

# LINEÁRIS PARAMÉTERBECSLÉS

## Feladat megfogalmazása:

Számos mérnöki probléma átfogalmazható lineáris paraméterbecslési feladattá, amikor is egy ismeretlen paramétervektorban lineáris alakot kell illeszteni a rendelkezésre álló zajos megfigyelésekhez. A paraméterekben lineáris kifejezést

$$y(i) = \varphi^T(i) \vartheta + \varepsilon(i), \quad y \in R^m, \quad \vartheta \in R^p, \quad \varphi^T \text{ } m \times p \text{ méretű}$$

alakúnak feltételezzük, ahol  $y(i)$ ,  $\varphi^T(i)$  a megfigyelésekből képezhető,  $\vartheta$  az ismeretlen paramétervektor és  $\varepsilon(i)$

ismeretlen zaj, vagy más néven  $\varepsilon(i) = y(i) - \varphi^T(i) \vartheta$  az egyenlethiba (reziduál),  $i = 1, 2, \dots, t$ .

Vegyük észre, hogy abban a speciális és gyakori esetben, amikor  $y \in R^1$ , pl.  $y(i)$  egyváltozós rendszer kimenőjele az  $i$ -edik mintavételi időpontban,  $\varphi^T(i)$  egy sorvektor ( $1 \times p$  méretű mátrix).

Két esetet fogunk vizsgálni. Az első esetben  $t = N$  fix (off-line paraméterbecslés vagy batch-feldolgozás). A másik esetben az adatok valós időben fokozatosan gyűlnek,  $t$  fokozatosan nő (rekurzív paraméterbecslés).

## Lineáris paraméterbecslés batch-üzemmódban:

**Közönséges legkisebb négyzetek (LS) módszere:** Kézenfekvő választás az ismeretlen  $\vartheta$  paramétervektort a megfigyelésekből az egyenlethibák négyzetei összegének minimalizálásával meghatározni (LS, least squares method):

$$V(\vartheta, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \varepsilon^2(i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \|y(i) - \varphi^T(i) \vartheta\|^2 = \frac{1}{2} \|Y - \Phi \vartheta\|^2,$$

$$Y = \begin{pmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \vdots \\ \varphi^T(t) \end{bmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \varepsilon(1) \\ \vdots \\ \varepsilon(t) \end{pmatrix},$$

$$\vartheta = \arg \min_{\vartheta \in R^p} V(\vartheta, t).$$

$V(\vartheta, t)$  konvex függvény  $\vartheta$ -ban  $\Rightarrow V'(\vartheta, t) = 0$ :

$$\begin{aligned} \|Y - \Phi \vartheta\|^2 &= \langle Y - \Phi \vartheta, Y - \Phi \vartheta \rangle = \\ &= \langle Y, Y \rangle - 2 \langle Y, \Phi \vartheta \rangle + \langle \Phi \vartheta, \Phi \vartheta \rangle = \\ &= \langle Y, Y \rangle - 2 \langle \Phi^T Y, \vartheta \rangle + \langle \Phi^T \Phi \vartheta, \vartheta \rangle, \end{aligned}$$

$$V'(\vartheta, t) = \frac{dV}{d\vartheta} = -\Phi^T Y + \Phi^T \Phi \vartheta = 0$$

Ha  $\hat{\vartheta}$  jelöli az optimális LS megoldást, akkor algebrailag két ekvivalens alakban írható fel, amelyből a normál egyenletnek nevezett alak numerikusan jobban kondicionált:

$$\Phi^T \Phi \hat{\vartheta} = \Phi^T Y \text{ normál egyenlet,}$$

$$\hat{\vartheta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y.$$

Mivel a  $\Phi^T \Phi$  mátrixnak invertálhatónak kell lennie, ez a kísérletekre feltételt szab, amit úgy szoktunk megfogalmazni, hogy a megfigyeléseknek megfelelően gerjesztőknek, ún. perzisztens gerjesztésűnek kell lenni a paraméterek meghatározásához.

**Súlyozott legkisebb négyzetek (WLS) módszer:** Bevezethetünk az egyenlethibák súlyozására egy  $W > 0$  szimmetrikus és pozitív definit súlyozó mátrixot (WLS, weighted least squares method), amelynek felhasználásával választhatjuk a  $W$ -vel súlyozott hibafüggvényt.

Mivel  $V(\vartheta, t)$  ebben az esetben is konvex és kvadratikusság, ezért a globális minimum szükséges és elégséges feltétele most is  $V'(\vartheta, t) = 0$ .

$$V(\vartheta, t) = \frac{1}{2} \langle WE, E \rangle = \frac{1}{2} \langle W(Y - \Phi \vartheta), Y - \Phi \vartheta \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \{ \langle WY, Y \rangle - \langle W\Phi \vartheta, Y \rangle - \langle WY, \Phi \vartheta \rangle + \langle W\Phi \vartheta, \Phi \vartheta \rangle \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ \langle WY, Y \rangle - 2 \langle \Phi^T WY, \vartheta \rangle + \langle \Phi^T W \Phi \vartheta, \vartheta \rangle \}.$$

$$V'(\vartheta, t) = \frac{dV}{d\vartheta} = -\Phi^T WY + \Phi^T W \Phi \vartheta = 0.$$

Ha  $\hat{\vartheta}$  jelöli az optimális WLS megoldást, akkor algebrailag két ekvivalens alakban írható fel, amelyből a normál egyenletnek nevezett alak numerikusan jobban kondicionált:

$$\Phi^T W \Phi \hat{\vartheta} = \Phi^T WY \text{ normál egyenlet,}$$

$$\hat{\vartheta} = (\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T WY.$$

Általában  $W$  jelenléte megnöveli a számítási időt, mivel  $t = N$  és  $m = \dim y$  esetén  $W$  mérete  $(Nm) \times (Nm)$ . A módszert a rekurzív paraméterbecslésnél fogjuk felhasználni, ami az adaptív irányításoknál lesz fontos.

### Rekurzív paraméterbecslés:

Ha a  $\vartheta$  paramétervektor becslés közben nem állandó, hanem lassan fluktuálhat, akkor a régebbi egyenlethibák más paramétervektorhoz tartoztak, ezért az aktuális pillanatban már kisebb súllyal célszerű figyelembe venni azokat. Célszerű tehát valós időben biztosítani a régi hibák fokozatos elfelejtését. Ehhez választható egy  $\lambda \in (0,1]$  felejtési tényező, amelynek  $\lambda^{t-i}$  hatványával az  $\varepsilon(i)$  hibát megszorozzuk. Ha  $0 < \lambda < 1$ , akkor  $\lambda^{t-i}$  annál kisebb, minél nagyobb a  $t-i$  kitevő, azaz minél régebbi az  $i$ -edik pillanathoz tartozó megfigyelés a  $t$ -edik pillanatbelihez képest. Ha  $\lambda = 1$ , akkor nincs felejtés.

$$\begin{aligned} V(\vartheta, t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} \|y(i) - \varphi^T(i)\vartheta\|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \langle \lambda^{t-i} [y(i) - \varphi^T(i)\vartheta], y(i) - \varphi^T(i)\vartheta \rangle. \end{aligned}$$

Ha  $m = \dim y$ , akkor ez megfelel a korábban már tárgyalt esetnek, ahol a  $W$  súlyozó mátrix blokkdiagonális:

$$A := W = \text{diag}(\lambda^{t-1} I_m, \dots, \lambda^1 I_m, \lambda^0 I_m).$$

Speciálisan ha  $\dim y = 1$ , akkor  $A := \text{diag}(\lambda^{t-1}, \dots, \lambda, 1)$ .

Mivel  $V(\vartheta, t)$  továbbra is konvex és kvadratikus, ezért a globális minimum szükséges és elégséges feltétele felejtés esetén

$$\begin{aligned} \Phi^T \Lambda \Phi \hat{\vartheta}(t) &= \Phi^T \Lambda Y \text{ normál egyenlet,} \\ \hat{\vartheta}(t) &= (\Phi^T \Lambda \Phi)^{-1} \Phi^T \Lambda Y. \end{aligned}$$

A célunk minél egyszerűbb rekurzív összefüggés megadása  $\hat{\vartheta}(t)$  számára. Vezessük ezért be a

$$P(t) := [\Phi^T \Lambda \Phi]^{-1} = \left[ \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} \varphi(i) \varphi^T(i) \right]^{-1}$$

jelölést, akkor

$$\begin{aligned} P(t) &= \left[ \sum_{i=1}^{t-1} \lambda \cdot \lambda^{t-1-i} \varphi(i) \varphi^T(i) + \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \\ &= [\lambda P^{-1}(t-1) + \varphi(t) \varphi^T(t)]^{-1} \end{aligned}$$

Alkalmazzuk az inverz mátrix lemmát

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$$

$$A := \lambda P^{-1}(t-1), \quad B := \varphi(t), \quad C := I, \quad D := \varphi^T(t)$$

választás mellett, akkor

$$P(t) = \frac{1}{\lambda} P(t-1) - \frac{1}{\lambda} P(t-1) \varphi(t) \times \\ \left[ I + \varphi^T(t) \frac{1}{\lambda} P(t-1) \varphi(t) \right]^{-1} \varphi^T(t) \frac{1}{\lambda} P(t-1)$$

ahonnan átalakítások után kapjuk, hogy

$$P(t) = \frac{1}{\lambda} \{ P(t-1) - P(t-1) \varphi(t) \times \\ [\mathcal{I} + \varphi^T(t) P(t-1) \varphi(t)]^{-1} \varphi^T(t) P(t-1) \}$$

Tekintsük ezután a paramétervektor meghatározását:

$$\hat{\vartheta}(t) = P(t) \left[ \lambda \sum_{i=1}^{t-1} \lambda^{t-1-i} \varphi(i) y(i) + \varphi(t) y(t) \right],$$

ahonnan

$$\hat{\vartheta}(t-1) = P(t-1) \sum_{i=1}^{t-1} \lambda^{t-1-i} \varphi(i) y(i) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{t-1} \lambda^{t-1-i} \varphi(i) y(i) = P^{-1}(t-1) \hat{\vartheta}(t-1)$$

$$P^{-1}(t-1) = \frac{1}{\lambda} [P^{-1}(t) - \varphi(t) \varphi^T(t)].$$

Visszahelyettesítve ezeket a kifejezéseket kapjuk, hogy

$$\hat{\vartheta}(t) = P(t) \left\{ \lambda \frac{1}{\lambda} [P^{-1}(t) - \varphi(t) \varphi^T(t)] \hat{\vartheta}(t-1) + \varphi(t) y(t) \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{\vartheta}(t) = \hat{\vartheta}(t-1) + P(t) \varphi(t) [y(t) - \varphi^T(t) \hat{\vartheta}(t-1)]}.$$

Ha bevezetjük a  $K(t) := P(t) \varphi(t)$  jelölést, akkor

$$K(t) = \frac{1}{\lambda} \{ P(t-1) - P(t-1) \varphi(t) \times \\ [\mathcal{I} + \varphi^T(t) P(t-1) \varphi(t)]^{-1} \varphi^T(t) P(t-1) \} \varphi(t)$$

ahonnan kapjuk a rekurzív paraméterbecslés szabályozás-technikában szokásos alakját:

$$\boxed{\begin{aligned} K(t) &= P(t-1) \varphi(t) [\mathcal{I} + \varphi^T(t) P(t-1) \varphi(t)]^{-1} \\ P(t) &= [I - K(t) \varphi^T(t)] P(t-1) / \lambda \\ \hat{\vartheta}(t) &= \hat{\vartheta}(t-1) + K(t) [y(t) - \varphi^T(t) \hat{\vartheta}(t-1)] \end{aligned}}$$

Itt  $\hat{y}(t) = \varphi^T(t) \hat{\vartheta}(t-1)$  a kimenet predikciója a paramétervektor előző értéke mellett,  $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t)$  pedig a reziduál. Az előző becslést a  $K(t)$ -vel felerősített reziduállal kell korrigálni. A  $P(0)$  és  $\hat{\vartheta}(0)$  induló értékek meghatározására szóba jöhet egy előzetes off-line paraméterbecslés.

