ALAPÖSSZEFÜGGÉSEK ÁLLAPOTTÉRBEN

Rendszerosztályok:

NLTV**:** $\dot{x} = f(t,x,u),\ y = g(t,x,u) \Rightarrow \varphi(t,\tau,x,u(\cdot))$
LTV: $\dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ y = C(t)x + D(t)u \Rightarrow \Phi(t,\tau)$
LTI: $\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx + Du \Rightarrow e^{A(t-\tau)}$

Korábbi jelöléseinkkel, ha a rendszer a τ időpillanatban az x állapotban van (ezt a továbbiakban (τ,x) eseménynek nevezzük), és a bemenetén az $u(\cdot)$ bemenő jel hat, akkor állapota a t időpontban nemlineáris rendszer, időben változó lineáris rendszer és időinvariáns lineáris rendszer esetén rendre a következő lesz:

$$(\tau,x) \xrightarrow{u(\cdot)} (t,x(t))$$

$$x(t) = \varphi(t,\tau,x,u(\cdot)),$$

$$x(t) = \Phi(t,\tau)x + \int_\tau^t \Phi(t,\vartheta)B(\vartheta)u(\vartheta)\,d\vartheta,$$

$$x(t) = e^{A(t-\tau)}x + \int_\tau^t e^{A(t-\vartheta)}Bu(\vartheta)\,d\vartheta.$$

Emlékeztetünk arra, hogy $x \in R^n$, $u \in R^r$, $y \in R^m$.

Fontos lineáris algebrai tulajdonságok:

Ha $\mathscr{A} : R^n \to R^m$ egy lineáris leképezés, amelynek mátrixa A, továbbá a leképezés képterét és magterét rendre

$$\mathrm{range}\,(A) = \{ y = Ax :\ x \in R^n \} \subset R^m,$$
$$\mathrm{kernel}\,(A) = \{ x :\ Ax = 0 \} \subset R^n$$

jelöli, akkor R^m felbontható a képtérnek és a képtér ortogonális kiegészítőjének direkt összegére:

$$R^m = \mathrm{range}(A) + \mathrm{range}(A)^\perp.$$

Speciálisan, ha $\mathscr{A} : R^n \to R^n$ és $A = A^T$ (azaz A szimmetrikus $n \times n$ méretű mátrix), akkor

$$\mathrm{range}(A)^\perp = \mathrm{kernel}(A),$$

és ezért R^n felírható a képtér és a magtér direkt összegeként:

$$\boxed{R^n = \mathrm{range}\,(A) + \mathrm{kernel}\,(A)}$$

IRÁNYÍTHATÓSÁG ÉS ELÉRHETŐSÉG DEFINÍCIÓJA

Az irányíthatóság definíciója:

1. Legyen a rendszer a τ pillanatban az x állapotban. A rendszer (τ, x) *eseménye a nulla állapotba irányítható*, ha létezik <u>véges</u> $t \geq \tau$ időpont és $u:[\tau, t) \to R^r$ irányítás, hogy $x(t) = \varphi(t, \tau, x, u(\cdot)) = 0$. Jelölése:
$$(\tau, x) \xrightarrow{u(\cdot)} (t, 0).$$
2. A rendszer a τ *időpontból teljesen a nulla állapotba irányítható*, ha minden $x \in R^n$ állapot esetén a (τ, x) esemény a nulla állapotba irányítható.
3. A rendszer *teljesen a nulla állapotba irányítható*, ha minden τ időpontból teljesen a nulla állapotba irányítható.

LTV rendszer esetén:

$$0 = \Phi(t,\tau)\left\{x + \int_\tau^t \Phi(\tau,\vartheta)B(\vartheta)u(\vartheta)\,d\vartheta\right\} \Leftrightarrow$$

$$x = -\int_\tau^t \Phi(\tau,\vartheta)B(\vartheta)u(\vartheta)\,d\vartheta$$

Irányíthatósági Gram-mátrix ($P: R^n \to R^n,\ P = P^T$):

$$\boxed{P(\tau,t) := \int_\tau^t \Phi(\tau,\vartheta)\,B(\vartheta)\,B^T(\vartheta)\,\Phi^T(\tau,\vartheta)\,d\vartheta.}$$

Az elérhetőség definíciója:

1. Legyen a rendszer a τ pillanatban a nulla állapotban. A rendszer x állapota a $(\tau, 0)$ *eseményből elérhető,* ha létezik <u>véges</u> $t \geq \tau$ időpont és $u:[\tau, t) \to R^r$ irányítás, hogy $x(t) = \varphi(t, \tau, 0, u(\cdot)) = x$. Jelölése:
$$(\tau, 0) \xrightarrow{u(\cdot)} (t, x).$$
2. A rendszer a τ pillanatból és a nulla állapotból *teljesen elérhető*, ha minden $x \in R^n$ állapota a $(\tau, 0)$ eseményből elérhető.
3. A rendszer a nulla állapotból *teljesen elérhető*, ha minden τ időpontból a nulla állapotból teljesen elérhető.

LTV rendszer esetén:

$$x = \int_\tau^t \Phi(t,\vartheta)B(\vartheta)u(\vartheta)\,d\vartheta$$

Elérhetőségi Gram-mátrix ($\widetilde{P}: R^n \to R^n$), $\widetilde{P} = \widetilde{P}^T$):

$$\boxed{\widetilde{P}(\tau,t) := \int_\tau^t \Phi(t,\vartheta)B(\vartheta)B^T(\vartheta)\Phi^T(t,\vartheta)\,d\vartheta.}$$

IRÁNYÍTHATÓSÁGI FELTÉTELEK LTV RENDSZER ESETÉN

A feltételek szerint: $R^n = \text{range}(P) + \text{kernel}(P)$.

Lemma: Ha $x \in \text{kernel}(P)$, akkor $B^T(\vartheta)\Phi^T(\tau,\vartheta)x \equiv 0$.

