Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2021

Mathematik

Leistungskurs mit CAS

Aufgabenvorschlag Teil 2 für Prüflinge

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist CAS, das zugelassen und an der Schule eingeführt ist
Gesamtbearbeitungszeit:	330 Minuten (davon 85 Minuten für Teil 1)

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie oder Stochastik

Hinweis: Bearbeiten Sie Aufgabe 3.

Aufgabe 2.1: Brücke CAS

BE

Die Abbildung 1 zeigt modellhaft den Längsschnitt einer dreiteiligen Brücke aus Holz für eine Spielzeugeisenbahn. Die Züge können sowohl über die Brücke fahren als auch darunter hindurch.

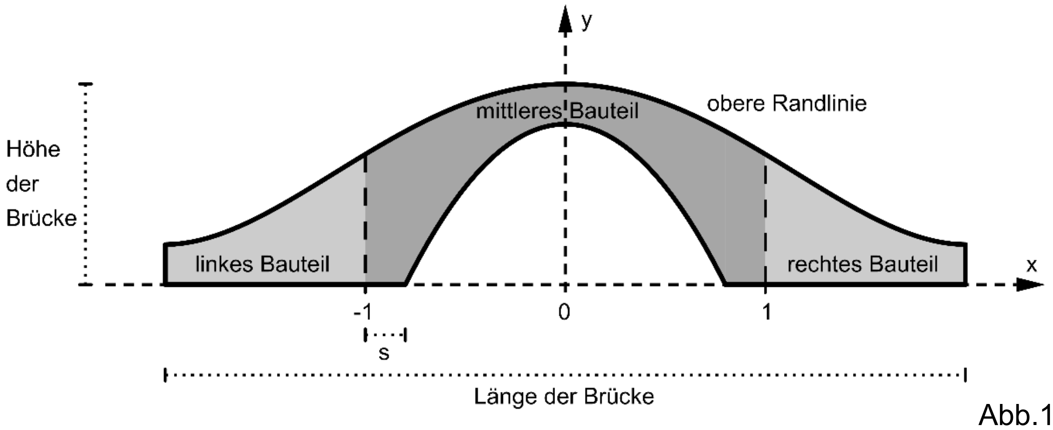


Abb.1

Die obere Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen der in IR definierten Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{20}x^4-\frac{2}{5}x^2+1$ beschrieben werden. Dabei werden die Endpunkte dieser Randlinie durch die beiden Tiefpunkte des Graphen von f dargestellt. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x-Achse die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.

1 **a** Zeigen Sie rechnerisch, dass die obere Randlinie achsensymmetrisch ist. 2

b Bestimmen Sie rechnerisch die Höhe und die Länge der Brücke. 4

(zur Kontrolle: Ein Tiefpunkt des Graphen von f hat die x-Koordinate 2.)

c Betrachtet wird derjenige Punkt der oberen Randlinie, der sich am Übergang vom mittleren zum rechten Bauteil befindet. Prüfen Sie, ob dieser Punkt auf halber Höhe zwischen dem höchsten Punkt der oberen Randlinie und deren rechtem Endpunkt liegt. 3

d Geben Sie die Bedeutung des Terms $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ im Sachzusammenhang an und berechnen Sie seinen Wert. 2

e Berechnen Sie die Größe des größten Steigungswinkels der Brücke, der beim Überfahren zu überwinden ist. 4

Der parabelförmige Teil der unteren Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen einer in IR definierten Funktion q mit $q(x)=0{,}8-a\cdot x^2$; $a\in\mathbb{R}$, $a>0$ beschrieben werden.

f In der Abbildung 1 ist die Länge einer der beiden Bodenflächen des mittleren Bauteils mit s bezeichnet. Bestimmen Sie alle Werte von a, die für diese Länge mindestens 0,1 dm liefern. 4

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 2.1: Brücke CAS (Fortsetzung)

g Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass für die Beschreibung der unteren Randlinie beliebig große Werte von a nicht infrage kommen. 2

h Für die Brücke gilt $a = 1{,}25$. Die drei Bauteile der Brücke werden aus massivem Holz hergestellt; $1\,\text{dm}^3$ des Holzes hat eine Masse von 800 Gramm. Die Brücke ist 0,4 dm breit. 5
Ermitteln Sie die Masse des mittleren Bauteils.

