Zentrale schriftliche Abiturprüfung **2021**

Mathematik

Grundkurs mit CAS

Aufgabenvorschlag **Teil 2** **für Prüflinge**

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist CAS, das zugelassen und an der Schule eingeführt ist
Gesamtbearbeitungszeit:	285 Minuten (davon 75 Minuten für Teil 1)

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

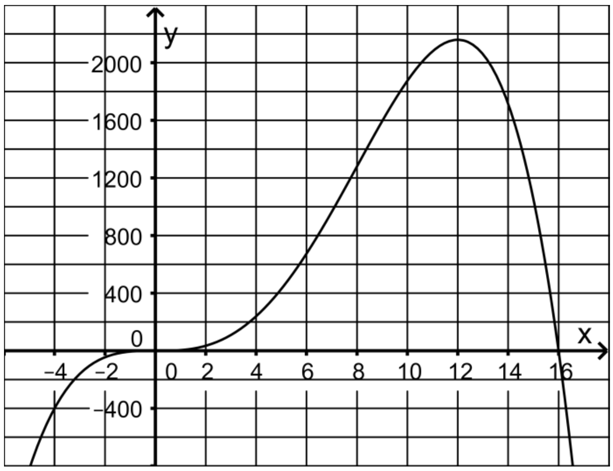
Thema/Inhalt: Analytische Geometrie oder Stochastik

Hinweis: Bearbeiten Sie Aufgabe 3.

Aufgabe 2.1: Tank CAS

BE

Die Abbildung zeigt den Graphen der in IR definierten Funktion f mit $f(x) = -\frac{5}{16}x^4 + 5x^3$.



1 a Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt $(12\,|\,2160)$ ein Hochpunkt des Graphen von f ist und dass die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0\,|\,0)$ parallel zur x-Achse verläuft. 4

b Bestimmen Sie eine Gleichung der Gerade g, die durch die beiden Wendepunkte des Graphen von f verläuft. 5
Zeichnen Sie in die Abbildung eine Gerade ein, die parallel zu g ist und für $0 \le x \le 8$ mit dem Graphen von f genau einen Punkt gemeinsam hat.

(zur Kontrolle: Die Wendestellen sind $x = 0$ und $x = 8$.)

c Beurteilen Sie folgende Aussage: 4

Der Steigungswinkel des Graphen von f im Punkt $P(8\,|\,f(8))$ ist größer als der im Punkt $T(-4\,|\,f(-4))$.

d Für jeden Wert von u mit $u \in \mathbb{R}$, $0 < u < 14$ sind die Punkte $R(u\,|\,f(u))$, $Q(u\,|\,0)$ und $S(u-4\,|\,0)$ Eckpunkte eines Dreiecks. 4
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks mit der Gleichung $A(u) = -\frac{5}{8}u^4 + 10u^3$ berechnet werden kann.

e Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks SQR. 6

Für jede reelle Zahl a ist eine in IR definierte Funktion h mit $h(x) = 5ax^2$ gegeben.

f Beschreiben Sie, wie der Graph von h für $a = 4$ aus dem Graphen von h für $a = 3$ erzeugt werden kann. 2

g Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den der Punkt $(4\,|\,f(4))$ auf dem Graphen von h liegt. 2

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 2.1: Tank CAS (Fortsetzung)

h Die Gleichungen I, II, III und IV liefern gemeinsam die Lösung einer Aufgabe. 5

I $-\frac{5}{16}x^4 + 5x^3 = 5ax^2$

II $0 = -\frac{5}{16}x^2 \cdot \left(x^2 - 16x + 16a\right)$

III $x = 0$ oder $0 = x^2 - 16x + 16a$; $x = 8 \pm \sqrt{64 - 16a}$

IV $64 - 16a = 0$; $a = 4$

Erläutern Sie die Gleichungen und formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung.

i Die Gleichung $f(x) = h(x)$ für $a = 3{,}75$ hat genau die drei Lösungen $x_1 = 0$, $x_2 = 6$ und $x_3 = 10$ und es gilt $\int_0^{10} \left(f(x) - h(x)\right) dx = 0$. 3

Deuten Sie dies mit Bezug auf die Graphen von f und h.

2 Ein Unternehmen lagert Glyzerin in einem Tank. Die momentane Änderungsrate des Tankinhalts kann für $0 \le x \le 20$ mithilfe der Funktion f aus Aufgabe 1) beschrieben werden. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate in Kilogramm pro Stunde.

