Hochschule für
Wirtschaft und Recht Berlin
Fachbereich 2 - Duales Studium
Prof. Dr. N. Winter

2022/23

Diskrete Mathematik für Informatiker
2. Übungsblatt

Summenzeichen

Für $m, n \in \mathbb{Z}$ ist definiert: $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n$

Verifizieren Sie (ggf. mit Hilfe konkreter Zahlenbeispiele), dass folgendes gilt:

- $\sum\limits_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$
- $\sum\limits_{k=1}^{5} k^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4$
- $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
- $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
- $\sum\limits_{k=1}^{4} (x+k) = (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4)$
- $\sum\limits_{k=0}^{5} 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$
- $\sum\limits_{k=1}^{4} a = a + a + a + a = 4a$
- falls $m > n$, ist $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = 0$
- $\sum\limits_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$
- $\sum\limits_{k=0}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \pm \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$
- $\sum\limits_{k=0}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$
- $\sum\limits_{k=0}^{n} b_k = \sum\limits_{k=1}^{n+1} b_{k-1}$
- $\sum\limits_{k=0}^{n+1} b_k = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k + b_{n+1}$

Teil 1: Algebra

8. Aufgabe
Bestimmen Sie das kartesische Produkt $\{0,1\} \times \{0,1\}$.
Wie viele Relationen R gibt es über $\{0,1\}$?
Beschreiben Sie jede einzelne Relation als Menge (Teilmenge von $\{0,1\} \times \{0,1\}$).
Welche der Relationen sind reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv?

Lösung:
Das kartesische Produkt ist

$$\{0,1\} \times \{0,1\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

Relationen sind Teilmengen des kartesischen Produkts. Das kartesische Produkt besitzt 4 Elemente. Demnach gibt es $2^4 = 16$ Relationen.
Die Relationen und ihre Eigenschaften sind:

			reflexiv	*symmetrisch*	*antisymmetrisch*	*transitiv*
R_1	:=	$\emptyset$	*nein*	*ja*	*ja*	*ja*
R_2	:=	$\{(0,0)\}$	*nein*	*ja*	*ja*	*ja*
R_3	:=	$\{(0,1)\}$	*nein*	*nein*	*ja*	*ja*
R_4	:=	$\{(1,0)\}$	*nein*	*nein*	*ja*	*ja*
R_5	:=	$\{(1,1)\}$	*nein*	*ja*	*ja*	*ja*
R_6	:=	$\{(0,0),(0,1)\}$	*nein*	*nein*	*ja*	*ja*
R_7	:=	$\{(0,0),(1,0)\}$	*nein*	*nein*	*ja*	*ja*
R_8	:=	$\{(0,0),(1,1)\}$	*ja*	*ja*	*ja*	*ja*
R_9	:=	$\{(0,1),(1,0)\}$	*nein*	*ja*	*nein*	*nein*
R_{10}	:=	$\{(0,1),(1,1)\}$	*nein*	*nein*	*ja*	*ja*
R_{11}	:=	$\{(1,0),(1,1)\}$	*nein*	*nein*	*ja*	*ja*
R_{12}	:=	$\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$	*nein*	*ja*	*nein*	*nein*
R_{13}	:=	$\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$	*ja*	*nein*	*ja*	*ja*
R_{14}	:=	$\{(0,0),(1,0),(1,1)\}$	*ja*	*nein*	*ja*	*ja*
R_{15}	:=	$\{(0,1),(1,0),(1,1)\}$	*nein*	*ja*	*nein*	*nein*
R_{16}	:=	$\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$	*ja*	*ja*	*nein*	*ja*

Reflexive Relationen enthalten für alle $m \in \{0,1\}$ das Tupel (m,m). Daher müssen $(0,0)$ und $(1,1)$ Elemente von reflexiven Relationen sein.
Die reflexiven Relationen sind: $R_8, R_{13}, R_{14}, R_{16}$.

$$\begin{aligned} R_8 &= \{(0,0),(1,1)\} \\ R_{13} &= \{(0,0),(0,1),(1,1)\} \\ R_{14} &= \{(0,0),(1,0),(1,1)\} \\ R_{16} &= \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \end{aligned}$$