## NEMLINEÁRIS PARAMÉTERBECSLÉS

A lineáris paraméterbecslési feladatnál a  $t$ -edik pillanatban  $y(t) = \varphi^T(t) \vartheta_0$  kapcsolta össze a megfigyeléseket, ahol  $\varphi^T(t)$  alakját analitikusan ismertük, de a paramétervektor  $\vartheta_0$  valódi értéke ismeretlen volt, értékét paraméterbecsléssel határoztuk meg.

**Általánosítás (nemlineáris paraméterbecslési feladat):**

A megfigyeléseket a  $t$ -edik pillanatban az

$$y(t) = h(\vartheta_0, t)$$

analitikusan ismert nemlineáris modell kapcsolja össze, benne a  $\vartheta_0$  ismeretlen paraméter becslését keressük.

Tegyük fel, hogy már rendelkezésre áll valamilyen  $\hat{\vartheta}(t-1)$  becslés, akkor kézenfekvő  $\hat{\vartheta}(t-1)$  körül a  $h(\vartheta, t)$  függvényt Taylor-sorba fejteni, és a lineáris taggal közelíteni a nemlineáris függvényt:

$$h(\vartheta_0, t) \approx h(\hat{\vartheta}(t-1), t) + \left. \frac{dh(\vartheta, t)}{d\vartheta} \right|_{\hat{\vartheta}(t-1)} (\vartheta_0 - \hat{\vartheta}(t-1)),$$

$$y(t) \approx h(\hat{\vartheta}(t-1), t) - \left. \frac{dh(\vartheta, t)}{d\vartheta} \right|_{\hat{\vartheta}(t-1)} \hat{\vartheta}(t-1) + \left. \frac{dh(\vartheta, t)}{d\vartheta} \right|_{\hat{\vartheta}(t-1)} \vartheta_0$$

Bevezetve az

$$y(t) := y(t) - h(\hat{\vartheta}(t-1), t) + \left. \frac{dh(\vartheta, t)}{d\vartheta} \right|_{\hat{\vartheta}(t-1)} \hat{\vartheta}(t-1),$$

$$\varphi^T(t) := \left. \frac{dh(\vartheta, t)}{d\vartheta} \right|_{\hat{\vartheta}(t-1)} = \frac{dh(\hat{\vartheta}(t-1), t)}{d\vartheta}$$

jelölést, a nemlineáris paraméterbecslési feladat lokális linearizálással és a fenti jelölésekkel az  $y(t) = \varphi^T(t) \vartheta_0$  lineáris paraméterbecslési alapeladatra transzformálható.

*Következmény:*

A nemlineáris paraméterbecslési feladat lokális linearizálással visszavezethető a rekurzív lineáris paraméterbecslésre. Ezért a lineáris paraméterbecslés rekurzív képlete felhasználható a becslés frissítésére.

Tekintsük ebből a következő kifejezést:

$$\begin{aligned} y(t) - \varphi^T(t) \hat{\vartheta}(t-1) &:= y(t) - h(\hat{\vartheta}(t-1), t) + \left. \frac{dh(\vartheta, t)}{d\vartheta} \right|_{\hat{\vartheta}(t-1)} \hat{\vartheta}(t-1) - \left. \frac{dh(\vartheta, t)}{d\vartheta} \right|_{\hat{\vartheta}(t-1)} \hat{\vartheta}(t-1) = \\ &= y(t) - h(\hat{\vartheta}(t-1), t). \end{aligned}$$

Jól látható, hogy a reziduált közvetlenül a  $h(\vartheta, t)$  nemlineáris modell alapján célszerű számítani és a bevezetett korrekció elvégzésére nincs szükség.

A *nemlineáris paraméterbecslésre* (lokális linearizálást alkalmazva) a következő rekurzív alakot nyertük:

$$\begin{aligned} \varphi^T(t) &:= \left. \frac{dh(\vartheta, t)}{d\vartheta} \right|_{\hat{\vartheta}(t-1)} \\ P(t) &= \frac{1}{\lambda} \{ P(t-1) - P(t-1) \varphi(t) [\lambda I + \varphi^T(t) P(t-1) \varphi(t)]^{-1} \varphi^T(t) P(t-1) \} \\ \hat{\vartheta}(t) &= \hat{\vartheta}(t-1) + P(t) \varphi(t) [y(t) - h(\hat{\vartheta}(t-1), t)] \\ t &:= t + 1. \end{aligned}$$

# K-LÉPÉssel ELŐRETARTÓ PREDIKTOR

## Végtelen sorozatok $l_2$ tere:

Jelölje  $l_2$  azon (komplex)  $x = \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}$  sorozatok terét, melyekre teljesül  $\|x\|^2 = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} |x_i|^2 < \infty$ . Ebben a térben skalárszorzatot definiálhatunk  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} x_i \tilde{y}_i$  módon (“ $\sim$ ” jelöli a konjugáltat), amely mellett  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$  és  $l_2$  egy Hilbert-tér (végtelendimenziós lineáris normált tér, melyben a norma skalárszorzattal van definiálva, és amelyben minden Cauchy-sorozatnak van határértéke).

Az  $x$  sorozatot jelölje  $x(t)$ , ahol  $x(-1) = x_{-1}$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $x(1) = x_1$ , stb. Vezessük be a  $q$  és  $q^{-1}$  shift-operátorokat, valamint az  $i$  identikus operátort:

$$\begin{aligned} q: l_2 &\rightarrow l_2, & qx(t) &= x(t+1); \\ q^{-1}: l_2 &\rightarrow l_2, & q^{-1}x(t) &= x(t-1); \\ i: l_2 &\rightarrow l_2, & ix(t) &= x(t); \\ qq^{-1} &= q^{-1}q = i. \end{aligned}$$

## Korlátos stabil operátorok és inverzük $l_2$ -ben:

Az  $A \in K(l_2 \rightarrow l_2)$  operátort korlátos (stabil) lineáris operátornak nevezzük, ha létezik olyan véges  $c > 0$  szám, hogy minden  $x \in l_2$  esetén  $\|Ax\| \leq c\|x\|$ . Az  $A$  operátor normája a feltételt kielégítő  $c$  értékek infimuma:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \inf \{c > 0 : \|Ax\| \leq c\|x\|, \forall x \in l_2\} < \infty, \\ \|A\| &= \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| < \infty. \end{aligned}$$

Legyen a  $H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots$  sor konvergens a  $z$  komplex változóban  $\forall |z^{-1}| < 1 \Rightarrow \forall |z| > 1$  esetén, pl. teljesüljön  $\sum_{i=0}^{\infty} |h_i| < \infty$ . Pl.  $H(z) = B(z)/A(z)$ , ahol  $B(z)$ ,  $A(z)$

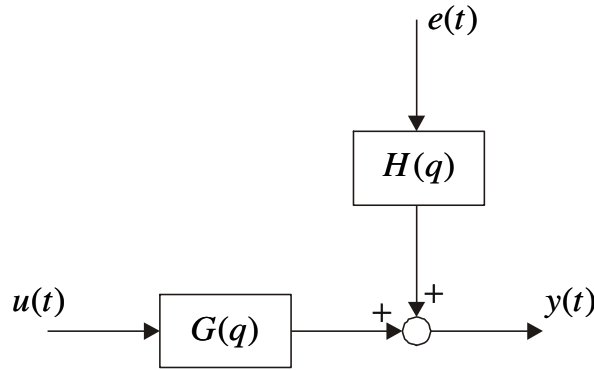
polinomok és  $A(z)$  stabil (az  $A(z)$  polinom  $z_i$  gyökeire teljesül  $|z_i| < 1$ ). Ilyenkor  $H(q) \in K(l_2 \rightarrow l_2)$ , mert

$$H(q)x(t) = h_0 x(t) + h_1 x(t-1) + h_2 x(t-2) + \dots,$$

$$\|H(q)x(t)\| \leq |h_0|\|x\| + |h_1|\|x\| + |h_2|\|x\| + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} |h_i|\|x\| < \infty.$$

Világos, hogy ha  $B(z)$  is stabil, akkor  $H^{-1}(q)$  is korlátos.

### Zajjal terhelt diszkrétidejű lineáris rendszer:



$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t)$$

A zajos rendszer modelljében  $G(q)$ ,  $H(q)$  és  $H^{-1}(q)$  stabil szűrők,  $q$ ,  $q^{-1}$  shift-operátorok,  $e(t)$  fehér zaj.

Rendelkezésre álló megfigyelések:

$$y_{-\infty}^t = \{\dots, y(t-2), y(t-1), y(t)\}$$

$$u_{-\infty}^{t+k} = \{\dots, u(t+k-2), u(t+k-1), u(t+k)\}$$

**Optimális becslés:**  $\hat{y}(t+k | y_{-\infty}^t, u_{-\infty}^{t+k}) = \hat{y}(t+k | t)$

**Cél:**  $E[y(t+k) - \hat{y}]^2 \rightarrow \min$

Bontsuk két részre a  $H(q)$  operátort:

$$H(q) = H_k(q) + q^{-k} \tilde{H}_k(q),$$

$$H(q) = 1 + h_1 q^{-1} + h_2 q^{-2} + \dots,$$

$$H_k(q) = 1 + h_1 q^{-1} + \dots + h_{k-1} q^{-(k-1)},$$

$$\tilde{H}_k(q) = h_k + h_{k+1} q^{-1} + h_{k+2} q^{-2} + \dots$$

Vegyük észre, hogy  $e(t)$  kiszámítható, ha  $y(t)$ ,  $u(t)$  mért értéke rendelkezésre áll (de csak ekkor):

$$e(t) = H^{-1}(q)[y(t) - G(q)u(t)].$$

Átalakítások:

$$\begin{aligned} y(t+k) &= G(q)u(t+k) + H(q)e(t+k) = \\ &= G(q)u(t+k) + H_k(q)e(t+k) + \tilde{H}_k(q)e(t) = \\ &= G(q)u(t+k) + H_k(q)e(t+k) + \\ &\quad + \tilde{H}_k(q)H^{-1}(q)[y(t) - G(q)u(t)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [y(t+k) - \hat{y}]^2 &= [H_k(q)e(t+k)]^2 + \\ &\quad + 2[H_k(q)e(t+k)] \\ &\quad \times \{G(q)u(t+k) + \tilde{H}_k(q)H^{-1}(q)[y(t) - G(q)u(t)] - \hat{y}\} + \\ &\quad + \{G(q)u(t+k) + \tilde{H}_k(q)H^{-1}(q)[y(t) - G(q)u(t)] - \hat{y}\}^2. \end{aligned}$$



Világos, hogy

$$H_k(q)e(t+k) = e(t+k) + h_1e(t+k-1) + \dots + h_{k-1}e(t+1)$$

az  $e(t)$  bemeneti zajnak csak  $t$  utáni értékeit, míg

$$\tilde{H}_k(q)H^{-1}(q)[y(t) - G(q)u(t)]$$

az  $u(t)$  és  $y(t)$  megfigyeléseknek csak  $t$ -beli és azt megelőző értékeit tartalmazza.

*Korrelációs feltevés:*

- i)  $H_k(q)e(t+k)$  és  $\tilde{H}_k(q)H^{-1}(q)[y(t) - G(q)u(t)]$  függetlenek.
- ii)  $H_k(q)e(t+k)$  és  $G(q)u(t+k)$  függetlenek.
- iii)  $E e(t) = 0, \forall t$  esetén.