Zu Beobachtungsbeginn befinden sich im Tank 1200 kg Glyzerin.

a Der Punkt $(4\,|\,240)$ liegt auf dem Graphen von f. 2

Interpretieren Sie die Koordinaten dieses Punkts im Sachzusammenhang.

b Beurteilen Sie die folgende Aussage: 2

Zwölf Stunden nach Beobachtungsbeginn ist die größte Menge Glyzerin im Tank enthalten.

c Bestimmen Sie grafisch unter Zuhilfenahme der Abbildung die Zunahme des Tankinhalts zwischen den Zeitpunkten acht Stunden und zehn Stunden nach Beobachtungsbeginn. 3

d Berechnen Sie, wie viel Glyzerin 20 Stunden nach Beobachtungsbeginn im Tank enthalten ist. 3

45

Aufgabe 2.2: Flugzeugflügel CAS

BE

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f mit $f(x)=\left(-\frac{1}{10}x^2+2x\right)\cdot e^{-0{,}1x}$ und h mit $h(x)=-\frac{3}{4}x\cdot e^{-0{,}1x}$. Der Graph von f wird mit G bezeichnet und der Graph von h mit H.

a Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G mit den Koordinatenachsen. 3

b Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x\to+\infty$ und $x\to-\infty$ an. 2

c Zeigen Sie, dass die Graphen G und H den gemeinsamen Punkt $S_1(0\,|\,0)$ haben. 1

d Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte von G. 5

e Die Funktion h besitzt folgende Eigenschaften: 4

- ♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$
- ♦ $h'(x)=\left(\frac{3}{40}x-\frac{3}{4}\right)\cdot e^{-0{,}1x}$.

Begründen Sie mithilfe einer Skizze, dass der Graph H einen Wendepunkt besitzt. Beschreiben Sie das Krümmungsverhalten des Graphen H.

f An den Graphen H wird im Schnittpunkt mit der x-Achse eine Tangente t gelegt. 5
Die Tangente t schließt mit der x-Achse und der senkrechten Geraden $x=b$ mit $b\in\mathbb{R}$, $b>0$ eine Fläche von $A=\frac{75}{2}$ FE ein.
Bestimmen Sie b.

Die Konstrukteure einer kleinen Firma haben einen neuartigen Flugzeugflügel entworfen. Dabei werden die Graphen der Funktionen f und h zwischen ihren Schnittpunkten S_1 und S_2 zur Modellierung des Querschnitts dieses Flugzeugflügels verwendet (vgl. Abbildung 1).
Es gilt: 1 LE = 1 dm.

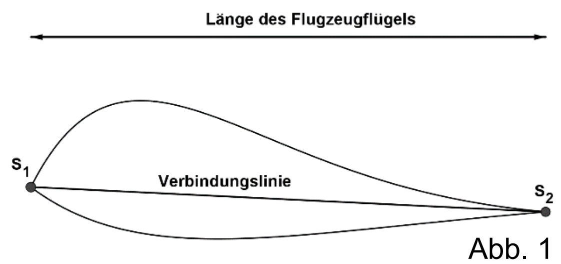


Abb. 1

g Die obere Begrenzungslinie wird durch den Graphen von f modelliert, die untere Begrenzungslinie durch den Graphen von h. 2
Begründen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse diese Zuordnung.

h Die Länge des Flugzeugflügels ist der horizontale Abstand zwischen S_1 und S_2. 3
Zeigen Sie, dass diese Länge 27,5 dm beträgt

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 2.2: Flugzeugflügel CAS (Fortsetzung)

i Begründen Sie unter Zuhilfenahme der Abbildung 2 ohne Rechnung, dass die Länge des Flugzeugflügels kürzer als die Verbindungslinie zwischen S_1 und S_2 ist. 2

Abb. 2

j An einer Stelle hat der Flugzeugflügel eine maximale vertikale Höhe. Diese Stelle kann mithilfe der Differenzfunktion d mit $d(x) = f(x) - h(x)$ bestimmt werden. Die maximale vertikale Höhe darf 7,15 dm nicht überschreiten.
Untersuchen Sie, ob die Konstrukteure dies beachtet haben. 5

k Bestimmen Sie die Querschnittsfläche des Flugzeugflügels mithilfe der Differenzfunktion d. 2

l Die Konstrukteure des Flügels benötigen den Neigungswinkel zwischen der Verbindungslinie $\overline{S_1S_2}$ und der Horizontalen und führen hierzu folgende Berechnungen durch: 3

