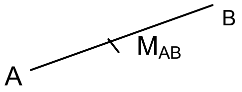
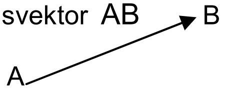
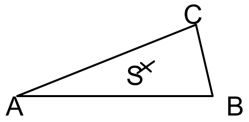
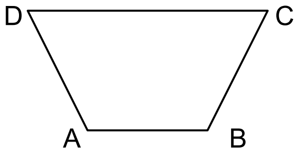
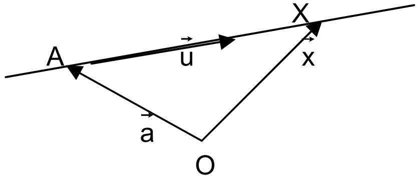
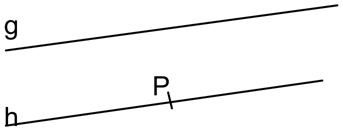
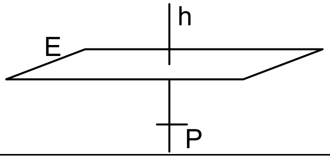
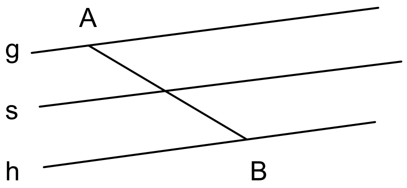
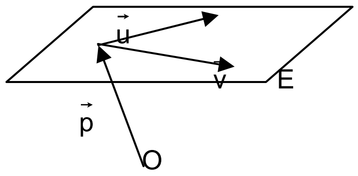
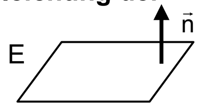
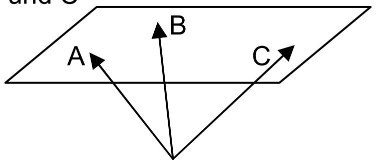
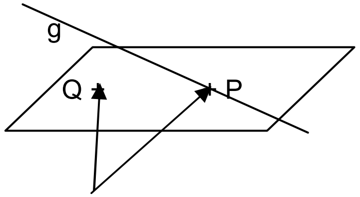
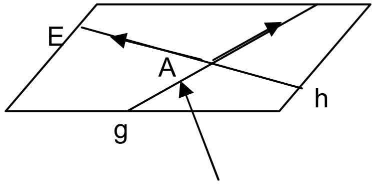
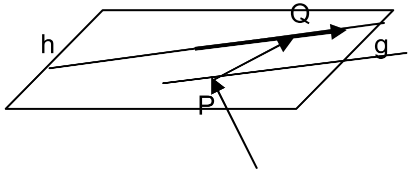
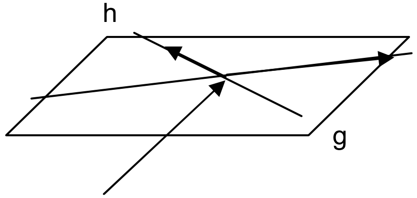
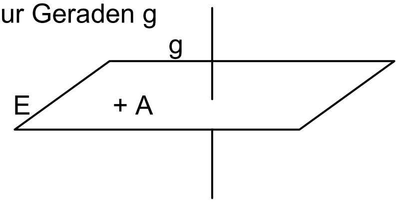
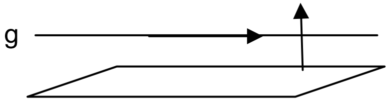
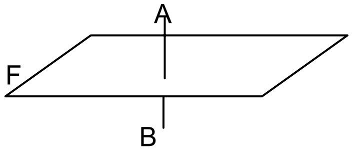
Analytische Geometrie			
0. Vektoren			
▪ **Mitte** einer Strecke AB  	Mittelwert der zwei Ortsvektoren $\overrightarrow{m_{AB}} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$	A(2 | 3 | 6), B(–4 | 5 | 2) Lösung: $M\left(\frac{1}{2}(2-4)\middle\|\frac{1}{2}(3+5)\middle\|\frac{1}{2}(2+6)\right)$ = M(1| 4| 4)	
▪ Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$  	Spitze – Anfang: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$	A(2 | 3 | 6), B(–4 | 5 | 2) **Lösung:** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-6\\2\\-4\end{pmatrix}$	
Schwerpunkt eines Dreiecks ABC  	Mittelwert der drei OVn $\overrightarrow{s_{AB}} = \frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$	**Bsp:** A(1 | 2 | 4), B(4 | 5 | 2), C(–3 | 2 |–2) **Lösung:** $\vec{s} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1+4-3\\2+5+2\\4+2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\3\\4/3\end{pmatrix}$	
▪ **Lineare Abhängigkeit von zwei Vektoren** $\vec{u}$ und $\vec{v}$.	Zwei Vektoren sind linear abhängig, wenn einer ein Vielfaches vom anderen ist: $\vec{v} = k\cdot\vec{u}$	**Bsp:** $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}$ **Lösung:** $\vec{v} = -2\cdot\vec{u}$, deshalb sind sie l.a.	
▪ Bedingung dafür, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist.  	Die Differenzvektoren von zwei gegenüberliegenden Seiten sind linear abhängig.	**Bsp:** A(4 | 6 | 0), B(4 | 0 | 3), C(2 | 0 | 5), D(2 | 10 | 0). **Lösung:** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\-6\\3\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}0\\-10\\5\end{pmatrix}$ sind lin. abhängig, d.h. ABCD ist ein Trapez.	