*Célfüggvény a feltevések teljesülésekor:*

$$E[y(t+k) - \hat{y}]^2 = E[H_k(q)e(t+k)]^2 + E\{G(q)u(t+k) + \tilde{H}_k(q)H^{-1}(q)[y(t) - G(q)u(t)] - \hat{y}\}^2.$$

Mivel a jobb oldalon az első tag csak jövőbeli értékeket tartalmaz, ezért nem befolyásolható. A második tag pozitív, amely minimumát akkor éri el, amikor nullává válik.

**Optimális  $k$ -lépéssel előretartó prediktor:**

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+k|t) &= G(q)u(t+k) + \tilde{H}_k(q)H^{-1}(q)[y(t) - G(q)u(t)] = \\ &= [1 - q^{-k}\tilde{H}_k(q)H^{-1}(q)]G(q)u(t+k) + \tilde{H}_k(q)H^{-1}(q)y(t) \end{aligned}$$

Innen következik az időpontok cseréjével, hogy

$$\begin{aligned} \hat{y}(t|t-k) &= [1 - q^{-k}\tilde{H}_k(q)H^{-1}(q)]G(q)u(t) \\ &\quad + q^{-k}\tilde{H}_k(q)H^{-1}(q)y(t) \end{aligned}$$

Speciálisan  $k=1$  esetén:

$$\begin{aligned} H_k(q) &= 1, \quad \tilde{H}_k(q) = q[H(q) - 1], \\ \tilde{H}_k(q)H^{-1}(q) &= q[H(q) - 1]H^{-1}(q) = q[1 - H^{-1}(q)], \\ q^{-k}\tilde{H}_k(q)H^{-1}(q) &= [1 - H^{-1}(q)], \\ 1 - q^{-k}\tilde{H}_k(q)H^{-1}(q) &= H^{-1}(q), \end{aligned}$$

**Optimális 1-lépéssel előretartó prediktor:**

$$\begin{aligned} \hat{y}(t|t-1) &= H^{-1}(q)G(q)u(t) + [1 - H^{-1}(q)]y(t) \\ \varepsilon(t) &:= y(t) - \hat{y}(t|t-1) = H^{-1}(q)[y(t) - G(q)u(t)] \text{ (reziduál)} \end{aligned}$$

Az eredményeket preditív irányításnál ( $k \neq 1$ ) és identifikációnál ( $k = 1$ ) alkalmazzuk.

# DISZKRÉTIDEJŰ LINEÁRIS RENDSZERMODELLEK

Feltevés:

- $e(t)$  Gauss-féle fehér zaj (zajbemenet),
- $y(t)$  a vizsgált sztochasztikus folyamat (kimenet),
- $u(t)$  egy opcionális jel (hasznos bemenet)
- $d \geq 0$  egész (holtidő).

Az időt a mintavételi időre normalizáltnak tekintjük (formálisan  $T=1$ , a megfigyelhető időpontok halmaza  $T = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ).

Alapmodellek:

**Mozgóátlag (MA, moving average) folyamat:**

$$y(t) = e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_{n_c} e(t-n_c).$$

**Autoregresszív (AR, autoregressive) folyamat:**

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) = e(t).$$

**ARMA folyamat:**

$$\begin{aligned} y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) = \\ = e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_{n_c} e(t-n_c). \end{aligned}$$

A MATLAB-ra épülő és Ljung által kifejlesztett *System Identification Toolbox* (a továbbiakban IDENT) különféle rendszermodellek identifikációját teszi lehetővé az operátor tartományban és az állapottérben mind folytonos, mind pedig diszkrét időben.

Ezek közül a diszkrétidejű egyváltozós (SISO) rendszerek modelljeire fogunk koncentrálni diszkrét időben.

A rendszermodellek elnevezéseiben AR autoregresszív (auto regressive), MA mozgóátlag (moving average), X külső bemenőjelet tartalmazó (exogenous signal), OE kimenetre redukált additív zajt (output error) tartalmazó, BJ Box-Jenkins modell szerinti és PEM általános lineáris paraméterbecslési modell (parameter estimation model) szerinti folyamatokra utal.

Az IDENT különféle diszkrétidejű lineáris rendszermodellek választását teszi lehetővé. Az elnevezések követik az alapmodellek neveit, az X (exogeneous signal) a külső gerjesztő jelre, azaz a rendszer bemenőjélére utal.

$$(AR) \quad A(q)y(t) = e(t),$$

$$(ARX) \quad A(q)y(t) = B(q)u(t - n_k) + e(t),$$

$$(ARMAX) \quad A(q)y(t) = B(q)u(t - n_k) + C(q)e(t),$$

$$(OE) \quad y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t - n_k) + e(t),$$

$$(BJ) \quad y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t - n_k) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t),$$

$$(PEM) \quad A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t - n_k) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t).$$

Az egyes modellek felfoghatók a PEM modell speciális eseteinek, ahol  $u(t)$  a hasznos külső bemenet,  $e(t)$  fehér zaj,  $y(t)$  a zajjal terhelt kimenet, továbbá

$A(q), B(q), C(q), D(q), F(q)$  polinomok a  $q^{-1}$  shift-operátorban és az IDENT szóhasználata szerint  $n_k$  felel meg a késleltetésnek vagy “holtidőnek” ( $n_k T$ , ahol  $T$  a mintavételi idő). Az  $A(q), C(q), D(q), F(q)$  polinomok 1 vezető együtthatójú (monic) polinimok a  $q^{-1}$  shift-operátorban, pl.

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a}.$$

Azért, hogy a zajmentes rendszer erősítése tetszőleges lehessen, a  $B(q)$  polinom már nem lehet 1 vezető együtthatójú:

$$B(q) = b_1 + b_2 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b+1}.$$

Az IDENT-ben használt késleltetés vagy “holtidő” (delay) elnevezéssel kapcsolatban meg kell jegyezni, hogy pl. az  $A/\{(1 + sT_1)(1 + sT_2)\}$  kéttárolós tag, bemenetén DAC, kimenetén ADC átalakítóval a

$$\frac{b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2}}{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}} = \frac{b_1 + b_2 q^{-1}}{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}} q^{-1}$$

stabil operátorral jellemezhető, ami  $n_b = 2$  paraméter-számnak és  $n_k = 1$  (!) “holtidőnek” felel meg.

A zajcsatorna erősítése az  $e(t) \in N(0, \sigma)$  fehér zaj megfelelőre választott szórásával vehető figyelembe. A szórás helyett az IDENT a  $\lambda := \sigma^2$  paramétert használja.

A MATLAB konvenciója szerint az  $A(q), \dots, F(q)$  polinomokat együttthatóikkal kell megadni a  $q$  (!) hatványainak csökkenő sorrendjében, tehát  $A(q)$  esetén az

$$A = [1 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n_a}]$$

sorvektor formájában. Speciális megkötés, hogy  $n_k$  és  $B$  egyszerre kerül megadásra oly módon, hogy  $B$  elején  $n_k$  darab vezető nullát szúrunk be. Pl. mintavételezett kéttárolós tag és ARX modell esetén a diszkrétidejű rendszermodell

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t),$$

melyet az

$$A = [1 \ a_1 \ a_2]$$

$$B = [0 \ b_1 \ b_2]$$

sorvektorokkal és a  $\lambda$  szórásnégyzettel jellemezhetünk.

A rendszermodell speciális “th” adatstruktúrával jellemezhető. Ha a rendszer ismert (a polinomok együttthatói és a fehér zaj szórásnégyzete numerikusan ismertek, mert például ismert rendszeren akarunk jeleket előállítani szimulációs vizsgálatokhoz, pl. az identifikációs módszerek ellenőrzése céljából egy etalon rendszeren), akkor az IDENT a

$$th = \text{poly2th}(A, B, C, D, F, \lambda, T)$$

függvényhívás hatására felépíti és  $th$ -ban tárolja a rendszert jellemző adatstruktúrát. A hátul álló  $C, D, F, \lambda, T$  paraméterek elhagyhatók híváskor, ilyenkor értékük 1 lesz. Szimulációs vizsgálatokhoz ezután zajos vagy zajmentes kimenetet generálhatunk ismert  $u$  és  $e$  bemenőjel és zaj sorozatok esetén az IDENT

$$y = \text{idsim}([u \ e], th)$$

$$y = \text{idsim}(u, th)$$

függvényhívásaival. A bemenőjelek sorozatait oszlopvektorok formájában kell megadni, a kimenőjel oszlopvektorokban keletkezik. Bemenőjeleket generálhatunk például a MATLAB `rand` és `sign` függvényei felhasználásával.

Ismeretlen rendszer identifikációja esetén mérjük az  $u(t)$  bemenet és a zajos  $y(t)$  kimenet értékeit, ezeket összegyűjtjük az  $u$  és  $y$  oszlopvektorokban, felépítjük a megfigyelésekből álló és két oszloppal rendelkező  $z = [y \ u]$  mátrixot, megválasztjuk a rendszermodellt és az abban szereplő polinomok fokszámait, megválasztjuk a holtidő értékét, és elvégezzük az identifikációt az IDENT szolgáltatásaival.

Az identifikációs módszerek feladata, hogy meghatározza a polinomok valamilyen értelemben optimális paramétereit, miközben az  $e(t)$  zaj értékei ismeretlenek. Erre a célra a legkisebb négyzetek módszere (LS, least squares method) vagy ennél általánosabb paraméterbecslési technikák, a zaj fehéritését megcélzó segédváltozós (IV, instrumental variables) módszer, numerikus optimum keresés, vagy esetleg ezek kombinációja alkalmazható. Az IDENT a rendszermodell típusától függően választja meg az identifikációhoz használt numerikus módszert. A segédváltozós módszer (IV) csak ARX modell esetén alkalmazható. A rendszermodell polinomjaiban szereplő nemtriviális paraméterek számát, ami  $B(q)$  kivételével a polinom fokszáma, egy sorvektorban kell megadni, amely pl. PEM modell esetén az

$$nn = [n_a \ n_b \ n_c \ n_d \ n_f \ n_k]$$

sorvektort jelenti. A 0 fokszám megengedett, pl.  $n_a = 0$  esetén  $A(q) = 1$ , tehát hatástalan. A PEM modell ekkor BJ modellé fajul, ami az eltérő numerikus módszerek miatt nem jelenti azt, hogy ebben az esetben a PEM és a BJ identifikáció egyforma eredményre vezet. Ha a választott rendszermodell nem tartalmazza az összes  $A(q), \dots, F(q)$  polinomot, akkor a hiányzó polinom fokszáma tilos szerepeltetni  $nn$ -ben. A megmaradó fokszámmok mindig a

PEM esetére megadott sorrendben szerepeltetendő  $nn$ -ben:

$$(AR) \quad nn = n_a$$

$$(ARX) \quad nn = [n_a \ n_b \ n_k]$$

$$(IV4) \quad nn = [n_a \ n_b \ n_k]$$

$$(ARMAX) \quad nn = [n_a \ n_b \ n_c \ n_k]$$

$$(OE) \quad nn = [n_b \ n_f \ n_k]$$

$$(BJ) \quad nn = [n_b \ n_c \ n_d \ n_f \ n_k]$$

$$(PEM) \quad nn = [n_a \ n_b \ n_c \ n_d \ n_f \ n_k].$$

Az IDENT identifikációs módszerei az identifikáció eredményét (az identifikált paramétereket és  $\lambda$  értékét is tartalmazó) megválasztható nevű  $th$  struktúrában helyezik el:

$$(AR) \quad thar = ar(y, nn)$$

$$(ARX) \quad tharx = arx(z, nn)$$

$$(IV4) \quad thiv4 = iv4(z, nn)$$

$$(ARMAX) \quad tharmax = armax(z, nn)$$

$$(OE) \quad thoe = oe(z, nn)$$

$$(BJ) \quad thbj = bj(z, nn)$$

$$(PEM) \quad thpem = pem(z, nn).$$

Az identifikált rendszer zajmentes válasza, vagy szimulációs vizsgálatoknál az ismert  $e(t)$  zajsorozat figyelembevételével a zajos rendszer válasza is meghatározható, pl. PEM modell esetén:

```
y = idsim(u, thpem)
y = idsim([ue], thpem).
```

Az identifikáció eredménye az

```
idplot([y u])
```

függvényhívással felrajzolható. A polinomok együtthatói kinyerhetők, pl. PEM modell esetén az

```
[A, B, C, D, F] = th2poly(thpem)
```

függvényhívással. A mérési eredményeket és az identifikáció eredményeit összerajzolhatjuk és vizuálisan összehasonlíthatjuk a MATLAB általános szolgáltatásaival (plot, stb.).

