

# Zentrale schriftliche Abiturprüfung

2020

# Mathematik

# Kurs auf erhöhtem Anforderungsniveau chlag Teil 2

Aufgabenvorschlag Teil 2 für Prüflinge

Hilfsmittel: Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen

Sprache

Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist

Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten

Lösens von Gleichungen verfügen

# Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analysis

**Hinweis:** Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

# Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

**Hinweis:** Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

## Aufgabenstellung 4

Thema/Inhalt: Stochastik

**Hinweis:** Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 4.1 oder 4.2 zur Bearbeitung aus.

#### Aufgabe 2.1: Eingangstor

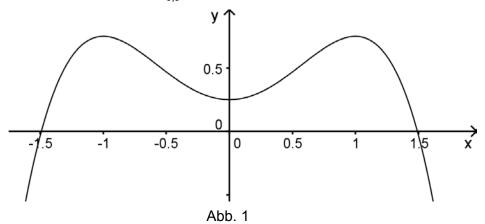
Gegeben ist die Funktionenschar  $f_a$  mit der Gleichung  $f_a(x) = -ax^4 + x^2 + \frac{a}{2}$ ;  $x \in IR$ ,  $a \in IR$ . Die zugehörigen Graphen sind  $G_a$ .

- a) Zeigen Sie, dass alle Graphen G<sub>a</sub> achsensymmetrisch zur y-Achse verlaufen.
- b) Geben Sie das Verhalten von  $f_a$  für  $x \to \pm \infty$  in Abhängigkeit von a an.
- c) Bestimmen Sie rechnerisch für den Graphen der Funktion f<sub>0,5</sub> die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte.
- d) Geben Sie den Schnittpunkt  $S_y$  aller Graphen  $G_a$  mit der y-Achse an. Weisen Sie nach, dass dieser stets lokaler Tiefpunkt ist.

$$\left[ \text{Kontrollergebnis} : f'_{a}(x) = -2(2ax^{3} - x) \right]$$

e) Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von f<sub>a</sub> in Abhängigkeit von a an und begründen Sie diese anhand der in a) bis d) ermittelten Eigenschaften.

In der Abbildung 1 ist der Graph  $G_{0.5}$  dargestellt.



- f) Begründen Sie unter Zuhilfenahme der Abbildung 1, dass es ein zur y-Achse symmetrisches Quadrat geben muss, von dem zwei Eckpunkte auf der x-Achse und zwei Eckpunkte auf  $G_{0.5}$  liegen.
- g) Ein Punkt auf dem Graphen  $G_{0,5}$  im ersten Quadranten und der Koordinatenursprung sind die diagonal gegenüberliegenden Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks. Die waagerechte Rechteckseite ist 0,8 LE lang. Der Graph  $G_{0,5}$  teilt dieses Rechteck in zwei Teilflächen.

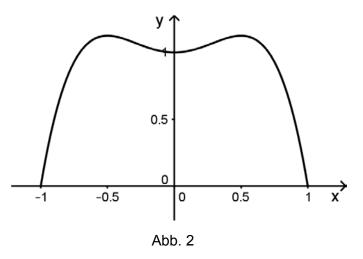
Ermitteln Sie das Verhältnis der Flächeninhalte dieser Teilflächen.

Hinweis: Runden Sie die Ergebnisse auf 2 Dezimalstellen.

#### Aufgabe 2.1: Eingangstor (Fortsetzung)

h) Die Tangente t im Punkt  $U(1|f_a(1))$  an den Graphen  $G_a$  und die Senkrechte zur Tangente t im Punkt U schließen mit der x-Achse ein Dreieck ein. Ermitteln Sie einen Parameterwert a so, dass das Dreieck gleichschenklig ist und die Basis auf der x-Achse liegt.

Für die folgende Teilaufgabe wird die Funktion  $f_2$  mit  $f_2\left(x\right) = -2x^4 + x^2 + 1; \ x \in IR$  betrachtet. Der Graph  $G_2$  beschreibt im Intervall  $\left[-1;1\right]$  die Profillinie für das Eingangstor eines Vergnügungsparks (siehe Abbildung 2). Die x-Achse stellt im Profil die untere Begrenzung dar. Es gilt: 1 LE = 3 m.