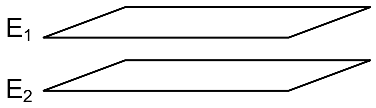
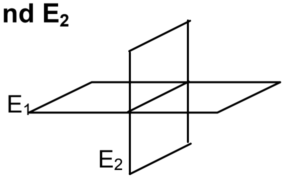
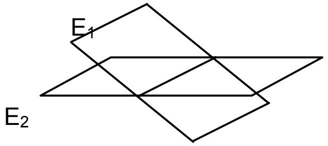
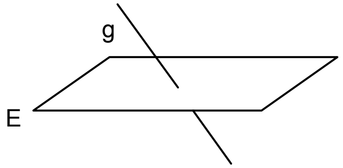
1. Geraden			
▪ Gerade h durch den Punkt A in Richtung $\vec{u}$  	Der OV $\vec{x}$ eines beliebigen Geradenpunktes X ist die Summe aus $\vec{a}$ und einem Vielfachen des RVs $\vec{u}$.	**Bsp:** Punkte A(2 | 3 | 1), Richtung $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ **Lösung**: g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, t\in R$.	
▪ Spurpunkt der Geraden g: $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}, t\in IR$ mit der x_1x_2-Ebene.	Im LGS * $\left\{\begin{matrix}x_1 = a_1 + tu_1\\x_2 = a_2 + tu_2\\x_3 = a_3 + tu_3\end{matrix}\right\}$ $x_3 = 0$ setzen, Gleichung lösen und Lösung in andere Gleichungen von (*) einsetzen	**Bsp:** g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}, \lambda\in IR$ **Lösung:** $1 + \lambda = 0$ ergibt S_1 (-2 | 5 | 0)	
▪ **Spurpunkt** der Geraden g: $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}, t\in IR$ mit der x_2x_3-Ebene.	Im LGS (*) $x_1 = 0$ setzen	**Bsp:** g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}, \lambda\in IR$ **Lösung:** S_2 (0 | 3,5 | 0,5)	
▪ **Spurpunkt** der Geraden g: $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}, t\in IR$ mit der x_1x_3-Ebene.	Im LGS (*) $x_2 = 0$ setzen	**Bsp:** g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \lambda\in IR$ **Lösung:** S_3 (8 | 0 | 4)	
▪ Liegt der Punkt P auf der Geraden g: $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}, t\in IR$? (**Punktprobe**)	In der Geradengleichung statt $\vec{x}$ den OV $\vec{p}$ des Punktes P einsetzen und entstandenes LGS lösen. Wenn sich kein Widerspruch ergibt, folgt P ∈ g.	**Bsp:** P(–2 | 5 |–1), g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \lambda\in IR$ **Lösung:** $\left.\begin{matrix}-2 = 2 + 2\lambda\\5 = 3 - \lambda\\-1 = 1 + \lambda\end{matrix}\right\}$ $\lambda = -2$, d.h. P ∈ g.	