Megjegyezzük, hogy több itt szereplő függvénynek létezik általánosabb paraméterezése is IDENT-ben, továbbá többváltozós (MIMO) rendszerek identifikációja is lehetséges.

Az IDENT toolbox a továbbiakban algoritmus szinten is részletesen tárgyalt diszkrétidejű paraméter identifikációs módszereken kívül lehetővé teszi még folytonosidejű lineáris állapotegyenletek paramétereinek becslését is speciális zajstruktúrák esetén.

Szolgáltatásai között szerepelnek a paraméterbecslés rekurzív realizációi is, amelyek adaptív irányításoknál jelentősek.

Ezeken túlmenően lehetőség van nemparaméteres identifikációra, valamint a korrelációs függvények és a spektrumok számítására is. Ez utóbbi számítások algoritmusai gyors Fourier-transzformáción (FFT, fast Fourier-transformation) és az FFT periodicitása miatt alkalmasan választott ablakozási technikán alapulnak.

Az IDENT toolbox algoritmusai alapjául szolgáló elmélet bővebben *Ljung: System identification: Theory for the user* könyvében található meg.

## Identifikáció és paraméterbecslés kapcsolata

Tételezzük fel, hogy kiválasztottunk egy bizonyos  $\mathcal{M}$  modell típust, ahol ezen belül az egyes  $\mathcal{M}(\vartheta)$  modellek a  $\vartheta$  paramétervektorral paraméterezhetők, ahol a paramétervektornak esetleg bizonyos feltételeket kell kielégítenie (stabil modell, stb.):  $\vartheta \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \subset R^P$ . Világos, hogy minden modell lehetőséget kínál a jóslásra, speciálisan ha a modellosztály

$$y(t) = G(q, \vartheta)u(t) + H(q, \vartheta)e(t),$$

akkor a jóslásra alkalmazható az

$$\hat{y}(t|t-1) = H^{-1}(q, \vartheta)G(q, \vartheta)u(t) + [1 - H^{-1}(q, \vartheta)]y(t)$$

1-lépéssel előretartó prediktor, amely mellett a predikciós hiba a következő lesz:

$$\varepsilon(t, \vartheta) = H^{-1}(q, \vartheta)[y(t) - G(q, \vartheta)u(t)]$$

A paraméterbecsléshez rendelkezésre álló adat:

$$Z^N = \{y(1), u(1), y(2), u(2), \dots, y(N), u(N)\}$$

A kérdés az, hogyan kell a  $Z^N$ -ben lévő információ alapján a megfelelő  $\hat{\vartheta}_N$  paramétervektor, és a megfelelő  $\mathcal{M}(\hat{\vartheta}_N)$  modellt kiszzelektálni az  $\mathcal{M}_* = \{\mathcal{M}(\vartheta) : \vartheta \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}\}$  rendszerosztályban:

$$Z^N \rightarrow \hat{\vartheta}_N \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}.$$

Egy ilyen leképzést modell-identifikációs célú paraméterbecslésnek nevezünk. Olyan modellt keresünk, amely “leírja” az adatokat, és úgy gondolkozunk, hogy a modell lényege a modell predikciós képessége. Ez azt jelenti, hogy a “jó” modell kiválasztásához a következőképp kell eljárni:

A  $Z^t$ -ben lévő információ alapján meghatározzuk az  $\varepsilon(t, \vartheta)$  predikciós hibát. A  $t = N$  időpontban úgy választjuk meg  $\hat{\vartheta}_N$  értékét, hogy az  $\varepsilon(t, \hat{\vartheta}_N)$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$  predikciós hibák a lehető legkisebbek legyenek.

Tisztázni kell, mit értünk “kicsi” alatt. A predikciós hibasorozat egy vektor  $R^N$ -ben, ezért hibáját a norma négyzetével jellemezzük. A korrelációs feltételek javítása érdekében azonban célszerű előbb a predikciós hibasorozatot egy stabil  $L(q)$  lineáris szűrőn keresztül küldeni.

### A predikciós hiba és deriváltjai:

A predikciós hiba jellemzésére választható

$$V_N(\vartheta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{1}{2} |\varepsilon(t, \vartheta)|^2.$$

A  $\hat{\vartheta}_N$  becslést minimalizálással definiáljuk:

$$\hat{\vartheta}_N = \arg \min_{\vartheta \in D_{\mathcal{U}}} V_N(\vartheta, Z^N).$$

Az ARX modell esetén az optimum analitikusan is meghatározható, ha nem korlátozzuk a modellosztályt

( $\mathcal{D}_{\mathcal{U}} = R^p$ ), más esetben optimumkereső eljárást kell alkalmazni. Foglalkozunk ezért  $V_N(\vartheta, Z^N)$  deriváltjainak meghatározásával.

$$V'_N(\vartheta, Z^N) = \frac{d}{d\vartheta} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{1}{2} \varepsilon^2(t, \vartheta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{d}{d\vartheta} [\varepsilon(t, \vartheta)] \varepsilon(t, \vartheta),$$

$$\psi(t, \vartheta) = -\frac{d}{d\vartheta} [\varepsilon(t, \vartheta)] = \frac{d}{d\vartheta} [\hat{y}(t, \vartheta)],$$

$$V'_N(\vartheta, Z^N) = -\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \psi(t, \vartheta) \varepsilon(t, \vartheta).$$

Tekintsük ezután a második derivált (Hess-mátrix) meghatározását. Mivel  $\varepsilon$  skalár és a  $\vartheta$  vektor szerinti első deriváltja a  $-\psi$  vektor, ezért a második deriváltja a  $\vartheta$  vektor

szerint azonos  $-\psi$  első deriváltjával a  $\vartheta$  vektor szerint, ami mátrix. Másrészt

$$(-\psi \varepsilon)' = -\psi' \varepsilon - \psi \varepsilon' = -\psi' \varepsilon + \psi \psi^T \Rightarrow$$

$$V''_N(\vartheta, Z^N) = -\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \psi'(t, \vartheta) \varepsilon(t, \vartheta) + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \psi(t, \vartheta) \psi^T(t, \vartheta)$$

és mivel  $\varepsilon(t, \vartheta)$  az optimum közelében már kicsi, ezért az optimum közelében a  $V''_N(\vartheta, Z^N)$  Hess-mátrix közelíthető a jobb oldalon álló kifejezés második tagjával:

$$V''_N(\vartheta, Z^N) \approx H_N(\vartheta) := \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \psi(t, \vartheta) \psi^T(t, \vartheta).$$

A közelítésre azért van szükség, mert  $\psi'(t, \vartheta)$  számítására nem áll rendelkezésre használható kifejezés. A Hess-mátrix közelítése  $H_N(\vartheta)$ -val lehetővé teszi a jó konvergencia tulajdonságú kvázi Newton-módszer alkalmazását, amely a konjugált gradiens módszernél általában jobb hatásfokú.

A fő problémát az optimum keresésnél az okozza, hogy több lokális optimum lehet, ezért fontos a jó kezdeti érték.

A továbbiakban nem foglalkozunk a holtidővel, mert ismert  $n_k$  esetén  $u(t)$  értékeinek előzetesen elvégezhető eltolásával a holtidőt előre figyelembe lehet venni.



# ARX MODELL IDENTIFIKÁCIÓJA

**ARX modell identifikációja LS módszerrel:**

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)} u(t) + \frac{1}{A(q)} e(t) =: G(q)u(t) + H(q)e(t),$$

$$\begin{aligned}\hat{y}(t, \vartheta) &= A(q) \frac{B(q)}{A(q)} u(t) + [1 - A(q)]y(t) = \\ &= [1 - A(q)]y(t) + B(q)u(t),\end{aligned}$$

ami a

$$\begin{aligned}\varphi(t) &:= [-y(t-1) \dots -y(t-n_a) \ u(t) \dots u(t-n_b+1)]^T, \\ \vartheta &:= (a_1 \dots a_{n_a} \ b_1 \dots b_{n_b})^T\end{aligned}$$

jelölésekkel a  $\vartheta$  paraméterben lineáris

$$\hat{y}(t, \vartheta) = \varphi^T(t) \vartheta$$

prediktort eredményezi. A predikciós hiba és a minimalizálendő kritérium ekkor

$$\varepsilon(t, \vartheta) = y(t) - \varphi^T(t) \vartheta,$$

$$V_N(\vartheta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{1}{2} |y(t) - \varphi^T(t) \vartheta|^2,$$

amely egy lineáris paraméterbecslési feladat, amelynek megoldása a  $V'_N(\vartheta, Z^N) = 0$  feltételből számítható:

$$V'_N(\vartheta, Z^N) = -\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \vartheta = 0,$$

$$\hat{\vartheta}_N^{LS} := \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t).$$

Célszerű bevezetni az

$$R(N) := \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t),$$

$$h(N) := \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t)$$

jelöléseket, ahol  $R(N)$  mátrix és  $h(N)$  vektor, amellyel az LS becslés

$$\hat{\vartheta}_N^{LS} = [R(N)]^{-1} h(N)$$

alakú lesz.

Ha a megfigyelt adatokat a  $\vartheta_0$  paraméterhez tartozó zajos

$$y(t) = \varphi^T(t) \vartheta_0 + \nu_0(t)$$

rendszer generálta, akkor

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}_N^{LS} &= [R(N)]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) [\varphi^T(t) \vartheta_0 + \nu_0(t)] = \\ &= \vartheta_0 + [R(N)]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \nu_0(t). \end{aligned}$$

A  $\hat{\vartheta}_N^{LS}$  becsléstől elvárjuk, hogy

- i) legyen  $\vartheta_0$  közelében,
- ii) konvergáljon  $\vartheta_0$ -hoz, ha  $N \rightarrow \infty$ .

Ha jelek stacionáriusak és ergodikusak (a jel bármelyik elég hosszú reprezentációjának átlagai jól közelítik a valószínűségi átlagokat), akkor

$$R(N) \rightarrow R^* = R_{\varphi\varphi} \text{ autokorrelációs függvény,}$$

$$h(N) \rightarrow h^* = R_{\varphi\nu_0} \text{ keresztkorrelációs függvény.}$$

Ekkor annak feltétele, hogy az LS becslés konzisztens legyen, azaz teljesüljön  $\hat{\vartheta}_N^{LS} \rightarrow \vartheta_0$ , ahol  $\vartheta_0$  a valódi paraméter (amely a valódi rendszerhez tartozik), ekvivalens az  $R_{\varphi\nu_0} = 0$  feltétellel, vagyis ekkor a  $\varphi(t)$  megfigyeléseknek és a  $\nu_0(t)$  zajnak korrelálatlannak kell lenniük.