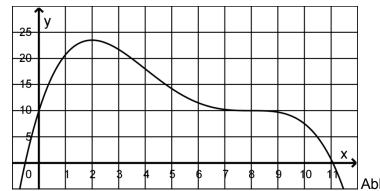


i) Ermitteln Sie, welche Breite ein Fahrzeug mit einem quaderförmigen Aufbau unterschreiten muss, damit es bei Ausnutzung der maximalen Durchfahrtshöhe gerade noch mittig das Eingangstor passieren kann.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben												
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	Summe		
BE	1	4	9	5	5	3	5	4	4	40		

# Aufgabe 2.2: Plutonium

1 Die Abbildung 1 zeigt den Graphen einer in IR definierten ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Die Tangente im Wendepunkt W(4|18) des Graphen hat die Steigung -4.

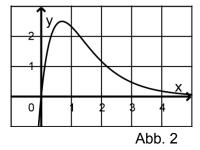


- a) Zeichnen Sie die beschriebene Tangente in die Abbildung 1 ein.
   Geben Sie die beiden Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion f' von f an.
- b) Der Graph von f' hat einen Tiefpunkt.Geben Sie die Koordinaten dieses Tiefpunkts an und begründen Sie Ihre Angabe.
- c) Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Für jede Stammfunktion F von f gilt F(x+2) > F(x) + 20 für jeden Wert von  $x \in [0;5]$ .

 $\begin{array}{ll} 2 & \text{F\"{u}r jeden Wert von } k \in IR^+ \text{ wird die in } IR \\ & \text{definierte Funktion } h_k \text{ mit} \\ & h_k\left(x\right) = 10 \cdot \left(1 - e^{-kx}\right) \cdot e^{-x} \text{ betrachtet. Der Graph} \\ & \text{von } h_k \text{ wird mit } G_k \text{ bezeichnet. Die Abbildung 2} \\ & \text{zeigt } G_1. \end{array}$ 

Für die erste Ableitungsfunktion  $h_k'$  von  $h_k$  gilt  $h_k'\left(x\right) = 10 \cdot \left(\left(k+1\right) \cdot e^{-kx} - 1\right) \cdot e^{-x}$ .



- a) Begründen Sie, dass  $h_k$  nur die Nullstelle x=0 hat. Geben Sie den Grenzwert von  $h_k$  für  $x\to +\infty$  an.
- b) Bestimmen Sie die x-Koordinate des Hochpunkts von  $\,G_k\,.\,$
- c) Betrachtet werden die Tangente an  $G_k$  im Koordinatenursprung und die Gerade, die zu dieser Tangente im Koordinatenursprung senkrecht steht. Diese beiden Geraden schneiden die Gerade mit der Gleichung y = 1.

Zeigen Sie rechnerisch, dass der Abstand der beiden Schnittpunkte  $d(k) = 10k + \frac{1}{10k}$  ist.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

#### **Aufgabe 2.2: Plutonium (Fortsetzung)**

- d) Betrachtet man den Abstand d(k) aus Teilaufgabe 2c) für alle Werte von k, so ist dieser für einen Wert von k am kleinsten.
   Bestimmen Sie diesen Wert und geben Sie den zugehörigen Abstand an.
- e) Durch den Koordinatenursprung, den Punkt Q(u|0) und den Punkt P(u|h<sub>1</sub>(u)) auf dem Graphen von h<sub>1</sub> wird ein Dreieck festgelegt.
   Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung für die Funktion A, mit der der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ in Abhängigkeit von u berechnet werden kann.
- 3 Am 26. April 1986 ereignete sich in der Ukraine ein Reaktorunfall, bei dem radioaktives Plutonium-241 freigesetzt wurde. Plutonium-241 zerfällt exponentiell, d. h. in jedem Jahr nimmt die Masse des vorhandenen Plutonium-241 um einen konstanten prozentualen Anteil ab.

Im Folgenden wird der Zerfall einer bestimmten Menge Plutonium-241 betrachtet. Dieser Zerfall wird durch die Funktion p mit  $p(x) = 200 \cdot e^{-0.0480x}$  und  $x \in IR_0^+$  beschrieben. Dabei ist x die Zeit in Jahren, die seit dem Reaktorunfall vergangen ist, und p(x) die Masse des verbliebenen Plutonium-241 in Milligramm.

- a) Geben Sie die Bedeutung des Faktors 200 im Sachzusammenhang an und berechnen Sie den prozentualen Anteil, um den die Masse des Plutonium-241 in jedem Jahr abnimmt.
- b) Bestimmen Sie das Jahr, in dessen Verlauf erstmals weniger als ein Milligramm des Plutonium-241 vorhanden sein wird.