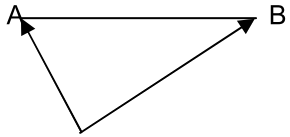
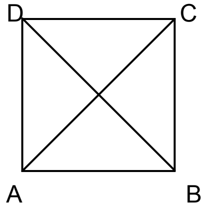
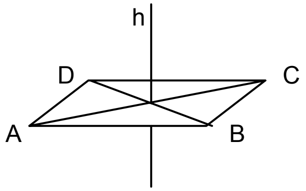
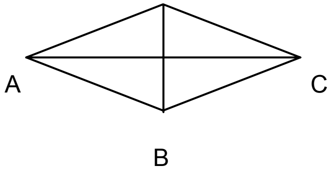
▪ **Gerade h durch P und parallel zu g**: $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}, t\in IR$  	OV $\vec{p}$ als Stützvektor von h und RV $\vec{u}$ von g ebenfalls als RV von h wählen: h: $\vec{x}=\vec{p}+t\cdot\vec{u}, t\in IR$	**Bsp:** $P(-2 \mid 5 \mid -1)$, g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \lambda\in IR$ **Lösung:** h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\5\\-1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \lambda\in IR$	
▪ **Gerade h durch P und orthogonal zur Ebene E**: $\vec{n}\vec{x}=d$  	OV $\vec{p}$ als Stützvektor von h und Normalenvektor $\vec{n}$ von E als RV von h wählen h: $\vec{x}=\vec{p}+\lambda\cdot\vec{n}, \lambda\in IR$	**Bsp:** E_1: $2x_1+3x_2-4x_3=12$, $P(-2 \mid 5 \mid -1)$ **Lösung:** h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\5\\-1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}, \lambda\in IR$	
▪ **Gerade g:** $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}, t\in IR$ **als Punkt geschrieben**	$P_t\,(a_1+tu_1 \mid a_2+tu_2 \mid a_3+tu_3)$ Die 3 Zeilen der Parametergleichung nebeneinander als Koordinaten schreiben	**Bsp:** g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \lambda\in IR$ **Lösung:** $P_t(2+2t \mid 3-t \mid 1+t)$	
▪ **Die Punkte P_t liegen auf einer Geraden.**	$P_t\,(a_1+tu1. \mid .a_2+tu_2 \mid a_3+tu_3)$ Die Koordinaten als die 3 Zeilen der Parametergleichung schreiben und in Vektorschreibweise aufspalten	**Bsp:** $P_t(4-t \mid 2+2t \mid -t)$ **Lösung:** g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}, t\in IR$	
2. Lage von zwei Geraden			
▪ Lage von zwei Geraden g: $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}, t\in IR$ und h: $\vec{x}=\vec{b}+s\vec{v}, s\in IR$ zueinander	**1. Schritt:** $\vec{u},\vec{v}$ linear abhängig? Ja. Parallel oder identisch. **Nein. 2. Schritt:** Gleichsetzen LGS $\begin{cases}a_1+tu_1=b_1+sv_1\\a_2+tu_2=b_2+sv_2\\a_3+tu_3=b_3+sv_3\end{cases}$ lösen. Es gibt Lösung → SchnittP Keine Lösung → windschief **Achtung:** LGS mit 3 Gleichungen und 2 Var. ! z.B. Teil-LGS lösen und Probe in 3 Gl.	**Bsp:** g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$; h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ **Lösung:** $\vec{u},\vec{v}$ linear unabhängig, also g und h nicht parallel. $\left.\begin{array}{l}2+2\lambda=1\\3-\lambda=-2+\mu\\1+\lambda=1+3\mu\end{array}\right\}$ hat keine Lösung. Damit haben g und h keinen Schnittpunkt, d.h. g, h windschief.	

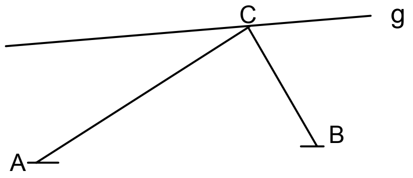
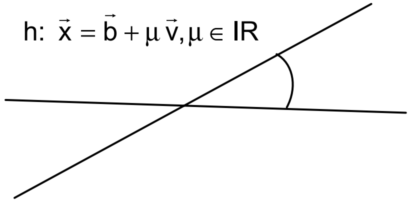
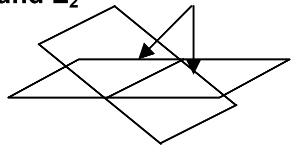
▪ **Mittelparallele s** der parallelen Geraden g und h 	OV des Mittelpunkts M der Strecke AB als Stützvektor und RV von g bzw. h als RV wählen. Für g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}, t \in IR$ und h: $\vec{x} = \vec{b} + s\vec{v}, s \in IR$ ist dann die Mittelparallele s: $\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) + r\vec{u}$, $r \in R$	g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ **Lösung:** s: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$	
3. Ebenen			
▪ **Parametergleichung der Ebene** 	Der Ortsvektor $\vec{x}$ eines beliebigen Ebenenpunkts X ist die Summe aus dem Ortsvektor $\vec{p}$ eines Ebenenpunktes P und passenden Vielfachen der Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.	E: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$, $\lambda, \mu \in IR$	
▪ **Koordinatengleichung der Ebene** 	E: $a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_2 = d$ Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ Normalenform der Ebene $\vec{n}\vec{x} = d$	$2\,x_1 - 2\,x_2 - x_3 = 9$ $\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}\vec{x} = 9$	
▪ **Parametergleichung → Koordinatengleichung**	Parametergleichung dreizeilig schreiben und dann die Parameter eliminieren **oder** siehe GTR - Spalte `oder: Normalenvektor bestimmen, als Koeffizienten nutzen und mit einem Punkt Absolutglied berechnen`	E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \lambda \in IR$ **Lösung:** $-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7$	Drei beliebige, nicht kollineare Punkte der Ebene bestimmen und in $ax_1 + bx_2 + cx_3 = \mathbf{1}$ einsetzen, LGS lösen. Dann möglichst ganzzahlige Koeffizienten a,b,c herstellen durch Multiplikation der entstandenen Gleichung.
▪ **Spurpunkte der Ebene** E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ sind die Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen	Achsenabschnittsform herstellen durch Division der Koordinatengleichung durch d. Die Koordinaten der Spurpunkte lassen sich an den entstandenen Nennern ablesen.	E: $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12$ **Lösung:** Division durch 12 liefert $\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{-3} = 1$ und damit die Spurpunkte $S_1(6\|0\|0)$, $S_2(0\|4\|0)$, $S_3(0\|0\|-3)$.	