### ARX modell identifikációja IV módszerrel:

A korreláció csökkentésére próbálkozzunk meg  $\varphi(t)$  lecserelésével egy alkalmasan választott  $\xi(t)$  jelre, az ún. segédváltozóra (IV, instrumental variable) a becslés képletének alkalmasan megválasztott helyén.

Ha a valódi rendszer  $y(t) = \varphi^T(t) \vartheta_0 + \nu_0(t)$ , akkor

$\nu_0(t) = y(t) - \varphi^T(t) \vartheta_0$ , ezért az LS becslés a következő alakban is megfogalmazható:

$$\hat{\vartheta}_N^{LS} = \text{sol} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) [y(t) - \varphi^T(t) \vartheta] = 0 \right\},$$

ahol “sol” a megoldás (solution) szóra utal. Ennek analógiájára olyan  $\xi(t)$  segédváltozót keresünk, amelyre teljesül

$$\hat{\vartheta}_N^{IV} = \text{sol} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi(t) [y(t) - \varphi^T(t) \vartheta] = 0 \right\}.$$

Ekkor az IV becslés alakja a következő lesz:

$$\hat{\vartheta}_N^{IV} := \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi(t) y(t).$$

#### IV4 algoritmus:

1. Írjuk fel a modell struktúrát az  $\hat{y}(t, \vartheta) = \varphi^T(t) \vartheta$  lineáris regressziós alakban, és határozzuk meg  $\vartheta$  becslését LS módszerrel. Jelölje  $\hat{\vartheta}_N^{(1)}$  az így kapott becsült paramétert és  $\hat{G}_N^{(1)}(q)$  a hozzátartozó diszkrétidejű átviteli függvényt:

$$\hat{G}_N^{(1)}(q) = \hat{B}_N^{(1)}(q) / \hat{A}_N^{(1)}(q).$$

2. Képezzük a segédváltozókat az

$$x^{(1)}(t) = \hat{G}_N^{(1)}(q)u(t)$$

$$\xi^{(1)}(t) = [-x^{(1)}(t-1) \dots -x^{(1)}(t-n_a) u(t) \dots u(t-n_b+1)]^T$$

szabály szerint, és határozzuk meg a hozzátartozó  $\hat{\vartheta}_N^{(2)} := \hat{\vartheta}_N^{IV}$  IV becslést. Jelölje a  $\hat{\vartheta}_N^{(2)}$ -höz tartozó diszkrétidejű átviteli függvényt

$$\hat{G}_N^{(2)}(q) = \hat{B}_N^{(2)}(q) / \hat{A}_N^{(2)}(q).$$

3. Legyen

$$\hat{w}_N^{(2)}(t) := \hat{A}_N^{(2)}(q)y(t) - \hat{B}_N^{(2)}(q)u(t),$$

és írjunk elő egy  $n_a + n_b$  fokszerű AR modellt  $\hat{w}_N^{(2)}(t)$  számára (amely nem más, mint a második modell esetén fellépő egyenlethiba):

$$L(q)\hat{w}_N^{(2)}(t) = e(t).$$

Határozzuk meg  $L(q)$  becslését az LS módszerrel (ekkor  $\varphi$ -ben hiányoznak az  $u$ -hoz tartozó tagok). Jelölje az LS becslés eredményét  $\hat{L}_N(q)$ .

4. Képezzünk új segédváltozókat az

$$x^{(2)}(t) = \hat{G}_N^{(2)}(q)u(t)$$

$$\xi^{(2)}(t) = \hat{L}_N(q) \times [-x^{(2)}(t-1) \dots -x^{(2)}(t-n_a) u(t) \dots u(t-n_b+1)]^T$$

szabály szerint. Alkalmazzuk az  $\hat{L}_N(q)$  előszűrőt és az új segédváltozókat a végső IV becslés meghatározására:

$$\varphi_F(t) := \hat{L}_N(q)\varphi(t), \quad y_F(t) := \hat{L}_N(q)y(t),$$

$$\hat{\vartheta}_N := \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi^{(2)}(t) \varphi_F^T(t) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi^{(2)}(t) y_F(t)$$

## ARMAX MODELL IDENTIFIKÁCIÓJA

Az  $A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t)$  ARMAX modell esetén a paraméterbecslésre a kvázi Newton-módszer szerinti optimum keresés javasolható. Korábbi eredmények szerint mind a hibakritérium  $V'_N(\vartheta, Z^N)$  gradiensének, mind pedig a Hess-mátrix  $H_N(\vartheta)$  közelítésének meghatározásához

hoz  $\psi(t, \vartheta) = \frac{d}{d\vartheta}[\hat{y}(t, \vartheta)]$  számítását kell kidolgozni. A jelölések egyszerűsítése érdekében átmenetileg szüneteltetni fogjuk a  $\vartheta$  paraméter kiírását. Az ARMAX modell következő alakra hozható:

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}u(t) + \frac{C(q)}{A(q)}e(t) =: G(q)u(t) + H(q)e(t).$$

Az 1-lépéssel előretartó prediktor:

$$H^{-1}(q)G(q) = \frac{A(q)}{C(q)} \cdot \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{B(q)}{C(q)}, \quad 1 - H^{-1}(q) = 1 - \frac{A(q)}{C(q)},$$

$$\hat{y}(t) = \frac{B(q)}{C(q)}u(t) + \left[1 - \frac{A(q)}{C(q)}\right]y(t).$$

A predikciós hiba

$$\varepsilon(t) = \frac{A(q)}{C(q)}y(t) - \frac{B(q)}{C(q)}u(t).$$

A paraméterek szerinti parciális deriváltak a következők:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_k} \hat{y}(t) &= -\frac{1}{C(q)} q^{-k} y(t) = -\frac{1}{C(q)} y(t-k), \\ \frac{\partial}{\partial b_k} \hat{y}(t) &= \frac{1}{C(q)} q^{-(k-1)} u(t) = \frac{1}{C(q)} u(t-k+1), \\ \frac{\partial}{\partial c_k} \hat{y}(t) &= \frac{A(q)}{C^2(q)} q^{-k} y(t) - \frac{B(q)}{C^2(q)} q^{-k} u(t) = \\ &= \frac{1}{C(q)} q^{-k} \varepsilon(t) = \frac{1}{C(q)} \varepsilon(t-k). \end{aligned}$$

Vezessük be a

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \dots -y(t-n_a) \ u(t) \dots u(t-n_b+1) \ \varepsilon(t-1) \dots \varepsilon(t-n_c)]^T$$

regressziós vektort, akkor a gradiens és a Hess-mátrix közelítéséhez szükséges  $\psi(t)$  vektort úgy kapjuk meg, hogy a regressziós vektort az  $1/C(q)$  szűrőn bocsátjuk át:

$$\psi(t) := \frac{1}{C(q)} \varphi(t).$$

A számításokat az  $\hat{y}(t, \vartheta)$ ,  $\varepsilon(t, \vartheta)$ ,  $\varphi(t, \vartheta)$ ,  $\psi(t, \vartheta)$  sorrendben kell elvégezni az aktuális lépésben érvényes paraméter értékeknél. Eközben  $\hat{y}(t, \vartheta)$  és  $\psi(t, \vartheta)$  számításához differenciaegyenletre kell áttérni, amit rekurzívan lehet megoldani.

A lokális optimum elkerülésére szükség van jó kezdeti becslésre (lásd algoritmus).

Az optimalizálás az így kapott kezdeti paraméterekkel indítható, alkalmazván a továbbiakban a kvázi-Newton módszert. Ehhez a parciális deriváltak számítását már ki-dolgoztuk.

#### ***Algoritmus a kezdeti becslések meghatározására:***

1. IV módszerrel meghatározzuk a  $B/A$  diszkrétidejű átviteli függvény becslését.
2. Meghatározzuk az egyenlethiba

$$\hat{v}(t) = \hat{A}(q)y(t) - \hat{B}(q)u(t)$$

becslését.

3. Magas fokszerű kisegítő AR modellt előírva először meghatározzuk a  $\hat{v}(t)$  “kimenethez” tartozó zaj  $\hat{e}(t)$  becslését. A fokszerűt az ARMAX modellben szereplő fokszerűk összegére célszerű választani numerikus megfontolásokból. Ezt követően meghatározzuk  $C$  becslését a következő dekompozíció szerint:

$$\hat{v}(t) = [C(q) - 1]\hat{e}(t) + e(t).$$

Vegyük észre, hogy ez utóbbi lépés egy ARX probléma  $A(q) := 1$ ,  $y := \hat{v}$  és  $B := C(q) - 1$  választás mellett.

## PÉLDA AZ ARMAX ÉS IV4 MÓDSZEREK HASZNÁLATÁRA

A mintarendszer, amelynek identifikációjával foglalkozni fogunk a

$$W(s) = \frac{1}{(1+s)(1+4s)(1+7s)}$$

lineáris rendszer, amelyet  $T = 0.1$  sec mintavételi idő mellett a

$$D(z) = \frac{10^{-4} (0.0575z^{-1} + 0.2221z^{-2} + 0.0536z^{-3})}{1 - 2.8660z^{-1} + 2.7360z^{-2} - 0.8700z^{-3}}$$

diszkrétidejű átviteli függvénnyel jellemezhetünk.

Az identifikációt a tárgyalt módszereket használó *System Identification Toolbox* szal végeztük el. Mivel a szimulációs vizsgálatok miatt a valódi rendszer ismert, ezért lehetőség volt ismert nagyságú zajjal terhelni a mért kimenetet, és megvizsgálni, vajon az identifikált modell a zajos kimenetre akar-e rásimulni, vagy értelmesebb módon a zajmentes kimenetre. A kimenethez ezért  $\sigma = 0.05$  szórássú Gauss-féle zajt adtunk hozzá, és mind a kimenet mérésénél, mind pedig a bemenet mérésénél szimuláltuk egy  $\pm 10$  V és 12-bites átalakító kvantálási hatását. Az identifi-

kációt a zajos jelekkel végeztettük el. A felnyitott körben felvett jelek alapján ARMAX modellt identifikáltunk, a zárt körben felvett jelekkel pedig IV4 modellt.