Für symmetrische Relationen gilt, dass für $m \neq n$ gilt: wenn $(m, n) \in R \Leftrightarrow (n, m) \in R$. Die symmetrischen Relationen sind:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \emptyset \\
R_2 &= \{(0,0)\} \\
R_5 &= \{(1,1)\} \\
R_8 &= \{(0,0),(1,1)\} \\
R_9 &= \{(0,1),(1,0)\} \\
R_{12} &= \{(0,0),(0,1),(1,0)\} \\
R_{15} &= \{(0,1),(1,0),(1,1)\} \\
R_{16} &= \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}
\end{aligned}$$

Für antisymmetrische Relationen gilt, dass, wenn $m \neq n$ ist, nicht beide Elemente (m, n) und (n, m) in R sein dürfen.
Die antisymmetrischen Relationen sind:

$$\begin{aligned}
R_1 &:= \emptyset \\
R_2 &:= \{(0,0)\} \\
R_3 &:= \{(0,1)\} \\
R_4 &:= \{(1,0)\} \\
R_5 &:= \{(1,1)\} \\
R_6 &:= \{(0,0),(0,1)\} \\
R_7 &:= \{(0,0),(1,0)\} \\
R_8 &:= \{(0,0),(1,1)\} \\
R_{10} &:= \{(0,1),(1,1)\} \\
R_{11} &:= \{(1,0),(1,1)\} \\
R_{13} &:= \{(0,0),(0,1),(1,1)\} \\
R_{14} &:= \{(0,0),(1,0),(1,1)\}
\end{aligned}$$

Für transitive Relationen gilt, dass, wenn es ein verbindendes Element $n \in \{0,1\}$ gibt, dass dann mit (m,n) und (n,k) auch (m,k) in R sein müssen.
Die transitiven Relationen sind:

$$
\begin{aligned}
R_1 &:= \emptyset \\
R_2 &:= \{(0,0)\} \\
R_3 &:= \{(0,1)\} \\
R_4 &:= \{(1,0)\} \\
R_5 &:= \{(1,1)\} \\
R_6 &:= \{(0,0),(0,1)\} \\
R_7 &:= \{(0,0),(1,0)\} \\
R_8 &:= \{(0,0),(1,1)\} \\
R_{10} &:= \{(0,1),(1,1)\} \\
R_{11} &:= \{(1,0),(1,1)\} \\
R_{13} &:= \{(0,0),(0,1),(1,1)\} \\
R_{14} &:= \{(0,0),(1,0),(1,1)\} \\
R_{16} &:= \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}
\end{aligned}
$$

9. Aufgabe
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Folgerungen:

(a) $3x \equiv 12 \bmod 97 \quad \Rightarrow \quad x \equiv 4 \bmod 97$

(b) $3x \equiv 12 \bmod 87 \quad \Rightarrow \quad x \equiv 4 \bmod 87$

Lösung:

(a) Angenommen, es gilt für ein bel. $x \in \mathbb{Z}$ $3x \equiv 12 \bmod 97$. Dann gibt es ein $q \in \mathbb{Z}$, so dass $3x = q97 + 12$. Dann gibt es aber auch ein $y \in \mathbb{Z}$, so dass $3x = q97 + 12 = 3y97 + 12$, da $3x$ durch 3 teilbar ist, 97 jedoch nicht.

$\Rightarrow$ $x = y97 + 4$ und damit $x \equiv 4 \bmod 97$

(b) Dies gilt nicht. Gegenbeispiel x=33:

$99 = 1{\cdot}87{+}12$, d.h. $99 \equiv 12 \bmod 87$, aber $33 = 0{\cdot}87{+}33$ und damit $33 \equiv 33 \bmod 87$

10. Aufgabe
Entscheiden Sie jeweils, ob es ein $x \in \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften gibt, und begründen Sie Ihre Antwort:

(a) $x \equiv 3 \bmod 10$ und $x \equiv 5 \bmod 15$

(b) $x \equiv 2 \bmod 4$ und $x \equiv 3 \bmod 5$

Lösung:

(a) Angenommen, es gibt solch ein x, dann gibt es $q_1, q_2 \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$q_1 \cdot 10 + 3 = q_2 \cdot 15 + 5 \quad \Leftrightarrow \quad q_1 = \frac{15q_2 + 2}{10}$$

Damit $q_1 \in \mathbb{N}_0$ müsste also $15q_2 + 2$ durch 10 und insbesondere durch 5 teilbar sein, was aber nicht der Fall ist, da $15q_2$ durch 5 teilbar ist, 2 jedoch nicht.