Bizonyítás: Ekkor ugyanis $x \in \text{kernel}\,P$ miatt $P\,x = 0$ és

$$0 =< 0, x >= 0^T x =$$

$$=< Px, x >=< \int_\tau^t \Phi(\tau,\vartheta)B(\vartheta)B^T(\vartheta)\Phi^T(\tau,\vartheta)\,d\vartheta\, x, x >=$$

$$= \int_\tau^t \left\| B^T(\vartheta)\Phi^T(\tau,\vartheta)\,x \right\|^2 d\vartheta \Rightarrow B^T(\vartheta)\Phi^T(\tau,\vartheta)\,x \equiv 0$$

Tétel: A (τ, x) esemény a nulla állapotba irányítható $\Leftrightarrow$ létezik véges $t \ge \tau$, hogy $x \in \text{range}\,P(\tau,t)$.

Bizonyítás:

i) Tegyük fel, hogy $x \in \text{range}\,P(\tau,t)$.
Akkor $\exists \hat{x}$, hogy $x = P(\tau,t)\hat{x}$. Legyen
$u(\vartheta) := -B^T(\vartheta)\Phi^T(\tau,\vartheta)\hat{x}$, akkor

$$x(t) = \Phi(t,\tau)\left\{ x - \int_\tau^t \Phi(\tau,\vartheta)B(\vartheta)B^T(\vartheta)\Phi^T(\tau,\vartheta)\,d\vartheta\,\hat{x} \right\} =$$

$$= \Phi(t,\tau)\{x - P(\tau,t)\hat{x}\} = 0,$$

ezért a rendszer az $u(\cdot)$ irányítással nullába irányítható.

ii) Tegyük fel, hogy $(\tau, x) \xrightarrow{u(\cdot)} (t, 0)$.
Akkor $x = x_1 + x_2 = P\,\hat{x}_1 + x_2$, ahol $x_1 \in \text{range}(P)$ és $x_2 \in \text{kernel}(P)$. Ezért

$$(\tau, P\,\hat{x}_1 + x_2) \xrightarrow{u(\cdot)} (t, 0)$$

$$(\tau, P\,\hat{x}_1) \xrightarrow{-B^T(\vartheta)\Phi^T(\tau,\vartheta)\hat{x}_1} (t, 0),$$

$$x = P\hat{x}_1 + x_2 = -\int_\tau^t \Phi(\tau,\vartheta)B(\vartheta)u(\vartheta)\,d\vartheta,$$

$$P\hat{x}_1 = \int_\tau^t \Phi(\tau,\vartheta)\,B(\vartheta)\,B^T(\vartheta)\Phi^T(\tau,\vartheta)\,\hat{x}_1 d\vartheta.$$

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet, és legyen
$u_2(\vartheta) = u(\vartheta) + B^T(\vartheta)\Phi^T(\tau,\vartheta)\,\hat{x}_1$. Akkor

$$x_2 = -\int_\tau^t \Phi(\tau,\vartheta)B(\vartheta)u_2(\vartheta)\,d\vartheta,$$

és mivel $x_2 \in \text{kernel}(P)$ és a lemma szerint
$B^T(\vartheta)\,\Phi^T(\tau,\vartheta)\,x_2 \equiv 0$, ezért

$$\|x_2\|^2 =< x_2, x_2 >= -\int_\tau^t < u_2(\vartheta), B^T(\vartheta)\Phi^T(\tau,\vartheta)x_2 > d\vartheta = 0,$$

ahonnan következik $x_2 = 0$ és $x = x_1 = P\hat{x}_1 \in \text{range}(P)$.

IRÁNYÍTHATÓSÁGI FELTÉTELEK LTI RENDSZER ESETÉN

Irányíthatósági Gram-mátrix LTI rendszer esetén:

$$P(0,t) = \int_0^t \Phi(0,\vartheta)\, B\, B^T \Phi^T(0,\vartheta)\, d\vartheta = \int_0^t e^{-A\vartheta} B B^T e^{-A^T\vartheta} d\vartheta.$$

__Tétel:__ Folytonosidejű időinvariáns lineáris rendszer esetén

$$\boxed{\operatorname{range} P(0,t) = \operatorname{Span}\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\}}.$$

Bizonyítás:

i) Vezessük be az $L := \operatorname{Span}\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\}$ jelölést. Vegyük észre, hogy L egy altér R^n-ben, amelyet a $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$ mátrixok oszlopvektorai feszítenek ki, ezért R^n felírható $R^n = L + L^{\perp}$ alakban. Másrészt R^n felírható az irányíthatósággal közvetlenül kapcsolatban álló $R^n = \operatorname{range} P(0,t) + \operatorname{kernel} P(0,t)$ másik alakban is. Meg fogjuk mutatni, hogy $L = \operatorname{range} P(0,t)$, $\forall t$ esetén. Ezzel ekvivalens, ha megmutatjuk, hogy $L^{\perp} = \operatorname{kernel} P(0,t)$, $\forall t$ esetén.

ii) Tegyük fel, hogy $x \in L^{\perp}$ és $t > 0$ tetszőleges. Mivel $x \perp L$, ezért $x^T A^i B = 0^T$, $\forall i = 0,1,\ldots,n-1$ esetén. Legyen A karakterisztikus polinomja $\varphi(s) = \det(sI - A)$. Akkor tetszőleges i esetén polinomosztással s^i felírható $s^i = r(s) + \varphi(s)\, q(s)$ alakban, ahol $gr\, r < gr\, \varphi$. A Cayley–Hamilton-tétel szerint $\varphi(A) = 0$, ezért $A^i = r(A) + \varphi(A)\, q(A) = r(A)$, ahonnan következik, hogy

$$x^T A^i B = 0^T,\ \forall i,$$

$$x^T \Phi(0,\vartheta) B = x^T e^{-A\vartheta} B = \sum_{i=0}^{\infty} x^T (-A)^i B \frac{\vartheta^i}{i!} = 0^T,\ \forall \vartheta,$$

$$B^T \Phi^T(0,\vartheta) x = 0,\ \forall \vartheta.$$

$$P(0,t)x = \int_0^t \Phi(0,\vartheta) B \underbrace{B^T \Phi^T(0,\vartheta)\, x}_{0}\, d\vartheta = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{kernel} P(0,t),$$

ezért $L^{\perp} \subset \operatorname{kernel} P(0,t)$.

iii) Tegyük fel, hogy $x \in \operatorname{kernel} P(0,t)$. A korábbi lemma szerint $B^T \Phi^T(0,\vartheta)\, x \equiv 0$, vagy transzponálás után $x^T \Phi(0,\vartheta)\, B = x^T e^{-A\vartheta} B \equiv 0^T$, ebből pedig i-szer deriválva és $\vartheta = 0$ behelyettesítésével: $x^T (-A)^i e^{-A\vartheta} B \equiv 0^T$, $\forall i \Rightarrow x^T A^i B \equiv 0^T$, $\forall i$ és ezért $\operatorname{kernel} P(0,t) \subset L^{\perp}$.

iv) De akkor ii) és-iii) alapján $\operatorname{kernel} P = L^{\perp}$ és $\operatorname{range} P = L$.

