Beispiel: Das Volumen des Körpers wird berechnet, der bei Rotation des Graphen von f mit $f(x) = x^2 + 1$; $x \in [0; 5]$ um die y-Achse entsteht.

Die Funktion f ist streng monoton wachsend auf dem Intervall $[0; 5]$. Daher existiert ihre Umkehrfunktion $\overline{f}$. Wegen $f(0) = 1$ und $f(5) = 26$ ist $\overline{f}$ auf dem Intervall $[1; 26]$ definiert.

Eine Funktionsgleichung für $\overline{f}$ ergibt sich durch Umstellen der Gleichung $y = x^2 + 1$ nach x. Wegen $x = \sqrt{y-1}$ ergibt sich $\overline{f}(y) = \sqrt{y-1}$. Kann man auch gleich bei $x^2=y-1$ lassen.

Wegen Satz 2 ist das Integral $\pi \cdot \int\limits_1^{26} (\sqrt{y-1})^2\,dy$ zu berechnen. Es ergibt sich

$$\pi \cdot \int\limits_1^{26} (\sqrt{y-1})^2\,dy = \pi \cdot \int\limits_1^{26} (y-1)dy = \left[\frac{y^2}{2} - y\right]_1^{26} = \left[(338 - 26) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = 311{,}5.$$

Der Körper hat ein Volumen von 311,5 VE.

20 a,c,d oHiMi

20. Gegeben ist eine Funktion f auf einem Intervall. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation des Graphen f um die y-Achse entsteht.

a) $f(x) = x^3$; $[0; 2]$

Beachte: Die gegebenen Intervalle beziehen sich auf x!

c) $f(x) = x^2 - 1$; $[1; 3]$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $[1; 2]$

f) $f(x) = \sqrt{5x+1}$; $[1; 3]$ TI

21. Prüfen Sie, ob bei Rotation des Graphen von f um die x-Achse eine räumliche Punktmenge entsteht, der ein Rauminhalt zugesprochen werden kann.

oHiMi

a) $f(x) = \frac{1}{x}$; $(0; 3]$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $[0{,}5; \infty)$

22. Prüfen Sie, ob bei Rotation des Graphen von f um die y-Achse eine räumliche Punktmenge entsteht, der ein Rauminhalt zugesprochen werden kann.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$; $(0; 3]$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$; $[0{,}5; \infty)$

23. Für jedes $t > 0$ ist die Funktion f_t mit $f_t(x) = \frac{2x^2 + tx + t}{x}$ $(x \neq 0)$ gegeben.

a) Untersuchen Sie die Funktion f_t auf ihr Verhalten an der Polstelle und ermitteln Sie die Gleichung der schiefen Asymptote.

b) Untersuchen Sie f_t auf Extrema.

c) Zeichnen Sie den Graphen von f_1 im Intervall $[-4; 4]$.

d) Die Punktmenge zwischen dem Graphen von f_t, der schiefen Asymptote y_t und der Geraden $x = \sqrt{\frac{t}{2}}$ im ersten Quadranten rotiere um die x-Achse.

Prüfen Sie, ob bei dieser Rotation für jedes t eine räumliche Punktmenge mit endlichem Volumen entsteht.