$\Rightarrow$ Es gibt kein solches x.

(b) Angenommen, es gibt solch ein x, dann gibt es $q_1, q_2 \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$q_1 \cdot 4 + 2 = q_2 \cdot 5 + 3 \quad \Leftrightarrow \quad q_1 = \frac{5q_2 + 1}{4}$$

Dies ist für $q_1 = 4, q_2 = 3$ erfüllt. $\Rightarrow \quad x = 18$ erfüllt die Bedingung.

11. Aufgabe
Die Addition und die Multiplikation zweier Restklassen modulo a sind für festes $a \geq 0$ wie folgt definiert:

- $[x]_a + [y]_a = [x + y]_a$
- $[x]_a \cdot [y]_a = [x \cdot y]_a$

Berechnen Sie

(a) $[3]_8 + [7]_8$

(b) $[3]_{10} + [7]_{10}$

(c) $[3]_8 \cdot [7]_8$

(d) $[3]_{10} \cdot [7]_{10}$

Lösung:

(a) $[3]_8 + [7]_8 = [3 + 7]_8 = [10]_8 = [2]_8$

(b) $[3]_{10} + [7]_{10} = [3 + 7]_{10} = [10]_{10} = [0]_{10}$

(c) $[3]_8 \cdot [7]_8 = [3 \cdot 7]_8 = [21]_8 = [5]_8$

(d) $[3]_{10} \cdot [7]_{10} = [3 \cdot 7]_{10} = [21]_{10} = [1]_{10}$

12. Aufgabe

Berechnen Sie ohne Verwendung des Taschenrechners die jeweils letzte Ziffer der folgenden Zahlen, indem Sie die Potenzen in Potenzen mit (in Bezug auf die Modulorechnung) günstigerer Basis umformen, die Multiplikation modulo 10 mit der entsprechenden Rechenregel (1.5) auf Seite 12 des Skripts verwenden und die Transitivität der Kongruenzrelation ausnutzen:

(a) 2^{1000}

(b) 7^{1000}

Lösung:

(a) $2^{1000} = (2^5)^{200} = 32^{200} \equiv 2^{200} \bmod 10$
$2^{200} = (2^5)^{40} = 32^{40} \equiv 2^{40} \bmod 10$
$2^{40} = (2^5)^{8} = 32^{8} \equiv 2^{8} \bmod 10$
$2^{8} = 2^4 \cdot 2^4 = 16 \cdot 16 = 6 \cdot 6 \equiv 2^8 \bmod 10$
$6 \cdot 6 = 36 \equiv 6 \bmod 10$
$\Rightarrow 2^{1000} \equiv 6 \bmod 10$, d.h. die letzte Ziffer lautet 6.

(b) $7^{1000} = (7^2)^{500} = 49^{500} \equiv (-1)^{500} \bmod 10$
$(-1)^{500} = 1 \equiv 1 \bmod 10$
$\Rightarrow 7^{1000} \equiv 1 \bmod 10$, d.h. die letzte Ziffer lautet 1.

13. Aufgabe

(a) Welche der folgenden 10-stelligen ISBN-Nummern sind gültig/ungültig?

- 3893194347 **Ergebnis:** ist gültig
- 3540161438 **Ergebnis:** ist ungültig
- 3528372249 **Ergebnis:** ist gültig

(b) Ermitteln Sie für die 10-stellige ISBN-Nummer das fehlende Prüfzeichen: 007709239
Ergebnis: Das Prüfzeichen lautet: 2

(c) Welche der folgenden 13-stelligen ISBN-Nummern sind gültig/ungültig?