Tétel: Folytonosidejű időinvariáns lineáris rendszer (tetszőleges $t > 0$ idő alatt) teljesen a nulla állapotba irányítható $\Leftrightarrow$ $L := \mathrm{Span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = R^n$, vagy ami ezzel ekvivalens, az $\boxed{M_c := [B \; AB \; \dots \; A^{n-1}B]}$ irányíthatósági mátrix maximális rangú:

$$\boxed{rank\, M_c = rank\, [B \; AB \; \dots \; A^{n-1}B] = n = \dim x.}$$

Bizonyítás:

Az előző eredmények szerint a rendszer teljesen a nulla állapotba irányítható $\Leftrightarrow$ $\mathrm{range}\, P(0,t) = L = R^n$ (tetszőleges $t > 0$ esetén), aminek szükséges és elégséges feltétele, hogy $rank\, M_c = n$.

Az *elérhetőséggel* kapcsolatos következő két tétel bizonyítása hasonló az előzőekhez.

Tétel: Folytonosidejű időinvariáns lineáris rendszer esetén

$$\mathrm{range}\, \widetilde{P}(0,t) = \mathrm{Span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\}.$$

Tétel: Folytonosidejű időinvariáns lineáris rendszer a nulla állapotból (tetszőleges $t > 0$ idő alatt) teljesen elérhető $\Leftrightarrow$ $L := \mathrm{Span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = R^n$, vagy ami ezzel ekvivalens, $rank\, [B \; AB \; \dots \; A^{n-1}B] = n = \dim x$.

Következmény: Folytonosidejű időinvariáns lineáris rendszerek körében a teljesen irányítható rendszer egyúttal teljesen elérhető is, és fordítva. Ekkor ugyanis

$$\mathrm{range}\, P(0,t) = \mathrm{range}\, \widetilde{P}(0,t) = \mathrm{Span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = R^n$$

és az ekvivalencia következik az előző tételekből.

Tétel: Ha a folytonosidejű időinvariáns lineáris rendszer teljesen a nulla állapotba irányítható, akkor tetszőleges (τ_1, x_1) és (τ_2, x_2) eseményekhez $(\tau_2 > \tau_1)$ létezik olyan $u : [\tau_1, \tau_2) \to R^r$ bemenő jel, hogy

$$\boxed{(\tau_1, x_1) \xrightarrow{u(\cdot)} (\tau_2, x_2).}$$

Bizonyítás: Mivel $rank\, M_c = n$, ezért tetszőleges kis $t_1, t_2 > 0$ esetén

$$(0, x_1) \xrightarrow{u_1(\cdot)} (t_1, 0) \xrightarrow{u_2(t_1+\cdot)} (t_1 + t_2, x_2)$$

Megjegyzés: Az $x = P(0,t)\hat{x}$ feltétel $t \to 0$ esetén együtt jár $\|P(0,t)\| \to 0$-val, mert az integrációs intervallum hossza egyre csökken. Ezért $\|\hat{x}\| \to \infty$, hogy teljesülhessen $x = P(0,t)\hat{x}$, ezért az $u(\vartheta) = -B^T e^{-A^T \vartheta} \hat{x}$ jel egyre nagyobb lesz, ami a gyorsításnak fizikai határt szab (telítés a a beavatkozó szervben).

LTI RENDSZER IRÁNYÍTHATÓSÁGI LÉPCSŐS ALAKJA

<u>**Tétel:**</u> Az $\hat{x} = Tx$ koordináta-transzformáció hatására az irányíthatósági mátrix és az irányíthatósági Gram-matrix a következőképp módosul:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{M}_c &= T\,M_c \\ \hat{P}(0,t) &= TP(0,t)T^T. \end{aligned}}$$

Bizonyítás:

i) Mivel $\hat{A} = TAT^{-1}$ és $\hat{B} = TB$, ezért $\hat{A}\hat{B} = TAT^{-1}TB = TAB, \ldots, \hat{A}^{n-1}\hat{B} = TA^{n-1}B$, ahonnan következik

$$\hat{M}_c = [\hat{B}\ \ \hat{A}\hat{B}\ \ldots\ \hat{A}^{n-1}\hat{B}] = T[B\ \ AB\ \ldots\ A^{n-1}B] = TM_c.$$

ii) Az exponenciális mátrix sorfejtéses alakja szerint $e^{\hat{A}t} = e^{TAT^{-1}t} = Te^{At}T^{-1}$, $(e^{\hat{A}t})^T = T^{-T}e^{A^T t}T^T$, ezért

$$\hat{P}(0,t) = \int_0^t e^{-\hat{A}\vartheta}\hat{B}\hat{B}^T e^{-\hat{A}^T\vartheta}\,d\vartheta = TP(0,t)T^T.$$

Mátrix lépcsős alakja:

Legyen $\{f_1, \ldots, f_m\} \subset R^n$ egy vektorrendszer, amelynek keressük egy $\{g_1, g_2, \ldots\}$ ortonormált bázisát. A feladat a Gram-Schmidt ortogonalizációs módszerrel megoldható.