2 Während der Planung der Brückenform kamen zur Beschreibung der oberen Randlinie für das linke Bauteil eine Funktion g_ℓ und für das rechte Bauteil eine Funktion g_r infrage. Auch bei Verwendung dieser Funktionen wäre die obere Randlinie achsensymmetrisch gewesen. Beurteilen Sie jede der folgenden Aussagen, ob sie zutreffend ist oder nicht: 4

I $-g_\ell(x) = g_r(-x)$ für $-2 \le x \le -1$ **II** $g_\ell(x-1) = g_r(-x+1)$ für $-1 \le x \le 0$

3 Die Funktion f ist eine Funktion der Funktionenschar h_k mit der Gleichung $h_k(x) = \frac{k}{40}x^4 - \frac{10-k}{20}x^2 + 1;\ x, k \in \mathbb{R}$. Ihre Graphen werden mit G_k bezeichnet.

a Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion f (aus Aufgabe 1) ein Graph der Schar G_k ist. 2

b Begründen Sie, dass alle Graphen der Schar G_k einen Punkt gemeinsam haben. 2

c Ermitteln Sie die Anzahl und die Art der relativen Extrema der Graphen G_k für die beiden Fälle $k > 10$ und $k \le 0$. 4

d Für einen Graphen G_k mit $\frac{9}{5} < k < 10$ gelten folgende Bedingungen: 4

- Die y-Koordinate eines lokalen Extrempunktes ist $y = -\frac{1}{40}k + \frac{3}{2} - \frac{5}{2k}$.
- Die Summe der vertikalen Abstände der lokalen Extrempunkte von G_k zur x-Achse beträgt 1,4 LE.

Ermitteln Sie den zugehörigen Parameterwert für k.

e Es gibt einen Wert k mit $0 < k < 10$, für den der Graph von h_k genau zwei Schnittpunkte mit der x-Achse hat. 6
Weisen Sie nach, dass dieser Wert für k Lösung der Gleichung $(10-k)^2 = 40k$ ist.

f Entscheiden Sie, ob folgende Aussage wahr ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung. 2

Besitzt ein Graph der Schar G_k einen Schnittpunkt mit der x-Achse, so kann man auf Grund seiner Symmetrie zur y-Achse daraus schlussfolgern, dass ein weiterer Schnittpunkt mit der x-Achse existiert.

50

Aufgabe 2.2: Flugzeugflügel CAS

		BE
	Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f_a mit $f_a(x) = \left(-ax^2 + 2x\right) \cdot e^{-ax}$; $a \in \mathbb{R}$; $a > 0$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.	
a	Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.	2
b	Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.	2
c	Ermitteln Sie die Art und die Lage der lokalen Extrempunkte von G_a. *(zur Kontrolle:* $x_1 = \frac{-\sqrt{2}+2}{a}$; $x_2 = \frac{\sqrt{2}+2}{a}$*)*	5
d	Bestimmen Sie eine Gleichung der Kurve, auf der die Hochpunkte der Graphen G_a liegen.	2
e	Für die Stelle $x_0 = 30 - 10\sqrt{3}$ der Funktion $f_{0,1}$ gelten folgende Bedingungen: ♦ $f''_{0,1}(x_0) = 0$ ♦ $f'''_{0,1}(x_0) \neq 0$. Geben Sie die Bedeutung der Stelle x_0 an.	1
	Weiterhin wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit $h(x) = -\frac{3}{4}x \cdot e^{-0,1x}$ betrachtet. Der Graph von h wird mit H bezeichnet.	
f	Die Graphen $G_{0,1}$ und H schneiden sich in den Punkten $S_1(0\mid0)$ und $S_2\left(\frac{55}{2} \mid -\frac{165}{8} \cdot e^{-2,75}\right)$. Entscheiden Sie, welcher dieser Punkte Schnittpunkt aller Graphen G_a mit H ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.	2
g	Die Funktion h besitzt folgende Eigenschaften: ♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$ ♦ $h'(x) = \left(\frac{3}{40}x - \frac{3}{4}\right) \cdot e^{-0,1x}$. Begründen Sie mithilfe einer Skizze, dass der Graph H einen Wendepunkt besitzt.	3
h	Der Graph einer Funktion h^* geht aus dem Graphen H hervor. Es gilt: ♦ der Graph H wurde an beiden Koordinatenachsen gespiegelt und ♦ der gespiegelte Graph H wurde danach so verschoben, dass gilt: $\lim\limits_{x\to-\infty} h^*(x) = 1$. Geben Sie eine Funktionsgleichung von h^* an.	3