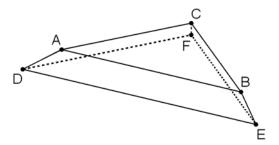
Bei dem Zerfall des Plutonium-241 entsteht radioaktives Americium-241, das ebenfalls exponentiell zerfällt. Im verwendeten Modell gibt die Funktion a mit  $a(x) = 207 \cdot \left(1 - e^{-0.0464x}\right) \cdot e^{-0.0016x} \text{ für jedes Jahr die Masse des vorhandenen Americium-241 in Milligramm an.}$ 

- c) Der Graph von a kann für einen Wert von k aus dem Graphen der Funktion h<sub>k</sub> aus Aufgabe 2 erzeugt werden, indem man diesen in x-Richtung und in y-Richtung streckt. Geben Sie die beiden Streckungsfaktoren an und bestimmen Sie den passenden Wert von k.
- d) Geben Sie die Bedeutung der Aussage  $\frac{a(73)-a(0)}{73}\approx 2,4$  im Sachzusammenhang an. Begründen Sie Ihre Angabe.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben												
Teilaufgabe 1a) b) c) 2a) b) c) d) e) 3a) b) c) d) Summe													
BE	3	3	3	3	3	5	3	3	3	4	3	4	40

# Aufgabe 3.1: Podest

In einem Koordinatensystem wird der abgebildete Körper ABCDEF mit A(0|10|1), B(10|20|1), C(0|20|1), D(0|7|0) und F(0|20|0) betrachtet. Die beiden Seitenflächen ACFD und BEFC stehen senkrecht zur xy-Ebene.



- 1 a) A, B und D liegen in der Ebene H.
   Bestimmen Sie eine Gleichung von H in Koordinatenform.
   [Kontrollergebnis: x y + 3z + 7 = 0]
  - b) Begründen Sie, dass die Gerade  $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit  $\lambda \in IR$  sowohl in der xy-Ebene

als auch in der Ebene H liegt.

Der Punkt E liegt auf der Geraden i, wobei der Abstand von E zu F ebenso groß ist wie der Abstand von D zu F.

- c) Ermitteln Sie die Koordinaten von E.
- d) Begründen Sie ohne zu rechnen, dass die Vierecke ACFD und BEFC den gleichen Flächeninhalt haben.
- 2 Der Körper ABCDEF stellt modellhaft ein Podest dar, das auf der Bühne eines Theaters steht, das Viereck ADEB die Vorderseite des Podests und der Punkt D deren untere linke Ecke. Die xy-Ebene beschreibt den horizontalen Boden der Bühne. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.
  - a) Zeigen Sie, dass die Deckfläche des Podests rechtwinklig ist, und berechnen Sie deren Flächeninhalt.
  - b) Die Position eines Scheinwerfers kann im Modell durch den Punkt  $(5 \mid -3 \mid z)$  dargestellt werden. Vom Scheinwerfer ausgehendes Licht trifft an der unteren linken Ecke der Vorderseite des Podests unter einem Winkel der Größe 47° auf den Boden auf.

Ermitteln Sie die Höhe des Scheinwerfers über dem Boden der Bühne.

#### **Aufgabe 3.1: Podest (Fortsetzung)**

c) Die Position eines zweiten Scheinwerfers lässt sich im Modell durch den Punkt

P(2|4|8) beschreiben. Die Gerade mit der Gleichung 
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 und  $\mu \in IR$  schneidet die Ebene mit der Gleichung  $\begin{pmatrix} \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$  im Punkt Q(-2|8|1).

Es gilt 
$$|\overline{PQ}| = 9$$
.

Ermitteln Sie den Parameter µ, für den der Punkt A auf den Punkt Q abgebildet wird. Treffen Sie auf der Grundlage des Parameters µ und der in 2.c) genannten Informationen eine Aussage über den Abstand des zweiten Scheinwerfers von der Vorderkante der Deckfläche des Podests.

Begründen Sie Ihre Aussage ohne zu rechnen.

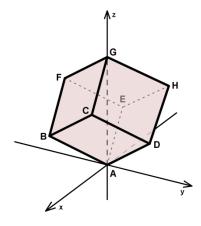
Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben											
Teilaufgabe 1a) b) c) d) 2a) b) c) Summe											
BE	4	2	5	3	3	4	4	25			

# Aufgabe 3.2: Würfel

Betrachtet wird der abgebildete Würfel mit A(0|0|0), B(3|-3|3), G(0|0|9) und H(-3|3|6).