Az ortonormált bázis ismeretében ha $\mathscr{A}: R^n \to R^n$ egy lineáris leképezés, amelynek mátrixa A az eredeti $\{f_1, \ldots, f_n\}$ bázisban, továbbá $\mathscr{I}$ jelöli az identikus transzformációt (helybenhagyást), akkor az A mátrix az $\hat{x} = Tx$ koordináta-transzformáció után, amely az $\{f_1, \ldots, f_n\} \to \{g_1, \ldots, g_n\}$ báziscserének felel meg, $\hat{A}$ lesz: $y = Ax \Rightarrow \hat{y} = Ty = TAT^{-1}\hat{x} = \hat{A}\hat{x} \Rightarrow \hat{A} = TAT^{-1}$.

A leképezés a következő gráffal jellemezhető:

$$\begin{array}{ccccccc}
R^n & \xrightarrow{\mathscr{I}} & R^n & \xrightarrow{\mathscr{A}} & R^n & \xrightarrow{\mathscr{I}} & R^n \\
\mathrm{L}\left\{\begin{matrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \end{matrix}\right. & & \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ \end{matrix} & & \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ \end{matrix} & & \left.\begin{matrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \end{matrix}\right\}\mathrm{L} \\
\mathrm{L}^{\perp}\left\{\begin{matrix} g_{k+1} \\ \vdots \\ g_n \end{matrix}\right. & & \begin{matrix} \\ \vdots \\ f_n \end{matrix} & & \begin{matrix} \\ \vdots \\ f_n \end{matrix} & & \left.\begin{matrix} g_{k+1} \\ \vdots \\ g_n \end{matrix}\right\}\mathrm{L}^{\perp} \\
R^n & \xrightarrow{T^{-1}} & R^n & \xrightarrow{A} & R^n & \xrightarrow{T} & R^n
\end{array}$$

<u>Speciálisan</u>, ha $\mathscr{A}$ ún. L-invariáns, $\mathscr{A}\mathrm{L} \subset \mathrm{L}$, azaz $\mathscr{A}$ az L alteret L-be képezi, akkor $\hat{A}$ ún. lépcsős alakot ölt.

$$\hat{A} = TAT^{-1} = [\mathscr{A}g_1 \quad \mathscr{A}g_2 \quad \cdots \quad \mathscr{A}g_n] = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ 0 & A_{bb} \end{bmatrix}.$$

<u>Tétel:</u> A folytonosidejű időinvariáns lineáris rendszer állapotegyenletének van olyan $R^n = L + L^{\perp}$, $x = x_a + x_b$ felbontása, amelyben az állapotegyenlet alakja ún. irányíthatósági lépcsős alakú (controllability staircase form):

$$\boxed{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ 0 & A_{bb} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ 0 \end{bmatrix} u},$$

továbbá az L-beli állapotok teljesen a nulla állapotba irányíthatók, az $L^{\perp}$-beli állapotok pedig (a nulla állapot kivételével) nem irányíthatók nullába.

Bizonyítás:

i) Legyen $L := \mathrm{Span}\,\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\}$, akkor az irányíthatóságra vonatkozó állítások következnek a korábbi tételből.

ii) $L = \mathrm{Span}\,\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\}$ ún. A-invariáns altér, azaz $A(L) \subset L$. Ez világos, mert egyrészt az $AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B$ mátrixok oszlopai ott szerepelnek az L teret kifeszítő oszlopvektorok között. Másrészt a $\varphi(s) = \det(sI - A)$ jelöléssel $s^n = r(s) + \varphi(s)\,q(s)$, $gr\,r < gr\,\varphi$, és a Cayley–Hamilton-tétel szerint $A^n = r(A) + \varphi(A)\,q(A) = r(A)$ miatt $A^n B = r(A)B$ oszlopvektorai is benne vannak az L altérben.

iii) Legyen $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ bázisa L-nek és $\{g_{k+1}, g_{k+2}, \ldots, g_n\}$ bázisa $L^{\perp}$-nak (lásd pl. Gram-Schmidt ortogonalizáció), akkor ebben a bázisban az $\hat{A} = TAT^{-1}$ állapotmátrix alakja a tételben szereplő lesz.

iv) A $\{g_1, \ldots, g_n\}$ bázisra való áttérésnek egy $\mathscr{I} \circ \mathscr{B}$ leképezés felel meg, ahol $\mathscr{I}$ az identikus leképezés. Ez a leképezés a $\mathscr{B}$ képterét kifeszítő $b_1, \ldots, b_r$ vektorokat (B mátrix oszlopait) helyben hagyja, továbbá ezek benne vannak L-ben, tehát $L^{\perp}$-beli komponenseik nullák. Ezért a báziscserét leíró T koordinátaranszformáció után a $\hat{B} = TB$ mátrix a tételben szereplő alakú lesz.

Megjegyzés: Az irányíthatósági lépcsős alakból jól látható, hogy az u irányítás nem hat az $x_b \in L^{\perp}$ állapotokra, mivel $\dot{x}_b = A_{bb}x_b$, tehát nem is tudja befolyásolni (sem közvetlenül, sem pedig közvetve x_a-n keresztül). Ezért érthető, hogy az $x_b \in L^{\perp}$ állapotok nem irányíthatók nullába.

ÁLLAPOT-VISSZACSATOLÁS, STABILIZÁLHATÓSÁG

Vezessük be az $u = -Kx$ ***állapot-visszacsatolás*** fogalmát. Az irányíthatósági lépcsős alak segítségével választ tudunk adni arra, hogy a rendszer mely sajátértékei (pólusai) mozdíthatók ki állapot-visszacsatolással és melyek nem.

<u>Tétel:</u> Az időinvariáns lineáris rendszer irányíthatósági lépcsős alakjában a nem irányítható altérhez tartozó A_{bb} mátrix sajátértékei nem mozdíthatók ki állapot-visszacsatolással.