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 2.2: Flugzeugflügel CAS (Fortsetzung)

i An den Graphen H wird im Schnittpunkt mit der x-Achse eine Tangente t gelegt. Die Tangente t schließt mit der x-Achse und der Geraden $x = b_1$ mit $b_1 \in \mathbb{R}$, $b_1 > 0$ eine Fläche von $A_1 = \frac{75}{2}$ FE ein. 3
Bestimmen Sie b_1.

(zur Kontrolle: $t(x) = -\frac{3}{4}x$)

j Die Tangente t aus Teilaufgabe i), die x-Achse und die Gerade $x = b_2$ mit $b_2 \in \mathbb{R}$, $b_2 > 0$ begrenzen vollständig eine Fläche A_2. 3
Ermitteln Sie das Teilverhältnis der Strecken $\overline{S_1Q_2} : \overline{S_1Q_1}$, wenn gilt:
$Q_1(10\,|\,0)$, $Q_2(b_2\,|\,0)$ und $A_2 = \frac{1}{2} \cdot A_1$.

Die Konstrukteure einer kleinen Firma haben einen neuartigen Flugzeugflügel entworfen. Dabei werden die Graphen der Funktionen $f_{0,1}$ und h zwischen ihren Schnittpunkten S_1 und S_2 zur Modellierung des Querschnitts dieses Flugzeugflügels verwendet (vgl. Abbildung 1).
Es gilt: 1 LE = 1 dm.

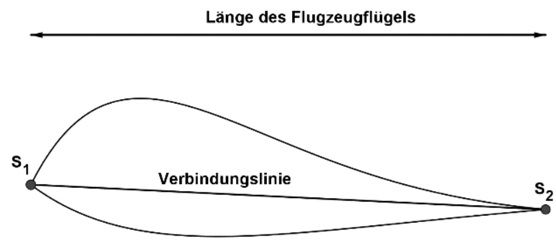


Abb. 1

k Für die Konstruktion des Flugzeugflügels müssen folgende Bedingungen erfüllt sein: 8

(I) Die Länge des Flugzeugflügels ist der horizontale Abstand zwischen S_1 und S_2. Diese Länge beträgt 27,5 dm.

(II) Die maximale vertikale Höhe des Flugzeugflügels lässt sich mithilfe der Differenzfunktion von $f_{0,1}$ und h bestimmen. Sie darf 7,15 dm nicht überschreiten.

(III) Der Neigungswinkel zwischen Verbindungslinie $\overline{S_1S_2}$ und der Horizontalen soll kleiner als 7° sein.

Prüfen Sie, ob diese Bedingungen eingehalten wurden.

l Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Länge des Flugzeugflügels kürzer als die Verbindungslinie zwischen S_1 und S_2 ist. 2

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 2.2: Flugzeugflügel CAS (Fortsetzung)

m Die Richtung, aus der während einer bestimmten Phase des Fluges die Luft anströmt, kann modellhaft durch eine Gerade zwischen S_1 und einem Punkt $R\left(x_R \mid f_{0,1}(x_R)\right)$ mit $x_R < 20$ angenommen werden. Im Punkt R ändert der Graph von $f_{0,1}$ seine Krümmungsart.
Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels $\delta = \sphericalangle S_2S_1R$ nicht mehr als 18° beträgt. 5

n In den Flugzeugflügel soll ein quaderförmiger Tank integriert werden. Die Querschnittsfläche des Tanks kann durch ein achsenparalleles Rechteck, dessen untere Seite auf der x-Achse liegt, modelliert werden. Dieser Tank hat im Querschnitt die Maße 100 cm x 30 cm.
Stellen Sie diesen Sachverhalt in einer Skizze dar.
Zeigen Sie rechnerisch, dass ein solcher Tank nicht in den Flugzeugflügel eingebaut werden kann. 4

o Vereinfachend kann angenommen werden, dass ein Teil eines Flugzeugflügels stets den abgebildeten Querschnitt und eine Tiefe von 2 m besitzt.
Ein moderner Flugzeugflügel besteht zu ca. 53 % aus carbonfaserverstärktem Kunststoff (CFK). CFK hat neben einer besseren Stabilität vor allem den Vorteil der Massereduktion durch eine geringere Dichte $\left(\text{ca. } 1{,}5\ \frac{g}{cm^3}\right)$ als herkömmliche Stoffe wie Aluminium $\left(\text{ca. } 2{,}7\ \frac{g}{cm^3}\right)$.
Bestimmen Sie für den beschriebenen Teil des Flugzeugflügels die benötigte Masse an CFK in kg und die Massereduktion gegenüber der bisherigen Verwendung von Aluminium in kg. 5