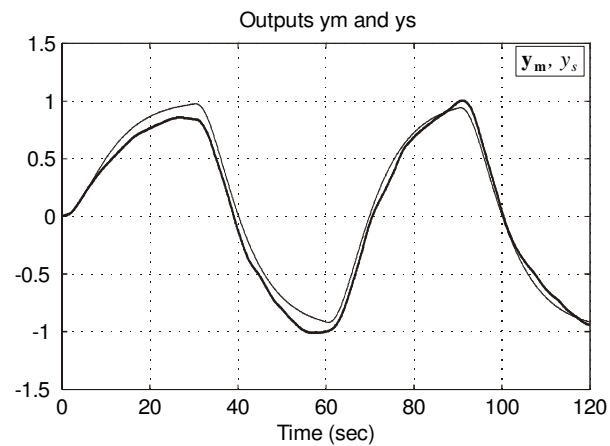
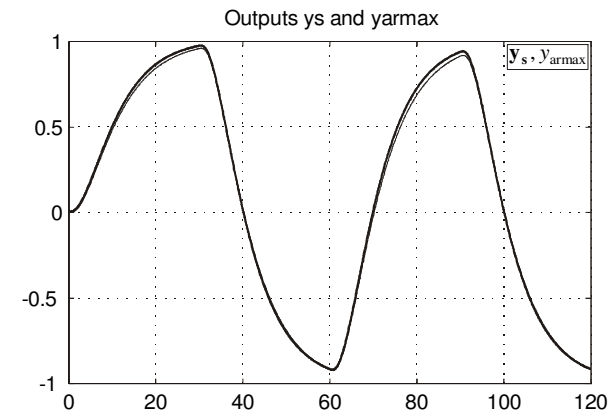
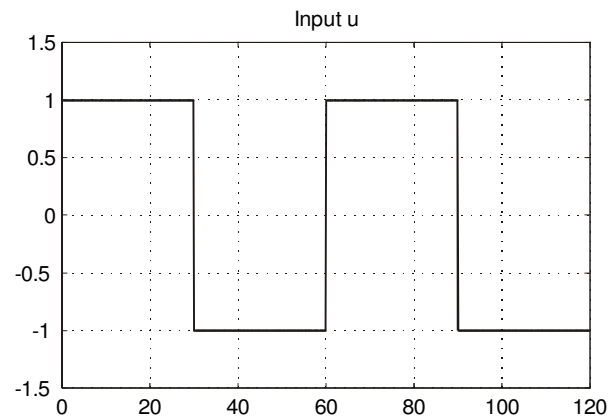
Az identifikált ARMAX modell diszkrétidejű átviteli függvénye

$$D_{\text{armax}}(z) = \frac{10^{-4} (0.2966z^{-1} - 0.4151z^{-2} + 0.4527z^{-3})}{1 - 2.8651z^{-1} + 2.7344z^{-2} - 0.8692z^{-3}}.$$

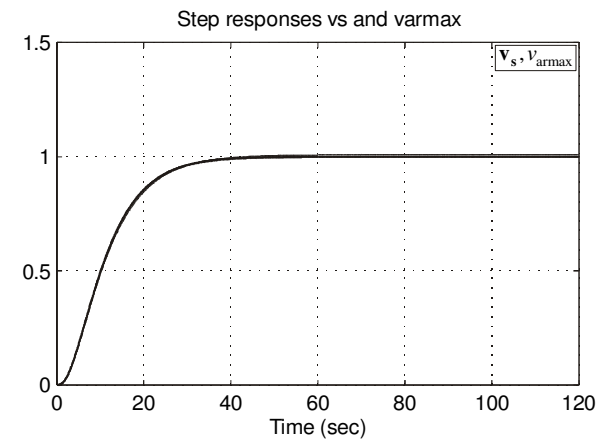
Az ARMAX modell ekvivalens statikus átviteli tényezője  $A_{\text{ekv}} = 1.008$  (a valódi rendszeré  $A = 1$ ).

A zajmentes kimenetet és az ARMAX modell kimenetét az identifikációnál használt bemenet mellett a következő ábra mutatja.

Szintén ábrázoltuk a valódi rendszer és az ARMAX modell átmeneti függvényét, amelyek jó egyezést mutatnak.



Az ARMAX modell identifikációjához használt bemenőjel ( $u$ ), zajos kimenet ( $y_m$  mért) és zajmentes kimenet ( $y_s$  szimulált).



A rendszer zajmentes kimenete ( $y_s$  szimulált) és az ARMAX modell kimenete ( $y_{armax}$ ) és az átmeneti függvények ( $v_s$ ,  $v_{armax}$ ).

Az IV4 modell identifikációjához használt, a zárt szabályozási körben a szakasz bemenetén felvett bemenőjelet, valamint a szakasz kimenetén a zajos és zajmentes kimenőjelet a következő ábra mutatja.

Az identifikált IV4 modell diszkrétidejű átviteli függvénye

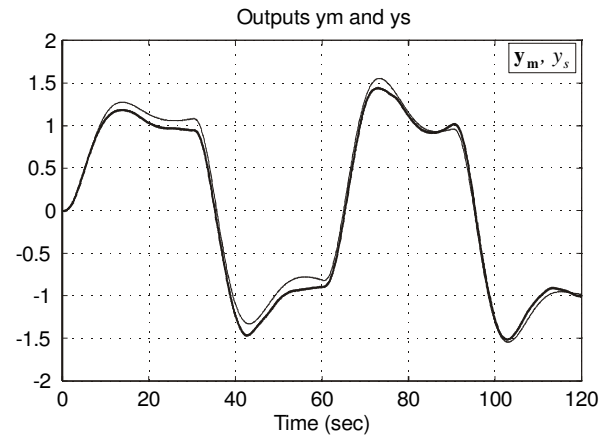
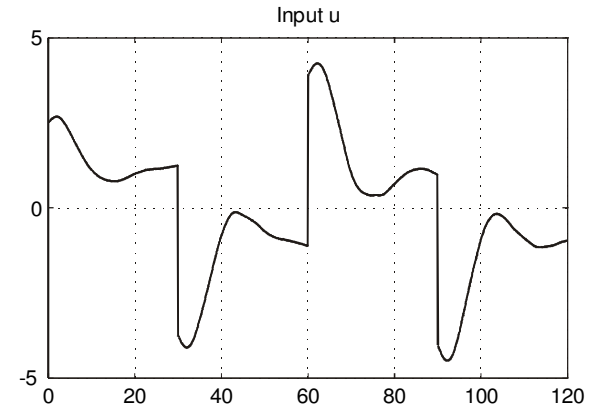
$$D_{iv4}(z) = \frac{10^{-4}(0.0547z^{-1} + 0.1037z^{-2} + 0.1438z^{-3})}{1 - 2.8780z^{-1} + 2.7598z^{-2} - 0.8818z^{-3}}.$$

Az IV4 modell ekvivalens statikus átviteli tényezője

$A_{ekv} = 0.9872$  (a valódi rendszeré  $A = 1$ ).

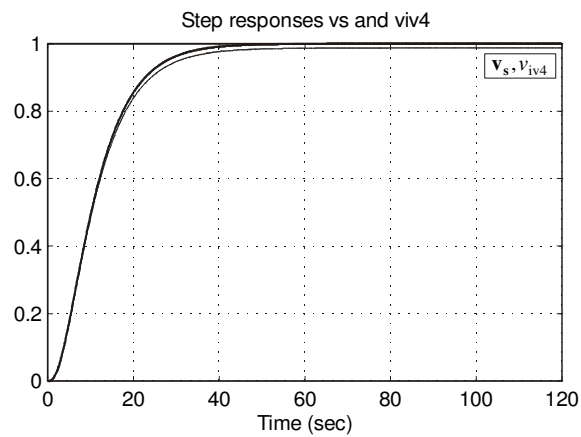
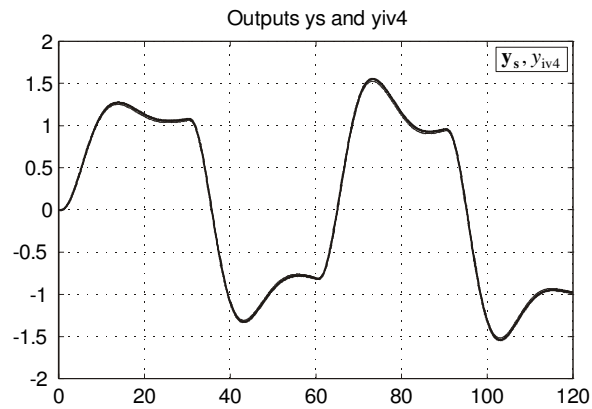
A zajmentes kimenetet és az IV4 modell kimenetét az identifikációnál használt bemenet mellett az ábra mutatja.

Egy másik ábrán a valódi rendszer és az IV4 modell átmeneti függvényét ábrázoltuk, amelyek szintén jó egyezést mutatnak.



Az IV4 modell identifikációjához használt bemenőjel ( $u$ ), zajos kimenet ( $y_m$  mért) és zajmentes kimenet ( $y_s$  szimulált).





A rendszer zajmentes kimenete ( $y_s$  szimulált) és az IV4 modell kimenete ( $y_{iv4}$ ), valamint az átmeneti függvények ( $v_s$ ,  $v_{iv4}$ ).

# MIMO RENDSZER ALTÉR-BÁZISÚ IDENTIFIKÁCIÓJA

A diszkrétidejű időinvariáns lineáris rendszert

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = Cx_k + Du_k$$

alakúnak feltételezzük, ahol  $u \in R^r$ ,  $y \in R^m$  és  $x \in R^n$ , az  $A, B, C, D$  mátrixok pedig a megfelelő dimenziójúak.

Ebben a rendszerleírási módban alternatív módszereket jelentenek az ún. altér-bázisú identifikációs módszerek (4SID, subspace-based state space system identification method). Ezen módszerek fő jellemzője olyan egy altér becslése, amelyet a bemeneti-kimeneti adatokból felírt és megfelelő rendszertechnikai elvek alapján megválasztott mátrix sor- vagy oszlopvektorai feszítenek ki. A folyamat paraméteres modelljét azután ezekből a speciális struktúrájú kifeszített alterekből határozzák meg.

Az ilyen elven működő algoritmusok rezonanciával és antirezonanciával rendelkező, integrátort tartalmazó vagy instabil többváltozós lineáris rendszerek esetén is numerikusan megbízható állapotteres modellek nyerhetők. Előnyük, hogy nem iteratív algoritmusok és nem igényelnek numerikus optimum keresést. Így az iteratív algoritmusoknál gyakori lokális optimumban leragadás elkerülhető.

## Elméleti alapok:

Az állapotegyenletben szereplő mátrixok megfelelően kondicionált bázisokban becsülhetők. Az egyetlen megadandó paraméter a rendszer rendszáma, amely nem túlságosan zajos környezetben az identifikáció során a jelekből felépített mátrix szinguláris értékeiből becsülhető. Ez a jelek szintjén úgy fogható fel, hogy a jelet egy “hasznos” (domináns szinguláris értékek) és egy “zaj” (kis szinguláris értékek) komponensre bontjuk fel.

A 4SID algoritmusok eredete Ho és Kalman munkájára vezethetők vissza, akik az ún. becsült Markov paraméterek alapján egy minimális állapotteres modell meghatározására adtak módszert.

Az impulzusválasz állapotmátrixokkal történő kifejezéséből a  $D$  mátrixot a  $t = 0$ -hoz tartozó értékből közvetlenül megkaphatjuk. Az impulzusválasz értékeiből felépülő Hankel-mátrixnak létezik olyan faktorizációja, amelynek két tényezője a megfigyelhetőségi és az irányíthatósági mátrix. A minimális realizációból a  $B$  és  $C$  mátrixok közvetlenül megkaphatók, az  $A$  mátrix pedig a megfigyelhetőségi mátrix ún. shift-invariancia tulajdonsága alapján számítható.

