, zu der diese beiden Geraden parallel verlaufen.

d) Die Lok eines 700 m langen Güterzuges fährt um 09:10 Uhr in den Bahntunnel hinein. Der letzte Wagen ist um 09:13 Uhr vollständig aus dem Bahntunnel herausgefahren. Der Güterzug bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit durch den Bahntunnel. Prüfen Sie, ob der Zug die zulässige Höchstgeschwindigkeit von 100 km/h einhält.

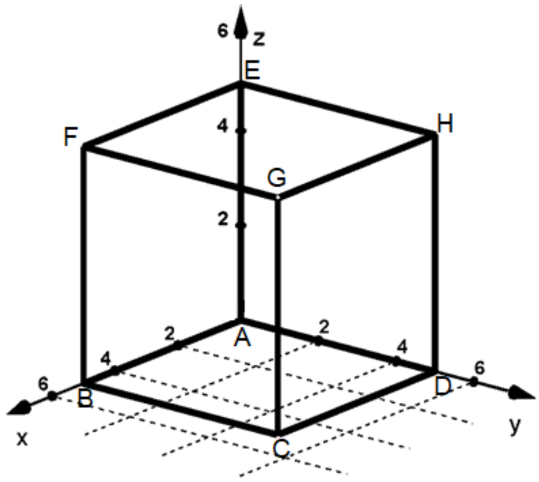
e) Vom Punkt $P(1|51|6{,}2)$ ist eine geradlinige Zufahrt in den Autotunnel geplant. Bestimmen Sie den Punkt *Q*, in dem die Zufahrt auf den Autotunnel treffen muss, damit sie die kleinstmögliche Länge hat.

f) Die geradlinige Zufahrt vom Punkt *P* zum Autotunnel wird schließlich nicht so gebaut, dass sie die kleinstmögliche Länge hat, sondern so, dass ihre Länge 1300 m beträgt. Begründen Sie, dass es dafür nur genau eine Möglichkeit gibt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	5	5	5	3	5	2	25

Aufgabe 3.2 CAS: Würfel

Die Abbildung zeigt den Würfel $ABCDEFGH$ mit $A(0|0|0)$ und $G(5|5|5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem.
Die Ebene T schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten $I(5|0|1)$, $J(2|5|0)$, $K(0|5|2)$ und $L(1|0|5)$.



a) Zeichnen Sie das Viereck $IJKL$ in die Abbildung ein.

b) Zeigen Sie, dass das Viereck $IJKL$ ein Trapez ist, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene T in Koordinatenform.
[zur Kontrolle: $T: 5x + 4y + 5z = 30$]

d) Spiegelt man T an der Ebene mit der Gleichung $x = 2{,}5$, so erhält man die Ebene T'.
Zeigen Sie, dass T' durch die Gleichung $-5x + 4y + 5z = 5$ beschrieben wird.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem sich T und T' schneiden.

e) Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche $IJKL$ liegt auf der Strecke $\overline{FG}$.
Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide $\frac{18}{\sqrt{66}}$ betragen kann.
Geben Sie an, welcher Punkt auf der Strecke $\overline{FG}$ den größten Abstand zur Ebene T hat.
Begründen Sie Ihre Angabe.

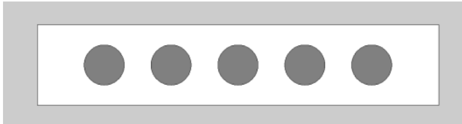
Betrachtet wird die Schar der Geraden $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix}$ mit $a \in I\!R^+$ und $r \in I\!R$.

f) Begründen Sie ohne zu rechnen, dass keine Gerade der Schar in der Ebene mit der Gleichung $z = 3{,}5$ liegt.

g) Untersuchen Sie, ob die Schnittgerade von T und T' zur betrachteten Schar gehört.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben								
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
BE	2	3	3	5	6	2	4	25

Aufgabe 4.1 CAS: Biathlon



Biathlon ist eine Sportart, die sich aus den Disziplinen Skilanglauf und Schießen zusammensetzt.
Während eines Einzelrennens kommen alle Biathleten mehrmals an Schießstände. Dort versuchen sie, mit fünf Schüssen die fünf schwarzen Zielscheiben zu treffen.

a) Eine Biathletin hat unabhängig von allen äußeren Umständen eine konstante Trefferwahrscheinlichkeit von 90 %.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse.

A: Sie trifft an einem Schießstand alle fünf Scheiben.
B: Im gesamten Einzelrennen mit 20 Schüssen hat sie höchstens einen Fehlschuss.
C: In den letzten 5 Einzelrennen mit insgesamt 100 Schüssen betrug ihre Trefferzahl mindestens 85 und höchstens 90.

b) Ein Biathlet hat am Schießstand beim ersten Schuss eine Trefferwahrscheinlichkeit von nur 75 %, bei den anderen vier Schüssen von jeweils 90 %.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

F_1: Er hat einen Fehlschuss beim ersten Schuss, alle anderen Schüsse treffen.
F_2: Er hat genau einen Fehlschuss beim 2. bis 5. Schuss, alle anderen Schüsse treffen.
F_3: Der Biathlet hat bei seinen fünf Schüssen genau einen Fehlschuss.

c) Nach einer Wettkampfsaison wurde die Treffergenauigkeit der gesamten deutschen Biathlon-Mannschaft ausgewertet. Insgesamt gingen 5096 Schüsse in die Auswertung ein. Dabei ergab sich, dass 811 Fehlschüsse abgegeben wurden und dass bei den Damen von 2533 Schüssen 2119 das Ziel trafen.
Von den betrachteten Biathleten wird eine Person zufällig ausgewählt.
Untersucht werden die folgenden Ereignisse:

D: Die Person ist eine Frau.
T: Die Person trifft das Ziel.

