12. Brille Klasse 11

$f_a(x) = \sqrt{ax} - \frac{1}{2}x^2 \quad a \in \mathbb{R}, a > 0$

a) $D(f) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$

$\lim_{x \to \infty} f_a(x) = -\infty \qquad (\lim_{x \to 0^+} f_a(x) = 0)$

$0 = \sqrt{ax} - \frac{1}{2}x^2$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = \sqrt[3]{4a}$

b) $f_a'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax}} - x \qquad f_a''(x) = \frac{-a}{4x\sqrt{ax}} - 1$

EP: $f_a'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2a} \qquad y_1 = \frac{3}{8}\sqrt[3]{4a^2}$

$f''(x_1) = -\frac{3}{2} < 0$

$\Rightarrow HP\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2a} \mid \frac{3}{8}\sqrt[3]{4a^2}\right)$

Ortskurve $f_a'(x) = 0 \Rightarrow a = 4x^3$ in $f_a(x)$

$$\underline{\underline{y_e = \frac{3}{2}x_e^2}}$$

WP $f_a''(x) = 0$ n.L. $\left(-\frac{a}{4x\sqrt{ax}} = 1 \text{ nicht mgl., da } a > 0 \text{ und } x > 0\right)$

$\Rightarrow$ Es gibt keine Wendepunkte.

c) $P(1 \mid f_a(1))$

$f_a'(1) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{a = 16}} \qquad t: y = x + 2{,}5$

$\Rightarrow O \notin t \Rightarrow$ Dreieck existiert.

$f_a'(1) = -1$ nicht mgl., da $a > 0$.

d) Die Gerade h ist Tangente an G_2 in $P(4 \mid 0)$, denn $h(4) = 0$ und $f_2'(4) = -3$.

e) $k: \; k(x) = -f_2(x) = -\sqrt{2x} + \frac{1}{2}x^2$

Abstand d über Pythagoras

$$d(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (f_2(x))^2} \qquad 0 < x < 2$$

$$d'(x) = \frac{x(-5\sqrt{2x} + 2x^2 + 4)}{2\sqrt{(x-1)^2 + (f_2(x))^2}} \qquad \text{(Kettenregel)}$$

$d'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 \approx 0{,}364 \qquad x_3 \approx 1{,}550$

$d(0) = 1 \qquad d(0{,}364) \approx 1{,}012 \qquad d(1{,}550) \approx 0{,}785$

$\Rightarrow$ Min

Vergleich: $d(2) = 1 > 0{,}785$

$P(1{,}55 \mid 0{,}56)$

f) $f_2^S(x) = \sqrt{2(-x)} - \frac{1}{2}(-x)^2$
$= \sqrt{-2x} - \frac{1}{2}x^2 \qquad x \leq 0$

$k^S(x) = -\sqrt{-2x} + \frac{1}{2}x^2 \qquad x \leq 0$

$\lim_{x \to 0^+} f_2'(x) = \infty$

$\lim_{x \to 0^+} k'(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ Beide Graphen schmiegen sich an die y-Achse. Sie münden senkrecht in den Ursprung. Die y-Achse ist also gemeinsame Tangente.

g) $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & g(0) = 0 \\ \text{II} & g(2) = 0 \\ \text{III} & g(\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}) = \frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{16} \\ \text{IV} & g'(\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a \approx 0{,}425 \\ b \approx -2{,}175 \\ c \approx 2{,}649 \\ d = 0 \end{array}$$

Probe graphisch

$g(x) \approx 0{,}425x^3 - 2{,}175x^2 + 2{,}649$