LJAPUNOV STABILITÁS DEFINÍCIÓJA

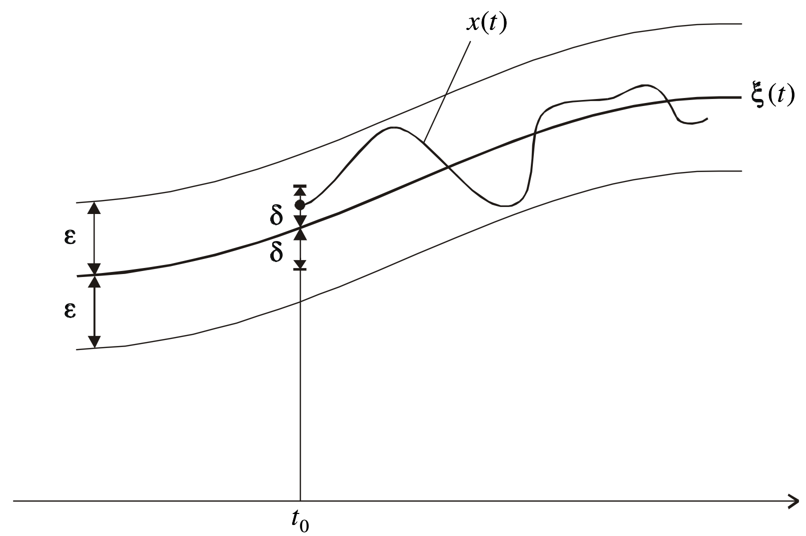
Tekintsük az $\dot{x} = f(x,u,t)$ nemlineáris rendszert $u(t)=0$ vagy lerögzített $u(t)=u_0(t)$ ismert bemenet esetén, amely ekkor $\dot{x} = f(t,x)$ alakra hozható. Feltesszük, hogy $f \in C_{t,x}^{(0,1)}([a,\infty)\times D_x)$, azaz f folytonos t-ben és differenciálható x-ben, továbbá $a \in R^1$ és $D_x \subset R^n$ nyílt halmaz, pl. $a=0$ és $D_x = R^n$. Nemlineáris rendszerek esetén különféle stabilitás definíciók ismertek, de ezek közül a legelterjedtebb a Ljapunov-féle stabilitás definíció.

Definíció (Ljapunov-féle stabilitás):

Legyen $\xi(t)$ megoldása az $\dot{x} = f(t,x)$ differenciálegyenletnek. Azt mondjuk, hogy a $\xi(t)$ megoldás Ljapunov-féle értelemben **stabilis**, ha
$\forall t_0 \in [a,\infty)$ és $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon,t_0) > 0,$ hogy
ha $x(t)$ megoldás és $\|x(t_0) - \xi(t_0)\| < \delta(\varepsilon,t_0),$
akkor $\forall t \in [t_0,\infty)$ esetén $\|x(t) - \xi(t)\| < \varepsilon.$

Vegyük észre, hogy a *megoldás* stabilitását definiáltuk, ahol a megoldás lehet egyensúlyi pont, határciklus, de tetszőleges más megoldás is.

A definíció úgy is megfogalmazható, hogy akárhol kicsit perturbálva $\xi(t)$-hez képest, és innen indítva a rendszert, az új megoldás $\xi(t)$ közelében marad. Ennek szemléletes értelmezését mutatja a következő ábra.



A következő elnevezések szokásosak:

1. A rendszer $\xi(t)$ megoldása **labilis**, ha $\xi(t)$ nem stabilis.
2. A rendszer $\xi(t)$ megoldása Ljapunov-féle értelemben **egyenletesen stabilis**, ha $\xi(t)$ Ljapunov-féle értelemben stabilis és $\delta(\varepsilon, t_0) = \delta(\varepsilon)$ nem függ t_0-tól.
3. A rendszer $\xi(t)$ megoldása Ljapunov-féle értelemben **aszimptotikusan stabilis**, ha $\xi(t)$ Ljapunov-féle értelemben stabilis és $\forall t_0 \in [a, \infty)$ esetén $\exists \delta_1(t_0)$, hogy ha $x(t)$ megoldás, amelyre teljesül $\|x(t_0) - \xi(t_0)\| < \delta_1(t_0)$, akkor $\lim_{t\to\infty} \|x(t) - \xi(t)\| = 0$.

A gyakorlatban oly fontos aszimptotikus stabilitás azt jelenti, hogy akárhol kicsit perturbálva $\xi(t)$-hez képest, és innen indítva a rendszert, az új megoldás $\xi(t)$ közelében marad és $t \to \infty$ esetén minden határon túl megközelíti azt, pl. befut a $\xi(t) = \text{const}$ egyensúlyi pontba vagy a $\xi(t)$ határciklusba.