Erstellen Sie eine Vierfeldertafel zu diesem Sachverhalt.
Prüfen Sie, ob $P_D(T) = P_{\overline{D}}(T)$ gilt.
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Bei einem Staffelrennen, bei dem jeweils vier Biathleten einer Mannschaft nacheinander den Rundkurs absolvieren, gelten abweichende Regeln am Schießstand. Wenn nicht alle fünf Scheiben getroffen wurden, darf jetzt bis zu dreimal nachgeladen und erneut geschossen werden. Es können also maximal acht Schüsse abgegeben werden.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 4.1 CAS: Biathlon (Fortsetzung)

Es wird im Folgenden wieder von einer konstanten Trefferwahrscheinlichkeit von $p = 0{,}9$ ausgegangen.

d) Begründen Sie, warum der Term $\left[\binom{5}{4} \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^1\right] \cdot 0{,}9$ geeignet ist, die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass genau ein Nachlader erforderlich ist, um alle fünf Scheiben zu treffen.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei Nachlader erforderlich sind, um alle fünf Scheiben zu treffen.

f) Untersucht wird wie in Teilaufgabe d) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Nachlader erforderlich ist. Die Funktion f gibt diese Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Trefferwahrscheinlichkeit p an.

Zeigen Sie, dass gilt: $f(p) = 5p^5 - 5p^6$.

Ermitteln Sie, für welchen Wert von p der Funktionswert $f(p)$ maximal wird.

[Hinweis: Ein Nachweis mithilfe einer hinreichenden Bedingung ist nicht erforderlich.]

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	5	5	6	2	3	4	25

Aufgabe 4.2 CAS: Ausflugsschiff

Ein Unternehmen organisiert Fahrten mit einem Ausflugsschiff.

Betrachtet wird zunächst eine Fahrt, bei der das Schiff mit 60 Fahrgästen voll besetzt ist. Zu Beginn der Fahrt werden drei Fahrgäste zufällig ausgewählt; diese erhalten jeweils ein Freigetränk.

a) Ermitteln Sie die Anzahl möglicher Dreiergruppen, die sich bei der Auswahl ergeben können.

b) Zwei Drittel der Fahrgäste kommen aus Deutschland, die übrigen aus anderen Ländern. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei ausgewählten Fahrgäste aus Deutschland kommen.

c) Unter den Fahrgästen befinden sich Erwachsene und Kinder.
Die Hälfte der Fahrgäste isst während der Fahrt ein Eis, von den Erwachsenen nur jeder Dritte, von den Kindern 75 %.
Berechnen Sie, wie viele Kinder an der Fahrt teilnehmen.

Möchte man an einer Fahrt teilnehmen, so muss man dafür im Voraus eine Reservierung vornehmen. Erfahrungsgemäß erscheinen von den Personen mit Reservierung einige nicht zur Fahrt. Für die 60 Plätze lässt das Unternehmen deshalb bis zu 64 Reservierungen zu. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Fahrt tatsächlich 64 Reservierungen vorgenommen werden. Erscheinen mehr als 60 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so können nur 60 von ihnen daran teilnehmen; die übrigen müssen abgewiesen werden. Vereinfachend soll angenommen werden, dass die Anzahl der Personen mit Reservierung, die zur Fahrt erscheinen, binomialverteilt ist, wobei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, 10 % beträgt.

d) Geben Sie einen Grund dafür an, dass es sich bei dieser Annahme im Sachzusammenhang um eine Vereinfachung handelt.

e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss.

f) Für das Unternehmen wäre es hilfreich, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens eine Person mit Reservierung abweisen zu müssen, kleiner als ein Prozent wäre. Dazu müsste die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 4.2 CAS: Ausflugsschiff (Fortsetzung)

Das Unternehmen richtet ein Online-Portal zur Reservierung ein und vermutet, dass dadurch der Anteil der Personen mit Reservierung, die zur jeweiligen Fahrt nicht erscheinen, zunehmen könnte. Als Grundlage für die Entscheidung darüber, ob pro Fahrt künftig mehr als 64 Reservierungen angenommen werden, soll die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, beträgt höchstens 10 %.“ mithilfe einer Stichprobe von 200 Personen mit Reservierung auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Anzahl der Reservierungen pro Fahrt nur dann zu erhöhen, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste.

g) Ermitteln Sie für den beschriebenen Test die zugehörige Entscheidungsregel.

h) Entscheiden Sie, ob bei der Wahl der Nullhypothese eher das Interesse, dass weniger Plätze frei bleiben sollen, oder das Interesse, dass nicht mehr Personen mit Reservierung abgewiesen werden müssen, im Vordergrund stand.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

i) Beschreiben Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben										
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	Summe
BE	2	2	3	1	3	4	5	3	2	25