Hochschule für
Wirtschaft und Recht Berlin
Fachbereich 2 - Duales Studium
Prof. Dr. N. Winter

2022/23

Diskrete Mathematik für Informatiker
2. Übungsblatt

Summenzeichen

Für $m, n \in \mathbb{Z}$ ist definiert: $\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n$

Verifizieren Sie (ggf. mit Hilfe konkreter Zahlenbeispiele), dass folgendes gilt:

- $\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$
- $\sum_{k=1}^{5} k^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4$
- $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
- $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
- $\sum_{k=1}^{4} (x+k) = (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4)$
- $\sum_{k=0}^{5} 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$
- $\sum_{k=1}^{4} a = a + a + a + a = 4a$
- falls $m > n$, ist $\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$
- $\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$
- $\sum_{k=0}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \pm \sum_{k=0}^{n} b_k$
- $\sum_{k=0}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k$ c*(x1+x2+...) = c*x1 + c*x2 + ...
- $\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n+1} b_{k-1}$
- $\sum_{k=0}^{n+1} b_k = \sum_{k=0}^{n} b_k + b_{n+1}$ angenommen n=2
  b0 + b0 + b0 + b0 = b0 + b3 + b0 + b3 + b0 + b3 ???

Teil 1: Algebra

8. Aufgabe
Bestimmen Sie das kartesische Produkt $\{0,1\} \times \{0,1\}$. {(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)}
Wie viele Relationen R gibt es über $\{0,1\}$? 2^4 = 16 Relationen (kombinationen)
Beschreiben Sie jede einzelne Relation als Menge (Teilmenge von $\{0,1\} \times \{0,1\}$).
Welche der Relationen sind reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv?

9. Aufgabe
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Folgerungen:

(a) $3x \equiv 12 \bmod 97 \quad \Rightarrow \quad x \equiv 4 \bmod 97$

(b) $3x \equiv 12 \bmod 87 \quad \Rightarrow \quad x \equiv 4 \bmod 87$

10. Aufgabe
Entscheiden Sie jeweils, ob es ein $x \in \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften gibt, und begründen Sie Ihre Antwort:

(a) $x \equiv 3 \bmod 10$ und $x \equiv 5 \bmod 15$

(b) $x \equiv 2 \bmod 4$ und $x \equiv 3 \bmod 5$

11. Aufgabe
Die Addition und die Multiplikation zweier Restklassen modulo a sind für festes $a \geq 0$ wie folgt definiert:

- $[x]_a + [y]_a = [x + y]_a$
- $[x]_a \cdot [y]_a = [x \cdot y]_a$

Berechnen Sie

(a) $[3]_8 + [7]_8$

(b) $[3]_{10} + [7]_{10}$

(c) $[3]_8 \cdot [7]_8$

(d) $[3]_{10} \cdot [7]_{10}$

12. Aufgabe
Berechnen Sie ohne Verwendung des Taschenrechners die jeweils letzte Ziffer der folgenden Zahlen, indem Sie die Potenzen in Potenzen mit (in Bezug auf die Modulorechnung) günstigerer Basis umformen, die Multiplikation modulo 10 mit der entsprechenden Rechenregel (1.5) auf Seite 12 des Skripts verwenden und die Transitivität der Kongruenzrelation ausnutzen:

(a) 2^{1000}

(b) 7^{1000}

13. Aufgabe

(a) Welche der folgenden 10-stelligen ISBN-Nummern sind gültig/ungültig?

- 3893194347
- 3540161438
- 3528372249

(b) Ermitteln Sie für die 10-stellige ISBN-Nummer das fehlende Prüfzeichen: 007709239

(c) Welche der folgenden 13-stelligen ISBN-Nummern sind gültig/ungültig?

- 9783835101579
- 9783535101197

(d) Ermitteln Sie für die 13-stellige ISBN-Nummer das fehlende Prüfzeichen: 978383510119

14. Aufgabe
Nach dem Julianischen Kalender, der von Cäsar eingeführt wurde, ist jedes Jahr mit der Zahl $J \equiv 0 \bmod 4$ ein Schaltjahr. Dadurch ergab sich im 16. Jahrhundert zwischen dem Jahresanfang des Sonnenjahres und des Kalenderjahres ein Unterschied von 10 Tagen. Diesen Fehler korrigierte Papst Gregor XIII. 1582 durch Übergang vom 4. Oktober auf den 15. Oktober, d.h. es wurden 10 Tage gestrichen. Nach dem seit diesem Zeitpunkt geltenden Gregorianischen Kalender ist ein Jahr mit der Zahl $J \equiv 0 \bmod 4$ ein Schaltjahr, jedoch nicht, wenn $J \equiv 100 \bmod 400$ oder $J \equiv 200 \bmod 400$ oder $J \equiv 300 \bmod 400$ gilt.
An welchen Wochentagen wurden

(a) Pablo Picasso (25.10.1881)

(b) Michelangelo (6.3.1475)

geboren?
Berechnen Sie die Wochentage ohne Verwendung des Taschenrechners. Verwenden Sie zur Lösung die Modulorechnung (mod 7) ausgehend davon, dass der 1.10.2019 ein Dienstag war.

15. Aufgabe
Überprüfen Sie, ob durch die folgenden Zuordnungsvorschriften Funktionen definiert werden, und prüfen Sie ggf. ob sie injektiv sind.

(a) Jedem Einwohner Deutschlands wird seine Körpergröße und sein Gewicht zugeordnet.

(b) Jedem PKW in Deutschland wird sein KFZ-Kennzeichen zugeordnet.

(c) Jedem $x \in [-1, 1]$ wird eine Lösung der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ zugeordnet.

(d) $x \mapsto x^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(e) $x \mapsto x^4$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$

(f) $x \mapsto x^4$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Überprüfen Sie, welche der obigen Zuordnungsvorschriften umkehrbar sind bzw. durch entsprechende Einschränkung des Definitions- und Wertebereichs in umkehrbare Funktionen überführt werden können. Geben Sie jeweils den Definitions- und den Wertebereich an und begründen Sie Ihr Ergebnis.

16. Aufgabe
Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Komposition von Funktionen in der Regel nicht kommutativ ist, d. h. dass

$$f \circ g \neq g \circ f$$

für (einige) Funktionen $f, g : X \to X$.

Teil 2: Lineare Algebra

17. Aufgabe
Gegeben seien die Punkte $A = (1|-1), B = (0|-3), C = (1|4), D = (-2|2)$ im $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie eine Punkt-Richtungsform (Parameterdarstellung) der Geraden g_1, die durch die Punkte A und B verläuft, sowie eine Punkt-Richtungsform (Parameterdarstellung) der Geraden g_2, die durch die Punkte C und D verläuft .

(b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden.

18. Aufgabe
Bestimmen Sie von der Geraden g mit der Gleichung $8x + 15y + 170 = 0$ eine Hessesche Normalform. Bestimmen Sie den Abstand der Geraden vom Ursprung.

19. Aufgabe
Gegeben seien die Gerade g mit der Gleichung $4x - 3y + 15 = 0$ sowie die Punkte $P_1 = (2|1), P_2 = (-3|6), P_3 = (-6|-3)$.

(a) Überprüfen Sie, welche Lage die Punkte P_i $(i = 1, 2, 3)$ und der Ursprung gegenüber g einnehmen.

(b) Bestimmen Sie die Abstände der Punkte P_i von der Geraden g.

20. Aufgabe
Zeigen Sie für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

(a) genau zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander,

(b) $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ liegen in einer Ebene,

(c) $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{c} \times \vec{d}$ sind parallel zueinander.