- 9783835101579 **Ergebnis:** ist gültig
- 9783535101197 **Ergebnis:** ist ungültig

(d) Ermitteln Sie für die 13-stellige ISBN-Nummer das fehlende Prüfzeichen: 978383510119
Ergebnis: Das Prüfzeichen lautet: 7

14. Aufgabe
Nach dem Julianischen Kalender, der von Cäsar eingeführt wurde, ist jedes Jahr mit der Zahl $J \equiv 0 \bmod 4$ ein Schaltjahr. Dadurch ergab sich im 16. Jahrhundert zwischen dem Jahresanfang des Sonnenjahres und des Kalenderjahres ein Unterschied von 10 Tagen. Diesen Fehler korrigierte Papst Gregor XIII. 1582 durch Übergang vom 4. Oktober auf den 15. Oktober, d.h. es wurden 10 Tage gestrichen. Nach dem seit diesem Zeitpunkt geltenden Gregorianischen Kalender ist ein Jahr mit der Zahl $J \equiv 0 \bmod 4$ ein Schaltjahr, jedoch nicht, wenn $J \equiv 100 \bmod 400$ oder $J \equiv 200 \bmod 400$ oder $J \equiv 300 \bmod 400$ gilt. – An welchen Wochentagen wurden

(a) Pablo Picasso (25.10.1881)

(b) Michelangelo (6.3.1475)

geboren? Berechnen Sie die Wochentage ohne Verwendung des Taschenrechners. Verwenden Sie zur Lösung die Modulorechnung (mod 7) ausgehend davon, dass der 1.10.2019 ein Dienstag war.

Lösung:

(a) Wochentagsverschiebung aufgrund der Anzahl der Jahre:
$2019 - 1881 = 138 = (133 + 5) \equiv 5 \bmod 7$

Bestimmung der Anzahl der Schaltjahre:
$2019 - 1881 = 138 = 4 \cdot 34 + 2$. Da 1900 kein Schaltjahr war, liegen zwischen 1881 und 2019 also 33 Schaltjahre.
$\Rightarrow$ zusätzliche Wochentagsverschiebung aufgrund der Anzahl der Schaltjahre:
$33 \equiv 5 \bmod 7$

$\Rightarrow$ Wochentagsverschiebung insgesamt zwischen 1.10.1881 und 1.10.2019:
$5 + 5 = 10 \equiv 3 \bmod 7$
$\Rightarrow$ Wochentagsverschiebung insgesamt zwischen 25.10.1881 und 1.10.2019:
$5 + 5 - (25 - 1) = -14 \equiv 0 \bmod 7$
$\Rightarrow$ Der 25.10.1881 war ebenfalls ein Dienstag.

(b) Wochentagsverschiebung aufgrund der Anzahl der Jahre:
$2019 - 1475 = 544 = (490 + 49 + 5) \equiv 5 \bmod 7$

Bestimmung der Anzahl der Schaltjahre:
$2019 - 1475 = 544 = 4 \cdot 136$. Da 1700, 1800 und 1900 keine Schaltjahre waren (beachten Sie, dass der Gregorianischen Kalenders erst 1582 eingeführt wurde), liegen zwischen 1475 und 2019 also $136 - 3 = 133$ Schaltjahre.

$\Rightarrow$ Wochentagsverschiebung insgesamt zwischen 1.10.1475 und 1.10.2019 und Berücksichtigung der Streichung von 10 Tagen bei Einführung des Gregorianischen Kalenders:
$5 + 133 - 10 = 128 = (126 + 2) \equiv 2 \bmod 7$
$\Rightarrow$ Wochentagsverschiebung insgesamt zwischen 1.3.1475 und 1.10.2019:
$2 + 2 + 3 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 = 20 \equiv 6 \bmod 7$
(Die Verschiebung um 2 bzw. 3 Wochentage ergibt sich je nach Monat wegen $30 \equiv 2 \bmod 7$ und $31 \equiv 3 \bmod 7$)
$\Rightarrow$ Wochentagsverschiebung insgesamt zwischen 6.3.1475 und 1.10.2019:
$6 - (6 - 1) = 1 \equiv 1 \bmod 7$
$\Rightarrow$ Man muss also einen Tag zurückrechnen, so dass der 6.3.1475 Montag war.