(1) $f(27{,}5) \approx 1{,}32$

(2) $\sin\alpha = \frac{1{,}32}{\sqrt{27{,}5^2 - 1{,}32^2}} \Leftrightarrow \alpha \approx 2{,}75^\circ$

Beurteilen Sie jeweils die einzelnen Teilschritte und beschreiben Sie gegebenenfalls, wie fehlerhafte Schritte bei diesem Vorgehen berichtigt werden müssen.

m Die Richtung, aus der während einer bestimmten Phase des Fluges die Luft anströmt, kann modellhaft durch eine Gerade zwischen S_1 und einem Punkt $R(x_R \mid f(x_R))$ mit $x_R < 20$ angenommen werden. Im Punkt R ändert der Graph von f seine Krümmungsart. 5
Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels $\delta = \sphericalangle S_2S_1R$ nicht mehr als 18° beträgt.

(zur Kontrolle: $R(12{,}68 \mid 2{,}61)$)

n In den Flugzeugflügel soll ein quaderförmiger Tank integriert werden. Die Querschnittsfläche des Tanks kann durch ein achsenparalleles Rechteck, dessen untere Seite auf der x-Achse liegt, modelliert werden. Dieser Tank hat im Querschnitt die Maße 100 cm x 30 cm. (siehe Abbildung 3) 3
Zeigen Sie rechnerisch, dass ein solcher Tank nicht in den Flugzeugflügel eingebaut werden kann.

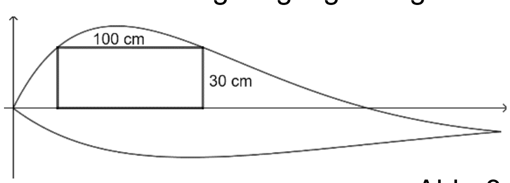


Abb. 3

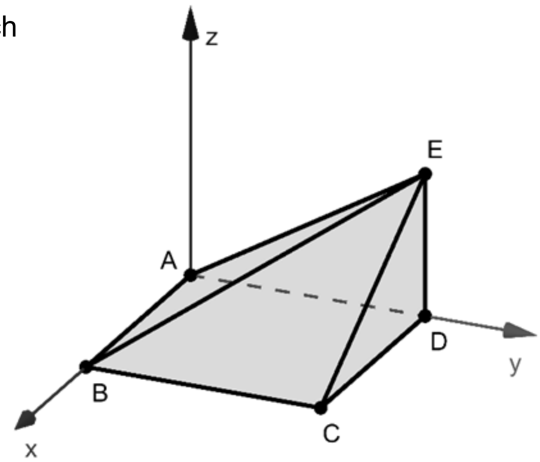
45

Aufgabe 3: Holzkörper CAS

BE

Die Eckpunkte eines Holzkörpers werden durch $A(0|0|0)$, $B(10|0|0)$, $C(10|10|0)$, $D(0|10|0)$ und $E(0|10|6)$ dargestellt (vgl. Abbildung). Die Punkte B, D und E liegen im Modell in der Symmetrieebene des Körpers.

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Zentimeter in der Realität.



a Zeigen Sie, dass das Dreieck BCE rechtwinklig ist, und berechnen Sie den Inhalt der Gesamtoberfläche des Holzkörpers. 5

b Geben Sie eine Gleichung der Geraden h an, auf der die Punkte C und E liegen. Begründen Sie, dass diese Gerade windschief zur Geraden durch die Punkte B und D verläuft. 3

c Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene L, in der das Dreieck BCE liegt, in Koordinatenform. 3

(zur Kontrolle: L: $x+\frac{5}{3}z=10$)

d Die quadratische Grundfläche des Holzkörpers schließt mit der Seitenfläche, die durch das Dreieck BCE dargestellt wird, einen Winkel ein.
Berechnen Sie die Größe dieses Winkels. 2

e Entscheiden und begründen Sie für jede der folgenden Ebenengleichungen, ob diese Ebene das Quadrat ABCD in zwei Figuren mit gleichem Flächeninhalt teilt: 4

