Hochschule für
Wirtschaft und Recht Berlin
Fachbereich 2 - Duales Studium
Prof. Dr. N. Winter

2022/23

Diskrete Mathematik für Informatiker
1. Übungsblatt

Teil 1: Algebra

1. Aufgabe

Welche der folgenden Ausdrücke sind gemäß der Definition aus unserer Lehrveranstaltung und der dort vereinbarten Schreibweise Mengen?

(a) $\{1, 7, 9, 10\}$

(b) $\{A\}$

(c) (r, q, s)

(d) $\{\emptyset, \{1; 2\}\}$

(e) $\{\{\emptyset\}\}$

(f) $[Z; 4]$

Lösung:

(a) ist eine Menge
(b) ist eine Menge
(c) ist keine Menge (sondern geordnetes 3-er Tupel)
(d) ist eine Menge
(e) ist eine Menge
(f) ist keine Menge

2. Aufgabe

Geben Sie die folgenden Mengen reeller Zahlen in aufzählender Schreibweise $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ an:

(a) $A := \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 = 5\}$

(b) $B := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 = 2\}$

(c) $C := \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N}\}$

(d) $D := \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = -8\}$

(e) $E := \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 3)^2 = 36\}$

Ergebnis:

(a) $A = \{3\}$

(b) $B = \{-2, 2\}$

(c) $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

(d) $D = \{-2\}$

(e) $E = \{-3, 9\}$

3. Aufgabe
Seien $A = \{x \in \mathbb{Q} | x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} | x \geq 5\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \emptyset$.
Bestimmen Sie $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $C \cap B$, $D \cap B$, $D \cup B$.

Lösung: $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \{1, 3\}$, $C \cap B = \{5, 7, 9\}$, $D \cap B = \emptyset$, $D \cup B = B = \{x \in \mathbb{Q} | x \geq 5\}$

4. Aufgabe
Beweisen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
(Hinweis: Betrachten Sie $p_1 \cdots p_n + 1$, wobei $p_1, \ldots, p_n$ Primzahlen sind.)

Lösung: s. Lehrveranstaltung

5. Aufgabe
Berechnen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler
a) von 1778 und 308
b) von 97 und 38

Ergebnis: a) 14 b) 1

Teil 2: Lineare Algebra

6. Aufgabe
Gegeben sind die drei folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^2$ (in der Ebene).

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Zeichnen Sie die drei Vektoren im kartesischen Koordinatensystem.

(b) Berechnen Sie

- $\vec{a} + \vec{b}$
- $\vec{b} - \vec{c}$
- $-1 \cdot \vec{a}$
- $2 \cdot \vec{c}$
- $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b} - 3 \cdot \vec{c}$

(c) Zeichnen Sie die resultierenden Vektoren aus (b).

(d) Messen Sie die Länge und berechnen Sie den Betrag der resultierenden Vektoren aus (b).

Lösung:

(a) ...

(b)
- $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$
- $\vec{b}-\vec{c}=\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$
- $-1\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$
- $2\cdot\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$
- $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$
- $\vec{a}-2\cdot\vec{b}-3\cdot\vec{c}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

(c) ...

(d)
- $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{1^2+6^2}=\sqrt{37}$
- $|\vec{b}-\vec{c}|=\sqrt{(-3)^2+7^2}=\sqrt{58}$
- $|-1\cdot\vec{a}|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$
- $|2\cdot\vec{c}|=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$
- $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$
- $|\vec{a}-2\cdot\vec{b}-3\cdot\vec{c}|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

7. Aufgabe

Gegeben sind die drei folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}\qquad \vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-1\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

(a) $\vec{s}=2\vec{a}+4\vec{b}-6\vec{c}$

(b) $\vec{q}=2(\vec{b}+2\vec{c})-3(2\vec{a}-\vec{b})$

(c) $\vec{p}=4(\vec{a}-2\vec{b})+10\vec{c}$

(d) $\vec{u} = (\,\vec{a} \cdot \vec{b}\,) \cdot \vec{c}$

(e) $\vec{v} = \vec{a} \cdot (\,\vec{b} \cdot \vec{c})$

(f) $\vec{w} = \vec{a} \times \vec{b}$

(g) $\vec{x} = \vec{b} \times \vec{c}$

Überprüfen Sie, ob $\vec{a}$ und $\vec{c}$ orthogonal zueinander sind.

Ergebnis:

(a) $\vec{s} = 2\vec{a} + 4\vec{b} - 6\vec{c} = \begin{pmatrix} 24 \\ -18 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{q} = 2(\vec{b} + 2\vec{c}) - 3(2\vec{a} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \\ 19 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{p} = 4(\vec{a} - 2\vec{b}) + 10\vec{c} = \begin{pmatrix} -38 \\ 26 \\ -30 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{u} = (\,\vec{a} \cdot \vec{b}\,) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

(e) $\vec{v} = \vec{a} \cdot (\,\vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -30 \end{pmatrix}$

(f) $\vec{w} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -13 \\ 3 \end{pmatrix}$

(g) $\vec{x} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 23 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = 2 \neq 0 \Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{c}$ sind nicht orthogonal zueinander.