15. Aufgabe
Überprüfen Sie, ob durch die folgenden Zuordnungsvorschriften Funktionen definiert werden, und prüfen Sie ggf. ob sie injektiv sind.

(a) Jedem Einwohner Deutschlands wird seine Körpergröße und sein Gewicht zugeordnet.

(b) Jedem PKW in Deutschland wird sein KFZ-Kennzeichen zugeordnet.

(c) Jedem $x \in [-1, 1]$ wird eine Lösung der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ zugeordnet.

(d) $x \mapsto x^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(e) $x \mapsto x^4$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$

(f) $x \mapsto x^4$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Überprüfen Sie, welche der obigen Zuordnungsvorschriften umkehrbar sind bzw. durch entsprechende Einschränkung des Definitions- und Wertebereichs in umkehrbare Funktionen überführt werden können. Geben Sie jeweils den Definitions- und den Wertebereich an und begründen Sie Ihr Ergebnis.

Lösung:

(a) Definiert eine Funktion, da jeder Person ein eindeutiges Paar von Werten zugeordnet wird, ist jedoch nicht eindeutig, da zwei Personen gleich groß sein und das gleiche Gewicht haben können. Um eine entsprechende umkehrbare Funktion zu erhalten, müsste die Menge der Einwohner Deutschlands so eingeschränkt werden, dass nur eine Teilmenge der Einwohner Deutschlands betrachtet wird, innerhalb der je zwei Personen unterschiedliches Gewicht, unterschiedliche Größe oder sowohl unterschiedliches Gewicht als auch unterschiedliche Größe haben. Der Wertebereich wären dann alle unterschiedlichen Paare (Kombinationen) von Körpergröße und Gewicht, die bei den Einwohnern Deutschlands auftreten.

(b) Definiert keine Funktion, da es PKWs gibt, die noch nicht oder nicht mehr zugelassen sind und entsprechend kein KFZ-Kennzeichen haben. Schränkt man den Definitionsbereich auf die in Deutschland zugelassenen PKWs ein, dann wäre die Zuordnung umkehrbar. Der Wertebereich wäre die Menge aller vergebenen KFZ-Kennzeichen.

(c) Um eine Funktion, d.h. eine eindeutige Zuordnung zu erhalten, müsste man festlegen, welche der verschiedenen möglichen Lösungen zugeordnet werden soll. Um über die Umkehrbarkeit und dazu ggf. notwendige Einschränkungen zu entscheiden, müsste die Zuordnung erst eindeutig definiert werden.

(d) Ist eine injektive Funktion, und umkehrbar mit Wertebereich $\mathbb{R}$.

(e) Ist eine injektive Funktion, und umkehrbar ($f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$) mit Wertebereich $\mathbb{R}^+$.

(f) Ist eine Funktion mit Wertebereich $\mathbb{R}_0^+$, aber nicht injektiv, da z.B. $f(-1) = f(1)$. Schränkt man den Definitionsbereich auf $\mathbb{R}_0^+$ (oder $\mathbb{R}_0^-$) ein, dann ist sie umkehrbar mit $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{|x|}$ (bzw. $f^{-1}(x) = -\sqrt[4]{|x|}$).

16. Aufgabe
Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Komposition von Funktionen in der Regel nicht kommutativ ist, d. h. dass

$$f \circ g \neq g \circ f$$

für (einige) Funktionen $f, g : X \to X$.

Lösung: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + 1\,, \quad g(x) = 2x$. Dann gilt
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1 \neq 2x + 2 = g(x + 1) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

Teil 2: Lineare Algebra

17. Aufgabe
Gegeben seien die Punkte $A = (1|-1), B = (0|-3), C = (1|4), D = (-2|2)$ im $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie eine Punkt-Richtungsform (Parameterdarstellung) der Geraden g_1, die durch die Punkte A und B verläuft, sowie eine Punkt-Richtungsform (Parameterdarstellung) der Geraden g_2, die durch die Punkte C und D verläuft .