**A közös MOESP (MIMO output-error state space model realisation) módszer:**

- i) Markov-paramétereknek nevezzük a  $h_s = CA^{s-1}B$ ,  $s = 1, 2, \dots$  értékeket.
- ii) A  $\Gamma_i$  kiterjesztett megfigyelhetőségi mátrix ( $i > n$ ) a következő:

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}.$$

- iii) Az impulzus-válaszokból felépülő  $H_i$  mátrix Toeplitz-struktúrájú, és értelmezése ( $i > n$ ) a következő:

$$H_i = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \cdots & D \end{bmatrix}.$$

- iv) Legyen  $\Gamma$  egy  $(mi) \times n$  méretű mátrix ( $i > n$ ), és jelölje a  $\Gamma$  első  $m(i-1)$  sorából álló mátrixot  $\Gamma^{(1)}$ , az utolsó  $m(i-1)$  sorából állót pedig  $\Gamma^{(2)}$ . A  $\Gamma$  mátrixot shift-invariánsnak nevezzük, ha létezik olyan négyzetes (nem szükségképpen invertálható)  $T$  mátrix, hogy  $\Gamma^{(2)} = \Gamma^{(1)}T$ . Világos, hogy a  $\Gamma_i$  mátrix shift-invariáns, mivel

$$\Gamma^{(1)} := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-2} \end{bmatrix}, \quad \Gamma^{(2)} := \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}, \quad T := A \Rightarrow \Gamma^{(2)} = \Gamma^{(1)}T.$$

Az állapotegyenlet alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 y_{j+k} &= Cx_{j+k} + Du_{j+k}, \\
 x_{j+k+s} &= A^s x_{j+k} + \sum_{l=0}^{s-1} A^{s-(l+1)} Bu_{j+k+l}, \\
 y_{j+k+s} &= CA^s x_{j+k} + \sum_{l=0}^{s-1} CA^{s-(l+1)} Bu_{j+k+l} + Du_{j+k+s}.
 \end{aligned}$$

Ha egy oszlopban egymás alá írjuk az  $y_{j+k}, y_{j+k+1}, y_{j+k+2}, \dots$  értékeket, és úgy fogjuk fel, hogy a tranziens az  $x_{j+k}$  állapotból indult, akkor a MOESP módszer kiindulásaként a bemeneti-kimeneti adatsorok segítségével a következő egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{bmatrix} y_j & y_{j+1} & y_{j+2} & \cdots & y_{j+N-1} \\ y_{j+1} & y_{j+2} & y_{j+3} & \cdots & y_{j+N} \\ y_{j+2} & y_{j+3} & y_{j+4} & \cdots & y_{j+N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{j+i-1} & y_{j+i} & y_{j+i+1} & \cdots & y_{j+N+i-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j & x_{j+1} & x_{j+2} & \cdots & x_{j+N-1} \end{bmatrix} + \\
 + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \cdots & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_j & u_{j+1} & u_{j+2} & \cdots & u_{j+N-1} \\ u_{j+1} & u_{j+2} & u_{j+3} & \cdots & u_{j+N} \\ u_{j+2} & u_{j+3} & u_{j+4} & \cdots & u_{j+N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{j+i-1} & u_{j+i} & u_{j+i+1} & \cdots & u_{j+N+i-2} \end{bmatrix}$$

Célszerű ezért bevezetni az állapotokból, bemenőjel értékekből és kimenőjel értékekből álló következő mátrixokat:

$$X_{j,N} := [x_j \quad x_{j+1} \quad x_{j+2} \quad \cdots \quad x_{j+N-1}],$$

$$Y_{j,i,N} := \begin{bmatrix} y_j & y_{j+1} & y_{j+2} & \cdots & y_{j+N-1} \\ y_{j+1} & y_{j+2} & y_{j+3} & \cdots & y_{j+N} \\ y_{j+2} & y_{j+3} & y_{j+4} & \cdots & y_{j+N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{j+i-1} & y_{j+i} & y_{j+i+1} & \cdots & y_{j+N+i-2} \end{bmatrix},$$

$$U_{j,i,N} := \begin{bmatrix} u_j & u_{j+1} & u_{j+2} & \cdots & u_{j+N-1} \\ u_{j+1} & u_{j+2} & u_{j+3} & \cdots & u_{j+N} \\ u_{j+2} & u_{j+3} & u_{j+4} & \cdots & u_{j+N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{j+i-1} & u_{j+i} & u_{j+i+1} & \cdots & u_{j+N+i-2} \end{bmatrix}.$$

Az így bevezetett jelölésekkel a rendszer (általában nem mérhető) állapotai, a rendszerről méréssel felvehető bemeneti-kimeneti adatsorok, valamint az identifikálandó rendszert tömören jellemző  $\Gamma_i$  és  $H_i$  mátrixok között a következő kapcsolat írható fel:  $Y_{j,i,N} = \Gamma_i X_{j,N} + H_i U_{j,i,N}$ . A továbbiakban  $j=1$  értéket választva a MOESP módszer vizsgálatára az

$$Y_{1,i,N} = \Gamma_i X_{1,N} + H_i U_{1,i,N}$$

egyenletrendszer fog szolgálni. Feltesszük még, hogy a bemenőjel perzisztens abban az értelemben, hogy  $\text{rank}(U_{1,i,N}) = ri$ , ahol  $r = \dim u$

**A vizsgálatok során fel fogjuk használni a lineáris algebra következő eredményeit:**

- i) Tetszőleges (valós elemű)  $X$  mátrixnak van  $X = QR$  ún. QR-faktorizációja, ahol  $Q$  ortonormált mátrix és  $R$  felső blokk-háromszögmátrix, tehát

$$QQ^T = Q^T Q = I, R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}, X = QR,$$

ahol  $X$  és  $R$  mérete megegyezik. A QR-faktorizáció MATLAB környezetben a `qr` függvénnyel határozható meg.

- ii) Ha a QR-faktorizációt az  $X^T$  mátrixra alkalmazzuk, akkor  $X^T = \tilde{Q}\tilde{R}$ , ahonnan transzponálással  $X = \tilde{R}^T \tilde{Q}^T =: RQ$  következik, tehát tetszőleges  $X$  mátrixnak van  $X = RQ$  ún. RQ-faktorizációja is, ahol  $Q$  ortonormált és  $R$  alsó blokk-háromszögmátrix.
- iii) Tetszőleges  $X$  mátrixnak van  $X = U\Sigma V^T$  szinguláris érték felbontása (SVD), ahol  $U$  és  $V$  ortonormált mátrixok, továbbá a  $\Sigma$  diagonális mátrix tartalmazza az  $X$  mátrix (mindig nemnegatív) szinguláris értékeit csökkenő sorrendben, lásd (12.57a-d). A szinguláris érték felbontás MATLAB környezetben az `svd` függvénnyel határozható meg.
- iv) Tetszőleges  $AX = B$  egyenlet  $X$  megoldásának választható  $X = A^+B$ , ahol  $A^+$  az  $A$  mátrix Moore-Penrose pszeudoinverze. A Moore-Penrose pszeudoinverz MATLAB környezetben a `pinv` függvénnyel határozható meg.

Vizsgáljuk meg még a koordináta-transzformáció hatását. Ha a (nemszinguláris)  $T$  mátrix írja le a koordináta-transzformációt, akkor az állapotegyenlet mátrixai és a Markov-paraméterek a transzformáció után a következők lesznek:

$$A_T = TAT^{-1}, \quad B_T = TB, \quad C_T = CT^{-1}, \quad D_T = D, \\ \tilde{h}_s = C_T (A_T)^s B_T = CT^{-1} (TAT^{-1})^s TB = CA^s B = h_s.$$

Tételezzük fel, hogy egy  $U_n$  mátrix oszlopai kifeszítik  $\Gamma_i$  képterét, vagy más néven az oszlopterét. Tudjuk, hogy  $i > n$ , ezért minimális (teljesen megfigyelhető és teljesen irányítható) rendszer reprezentáció esetén  $\text{rank}(\Gamma_i) = \text{rank}(U_n) = n$ , ezért létezik olyan  $T_1$  nemszinguláris mátrix, hogy

$$U_n = \Gamma_i T_1.$$

Jelölje a  $U_n$  első  $m(i-1)$  sorából álló mátrixot  $U_n^{(1)}$ , az utolsó  $m(i-1)$  sorából állót pedig  $U_n^{(2)}$ . Tekintsük a  $T := T_1^{-1}$  koordináta-transzformációt. Akkor a konstrukció szerint

$$U_n^{(1)} = \Gamma_i^{(1)} T_1 = \Gamma_i^{(1)} T^{-1}, \quad U_n^{(2)} = \Gamma_i^{(2)} T_1 = \Gamma_i^{(2)} T^{-1} = \Gamma_i^{(1)} A T^{-1} = (\Gamma_i^{(1)} T^{-1}) (T A T^{-1}) = U_n^{(1)} A_T, \\ U_n^{(2)} = U_n^{(1)} A_T,$$

ezért  $U_n$  is shift-invariáns mátrix.

### **MOESP algoritmus:**

1. Jelölje  $\hat{n}$  az ismeretlen rendszer rendszámának egy felső becslését. Válasszuk meg  $i > \hat{n}$  értékét, pl.  $i := (2 \dots 10) \hat{n}$ -re. Ennek során figyelemmel kell lenni arra, hogy az RQ-algoritmus számításideje kb.  $i^2$  arányában nő. Válasszuk meg a mérési adatok  $N$  számát az  $N \gg r \cdot i$  feltétel betartásával. Végezzünk adatgyűjtést az ismeretlen rendszer bemenetén és kimenetén, és a mérési adatokból építsük fel az  $U_{1,i,N}$  és  $Y_{1,i,N}$  Hankel-mátrixokat.
2. Határozzuk meg az adatokból felépített összetett mátrix RQ-faktorizációját:

$$\begin{bmatrix} U_{1,i,N} \\ Y_{1,i,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}.$$

Itt  $R_{11}$  mérete  $(r \cdot i) \times (r \cdot i)$ ,  $R_{22}$  mérete pedig  $(m \cdot i) \times (m \cdot i)$ , ahol  $r = \dim u$  és  $m = \dim y$ . Az elmélet szerint  $\text{rank}(R_{22}) = n$ , ahol  $n = \dim x$ .

3. Határozzuk meg  $R_{22}$  szinguláris érték (SVD) felbontását, és legyen a dominánsnak választott szinguláris értékek száma  $n$ , amelyet a minimális rendszer rendszámának fogunk tekinteni. A szinguláris érték felbontás ekkor a következő lesz:

$$R_{22} = \begin{bmatrix} U_n & U_n^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_n & 0 \\ 0 & \Sigma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ (V_n^\perp)^T \end{bmatrix},$$

ahol  $U_n$  mérete  $(m \cdot i) \times n$ ,  $U_n^\perp$  mérete  $(m \cdot i) \times (m \cdot i - n)$ ,  $\Sigma_n$  mérete  $n \times n$ ,  $\Sigma_0$  mérete  $(m \cdot i - n) \times (m \cdot i - n)$ ,  $V_n$  pedig  $\Sigma$ -nak megfelelően partícionált.

4. Az (alább részletezendő összefüggések alapján)  $A_T, B_T, C_T, D_T$  meghatározása.



A továbbiakban a MATLAB-ban használt indexelések mellett adjuk meg a nagyobb mátrixokból kivágott blokk-mátrixokat.

Tekintsük először  $R_{22}$ -nek az SVD-felbontását a dominánsnak választott szinguláris értékek  $n$  számának megfelelő partícionálás mellett. Jelölje az  $U_n$  első  $m(i-1)$  sorából álló mátrixot  $U_n^{(1)}$ , az utolsó  $m(i-1)$  sorából állót pedig  $U_n^{(2)}$ . Akkor

$$C_T = U_n(1:m,:),$$

$$U_n^{(1)} A_T = U_n^{(2)} \Rightarrow A_T := (U_n^{(1)})^+ U_n^{(2)},$$

ahol a Moore-Penrose pszeudoinverzét használtuk.