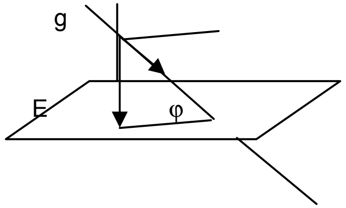
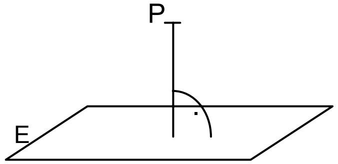
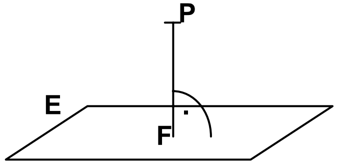
4. Aufstellen von Ebenengleichungen			
▪ Ebene E durch die drei Punkte A, B und C 	Zum Beispiel den Ortsvektor von A als Stützvektor und die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ als Richtungsvektoren wählen	A(3 | 2 | 0), B(4 | 4 | 2) und C(5 | 2 | -1) **Lösung:** E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, r, s $\in$ IR	
▪ Ebene E, die die Gerade g und den Punkt P enthält 	Voraussetzung ist hier, dass P nicht auf der Geraden liegt. Zum Beispiel den Ortsvektor von P als Stützvektor und den Richtungsvektor von g und den Vektor $\overrightarrow{QP}$ als Spannvektoren wählen.	g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \lambda \in$ IR **,** P(4 | 2 | 2) **Lösung:** E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$, r, s $\in$ IR	
▪ Ebene E, die die beiden Geraden g und h enthält 	Voraussetzung ist hier, dass die Geraden sich schneiden Zum Beispiel den Stützvektor von g als Stützvektor von E und die Richtungsvektoren von g und h als Spannvektoren wählen	**Bsp:** g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ **,** h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ **Lösung:** E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, \lambda,\mu \in$ IR	
▪ Ebene E, die die beiden parallelen Geraden g und h enthält 	Zum Beispiel den Stützvektor $\vec{p}$ von g als Stützvektor von E und als Spannvektoren den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ und den Richtungsvektor von g wählen.	**Bsp:** g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ **,** h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$ **Lösung:** E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}, \lambda,\mu \in$ IR	

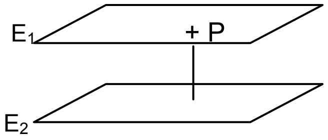
▪ Ebene E, die die Gerade g enthält und parallel zu h ist  	Zum Beispiel den Stützvektor von g als Stützvektor von E und die Richtungsvektoren von g und h als Spannvektoren wählen	**Bsp:** g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ **;** h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ **Lösung:** E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, \lambda, \mu \in IR$	
▪ Ebene E durch A und orthogonal zur Geraden g  	E hat den Richtungsvektor von g als Normalenvektor und geht durch den Punkt A.	**Bsp:** A(3 | 2 | –5) , g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, \lambda \in IR$, **Lösung:** $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = 0$	
5. Lage von Gerade g und Ebene E zueinander			
▪ Die Gerade g ist parallel zur Ebene E  	Der Normalenvektor von E und der Richtungsvektor von g sind orthogonal.	**Bsp:** g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, E: $x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2$ **Lösung:** $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) = 0$ d.h. E und g sind parallel.	
▪ Symmetrieebene F der Punkte A und B  	F hat den Vektor $\overrightarrow{AB}$ als Normalenvektor und geht durch den Mittelpunkt der Strecke AB	**Bsp:** A(3 | 2 | –5) , B(5 | 4 | 1) **Lösung:** F: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix} = 0$ bzw. F: $x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$	

