Struktúrabecslés szubtraktív klaszterezéssel

Előadás vázlat

Összeállította: Harmati István Ph.D., egyetemi docens

Felhasznált irodalom:

Dr. Lantos Béla: Fuzzy systems and genetic algorithms, 2001, Műegyetemi kiadó, Budapest

4.1.2. A szubtraktív klaszterezés algoritmusa

1. Az x és y változó kvantálása. A Rácsvonalak metszetei adják a $N_{ij} = (x_i^*, y_j^*)$ rácspontokat.

2. A mintapontok sűrűségének approximációja.
   Ehhez a $M : N_{ij} \to R^1$ potenciál (vagy hegy) függvény határozzuk meg:

$$d(N_{ij},(x_k,y_k)) = (x_k - x_i^*)^2 + (y_k - y_j^*)^2,$$

$$M(N_{ij}) = \sum_{k=1}^{N} \exp\{-\alpha \cdot d(N_{ij},(x_k,y_k)\}.$$

   $M(N_{ij})$ az (i, j) rácspontban veszi fel a maximumot

3. Inicializálás: $m := 1$, $M_1 := M$, az α, β paraméterek megválasztása, a $\delta > 0$, $(M_{m+1}^* < \delta)$ leállási feltétel beállítása.

4. Ciklus:
   i. $M_m^* := \max\limits_{ij} M_m(N_{ij})$, $N_m^* := \arg\limits_{x_i^*, y_j^*} \max\limits_{ij} M_m(N_{ij}) = (\bar{x}_m^*, \bar{y}_m^*)$

   (a potenciálfüggvény maximális értéke és helye)

   ii. A potenciálfüggvény módosítása (subtracting - kivonás)

$$M_{m+1}(N_{ij}) := M_m(N_{ij}) - M_m^* \exp\{-\beta \cdot d(N_m^*, N_{ij})\}$$

   iii. Ha $M_{m+1}^* \geq \delta$, akkor Ugrás 4. lépésre, egyébként Stop.

4.1.3. A fuzzy rendszer felépítése a szubtraktív klaszterezési algoritmus eredménye alapján

A klaszterek középpontjai: $N_i^* = (\bar{x}_i^*, \bar{y}_i^*),\ i = 1,\dots,m$

A fuzzy reláció alakja minden $N_i^* = (\bar{x}_i^*, \bar{y}_i^*),\ i = 1,\dots,m$ klaszter középpontra:

$$R_i : \mathit{if}\ \ x\ \mathit{is}\ \mathit{near}\ x_i^*\ \ \mathit{then}\ \ y\ \mathit{is}\ \mathit{near}\ y_j^*,\quad i = 1,\dots,m.$$

Legyen az A_i fuzzy halmaz középpontja $\bar{x}_i := \bar{x}_i^*$

Legyen a B_i fuzzy halmaz középpontja $\hat{y}_i := \bar{y}_i^*$ (Sugeno rendszer, ezért ez lesz a szabály tüzelési értéke)

Az A_i fuzzy halmaz tagsági függvénye legyen Gauss függvény:

$$\mu_{A_i}(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \bar{x}_i}{\sigma_i}\right)^2\right\} =: \tau_i$$

(A szabály $\hat{y}_i$ kimenetének tüzelési súlya)

Az approximált kimenet:

$$\boxed{\hat{y} = \hat{f}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \tau_i \hat{y}_i}{\sum_{i=1}^{m} \tau_i} = \sum_{i=1}^{m} \tau_i^* \hat{y}_i}$$

ahol $\tau_i^* = \dfrac{\tau_i}{\sum_{k=1}^{m} \tau_k}$

MATLAB megvalósítás: `genfis2`

4.1.4. A fuzzy rendszer feljavítása

A hatékonyságot növelhetjük a $\bar{x}_i, \sigma_i,\ \hat{y}_i$ hangolásával (optimumkeresési módszerekkel)
Szigorúan tekintve már nem a szubtraktív klaszeterezés része.

Hiba egy tanítópontnál: $E_k = \frac{1}{2}[y_k - \hat{y}(x_k)]^2$

A totális hiba: $E_{\text{total}} = \sum_{k=1}^{N} E_k$

Egy p parameter szerinti hangolás:

$$\frac{\partial E_k}{\partial p} = -[y_k - \hat{y}(x_k)]\frac{\partial \hat{y}(x_k)}{\partial p}$$

$$\frac{\partial E_{\text{total}}}{\partial p} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial E_k}{\partial p}$$

Parciális deriváltak a hangoláshoz:

$$\frac{\partial \hat{y}(x_k)}{\partial \hat{y}_i} = \tau_i^*$$

$$\frac{\partial \hat{y}(x_k)}{\partial \bar{x}_i} = \hat{y}_i \frac{\partial \tau_i}{\partial \bar{x}_i} \frac{1}{\sum_k \tau_k} + \sum_i \hat{y}_i \tau_i (-1) \frac{1}{(\sum_k \tau_k)^2} \frac{\partial \tau_i}{\partial \bar{x}_i} =$$

$$= \hat{y}_i \frac{\partial \tau_i}{\partial \bar{x}_i} \frac{1}{\sum_k \tau_k} - \hat{y}(x_k) \frac{1}{\sum_k \tau_k} \frac{\partial \tau_i}{\partial \bar{x}_i}$$

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial \bar{x}_i} = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - \bar{x}_i}{\sigma_i}\right)^2\right](-\frac{1}{2})\frac{1}{\sigma_i^2} 2(x_k - \bar{x}_i)(-1) = \tau_i \frac{x_k - \bar{x}_i}{\sigma_i^2}$$

$$\frac{\partial \hat{y}(x_k)}{\partial \bar{x}_i} = [\hat{y}_i - \hat{y}(x_k)]\tau_i^* \frac{x_k - \bar{x}_i}{\sigma_i^2}$$

$$\frac{\partial \hat{y}(x_k)}{\partial \sigma_i} = [\hat{y}_i - \hat{y}(x_k)]\tau_i^* \frac{(x_k - \bar{x}_i)^2}{\sigma_i^3}$$

A hangolás $e = y_k - \hat{y}(x_k)$ bevezetése mellett:

$$\hat{y}_i := \hat{y}_i + \gamma e \tau_i^*$$

$$\bar{x}_i := \bar{x}_i + \gamma e[\hat{y}_i - \hat{y}(x_k)]\tau_i^*(x_k - \bar{x}_i)/\sigma_i^2$$

$$\sigma_i := \sigma_i + \gamma e[\hat{y}_i - \hat{y}(x_k)]\tau_i^*(x_k - \bar{x}_i)^2/\sigma_i^3$$