Bizonyítás:

A koordináta-transzformáció változatlanul hagyja a $\varphi(s)$ karakterisztikus egyenletet:

$$\det(sI - TAT^{-1}) = \det(T(sI - A)T^{-1}) =$$
$$\det(T)\det(sI - A)\det(T^{-1}) = \det(sI - A).$$

Ezért A és a lépcsős alakban szereplő $\hat{A}$ karakterisztikus egyenlete azonos. Mivel $\hat{A}$ felső blokk-háromszög mátrix, ezért $\varphi(s) = \det(sI - A_{aa})\det(sI - A_{bb})$. Legyen az állapot-visszacsatolás $u = -\hat{K}\hat{x} = -\hat{K}Tx = -Kx$, akkor $K = \hat{K}T$. Helyettesítsük be az állapotegyenletbe

$$u = -\hat{K}\hat{x} = -[K_a \quad K_b]\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = -K_a x_a - K_b x_b$$

kifejezését, és írjuk fel a zárt rendszer állapotegyenletét és $\varphi_c(s)$ karakterisztikus egyenletét:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} - \hat{B}\hat{K}\hat{x} = \begin{bmatrix} A_{aa} - B_a K_a & A_{ab} - B_a K_b \\ 0 & A_{bb} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix},$$

$$\boxed{\varphi_c(s) = \det(sI - (A_{aa} - B_a K_a)) \cdot \det(sI - A_{bb}).}$$

Jól látható, hogy A_{aa} sajátértékei kimozdíthatók az állapot-visszacsatolással, míg A_{bb} sajátértékei megmaradnak a zárt rendszerben is. Ha csak a sajátértékek befolyásolása a cél, akkor választható $K_b = 0$.

Az időinvariáns lineáris rendszert ***stabilizálhatónak*** nevezzük, ha a nem irányítható (az irányíthatósági lépcsős alakban A_{bb}-hez tartozó) sajátértékek stabilak. Ekkor ugyanis a nem irányítható módusokhoz tartozó tranziensek lecsengenek, az irányítható módusokhoz tartozó tranziensek pedig állapot-visszacsatolással módosíthatók.

FOLYTONOSIDEJŰ LINEÁRIS RENDSZEREK MEGFIGYELHETŐSÉGE

Arra a kérdésre keresünk választ, hogy meghatározható-e a rendszer állapota a rendszer bemenő és kimenő jelének megfigyeléseiből a $[\tau, t]$ időintervallumban.

Ha a rendszer $x(\tau) = x$ állapota meghatározható a τ-hoz képest jövőbeli $y(\vartheta), u(\vartheta),\ \vartheta \geq \tau$ megfigyelésekből, akkor az $x(\tau) = x$ állapotot *megfigyelhetőnek* fogjuk nevezni.

Ha viszont $x(t) = x$ meghatározható a t-hez képest múltbeli $y(\vartheta), u(\vartheta),\ \vartheta \leq t$ megfigyelésekből, akkor az $x(t) = x$ állapotot *rekonstruálhatónak* fogjuk nevezni.

A megfigyelhetőségi osztály definíciója: A (τ, x_1) és a (τ, x_2) esemény ugyanahhoz a megfigyelhetőségi osztályhoz tartozik (nem megkülönböztethető a jövőben), ha
$g(\vartheta, x(\vartheta, \tau, x_1, u(\cdot)), u(\vartheta)) = g(\vartheta, x(\vartheta, \tau, x_2, u(\cdot)), u(\vartheta))$
minden $\vartheta \geq \tau$ és minden $u(\cdot)$ esetén.

A rekonstruálhatósági osztály definíciója: A (t, x_1) és a (t, x_2) esemény ugyanahhoz a rekonstruálhatósági osztályhoz tartozik (nem megkülönböztethető a múltban), ha
$g(\vartheta, x(\vartheta, t, x_1, u(\cdot)), u(\vartheta)) = g(\vartheta, x(\vartheta, t, x_2, u(\cdot)), u(\vartheta))$
minden $\vartheta \leq t$ és minden $u(\cdot)$ esetén.

Lineáris rendszer esetén az állapotegyenlet folytonos időben mind növekvő, mind pedig csökkenő idő irányban megoldható, ezért ha a megfigyelési feladat esetén $t_0 := \tau$, a rekonstruálási feladat esetén pedig $t_0 := t$, akkor $y(t)$ korrekciója és a redukált feladat a következő lesz:

$$y(\vartheta) = C(\vartheta)x(\vartheta) + D(\vartheta)u(\vartheta) =$$
$$= C(\vartheta)\{\Phi(\vartheta, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{\vartheta} \Phi(\vartheta, \sigma)B(\sigma)u(\sigma)\,d\sigma\}$$
$$+ D(\vartheta)u(\vartheta),$$
$$y(\vartheta) := y(\vartheta) - C(\vartheta)\int_{t_0}^{\vartheta} \Phi(\vartheta, \sigma)B(\sigma)u(\sigma)\,d\sigma - D(\vartheta)u(\vartheta),$$
$$\boxed{y(\vartheta) = C(\vartheta)\Phi(\vartheta, t_0)x(t_0).}$$

Ha a (τ, x_1) és a (τ, x_2) esemény ugyanahhoz a megfigyelhetőségi osztályhoz tartozik, akkor
$C(\vartheta)\Phi(\vartheta, \tau)(x_1 - x_2) \equiv 0$ minden $\vartheta \geq \tau$ esetén.

Ha a (t, x_1) és a (t, x_2) esemény ugyanahhoz a rekonstruálhatósági osztályhoz tartozik, akkor
$C(\vartheta)\Phi(\vartheta, t)(x_1 - x_2) \equiv 0$ minden $\vartheta \leq t$ esetén.

A továbbiakban feltesszük, hogy a kimenő jelen a fenti korrekciót már elvégeztük.

A megfigyelhetőség definíciója:

i) A folytonosidejű lineáris rendszer esetén a (τ, x) esemény nem megfigyelhető, ha a $(\tau, 0)$ megfigyelhetőségi osztályhoz tartozik, azaz $C(\vartheta)\Phi(\vartheta,\tau)x \equiv 0$ minden $\vartheta \ge \tau$ esetén. Ellenkező esetben (τ, x) megfigyelhető.

ii) A folytonosidejű lineáris rendszer teljesen megfigyelhető a τ időpontban, ha minden $x \in R^n$ állapot esetén (τ, x) megfigyelhető.

iii) A folytonosidejű lineáris rendszer teljesen megfigyelhető, ha minden τ időpontban teljesen megfigyelhető.