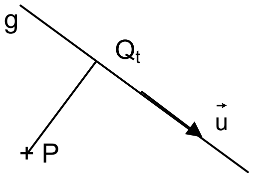
6. Lage von Ebenen zueinander			
▪ **Parallelität zweier Ebenen E_1 und E_2** 	E_1 und E_2 haben linear abhängige Normalenvektoren	**Bsp:** E_1: $x_1+2x_2-3x_3=2$, E_2: $-2x_1-4x_2+6x_3=12$ **Lösung:** Die Normalenvektoren sind das (-2)-fache voneinander, die Absolutglieder das 6-fache, d.h. E_1 und E_2 sind parallel und verschieden.	
▪ **Orthogonalität zweier Ebenen E_1 und E_2** 	E_1 und E_2 haben orthogonale Normalenvektoren	**Bsp:** E_1: $x_1+2x_2-3x_3=2$, E_2: $5x_1+2x_2+3x_3=11$ **Lösung:** $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}=0$, d.h. $E_1 \perp E_2$	
7. Schnitt von Ebenen / Geraden			
▪ **Schnittgerade zweier Ebenen E_1 und E_2** 	Aus beiden Ebenengleichungen eine Gleichung herstellen, die nur 2 Variablen enthält. Darin eine Variable durch den Parameter λ ersetzen und die anderen Variablen ebenfalls durch λ ausdrücken. Die entstandenen drei Gleichungen als Vektorgleichung schreiben. $\left.\begin{array}{l} x_1 = 8+11\lambda \\ x_2 = -3-4\lambda \\ x_3 = \lambda \end{array}\right\}$	**Bsp:** E_1: $x_1+2x_2-3x_3=2$, (1) E_2: $x_1+3x_2+x_3=-1$ (2) **Lösung:** $x_2+4x_3=-3$ (3) = (2) – (1) Für $x_3=\lambda$ folgt $x_2=-3-4\lambda$ und $x_1=8+11\lambda$ ergibt Schnittgerade $g: \vec{x}=\begin{pmatrix}8\\-3\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}11\\-4\\1\end{pmatrix}$	
▪ **Schnittpunkt einer Geraden g mit einer Ebene E** 	Die drei „Zeilen“ der Parametergleichung der Geraden in die Koordinatengleichung der Ebene einsetzen, entstandene Gleichung nach dem Parameter auflösen. Dieser in die Parametergleichung eingesetzt liefert die Koordinaten des Schnittpunkts.	**Bsp:** E: $2x_1+3x_2=9$; g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\2\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-8\\1\\-1\end{pmatrix}$ **Lösung:** 2(–5–8t) + 3(2+t) = 9 ergibt t = –1 und den Schnittpunkt S(3 | 1 |5)	

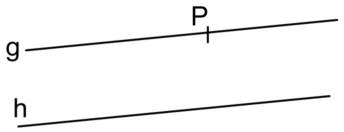
<table>
<tr><td>8. Skalarprodukt</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>▪ Länge der Strecke AB
 </td><td>$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{b}-\vec{a}\right| =$
$\sqrt{(\vec{b}_1-\vec{a}_1)^2+(\vec{b}_2-\vec{a}_2)^2+(\vec{b}_3-\vec{a}_3)^2}$</td><td>Bsp: A(3 | 1 | –5) , B(5 | 4 | 1)
Lösung:
$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(5-3)^2+(4-1)^2+(1-(-5))^2} = \sqrt{49} = 7$</td><td></td></tr>
<tr><td>▪ Bedingung dafür, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.
 </td><td>Die Diagonalen sind gleich lang, orthogonal und halbieren sich.</td><td>Bsp: A(1 | –2 | 1), B(3 | –4 | 2),
C(4 | –2 | 4) und D(2 | 0| 3).
Lösung: $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{18} = \left|\overrightarrow{BD}\right|$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix} = 0$
und $M_{AC}=M_{BD}=\left(\frac{5}{2}\middle\vert -2\middle\vert\frac{5}{2}\right)$</td><td></td></tr>
<tr><td>▪ Gerade g steht auf dem Quadrat ABCD senkrecht und geht durch die Quadratmitte.
 </td><td>Vektor $\vec{n}$ bestimmen, der zu (z.B.) $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$ orthogonal ist.
Gleichung der Gerden durch M_{AC} mit Richtungsvektor $\vec{n}$ aufstellen.</td><td>Bsp: A(1 | –2 | 1), B(3 | –4 | 2),
C(4 | –2 | 4) und D(2 | 0 | 3).
Lösung: $3n_1 + 3n_3 = 0$ und $-n_1 + 4n_2 - n_3 = 0$ bzw.
$n_1 = -n_3$, $n_2 = 0{,}25\cdot(n_1+n_3)$ führt auf $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$
$M_{AC}(2{,}5 \vert -2 \vert 2{,}5)$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2{,}5\\-2\\2{,}5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$</td><td></td></tr>
<tr><td>▪ Bedingung dafür, dass das Viereck ABCD eine Raute ist.
 </td><td>Die Diagonalen schneiden sich rechtwinklig und halbieren sich:
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$ und $M_{AC} = M_{BD}$</td><td>Bsp: A(2 | 3 | 1), B(5 | 7 | 1),
C(5 | 11 | 4) und D(2 | 7| 4).
Lösung:
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}3\\8\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix} = 0$, $M_{AC} = M_{BD} = \left(\frac{7}{2}\middle\vert 7\middle\vert\frac{5}{2}\right)$</td><td></td></tr>
</table>