Tekintsük ezután az adatok között fennálló egyenletet, és helyettesítsük be az egyenletbe az  $Y_{1,i,N} = R_{21}Q_1 + R_{22}Q_2$ ,  $U_{1,i,N} = R_{11}Q_1$ ,  $R_{22} = U_n \Sigma_n V_n^T$  és  $\Gamma_i = U_n T_1^{-1} = U_n T$  összefüggéseket, akkor a következő kifejezést kapjuk:

$$U_n T X_{1,N} + H_i R_{11} Q_1 = R_{21} Q_1 + U_n \Sigma_n V_n^T Q_2.$$

Mivel  $U = [U_n \quad U_n^\perp]$  ortonormált, ezért  $(U_n^\perp)^T U_n = 0$ , ha tehát az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk az  $(U_n^\perp)^T$  mátrixszal, akkor azt kapjuk, hogy

$$\left( (U_n^\perp)^T H_i R_{11} - (U_n^\perp)^T R_{21} \right) Q_1 = 0.$$

Ha az egyenletet megszorozzuk jobbról  $Q_1^T$ -tal és figyelembe vesszük, hogy  $Q$  ortonormalitása miatt  $Q_1 Q_1^T = I$ , akkor következik

$$(U_n^\perp)^T H_i R_{11} - (U_n^\perp)^T R_{21} = 0.$$

Ha a gerjesztés perzisztens, tehát  $\text{rank}(U_{1,i,N}) = r \cdot i$ , akkor  $U_{1,i,N} = R_{11}Q_1$ , és mivel  $Q_1$  maximális rangú, ezért  $\exists R_{11}^{-1}$  és

$$(U_n^\perp)^T H_i = (U_n^\perp)^T R_{21} R_{11}^{-1}.$$

Vezessük be a

$$\Psi := (U_n^\perp)^T R_{21} R_{11}^{-1} = (U_n^\perp)^T R_{21} R_{11}^+, \quad \hat{\Psi} := \begin{bmatrix} \Psi(:, 1:r) \\ \Psi(:, r+1:2r) \\ \vdots \\ \Psi(:, r(i-1)+1:ri) \end{bmatrix},$$

$$\Phi := \begin{bmatrix} U_n^\perp(1:m,:)^T & U_n^\perp(m+1:2m,:)^T & \cdots & U_n^\perp(m(i-1)+1:mi,:)^T \\ U_n^\perp(m+1:2m,:)^T & U_n^\perp(2m+1:3m,:)^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n^\perp(m(i-1)+1:mi,:)^T & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Phi} := \Phi \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & U_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

jelöléseket, összhangban a  $H_i$  mátrix alakjával és a következő felírási móddal:

$$\begin{bmatrix} CB \\ CAB \\ \vdots \\ CA^{i-2}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-2} \end{bmatrix} T^{-1}(TB) = \Gamma_i^{(1)} T^{-1}(TB) = U_n^{(1)} B_T.$$

Akkor a  $D_T$  és  $B_T$  mátrixokra egy egyenletrendszert kapunk, amit pl. a robusztus Moore-Penrose pseudoinverzszel (LS értelemben) megoldhatunk:

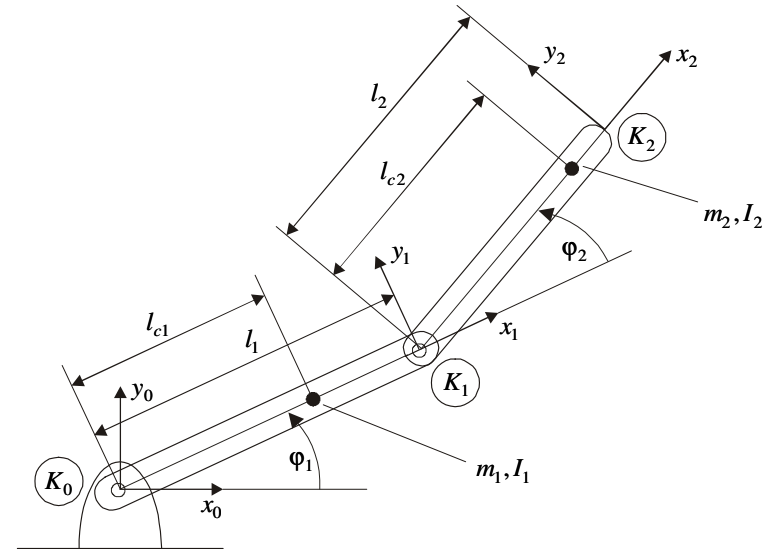
$$\hat{\Phi} \begin{bmatrix} D_T \\ B_T \end{bmatrix} = \hat{\Psi} \Rightarrow \begin{bmatrix} D_T \\ B_T \end{bmatrix} = \hat{\Phi}^+ \hat{\Psi}$$

## PÉLDA A MOESP MÓDSZER HASZNÁLATÁRA

A mintarendszer egy kétszabadságfokú robotkar, amely egy erősen nemlineáris dinamikus rendszer. Mivel a MOESP módszer csak lineáris rendszerekre érvényes identifikációs módszer, ezért a robotkart kis változásokra különféle munkapontokban linearizáltuk. A mintarendszer előnyös abból a szempontból, hogy a munkapontokat változtatva stabilis, csillapítatlan oszcilláló, integráló és labilis linearizált rendszerek is előállnak.

A robotkar paraméterei a következők:  $m_1, m_2 = 5 \text{ kg}$ ,  $I_1, I_2 = 1 \text{ kg m}^2$ ,  $l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$  és  $l_{c1}, l_{c2} = 0.5 \text{ m}$ .

Tekintsük a nemlineáris rendszert a  $q_0 = (-\pi/2, 0)^T$  munkapont környezetében (a szögek radiánban, a nyomatékok Nm-ben értendők). A folytonosidejű linearizált rendszer eme munkapont körül két-két csillapítatlan konjugált komplex póluspárral rendelkezik.



A robotkar blokkvázlata

A linearizált rendszer állapotegyenlete a  $q_0 = (-\pi/2, 0)^T$  munkapont környezetében folytonos időben

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10.3584 & 6.0932 & 0 & 0 \\ 10.9677 & -23.7634 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.2236 & -0.4720 \\ -0.4720 & 1.4410 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x,$$

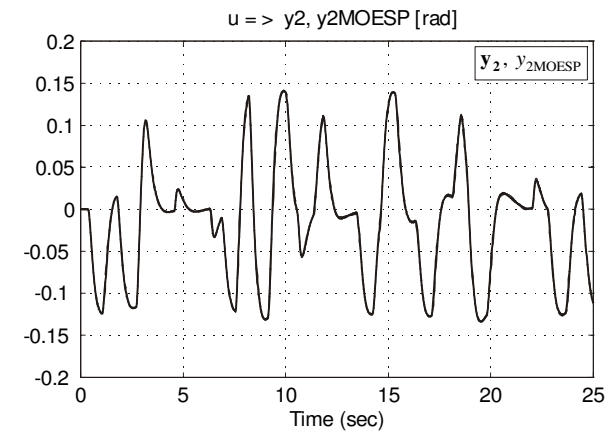
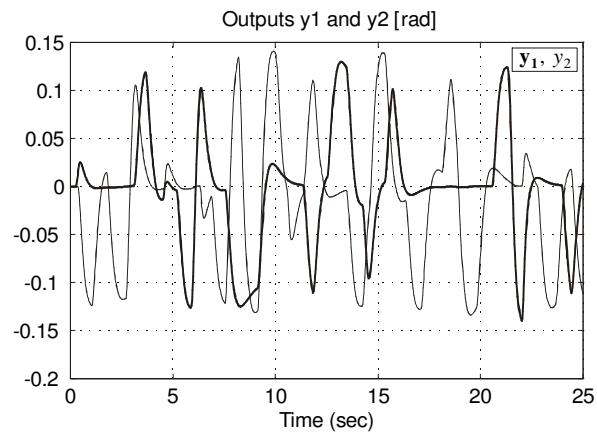
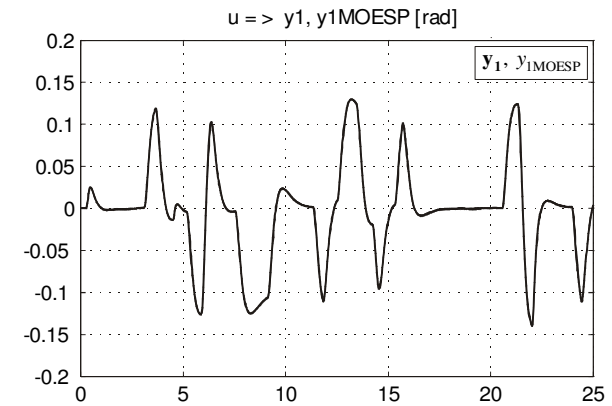
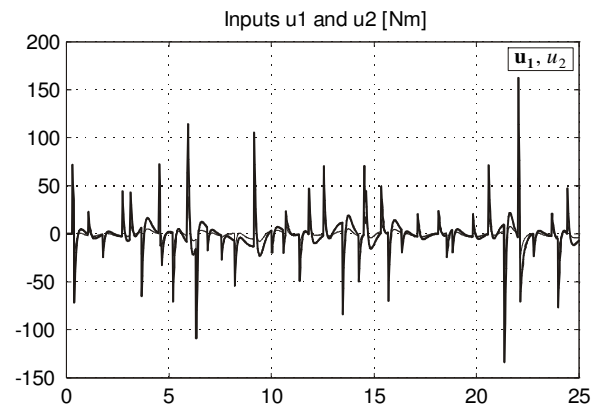
diszkrét időben  $T = 0.025$  sec mintavételi idő mellett pedig

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.9968 & 0.0019 & 0.0250 & 0.0000 \\ 0.0034 & 0.9926 & 0.0000 & 0.0249 \\ -0.2585 & 0.1518 & 0.9968 & 0.0019 \\ 0.2732 & -0.5924 & 0.0034 & 0.9926 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.0001 & -0.0001 \\ -0.0001 & 0.0004 \\ 0.0056 & -0.0118 \\ -0.0118 & 0.0359 \end{bmatrix} u_k,$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k.$$

Az identifikációhoz a nemlineáris rendszert elláttuk szabályozóval, és olyan referencia jelet választottunk, amely a  $q_0$  munkapont körüli kis (kb.  $\pm 5^\circ$ ) változásokra készítette a rendszert.

Az identifikációhoz a jeleket a nemlineáris rendszeren vettük fel zárt szabályozási körben. A jelekből a munkaponti értéket levontuk, és az így kapott jelek láthatók már az ábrán.



Az identifikációnál használt bemenő- és kimenőjelek  
(munkapont körüli változások)

A lineariált rendszer és a MOESP-pel identifikált rendszer válaszjelei

A jelek alapján elvégeztük a linearizált modell meghatározását a MOESP módszerrel,  $i=50$  értéket választva a Hankel-mátrixok számára. A domináns szinguláris értékek  $n=4$ -re adódtak, a fizikai képnek megfelelően. Mivel a MOESP módszerbe eleve beépül egy koordináta-transzformáció, ezért az állapotváltozók az identifikált rendszernél mások lesznek.

Csak az invariáns rendszerjellemzőket van értelme ezért összehasonlítani. Ilyenek például az állapotegyenlet sajátértékei (az átviteli függvény mátrix pólusai) és az átviteli függvények, vagy például az amplitudómenet. Az identifikáció jóságát ezért vizsgálhatjuk az időtartományban, felrajzolván a mért kimeneteket és az identifikált modell kimeneteit a mért bemenőjelek mellett, illetve a frekvencia-tartományban az invariáns rendszerjellemzők ellenőrzésével.

Az ábra alapján megállapíthatjuk, hogy a mért és az identifikált modellel kapott kimenőjelek gyakorlatilag egybeesnek, tehát az identifikáció hatékony volt.

A linearizált rendszer és az identifikált modell pólusai a  $q_0 = (-\pi/2, 0)^T$  stabilis munkapont környezetében:

Linearizált rendszer pólusai	MOESP-pel kapott pólusok
0.9980+j0.0636	0.9980+j0.0636
0.9980-j0.0636	0.9980-j0.0636
0.9914+j0.1310	0.9914+j0.1305
0.9914-j0.1310	0.9914-j0.1305

Egy érdekes kérdés, hogy mennyire általánosítható ez a tapasztalat integráló vagy instabil rendszerekre. Példaként tekintsük a robotkar felső helyzetét, aminek labilis munkapont felel meg.

A linearizált rendszer és az identifikált modell pólusai a  $q_0 = (\pi/2, 0)^T$  labilis munkapont környezetében:

Linearizált rendszer pólusai	MOESP-pel kapott pólusok
1.1404	1.1399
1.0658	1.0657
0.9383	0.9384
0.8769	0.8767

A MOESP módszer ebben a labilis munkapontban is elfogadható eredményt ad a pólusokra.