A rekonstruálhatóság definíciója:

i) A folytonosidejű lineáris rendszer (t, x) eseménye nem rekonstruálható, ha a $(t, 0)$ rekonstruálhatósági osztályhoz tartozik, azaz $C(\vartheta)\Phi(\vartheta,t)x \equiv 0$ minden $\vartheta \le t$ esetén. Ellenkező esetben (t, x) rekonstruálható.

ii) A folytonosidejű lineáris rendszer teljesen rekonstruálható a t időpontban, ha minden $x \in R^n$ állapot esetén (t, x) rekonstruálható.

iii) A folytonosidejű lineáris rendszer teljesen rekonstruálható, ha minden t időpontban teljesen rekonstruálható.

Tekintsük először a ***megfigyelhetőségi*** feladatot. Szorozzuk meg $y(t)$ mindkét oldalát $\Phi^T(\vartheta,\tau)\,C^T(\vartheta)$ -val és integráljunk mindkét oldalon, akkor

$$\int_\tau^t \Phi^T(\vartheta,\tau)\,C^T(\vartheta)\,y(\vartheta)\,d\vartheta = \int_\tau^t \Phi^T(\vartheta,\tau)\,C^T(\vartheta)\,C(\vartheta)\,\Phi(\vartheta,\tau)\,d\vartheta\, x.$$

Definiáljuk a ***megfigyelhetőségi Gram-mátrixot*** a következőképpen:

$$\boxed{Q(\tau,t) := \int_\tau^t \Phi^T(\vartheta,\tau)\,C^T(\vartheta)\,C(\vartheta)\,\Phi(\vartheta,\tau)\,d\vartheta.}$$

Vegyük észre, hogy a $Q : R^n \to R^n$ lineáris leképezés mátrixa szimmetrikus és pozitív szemidefinit, továbbá

$$R^n = \mathrm{range}\,(Q) + \mathrm{kernel}\,(Q)\,.$$

Ha tehát $Q(\tau,t)$ invertálható lenne, ami ekvivalens azzal, hogy a magtere csak a nulla vektorból áll, akkor a keresett x kezdeti állapot is meghatározható lenne:

$$x = Q^{-1}(\tau,t)\int_\tau^t \Phi^T(\vartheta,\tau)\,C^T(\vartheta)\,y(\vartheta)\,d\vartheta$$

<u>Tétel:</u> A (τ, x) esemény nem megfigyelhető
$\Leftrightarrow$ $x \in \text{kernel}\, Q(\tau, t), \;\; \forall t \ge \tau$ esetén.

Bizonyítás:

i) Tegyük fel, hogy $x \in \text{kernel}\, Q(\tau, t), \;\; \forall t \ge \tau$ esetén. Akkor

$$0 = \langle x, 0 \rangle = \langle x, Q(\tau, t)x \rangle = \int_\tau^t \| C(\vartheta)\Phi(\vartheta, \tau)x \|^2 \, d\vartheta \Rightarrow$$

$$C(\vartheta)\Phi(\vartheta, \tau)x \equiv 0 \;\; \text{minden } \vartheta \ge \tau \;\; \text{esetén,}$$

ezért a (τ, x) esemény nem megfigyelhető.

ii) Tegyük fel, hogy a (τ, x) esemény nem megfigyelhető. Akkor $C(\vartheta)\Phi(\vartheta, \tau)x \equiv 0$ minden $\vartheta \ge \tau$ esetén. Legyen $t \ge \tau$ tetszőleges, akkor

$$\langle x, Q(\tau, t)x \rangle = \int_\tau^t \| C(\vartheta)\Phi(\vartheta, \tau)x \|^2 \, d\vartheta = 0.$$

Mivel $Q(\tau, t)$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit, ezért létezik szimmetrikus és pozitív szemidefinit négyzetgyöke: $Q(\tau, t) = N^2 = N^T N$, amiből következik

$$0 = \langle x, Q(\tau, t)\, x \rangle = \langle x, N^T N\, x \rangle = \| N\, x \|^2 \Rightarrow$$

$$Nx = 0 \Rightarrow Qx = N^T N\, x = 0 \Rightarrow x \in \text{kernel}(Q).$$

Megfigyelhetőség és irányíthatóság dualitása LTI rendszer esetén:

Tekintsük az $(A, C)_I$ valódi rendszert és a $(-A^T, -C^T)_{II}$ fiktív rendszert. Akkor a definícióik alapján a következő hasonlóságok állnak fenn a valódi és a fiktív rendszerek különféle Gram-mátrixai között:

$$Q_I(0, t) = \int_0^t e^{A^T \vartheta} C^T C e^{A\vartheta} d\vartheta$$

$$P_{II}(0, t) = \int_0^t e^{-(-A^T)\vartheta} (-C^T)(-C) e^{-(-A^T)^T \vartheta} d\vartheta = Q_I(0, t)$$

$$\tilde{Q}_I(0, t) = \int_0^t e^{A^T(\vartheta - t)} C^T C e^{A(\vartheta - t)} d\vartheta$$

$$\tilde{P}_{II}(0, t) = \int_0^t e^{-(-A^T)(\vartheta - t)} (-C^T)(-C) e^{-(-A^T)^T (\vartheta - t)} d\vartheta = \tilde{Q}_I(0, t)$$

Jól látható a <u>dualitás</u> az eredeti rendszer megfigyelhetősége és a fiktív rendszer irányíthatósága, valamint eredeti rendszer rekonstruálhatósága és a fiktív rendszer elérhetősége között folytonosidejű időinvariáns lineáris rendszer esetén.

Tétel: Folytonosidejű időinvariáns lineáris rendszerek esetén a következő állítások ekvivalensek:

i) (A,C) teljesen megfigyelhető

ii) (A,C) teljesen rekonstruálható

iii) $M_{c,II} := [C^T, A^T C^T \dots (A^T)^{n-1} C^T]$ és $rank\, M_{c,II} = n = \dim x$

iv) $\boxed{M_o := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}$ és $rank\, M_o = n = \dim x$.

Bizonyítás:

Mivel a rendszer időinvariáns, választható $\tau = 0$. A rendszer teljesen megfigyelhető
$\Leftrightarrow$ kernel $Q_I(0,t) = \{0\}$

$\Leftrightarrow$ range $Q_I(0,t) =$ range $P_{II}(0,t) = R^n$

$\Leftrightarrow$ rank $M_{c,II} = n$.