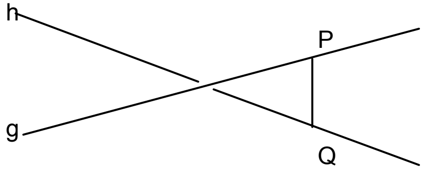
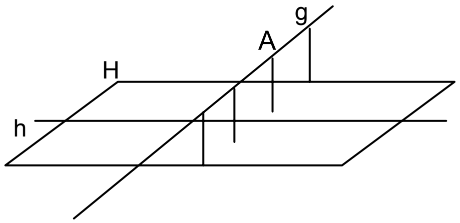
▪ Gegeben: Gerade g und Punkte A, B $\notin$ g. Gesucht ist C $\in$ g, so dass $\angle$ACB ein rechter Winkel ist  	Allgemeiner Geradenpunkt $C_t \in g$ Bedingung: $\overrightarrow{AC_t}\cdot\overrightarrow{BC_t}=0$ ergibt quadratische Gleichung. Deren Lösungen in die Gleichung von g eingesetzt liefern die Koordinaten der Punkte C_1 und C_2.	**Bsp:** $A(-1 \mid 3 \mid 1)$, $B(-2 \mid 6 \mid 4)$, g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\7\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ **Lösung:** $C_t(-4+2t \mid 7-t \mid 2t)$ $\overrightarrow{AC_t}\cdot\overrightarrow{BC_t}=\begin{pmatrix}-3+2t\\4-t\\-1+2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2+2t\\1-t\\-4+2t\end{pmatrix}=9t^2-25t+14=0$ mit Lösungen $t_1=\frac{7}{9}$ und $t_2 = 2$. $C_1\left(-\frac{22}{9}\mid\frac{22}{3}\mid\frac{14}{9}\right)$ und $C_2(0 \mid 5 \mid 4)$	
9. Winkel			
▪ **Winkel zwischen zwei Geraden** g: $\vec{x}=\vec{a}+\lambda\vec{u}, \lambda\in IR$ und h: $\vec{x}=\vec{b}+\mu\vec{v}, \mu\in IR$ 	Der Winkel φ zwischen den Geraden g und h ist gleich dem Winkel zwischen den Richtungsvektoren. Da man stets den kleineren Winkel bestimmen will, steht in der Formel im Zähler der Betrag.	**Bsp:** g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ **Lösung:** $\cos\varphi=\frac{\lvert\vec{u}\vec{v}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{v}\rvert}=\frac{\left\lvert\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right\rvert}{\sqrt{6}\sqrt{10}}=\frac{\lvert-1+3\rvert}{2\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$ $\varphi\approx$ **75,0** ^{0}	
▪ **Winkel zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2** 	Der Winkel φ zwischen den Ebenen E_1 und E_2 ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren der Ebenen. Da man stets den kleineren Winkel bestimmen will, steht in der Formel im Zähler der Betrag.	**Bsp:** E_1: $x_1+2x_2-3x_3=2$, E_2: $2x_1+2x_2+x_3=7$, **Lösung:** $\cos\varphi=\frac{\lvert\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\rvert}{\lvert\overrightarrow{n_1}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{n_2}\rvert}=\frac{\left\lvert\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right\rvert}{\sqrt{14}\sqrt{9}}=\frac{2+4-3}{3\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$ $\varphi\approx$ **74,5** ^{0}	

▪ **Winkel zwischen einer Geraden g und einer Ebene E**  	Der Winkel φ zwischen der Geraden g und der Ebene E errechnet sich aus dem Winkel zwischen dem RV der Geraden und dem NV der Ebene durch cos (90^0 – φ) = sin φ. Da man stets den kleineren Winkel bestimmen will, steht in der Formel im Zähler der Betrag.	**Bsp:** g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, \lambda \in IR$, E: $x_1+2\,x_2 - 3\,x_3 = 2$ **Lösung:** $\sin\varphi = \frac{\lvert\vec{u}\cdot\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert} = \frac{\left\lvert\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right\rvert}{\sqrt{9}\sqrt{14}} = \frac{6}{3\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$; $\boldsymbol{\varphi \approx 32{,}3^0}$	
10. Abstände			
▪ **Abstand Punkt – Ebene**  	**Mit Hessescher Normalenform (HNF)** Betrag des NV der Ebene E bestimmen Koordinatengleichung von E in die Form ..... = 0 bringen und durch den Betrag des NV dividieren; man erhält die „HNF“ von E. Setzt man jetzt die Koordinaten von P ein, ergibt sich betragsmäßig der Abstand von P zu E.	**Bsp:** E: $x_1+2\,x_2 - 3\,x_3 = 2$, P(–3 I 5 I 2) **Lösung:** $\lvert\vec{n}\rvert = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$; HNF: $\frac{1}{\sqrt{14}}(x_1+2x_2-3x_3-2)=0$ d(P;E) = $\left\lvert\frac{1}{\sqrt{14}}(-3+2\cdot5-3\cdot2-2)\right\rvert = \frac{1}{\sqrt{14}}$	
▪ **Abstand Punkt – Ebene mit Lotfußpunkt**  	**Mit Lotgerade** Lotgerade aufstellen. Lotgerade mit der Ebene E schneiden. Der Schnittpunkt ist der Lotfußpunkt F. Der Abstand ist gleich dem Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{PF}$, also d = $\lvert\overrightarrow{PF}\rvert$.	**Bsp:** E: $x_1+2\,x_2 - 2\,x_3 = 17$, P(1 I 2 I 3) **Lösung:** Lotgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, t \in IR$ Lotgerade mit E schneiden leifert den Lotfußpunkt F (siehe Schnitt Ebene - Gerade): –1 + 9t = 17, also t = 2 und damit F(3 I 6 I -1). d = $\lvert\overrightarrow{PF}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}3-1\\6-2\\-1-3\end{pmatrix}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{4+16+16} = 6$	