$E_1: y=5$

$E_2: -x+y=0$

$E_3: z=5.$

f Die Punkte A und D werden auf der y-Achse so verschoben, dass ein gleichschenkliges Trapez A'BCD' entsteht, dessen Fläche $\frac{4}{5}$ der Fläche des Quadrats ABCD beträgt. Die Punkte A' und D' liegen auf der Strecke $\overline{AD}$.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte A' und D'. 3

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 3: Holzkörper CAS (Fortsetzung)

g Der Holzkörper soll mit einer möglichst kurzen Linie versehen werden, die im Modell vom Eckpunkt A über die Kante $\overline{BE}$ zum Punkt C verläuft. Die Länge dieser Linie in Zentimetern kann folgendermaßen ermittelt werden: 4

$P(10-10t\,|\,10t\,|\,6t)$

$\overrightarrow{PC}\circ\overrightarrow{PB}=0\,;\ t=\frac{25}{59}$

$2\cdot\left|\overrightarrow{PC}\right|\approx 15{,}2$

Erläutern Sie dieses Vorgehen.

Der Schnittpunkt der Ebene L mit der z-Achse wird mit F bezeichnet.

h Zeichnen Sie F sowie die Geraden, in denen L die xz- und die yz-Ebene schneidet, in die Abbildung ein. 2

i Ermitteln Sie, um wie viel Prozent das Volumen des Körpers ABCDEF größer ist als das Volumen des Körpers ABCDE, ohne für diese Volumina konkrete Werte zu berechnen. 4

30

Aufgabe 3: Smartphone-Spiel CAS

	BE
Bei einem Smartphone-Spiel kann jeder Spieler jeden Sonntag Sterne gewinnen. Dazu hat er jeweils zehn Versuche. Bei jedem Versuch kann nur ein Stern gewonnen werden; die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt 40%.	
a Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass A: „ein Spieler bei zehn Versuchen mehr als sechs Sterne gewinnt.“ B: „ein Spieler bei zehn Versuchen mindestens fünf, aber höchstens acht Sterne gewinnt.“	4
b An einem Sonntag machen zwei Spieler jeweils zehn Versuche. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jeder der beiden Spieler dabei mehr als vier Sterne gewinnt.	3
c Beurteilen Sie die folgende Aussage eines Spielers: *„Ich habe an den letzten drei Sonntagen jeweils acht Sterne gewonnen. Daher ist meine Chance, an diesem Sonntag wieder acht Sterne zu gewinnen, deutlich kleiner als vorher.“*	2
d An einem Sonntag nutzen vier Spieler jeweils die möglichen zehn Versuche zum Gewinnen von Sternen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei genau zwei der vier Spieler jeweils genau fünf Sterne gewinnen.	3
e Berechnen Sie, wie viele Versuche ein Spieler mindestens machen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens einen Stern zu gewinnen.	4
f Geben Sie jeweils einen Wert für a und b mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ an, so dass mit dem Term $1-\left(a^{10}+\binom{10}{1}\cdot 0{,}4^1\cdot a^b\right)$ die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses im Sachzusammenhang berechnet werden kann. Beschreiben Sie das zugehörige Ereignis.	4

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 3: Smartphone-Spiel CAS (Fortsetzung)

Außerdem hat jeder Spieler täglich einmal die Möglichkeit, allein durch Starten des Spiels Bonuspunkte zu erhalten. Durch das Starten wird ihm automatisch eine zufällig bestimmte Anzahl von Bonuspunkten gutgeschrieben. Der Tabelle können die möglichen Anzahlen und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten entnommen werden.

Bonuspunkte	10	20	50
Wahrscheinlichkeit	50 %	40 %	10 %

g Ein Spieler startet das Spiel an drei aufeinanderfolgenden Tagen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Spieler von Tag zu Tag weniger Bonuspunkte erhält. 2

h Ein Spieler startet das Spiel an vier Tagen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Spieler dabei insgesamt 80 Bonuspunkte erhält. 4

i Die Wahrscheinlichkeiten für 10 und 20 Bonuspunkte werden so geändert, dass die Spieler im Zeitraum von 200 Tagen, an denen das Spiel gestartet wird, im Mittel 3000 Bonuspunkte erhalten.
Ermitteln Sie die beiden geänderten Wahrscheinlichkeiten. 4

30