- a) Berechnen Sie das Volumen des Würfels.
- b) Begründen Sie, dass das Viereck ABGH ein Rechteck ist, und zeichnen Sie dieses in die Abbildung ein.
- c) Das Viereck ABGH liegt in der Ebene L.
   Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Parameterform und Koordinatenform.

[Kontrollergebnis: x + y = 0]



- d) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Ebene L mit der xz-Ebene einschließt.
- e) Ermitteln Sie die Koordinaten von F.
- f) Die Ebene, die durch die Mittelpunkte der Kanten BC, CG, AD und DH verläuft, teilt den Würfel in zwei Teilkörper.
  Begründen Sie mithilfe einer Skizze, dass das Volumen des kleineren Teilkörpers ein Achtel des Volumens des Würfels ist.
- g) Gegeben ist die Schar der Ebenen z = k mit  $k \in IR$ . Geben Sie in Abhängigkeit von k die unterschiedlichen Arten der Figuren an, in denen die Ebenen für 0 < k < 9 den Würfel schneiden.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben											
Teilaufgabe a) b) c) d) e) f) g) Summe											
BE	2	3	5	2	5	5	3	25			

#### Aufgabe 4.1: Blumensamen

Ein Pflanzenhändler erhält in einem Behälter eine große Lieferung von Blumensamen, in der zwei Sorten vermischt sind. Diese besteht aus den Samen einer rot blühenden Blume (kurz: Rotblüher) und den Samen einer blau blühenden Blume (kurz: Blaublüher). Einige Samen keimen nicht, d. h. aus ihnen wächst keine Blume.

Die Samen sind äußerlich nicht voneinander zu unterscheiden.

Der Anteil der Rotblüher an der Samenmischung beträgt 80 %.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Samen der Rotblüher keimt, ist 95 %.

- a) Ein Samen wird zufällig aus der Lieferung entnommen.
   Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der entnommene Samen ein Rotblüher ist und keimen wird, 0,76 beträgt.
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
  - A: "Unter 10 zufällig ausgewählten Samen sind genau 7 Samen, die Rotblüher sind und keimen werden."
  - B: "Unter 10 zufällig ausgewählten Samen sind mindestens 9 Samen, die Rotblüher sind und keimen werden."
- c) Bestimmen Sie, wie viele Samen h\u00f6chstens aus dem Beh\u00e4lter entnommen werden m\u00fcssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von h\u00f6chstens 99 \u00d8 mindestens ein keimender Rotbl\u00fcher dabei ist.
- d) Es wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Samen der Samenmischung keimt, 0,9 beträgt.

Die Blaublüher sind eine neu gezüchtete Sorte, von der man bisher noch keine genauen Kenntnisse bzgl. ihrer Keimung hatte.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Blaublüher keimt.

Für den Verkauf verpackt der Händler jeweils 5 Samen der Mischung in eine Tüte. Betrachtet wird im Folgenden die Zufallsgröße

R: "Anzahl der Rotblühersamen in einer Tüte".

e) Ergänzen Sie in der Tabelle die fehlende Wahrscheinlichkeit der Zufallsgröße R für den Wert r=3.

Erläutern Sie zwei Möglichkeiten für die Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit.

r	0	1	2	3	4	5
P(R=r)	0,0003	0,0064	0,0512		0,4096	0,3277

f) Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert der Zufallsgröße R gilt: E(R) = 4.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

# **Aufgabe 4.1: Blumensamen (Fortsetzung)**

g) Entscheiden Sie durch Ankreuzen, welche der Aussagen auf Grund des gezeigten Erwartungswertes sachbezogen entweder richtig oder falsch sind.

Begründen Sie Ihre Entscheidung für die Aussage mit der Nummer 1.