Hasonló mondható a rekonstruálhatóságról. Ezzel beláttuk, hogy i), ii) és iii) ekvivalensek.
Másrészt viszont M_o a transzponáltja $M_{c,II}$-nek, ezért teljesül iv) is.

Megjegyzés: Felhasználtuk $M_{c,II}$-ben, hogy a negatív előjel a $-A^T, -C^T$ mátrixok előtt elhagyható, mert a pozitív és negatív oszlopvektorok ugyanazt a teret feszítik ki.

Tétel: A folytonosidejű időinvariáns lineáris rendszer állapotegyenletének van olyan $R^n = L + L^{\perp}$, $x = x_a + x_b$ felbontása, amelyben az állapotegyenlet alakja ún. megfigyelhetőségi lépcsős alakú (observability staircase form):

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{aa} & 0 \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} u, \\ y &= [C_a \quad 0]\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} + Du \end{aligned}}$$

továbbá az L-beli állapotok teljesen megfigyelhetők, az $L^{\perp}$-beli állapotok pedig (a nulla állapot kivételével) nem megfigyelhetők.

Bizonyítás: A dualitás miatt az $(A,B,C)_I$ rendszerről áttérhetünk az $(A^T, C^T, B^T)_{II}$ rendszerre, ennek meghatározhatjuk az irányíthatósági lépcsős alakját egy alkalmas $T_{c,II}$ koordináta-transzformációval, legyen ez $(\hat{A}^T, \hat{C}^T, \hat{B}^T)$. Ebből transzponálással nyerhető az $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ megfigyelhetőségi lépcsős alak.

TELJESRENDŰ ÁLLAPOTMEGFIGYELŐ

Teljesrendű lineáris állapotmegfigyelőnek nevezzük az $\hat{x}$ állapotú és kimentű

$$\boxed{\frac{d\hat{x}}{dt} = F\hat{x} + Gy + Hu, \quad \dim \hat{x} = \dim x = n}$$

dinamikus rendszert, ha aszimptotikusan becsülni tudja az $\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx$ rendszer állapotát, azaz $\tilde{x} := x - \hat{x}$ jelölés mellett $\lim_{t\to\infty} \tilde{x}(t) = 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - F\hat{x} - GCx - Hu + (Fx - Fx) = \\ &= (A - GC - F)x + (B - H)u + F(x - \hat{x}),\end{aligned}$$

ezért az aszimptotikus állapotbecsléshez megfelel

$$\boxed{\begin{array}{l} F := A - GC,\ H := B, \\ \dot{\tilde{x}} = F\tilde{x} \quad \text{stabil (és gyors).} \end{array}}$$

Világos, hogy ha T egy koordináta-transzformáció (nemszinguláris mátrix), akkor $T(x(t) - \hat{x}(t)) \to 0 \ \Leftrightarrow$ $x(t) - \hat{x}(t) \to 0.$ Ezért a kérdés megválaszolásához feltehetjük, hogy a rendszer már megfigyelhetőségi lépcsős alakra lett hozva $(A := \hat{A},\ B := \hat{B},\ C := \hat{C})$.

Partícionáljuk a G mátrixot a megfigyelhetőségi lépcsős alaknak megfelelően a $G = [G_a^T\ \ G_b^T]^T$ alakban, akkor

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\tilde{x}_a \\ \tilde{x}_b\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} - G_a C_a & 0 \\ A_{ba} - G_b C_a & A_{bb}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}_a \\ \tilde{x}_b\end{pmatrix}.$$

Az aszimtotikus állapotbecsléshez a becslési hibára vonatkozó állapotegyenlet sajátértékeinek stabilnak (és gyorsnak) kell lenniük, ahol a sajátértékek a következő karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\boxed{\varphi_o(s) = \det(sI - (A_{aa} - G_a C_a))\det(sI - A_{bb}).}$$

A feladat tehát nem oldható meg, ha a nem megfigyelhető (a megfigyelhetőségi lépcsős alakban A_{bb}-hez tartozó) sajátértékek (módusok) nem stabilak, mivel ezekre a megfigyelőben még megválasztható G nem hat. Vegyük észre, hogy G_b nincs hatással $\varphi_o(s)$-re.

Az időinvariáns lineáris rendszert ***detektálhatónak*** nevezzük, ha a nem megfigyelhető (a megfigyelhetőségi lépcsős alakban A_{bb}-hez tartozó) sajátértékek stabilak.

LTI RENDSZER KALMAN-FÉLE FELBONTÁSA

<u>Tétel:</u> Tetszőleges $\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx$ időinvariáns lineáris rendszer felbontható egy-egy (teljesen)

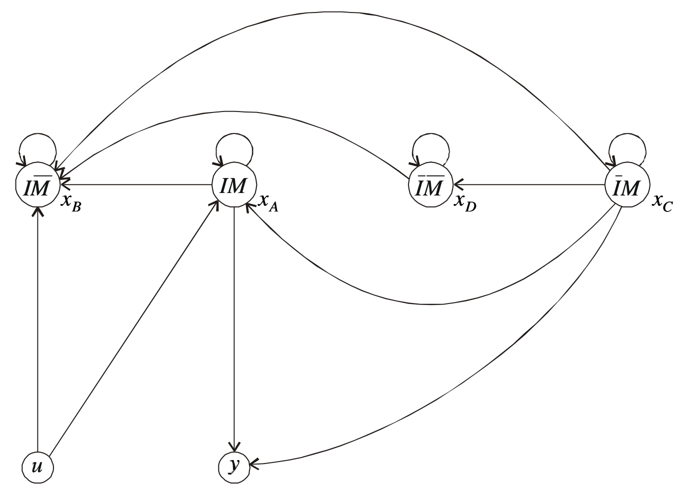
- irányítható és megfigyelhető (IM)
- irányítható, de nem megfigyelhető $(I\overline{M})$
- nem irányítható, de megfigyelhető $(\bar{I}M)$
- nem irányítható és nem megfigyelhető $(\bar{I}\overline{M})$