(b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden.

Ergebnis:

(a) $\vec{g}_1(t_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{g}_2(t_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) Schnittpunktbestimmung durch Gleichsetzen der beiden Parameterdarstellungen und Bestimmung von t_1 und t_2 durch Lösen des resultierenden Gleichungssystems ergibt:
Schnittpunkt $S = (\frac{19}{4}|\frac{13}{2})$

18. Aufgabe
Bestimmen Sie von der Geraden g mit der Gleichung $8x + 15y + 170 = 0$ eine Hessesche Normalform. Bestimmen Sie den Abstand der Geraden vom Ursprung.

Lösung: $8x + 15y + 170 = 0 \Leftrightarrow 8x + 15y = -170$, d.h. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$ ist zu normieren.
$|\vec{n}| = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17 \Rightarrow \vec{n}_e = \begin{pmatrix} 8/17 \\ 15/17 \end{pmatrix}$ ist ein Normaleneinheitsvektor.
$\Rightarrow$ eine Hessesche Normalform ist $\frac{1}{17}(8x + 15y) = \frac{1}{17}(-170) \Leftrightarrow \frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y = -10$.
Den Abstand der Geraden vom Ursprung ist somit $|-10| = 10$.

19. Aufgabe
Gegeben seien die Gerade g mit der Gleichung $4x - 3y + 15 = 0$ sowie die Punkte $P_1 = (2|1), P_2 = (-3|6), P_3 = (-6|-3)$.

(a) Überprüfen Sie, welche Lage die Punkte P_i $(i = 1, 2, 3)$ und der Ursprung gegenüber g einnehmen.

(b) Bestimmen Sie die Abstände der Punkte P_i von der Geraden g.

Lösung:

$d(P_1, g) = \dfrac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - (-15)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{|20|}{\sqrt{25}} = 4$

$d(P_2, g) = \dfrac{|4 \cdot (-3) - 3 \cdot 6 - (-15)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{|-15|}{\sqrt{25}} = 3$

$d(P_3, g) = \dfrac{|4 \cdot (-6) - 3 \cdot (-3) - (-15)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{|0|}{\sqrt{25}} = 0$

$d((0|0), g) = \dfrac{|4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - (-15)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{|15|}{\sqrt{25}} = 3$

$\Rightarrow$ P_1 (Abstand zur Geraden: 4) und der Ursprung (Abstand zur Geraden: 3) liegen auf derselben Seite der Geraden, da in der Formel zur Berechnung des Abstands gleiches Vorzeichen unter dem Betrag im Zähler.
P_2 (Abstand zur Geraden: 3) und der Ursprung liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden, da in der Formel zur Berechnung des Abstands unterschiedliches Vorzeichen unter dem Betrag im Zähler.
P_3 liegt auf der Geraden.

20. Aufgabe
Zeigen Sie für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

(a) genau zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander,

(b) $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ liegen in einer Ebene,

(c) $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{c} \times \vec{d}$ sind parallel zueinander.

Lösung:

(a) Man berechnet die Skalarprodukte:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 12 \neq 0$, $\vec{a} \cdot \vec{d} = -6 \neq 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 62 \neq 0$, $\vec{b} \cdot \vec{d} = 62 \neq 0$, $\vec{d} \cdot \vec{c} = 50 \neq 0$,
d.h. nur $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht zueinander.

(b) Man berechnet das Spatprodukt der 3 Vektoren:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 32 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix} = 32 - 40 + 8 = 0$$

$\Rightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ liegen in einer Ebene, da die 3 Vektoren keinen Spat mit echt positivem Volumen aufspannen bzw. da $\vec{a}$ senkrecht zu $\vec{b} \times \vec{c}$ ist und $\vec{b} \times \vec{c}$ ebenfalls senkrecht zu $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist.

(c) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -16 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} -48 \\ 30 \\ -12 \end{pmatrix}$

$\vec{c} \times \vec{d} = 3 \cdot \vec{a} \times \vec{b}$ also parallel zueinander.