Nummer	Aussage	richtig	falsch
1	Kauft man eine Tüte, sind in dieser mindestens 4 Samen der Rotblüher.		
2	Wenn man 100 Tüten kauft, sind unter diesen mit Sicherheit mindestens 4 Tüten, in denen mindestens ein Samen der Rotblüher ist und der Rest sind Blaublüher.		
3	Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Tüte höchstens 4 Samen von Rotblühern sind, beträgt mehr als 50 %.		

h) Ein Kunde will von 10 gekeimten Samen 4 für seinen Balkon auswählen. Er möchte, dass darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 70 % mindestens 3 Rotblüher sind. Ermitteln Sie, wie groß hierfür der Anteil der Rotblüher unter den 10 Samen mindestens sein muss.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben												
Teilaufgabe a) b) c) d) e) f) g) h) Summe									Summe			
BE	1	4	3	3	4	1	5	4	25			

#### Aufgabe 4.2: Spam-Mail

Ein Nutzer von E-Mail-Kommunikation stellt fest, dass der Anteil von unerwünschten Werbe-E-Mails (Spam-Mails) an seinen Posteingang über einen längeren Zeitraum konstant 30 % beträgt. Angenommen wird dabei, dass die Spam-Mails zufällig und unabhängig voneinander eingehen.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse.
  - A: "Von fünf eingegangenen E-Mails ist keine eine Spam-Mail."
  - B: "Von fünf eingegangenen E-Mails ist nur genau die letzte eine Spam-Mail."
- b) In einer Woche befinden sich 50 Mails im Posteingang.
  Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Spam-Mails in dieser
  Woche um mehr als 20 % über dem Erwartungswert liegt.

Die Spam-Mails enthalten Schlüsselwörter, an denen man sie sehr gut erkennt und durch die der Spam-Filter sie aussortiert. In 40 % der Spam-Mails taucht das Schlüsselwort "sale" auf, in den E-Mails, die keine Spam-Mails sind, jedoch nur in 1 % der Fälle.

- c) Stellen Sie diesen Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar.
- d) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine vom Spam-Filter durch das Wort "sale" aussortierte E-Mail keine Spam-Mail ist.

In 15 % der Spam-Mails ist das Schlüsselwort "season" enthalten und wird ebenfalls mit dem Spam-Filter erkannt.

- e) Paul behauptet, dass der Anteil der E-Mails, die durch die Worte "sale" oder "season" als Spam erkannt werden, an allen E-Mails 55 % beträgt.

  Begründen Sie ohne Rechnung, dass diese Behauptung im Allgemeinen falsch ist.
- f) Der Anteil der Spam-Mails, die durch die Worte "sale" oder "season" als Spam erkannt werden, beträgt 45 %.

Berechnen Sie den Anteil der Spam-Mails, in denen beide Worte vorkommen.

Nach einem Jahr wird in einer Fachzeitschrift behauptet, dass sich der Anteil der Spam-Mails an den eingehenden E-Mails verändert hat. Jemand will das für den Anteil von ursprünglich 30 % Spam-Mails im E-Mail-Eingang mit einem Signifikanztest auf dem Niveau  $\alpha=0,05$  für eine Stichprobe von n=50 zufällig ausgewählten E-Mails untersuchen.

Dafür werden folgende Hypothesen festgelegt.

- H₀: Der Anteil der Spam-Mails an den eingegangenen E-Mails beträgt 30 %.
- H<sub>1</sub>: Der Anteil der Spam-Mails an den eingegangenen E-Mails hat sich verändert.

Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der Spam-Mails.

g) Entscheiden Sie, welche Art von Entscheidungsregel geeignet ist und begründen Sie Ihre Entscheidung:

Entscheidungsregel 1: Wenn  $X \ge k$  gilt, dann wird  $H_0$  abgelehnt.

Entscheidungsregel 2: Wenn  $k_u < X < k_o$  gilt, dann wird  $H_0$  nicht abgelehnt.

# Aufgabe 4.2: Spam-Mail (Fortsetzung)

Der Nutzer behauptet nun, dass sich der Anteil der E-Mails, die Spam-Mails sind, in seinem E-Mail-Eingang vergrößert hat.

h) Berechnen Sie unter Annahme der Binomialverteilung, in welchem Bereich die Anzahl der Spam-Mails in einer Stichprobe von  $n=50\,$  E-Mails sein muss, um die Vermutung des Nutzers auf einem Signifikanzniveau von  $\alpha=0,05\,$  zu stützen.

Vert	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben											
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	Summe			
BE	3	3	4	2	2	3	3	5	25			

#### Anlage zur Aufgabe 4.2: Spam-Mail

#### **Summierte Binomialverteilung für n = 50**

Dargestellt sind die Werte  $P(X \le k)$ .

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist "0,", alle freien Plätze und alle nicht dargestellten Zeilen enthalten 0,0000 bzw. 1,0000.

Wird die Tabelle "von unten" gelesen (p > 0,5), ist der richtige Wert 1 – (abgelesener Wert)