Megmutatjuk, hogy a stabilitásvizsgálat visszavezethető a $\xi \equiv 0$ megoldás (egyensúlyi pont) stabilitásának vizsgálatára. Vezessük be ugyanis a $\tilde{x}(t) := x(t) - \xi(t)$ jelölést, azaz legyen $x(t) = \xi(t) + \tilde{x}(t)$, akkor

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} - \frac{d\xi(t)}{dt} = f(t, \xi(t) + \tilde{x}(t)) - f(t, \xi(t))$$
$$=: \tilde{f}(t, \tilde{x}(t)),$$

ami azt jelenti, hogy a stabilitásprobléma új alakja

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \tilde{f}(t, \tilde{x}(t)),$$
$$\tilde{\xi}(t) \equiv 0 \ \text{(egyensúlyi pont)} \Leftrightarrow \tilde{f}(t,0) \equiv 0.$$

Ki kell azonban hangsúlyozni, hogy a transzformáció után teljesülnie kell az $\tilde{f}(t,0) \equiv 0$ feltételnek. A továbbiakban feltételezzük, hogy a transzformációt már elvégeztük, és elhagyjuk a "~" jelölést. A további vizsgálatokhoz szükség lesz a pozitív definit és a negatív definit függvény fogalmára.

Definíció (definit függvény):

1. A $V(t, x)$ függvény **pozitív definit**, ha $\exists\, W(x)$ skalárértékű függvény, hogy $\forall \|x\| \neq 0$ esetén $V(t, x) \geq W(x) > 0$ és $V(t,0) \equiv W(0) = 0$.
2. A $V(t, x)$ függvény **negatív definit**, ha $-V(t, x)$ pozitív definit.

LJAPUNOV STABILITÁSI TÉTELEK

Tétel (Ljapunov 1. tétele, direkt módszer):

Legyen $\xi \equiv 0$ egyensúlyi pont, azaz

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad f(t,0) \equiv 0, \quad f(t,x) \in C_{t,x}^{(0,1)}.$$

1. Ha $\exists V(t,x) \in C_{t,x}^{(1,1)}([a,\infty) \times D_x)$ pozitív definit függvény (ún. Ljapunov függvény), hogy minden $x(t)$ megoldásra a trajektória mentén

   $$\dot{V}(t,x) := \frac{d\,V(t,x(t))}{dt} \le 0 \ (\dot{V} \text{ negatív szemidefinit}),$$

   akkor a $\xi(t) \equiv 0$ megoldás (egyensúlyi pont) Ljapunov-féle értelemben **stabilis**.

2. Ha pótlólagosan teljesül

   $$\dot{V}(t,x) := \frac{d\,V(t,x(t))}{dt} < 0 \ (\dot{V} \text{ negatív definit}),$$

   akkor a $\xi(t) \equiv 0$ megoldás (egyensúlyi pont) Ljapunov-féle értelemben **aszimptotikusan stabilis**.

A tétel bizonyítása visszavezethető arra, hogy folytonos függvény kompakt halmazon felveszi szélsőértékét.

Vegyük még észre, hogy

$$\frac{dV}{dt} = V_x' \frac{dx}{dt} + V_t' = \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) + \frac{\partial V}{\partial t}$$

A tétel bizonyítása helyett egy szemléletes magyarázatot adunk időinvariáns rendszer esetére. Tegyük ugyanis fel, hogy f és V nem függ az időtől, és a $V(x) = c$ felületek olyanok, hogy

$$c_1 < c_2 \Rightarrow \{x : V(x) \le c_1\} \subset \{x : V(x) \le c_2\},$$

vagyis a felületek ebben az értelemben egymásba skatulyázottak.

Tekintsük azt a pontot, ahol az $x(t)$ trajektória átmegy a $V(x) = c$ felületen. Akkor ebben a pontban a felület $V_x' = \operatorname{grad} V$ kifelé mutató normálisa és a trajektória $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$ érintője által bezárt szög tompaszög, mivel $< \operatorname{grad} V, f(x(t)) > < 0$, ezért a trajektória a felület belseje felé halad. Mivel ez folyamatosan teljesül és $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ezért a trajektória minden határon túl megközelíti a $\xi \equiv 0$ egyensúlyi pontot, ami szemléletesen igazolja az aszimptotikus stabilitást.

A direkt módszer használatához szükség van egy Ljapunov-függvény jelöltre, amelyre a tétel feltételei teljesülnek, és amelyből következtetni tudunk az egyensúlyi pont stabilitására. Ljapunov-függvényként sok esetben energia jellegű függvénnyel (kinetikus és/vagy potenciális energia) kisérletezünk.

