Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2020

Mathematik

Kurs auf erhöhtem Anforderungsniveau

Aufgabenvorschlag Teil 1 für Prüflinge

Hilfsmittel: Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

nicht für Aufgabenstellung 1: Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist
Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen

Gesamtbearbeitungszeit: 300 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: hilfsmittelfreier Teil

Hinweis: Hier gibt es keine Wahlmöglichkeiten.

Die Aufgabenstellung und die Lösungen zum hilfsmittelfreien Teil werden nach 70 Minuten abgegeben.

Mit der Bearbeitung der weiteren Aufgabenstellungen kann bereits zuvor begonnen werden.

In jedem Fall können die zugelassenen Hilfsmittel erst nach Ablauf der 70 Minuten verwendet werden.

Im Teil 2 des Aufgabenvorschlags sind enthalten:

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 4

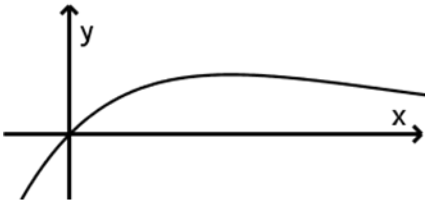
Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 4.1 oder 4.2 zur Bearbeitung aus.

1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-x}$ und $x \in \mathbb{R}$.
Betrachtet werden die Dreiecke mit den Eckpunkten $O(0|0)$, $P(a|0)$ und $Q(a|f(a))$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.



a) Begründen Sie, dass der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit dem Term $\frac{1}{2}a^2e^{-a}$ bestimmt werden kann.

b) Unter den betrachteten Dreiecken hat eines den größten Flächeninhalt.
Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von a.

1.2 Analysis

Für jeden Wert von $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Funktion f_a gegeben mit $f_a(x) = a \cdot (x-2)^3$ und $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^4 + 3$ eine Stammfunktion von f_2 ist.

b) Untersuchen Sie mithilfe von Skizzen, für welche Werte von a sich unter den Stammfunktionen von f_a solche befinden, die nur negative Funktionswerte haben.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil (Fortsetzung)

1.3 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt $C(2\,|\,3\,|\,3)$ und die Gerade g mit

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mu \in \mathbb{R}$ gegeben.

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(6\,|\,3\,|\,-1)$ und B.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt C nicht auf g liegt.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B, der auf g liegt und gleich weit wie der Punkt A von C entfernt ist.

1.4 Analytische Geometrie

In einem Koordinatensystem ist ein gerader Zylinder mit dem Radius 5 und der Höhe 10 gegeben, dessen Grundfläche in der xy-Ebene liegt. $M(8\,|\,5\,|\,10)$ ist der Mittelpunkt der Deckfläche.

a) Weisen Sie nach, dass der Punkt $P(5\,|\,1\,|\,0)$ auf dem Rand der Grundfläche des Zylinders liegt.

b) Unter allen Punkten auf dem Rand der Deckfläche hat der Punkt S den kleinsten Abstand von P, der Punkt T den größten.
Geben Sie die Koordinaten von S an und bestimmen Sie die Koordinaten von T.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil (Fortsetzung)

1.5 Stochastik

Für ein Spiel werden ein Tetraeder und ein Würfel verwendet. Die Seiten des Tetraeders sind mit den Zahlen 1 bis 4 durchnummeriert, die des Würfels mit den Zahlen 1 bis 6. Ebenso wie beim Werfen des Würfels werden beim Werfen des Tetraeders alle Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzielt.

Vor Beginn des Spiels wird ein Einsatz von 5 Euro geleistet. Anschließend wird das Tetraeder einmal geworfen. Wird dabei die Zahl 3 erzielt, wird das Tetraeder ein weiteres Mal geworfen, andernfalls einmal der Würfel. Nur dann, wenn bei genau einem der beiden Würfe die Zahl 3 erzielt wird, erfolgt eine Auszahlung.

a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einmaliger Durchführung des Spiels mindestens einmal die Zahl 3 zu erzielen, $\frac{3}{8}$ beträgt.

b) Bei vielfacher Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich Einsätze und Auszahlungen mit der Zeit ausgleichen.
Ermitteln Sie die Höhe der Auszahlung.

1.6 Stochastik

Eine Gärtnerei, die Tulpen in den Farben Gelb, Orange und Rot züchtet, stellt Sträuße mit jeweils 15 Tulpen zusammen.

a) Einer der Sträuße soll Tulpen in zwei verschiedenen Farben enthalten. Die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen, kann mit dem Term $\binom{3}{2} \cdot 14$ berechnet werden.

Beschreiben Sie für jeden der beiden Faktoren die Bedeutung im Sachzusammenhang.

b) In einem der Sträuße sollen zu jeder der drei Farben mindestens vier und höchstens sechs Tulpen enthalten sein.
Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgaben													
Aufgabe	1.1 Analysis 1		1.2 Analysis 2		1.3 Geometrie 1		1.4 Geometrie 2		1.5 Stochastik 1		1.6 Stochastik 2		
Teilaufgabe	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	Summe
BE	2	3	1	4	2	3	2	3	2	3	2	3	30