50

Aufgabe 3: Doppelpyramide CAS

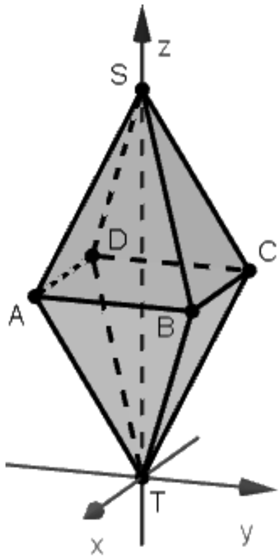
BE

Gegeben sind die Punkte $A(5\,|\,-5\,|\,12)$, $B(5\,|\,5\,|\,12)$ und $C(-5\,|\,5\,|\,12)$.

a Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist. 2

b Begründen Sie, dass A, B und C Eckpunkte eines Quadrats sein können, und geben Sie die Koordinaten des vierten Eckpunkts D dieses Quadrats an. 3

Im Folgenden wird die abgebildete Doppelpyramide betrachtet.
Die beiden Teilpyramiden ABCDS und ABCDT sind gleich hoch.
Der Punkt T liegt im Koordinatenursprung, der Punkt S ebenfalls auf der z-Achse.



Die Seitenfläche BCT liegt in einer Ebene E.

c Die Doppelpyramide hat 12 Kanten. Jede Kante liegt auf einer Geraden, die durch zwei Eckpunkte der Doppelpyramide festgelegt ist. 2
Die Kante $\overline{BT}$ der Doppelpyramide liegt auf der Geraden g_1.
Geben Sie jeweils zwei Eckpunkte an, durch die eine Gerade g_2 und eine Gerade g_3 verlaufen, für die gilt:
- ♦ g_1 und g_2 sind windschief
- ♦ g_1 und g_3 sind echt parallel.

d Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BCT. 3

e Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3
(zur Kontrolle: $12y - 5z = 0$)

f Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Seitenfläche BCT mit der Fläche ABCD einschließt. 3

Die Ebene E gehört zur Schar der Ebenen $E_k: ky - 5z = 5k - 60$ mit $k \in \mathbb{R}$.

g Alle Ebenen der Schar schneiden sich in einer Gerade. 2
Weisen Sie nach, dass die Kante $\overline{BC}$ auf dieser Geraden liegt.

h Ermitteln Sie diejenigen Werte von k, für die E_k mit der Seitenfläche ADS mindestens einen Punkt gemeinsam hat. 4

i Die Seitenfläche ADT liegt in der Ebene F. Geben Sie einen Normalenvektor von F an und begründen Sie Ihre Angabe, ohne die Koordinaten von A und D zu verwenden. 4
Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den E_k senkrecht zu F steht.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 3: Doppelpyramide CAS (Fortsetzung)

j Die Doppelpyramide wird so um die x-Achse gedreht, dass die bisher mit BCT bezeichnete Seitenfläche in der xy-Ebene liegt und der bisher mit S bezeichnete Punkt eine positive y-Koordinate hat. Bestimmen Sie diese y-Koordinate und veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch eine Skizze. 4

k Die Ebene H mit $H: z = 4$ teilt die Doppelpyramide in zwei Teilkörper. Ermitteln Sie die Volumina der beiden Teilkörper. 5

l Die Doppelpyramide wird durch eine Ebene G geschnitten. Die Schnittfläche der Ebene G mit der Doppelpyramide ist ein Drachenviereck. Der Schnittpunkt der Diagonalen dieses Drachenvierecks ist der Punkt $M(4\,|\,4\,|\,12)$. Ein Eckpunkt dieses Drachenvierecks ist der Punkt T.
Ermitteln Sie die Koordinaten der anderen drei Eckpunkte des Drachenvierecks. 5

40

Aufgabe 3: Stahlkugeln CAS

BE

Ein Unternehmen produziert Stahlkugeln für Kugellager. Erfahrungsgemäß sind 4 % aller Kugeln fehlerhaft.