alrendszerre. A rendszer állapotegyenlete és átviteli függvénye a felbontásnak megfelelően a következő alakú:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{AA} & 0 & A_{AC} & 0 \\ A_{BA} & A_{BB} & A_{BC} & A_{BD} \\ 0 & 0 & A_{CC} & 0 \\ 0 & 0 & A_{DC} & A_{DD} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_A \\ B_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} C_A & 0 & C_C & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{pmatrix},$$

$$W(s) = C_A (sI - A_{AA})^{-1} B_A .$$



Megjegyzés: Az eredő állapotmátrix blokk-felső háromszögmátrix, a diagonálisban álló blokkok pedig blokk-alsó háromszögmátrixok, a rendszer karakterisztikus egyenlete ezért $\varphi_{total}(s) = \varphi_{AA}(s)\varphi_{BB}(s)\varphi_{CC}(s)\varphi_{DD}(s)$. Másrészt a $W(s)$ átviteli függvény mátrix alakja szerint $\varphi_W(s) = \varphi_{AA}(s)$, ezért $W(s)$ minden elemének számlálójában és nevezőben ott van $\varphi_{BB}(s)\varphi_{CC}(s)\varphi_{DD}(s)$, ami P/Z kiejtést eredményez.

DISZKRÉTIDEJŰ LTI RENDSZER IRÁNYÍTHATÓSÁGA

Tekintsük az $x_{i+1} = Ax_i + Bu_i$, $y = Cx_i + Du_i$ diszkrétidejű időinvariáns lineáris rendszert. Jelölje röviden (k, x), hogy a rendszer a kT pillanatban az x állapotban van, ahol T a mintavételi idő, akkor

$$\boxed{x_k = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-(j+1)} Bu_j .}$$

Ha $n = \dim x$ és az x állapot <u>elérhető</u> az nT pillanatban az $x_0 = 0$ állapotból, tehát $(0,0) \xrightarrow{u(\cdot)} (n, x)$, akkor ezzel ekvivalens, hogy

$$x = \left[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B\right] \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{pmatrix} = M_c \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{pmatrix},$$

ahol diszkrét időben is

$$\boxed{M_c := [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]}$$

Ezért a ***diszkrétidejű rendszer teljesen elérhető***

$\Leftrightarrow \mathrm{Span}\{B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B\} = R^n \Leftrightarrow rank\, M_c = n = \dim x$.

Tekintsük ezután az irányíthatóság kérdését. Ha a nulla állapot elérhető nT idő alatt az x állapotból, azaz $(0, x) \xrightarrow{u(\cdot)} (n,0)$, akkor ezzel ekvivalens, hogy

$$0 = A^n x + \left[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B\right] \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{pmatrix}, \quad A^n x = -M_c \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

Ha a rendszer teljesen elérhető, akkor x-hez meghatározható $A^n x$, és mivel $A^n x \in \mathrm{Span}\{B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B\} = R^n$, ezért létezik a feltételt kielégítő $u(\cdot) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ bemenő jel sorozat, amelynek hatására az x állapotból el lehet jutni a nulla állapotba. Ez azt jelenti, hogy a teljes elérhetőségből következik a teljes irányíthatóság. Fordítva azonban ennek nem kell fennálnia, mert az irányíthatósághoz csak $x \in \mathrm{range}(A^n) \cap \mathrm{Span}\{B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B\}$ szükséges. Kivételt képez az az eset, amikor $\exists A^{-1}$ (reverzibilis a rendszer).

<u>**Tétel:**</u> A diszkrétidejű időinvariáns lineáris rendszer *teljesen elérhető* akkor és csakis akkor, ha $rank\, M_c = n = \dim x$. A *teljes irányíthatóságnak* $rank\, M_c = n$ elégséges feltétele, és ha $\exists A^{-1}$, akkor szükséges feltétele is.

DISZKRÉTIDEJŰ LTI RENDSZER MEGFIGYELHETŐSÉGE

Tekintsük az $x_{i+1} = Ax_i + Bu_i$, $y = Cx_i + Du_i$ diszkrétidejű időinvariáns lineáris rendszert, és induljon a rendszer az x_0 állapotból, akkor

$$y_0 = Cx_0 + Du_0,$$

$$y_k = CA^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-(j+1)} Bu_j + Du_k, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Vezessük be az $\bar{y}_0 := y_0 - Du_0$ és

$$\bar{y}_k := y_k - \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-(j+1)} Bu_j - Du_k, \quad k \geq 1$$

jelölést, és legyen diszkrét időben is a megfigyelhetőségi mátrix

$$\boxed{M_o := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}, \text{ akkor következik } M_o x_0 = \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

A *konstrukció szerint* ennek az egyenletrendszernek x_0 megoldása, ezért x_0 megfigyelhetősége azon múlik, hogy a megoldás egyértelmű-e. Ha több megoldás is lenne, akkor nyilván nem lehetne az $\bar{y}(\cdot)$ megfigyelésből az x_0 kezdeti állapotot egyértelműen meghatározni. Csak egy megoldás van, ha $\mathrm{kernel}\, M_o = \{0\}$, amihez az szükséges, hogy M_o sorvektorai a teljes R^n teret kifeszítsék, tehát teljesüljön $\mathit{rank}\, M_o = n = \dim x$, ami ezért a teljes megfigyelhetőségnek szükséges és elégséges feltétele. A $k = n$ választásnak nincs jelentősége a Cayley-Hamilton tétel miatt.

Tekintsük ezután a rekonstruálhatóság kérdését. Ha a rendszer teljesen megfigyelhető, tehát teljesül a $\mathit{rank}\, M_o = n = \dim x$ feltétel, akkor x_0 egyértelműen meghatározható, és ebből

$$x_n := A^n x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-(j+1)} Bu_j .$$

Ez azt jelenti, hogy a teljes megfigyelhetőségből következik a teljes rekonstruálhatóság.

Tétel: A diszkrétidejű időinvariáns lineáris rendszer *teljesen megfigyelhető* akkor és csakis akkor, ha $\mathit{rank}\, M_o = n = \dim x$. A *teljes rekonstruálhatóságnak* $\mathit{rank}\, M_o = n$ elégséges feltétele, és ha $\exists A^{-1}$, akkor szükséges feltétele is.