▪ **Abstand paralleler Ebenen**  	Beliebigen Punkt P der Ebene E_1 bestimmen Abstand von P zu E_2 mit HNF berechnen	**Bsp:** E_1: $2x_1+2x_2-x_3=2$, E_2: $2x_1+2x_2-x_3=7$ **Lösung:** P(1 I 0 I 0) ∈ E_1; HNF von E_2 : $\frac{1}{3}(2x_1+2x_2-x_3-7)=0$ $d(P;E_2) = \left\lvert\frac{1}{3}(1+2\cdot 0-0-7)\right\rvert = \frac{7}{3}$	

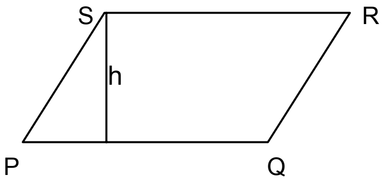
▪ **Abstand Punkt – Gerade**

 	
	Für den allemeinen Geradenpunkt Q_t den Vektor $\overrightarrow{PQ_t}$ berechnen
	Bedingung $\overrightarrow{PQ_t}\cdot\vec{u}=0$ ($\vec{u}$ ist der RV von g) ergibt Gleichung in t, diese lösen
	Lösung für t in Gleichung von g eingesetzt ergibt die Koordinaten des Lotfußpunkt Q.
	Die Entfernung $\overline{PQ}$ ist der gesuchte Abstand.
	`oder: Ebene E senkrecht zu g durch P;`
	`Durchstoßpunkt Q berechnen`
	`d=|PQ|`
		Bsp: P(3 I 2 I –1), g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}, t\in IR$
		Lösung:
		Q_t(3+2t I –1+t I 2–2t) ∈ g; $\overrightarrow{PQ_t}=\begin{pmatrix}2t\\-3+t\\3-2t\end{pmatrix}$
		Bed. $\overrightarrow{PQ_t}\cdot\vec{u}=0$ liefert $\begin{pmatrix}2t\\-3+t\\3-2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=0$ bzw.
		4t – 3 + t – 6 + 4t = 0 ⇔ t = 1 und damit Q(5 I 0 I 0)
		$\overline{PQ}=\left\lvert\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rvert=\sqrt{4+4+1}=3$
			`E 2x+y-2z=10`
			`g in E`
			`2(3+2t)+(-1+t)-2(2-2t)=10`
			`t=1`
			`weiter wie nebenstehend`

▪ **Abstand paralleler Geraden**

 	
	Beliebigen Punkt P ∈ g bestimmen, dessen Abstand von h berechnen (siehe Abstand Punkt – Gerade)
	`oder Ebene E senkrecht zu g und h durch P`
	`Durchstoßpunkt von h durch E`
		Bsp: g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$
		Lösung:
		P(3 I –1 I 2) ∈ g; Q_t(2+2λ I 1+λ I 6-2λ) ∈ h;
		Bed. $\overrightarrow{PQ_t}\cdot\vec{u}=0$ liefert $\begin{pmatrix}2\lambda-1\\\lambda+2\\-2\lambda+4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=0$ bzw.
		4λ – 2 + λ + 2 + 4λ – 8 = 0 ⇔ λ = $\frac{8}{9}$
		$\overline{PQ}=\left\lvert\frac{1}{9}\begin{pmatrix}7\\26\\-20\end{pmatrix}\right\rvert=\frac{1}{9}\sqrt{7^2+26^2+20^2}=\frac{1}{9}\sqrt{1125}\approx \mathbf{3{,}7}$	