800 Kugeln werden zufällig ausgewählt. Die Anzahl der fehlerhaften Kugeln unter den ausgewählten kann durch eine binomialverteilte Zufallsgröße X beschrieben werden.

a Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse. 3
C: „Genau 30 der ausgewählten Kugeln sind fehlerhaft."
D: „Weniger als 30 der ausgewählten Kugeln sind fehlerhaft."

b Es gilt: $P(X=35)\approx 6\ \%$. 2
Interpretieren Sie diese Aussage im Sachzusammenhang.

c Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der fehlerhaften Kugeln unter den ausgewählten höchstens um eine halbe Standardabweichung vom Erwartungswert dieser Anzahl abweicht. 5

Eine fehlerhafte Kugel hat entweder einen Formfehler oder einen Größenfehler. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Kugel einen Formfehler hat, beträgt 3 %. Alle Kugeln werden vor dem Verpacken geprüft. Dabei werden 95 % der Kugeln mit Formfehler, 98 % der Kugeln mit Größenfehler, aber auch 0,5 % der Kugeln ohne Fehler aussortiert.

d Stellen Sie den Sachzusammenhang in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. 4

e Beurteilen Sie unter Zuhilfenahme geeigneter Rechnungen folgende Aussage: 6
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel nicht aussortiert wird, ist doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine aussortierte Kugel keinen Formfehler hat.

Aufgrund zunehmender Reklamationen wird vermutet, dass der Anteil der fehlerhaften Kugeln auf über 4 % angestiegen ist. Um diese Vermutung zu prüfen, soll die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Kugeln beträgt höchstens 4 %." auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Kugeln getestet werden. Wenn das Ergebnis des Tests die Vermutung nicht entkräftet, soll die Produktion unterbrochen werden, um die Maschinen zu warten. Das Risiko, die Produktion irrtümlich zu unterbrechen, soll höchstens 3 % betragen.

f Beschreiben Sie für diesen Test im Sachzusammenhang den Fehler zweiter Art. Geben Sie die Konsequenz an, die sich aus diesem Fehler für die Produktion ergeben würde. 3

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 3: Stahlkugeln CAS (Fortsetzung)

g Für den beschriebenen Test wird der Ablehnungsbereich betrachtet. Eine der beiden Grenzen dieses Ablehnungsbereichs ist größer als 0 und kleiner als 500; diese Grenze wird mit k bezeichnet. Zur Bestimmung des Werts von k soll die binomialverteilte Zufallsgröße Y mit den Parametern $n = 500$ und $p = 0{,}04$ verwendet werden.
Begründen Sie, dass keine der beiden Ungleichungen I und II den korrekten Wert von k liefert. 4

I $P(Y \le k) \le 0{,}03$ II $P(Y \le k) > 0{,}97$

h Die Kugeln werden in Packungen verkauft. Ein Teil der verkauften Packungen wird zurückgegeben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine verkaufte Packung zurückgegeben wird, beträgt 3 %. Dem Unternehmen entsteht pro Packung, die zurückgegeben wird, ein Verlust von 5,80 Euro; pro Packung, die nicht zurückgegeben wird, erzielt das Unternehmen einen Gewinn von 8,30 Euro.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der das Unternehmen bei einem Verkauf von 200 Packungen einen Gesamtgewinn von mindestens 1500 Euro erzielt. 4

In einer Packung von 20 Kugeln sind genau 2 fehlerhafte Kugeln.

i Es werden zufällig nacheinander drei Kugeln aus der Packung entnommen, ohne sie zurückzulegen.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:
F: „Die dritte Kugel ist fehlerhaft.“
G: „Mindestens eine Kugel ist fehlerhaft.“ 5

j Es sollen k Kugeln aus der Packung entnommen werden, ohne sie zurückzulegen. Dabei soll die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass mindestens eine der entnommenen Kugeln eine fehlerhafte Kugel ist, kleiner als 0,5 sein.
Ermitteln Sie, wie viele Kugeln höchstens entnommen werden dürfen, wenn die Bedingung „p kleiner als 0,5“ erfüllt bleiben soll. 4

40