▪ **Abstand windschiefer Geraden g und h mit Fußpunkten P und Q** 	Für die allgemeinen Geradenpunkte $P_r \in g$ und $Q_t \in h$ den Vektor $\overrightarrow{P_rQ_t}$ bestimmen Bedingungen $\overrightarrow{P_rQ_t} \cdot \vec{u} = 0$ und $\overrightarrow{P_rQ_t} \cdot \vec{v} = 0$ ($\vec{u}, \vec{v}$ RVn von g bzw. h) führen zu LGS, dieses lösen. Die Lösungen in die Gleichungen von g bzw. h eingesetzt ergeben die Koordinaten der Lotfußpunkte P und Q. $\overline{PQ} = \lvert\overrightarrow{PQ}\rvert$ ist der gesuchte Abstand. $\begin{cases} \overrightarrow{P_rQ_t} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{P_rQ_t} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$	**Bsp:** : g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$. **Lösung:** Für P_r(-1+2r I –2r I 1+r) und Q_t(5+2t I 1-t I 6) ist $\overrightarrow{P_rQ_t} = \begin{pmatrix}6+2t-2r\\1-t+2r\\5-r\end{pmatrix}$ und die Bed. führen zum LGS $\begin{cases} 12+4t-4r-2+2t-4r+5-r = 0 \\ 12+4t-4r-1+t-2r = 0 \end{cases}$ bzw. $\begin{cases} 5 + 2t - 3r = 0 \\ 11 + 5t - 6r = 0 \end{cases}$ mit der Lösung r = 1, t = -1 Lotfußpunkte P(1 I –2 I 2), Q(3 I 2 I 6) $\overline{PQ} = \lvert\overrightarrow{PQ}\rvert = \sqrt{(3-1)^2 + (2+2)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{36} = 6$	
▪ **Abstand windschiefer Geraden <u>ohne</u> Fußpunkte** 	Ebene H durch h parallel zu g legen, Koordinatengleichung von H berechnen Beliebigen Punkt A ∈ g bestimmen. Der Abstand von A zur Ebene H (HNF !) ist der gesuchte Abstand der windschiefen Geraden	**Bsp:** g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$. **Lösung:** H : $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 19 = 0$ HNF von H: $\frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 19) = 0$ Für den Punkt A(-1 I 0 I 1) ∈ g ist dann d(A;H) = $\left\lvert \frac{1}{3}(-1+2\cdot 0+2\cdot 1-19) \right\rvert = 6$	<u>Bestimmung von H</u> 3 beliebige Punkte der Ebene H wählen, z.B. (5 I 1 I 6), (7 I 0 I 6) und (7 I -1 I 7), diese in $ax_1 + bx_2 + cx_3 = \mathbf{1}$ **(*)** einsetzen und LGS lösen. (Im Menü EQUA SIML (F1), dann F2 für 3 Unbekannte wählen); Lösungen in (*) einsetzen und Gleichung mit 19 multiplizieren

<table>
<tr><td>

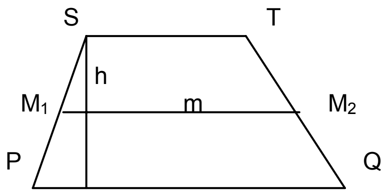
- **Flächeninhalt eines Parallelogramms PQRS**



</td><td>Abstand h des Punktes S von der Geraden (PQ) bestimmen

Inhalt A = $\overline{PQ}\cdot h$</td><td>**Bsp:** P(1 | 2 | 4), Q(4 | 5 | 2),
R(–3 | 2 | –2) und S(–6 | –1| 0).
Lösung:
F_t(1 + 3λ | 3 + 3λ | 4 – 2λ) ∈ (PQ)
$\overrightarrow{SF_t}\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix}7+3\lambda\\3+3\lambda\\4-2\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}=21+9\lambda+9+9\lambda-8+4\lambda=0$
ergibt λ = –1 und damit F(–2 | –1 | 6)
$h=\left\lvert\overrightarrow{SF}\right\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}4\\0\\6\end{pmatrix}\right\rvert=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$
Inhalt $A=\left\lvert\overrightarrow{PQ}\right\rvert\cdot h=\sqrt{22}\cdot2\cdot\sqrt{13}\approx33{,}8$</td><td></td></tr>
<tr><td>

- **Flächeninhalt eines Trapezes PQTS.**



</td><td>Abstand h des Punktes S von der Geraden (PQ) und
Länge m der Strecke M_1M_2 berechnen

Inhalt A = m·h</td><td>**Bsp:** P(1 | 2 | 4), Q(4 | 5 | 2),
T(–4,5 | 0,5 | –1) und S(–6 | –1 | 0).
Lösung: h = d(S;(PQ)) = $2\sqrt{13}$
(siehe Flächeninhalt Parallelogramm)
M_1(–2,5 | 0,5 | 2), M_2 (–0,25 | 2,75 | 0,5)
$m=\left\lvert\overrightarrow{M_1M_2}\right\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}2.25\\2,25\\-1,5\end{pmatrix}\right\rvert=\sqrt{\frac{99}{8}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{11}{2}}$
$A=m\cdot h=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{11}{2}}\cdot2\sqrt{13}\approx25{,}4$</td><td></td></tr>
</table>