Tétel (Ljapunov 2. tétele, indirekt módszer):

Legyen $\xi \equiv 0$ egyensúlyi pont, azaz

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad f(t,0) \equiv 0, \quad f(t,x) \in C_{t,x}^{(0,1)}.$$

Vezessük be az

$$A(t) := f_x'(t,x)\big|_{x=0} \text{ és az } f_1(t,x) := f(t,x) - A(t)x$$

jelöléseket. Ha teljesül, hogy

i) $\lim\limits_{\|x\|\to 0} \sup\limits_{t \ge 0} \dfrac{\|f_1(t,x)\|}{\|x\|} = 0,$

ii) $A(\cdot)$ korlátos leképezés,

iii) $\dot{x} = A(t)x$ lineáris rendszer egyenletesen aszimptotikusan stabilis,

akkor az eredeti nemlineáris rendszer $\xi(t) \equiv 0$ egyensúlyi pontja egyenletesen aszimptotikusan stabilis.

A bizonyítás gondolatmenete a következő. Tekintsük az $\dot{x} = A(t)x$ linearizált rendszert és annak $\Phi(t,\tau)$ alapmátrixát. Legyen

$$P(t) := \int_t^\infty \Phi^T(\tau,t)\, \Phi(\tau,t)\, d\tau, \text{akkor}$$

$$< Px, x > = < \int_t^\infty \Phi^T(\tau,t)\Phi(\tau,t)\, d\tau\, x, x > =$$
$$= \int_t^\infty < \Phi^T(\tau,t)\Phi(\tau,t)x, x > d\tau = \int_t^\infty \|\Phi(\tau,t)x\|^2 d\tau > 0,$$

mivel $\Phi(\tau,t)$ invertálható (és folytonos). Ezért $< Px, x >$ egy Ljapunov-függvény jelölt, amelyre a következő feltételek teljesülnek:

(1) $P(t)$ pozitív definit és $\exists \alpha, \beta > 0,$ hogy $\forall t, x : \alpha\|x\|^2 \le < P(t)x, x > \le \beta\|x\|^2,$

(2) $V(t,x) := < P(t)x, x >$ pozitív definit függvény,

(3) $\dot{V}(t,x) = < \dot{P}(t)x, x > + < P(t)\dot{x}, x > + < P(t)x, \dot{x} >$ az $\dot{x} = A(t)x + f_1(t,x)$ nemlineáris rendszer trajektóriái mentén a következő alakra hozható:

$$\dot{V}(t,x) = < \{\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t)\}x, x > +$$
$$+ 2 < P(t) f_1(t,x), x >,$$

(4) Elvégezve a deriválást kapjuk, hogy

$$\dot{P}(t) = \int_t^{\infty} \{\dot{\Phi}^T(\tau,t)\Phi(\tau,t) + \Phi^T(\tau,t)\dot{\Phi}(\tau,t)\} d\tau - $$
$$- \Phi^T(t,t)\Phi(t,t),$$

amelybe behelyettesítve a $\Phi(t,\tau)$ alapmátrix tulajdonságaiból következő

$$\frac{d}{dt}\Phi^T(\tau,t) = -A^T(t)\Phi^T(\tau,t)$$

$$\frac{d}{dt}\Phi(\tau,t) = -\Phi(\tau,t)A(t)$$

kifejezéseket átalakítások után kapjuk, hogy

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) = -I.$$

(5) $\dot{V}(t,x) = -\|x\|^2 + 2 < P(t) f_1(t,x), x > < 0,$
mivel $\|2 < P(t) f_1(t,x), x >\|$ a tétel i) feltétele és (1) alapján kisebbé tehető $\|x\|^2$-nél $x = 0$ valamely környezetében $\forall t \geq t_0$ esetén.

Vegyük észre, hogy Ljapunov indirekt módszere nem ad felvilágosítást az egyensúlyi pont vonzási környezetéről (az ú.n. attrakciós halmazról).

Ezért azt láttuk be, hogy a nemlineáris rendszer a tétel feltételeinek teljesülése esetén $\xi \equiv 0$ egyensúlyi pontjának csak valamilyen *kis környezetében* lesz biztosan aszimptotikusan stabilis (lokális stabilitás).

Korábban már foglalkoztunk az időinvariáns (autonóm, LTI) lineáris rendszerek stabilitásával. A rendszert akkor tekintettük stabilisnak, ha a kezdeti feltételek hatása lecseng, vagy ha a rendszer korlátos bemenő jelre korlátos kimenő jellel válaszol. Keressünk kapcsolatot eme stabilitás felfogás és a Ljapunov-féle stabilitás között.

Tétel (LTI rendszer stabilitása):

Tekintsük az $\dot{x} = Ax$ LTI rendszert, amelyre $\xi \equiv 0$ nyílván egyensúlyi pont. Legyen P konstans (szimmetrikus) pozitív definit mátrix ($P > 0$) és $V(x) := < Px, x >$ a Ljapunov-függvény jelölt. Végezzük el az $\dot{x} = Ax$ behelyettesítést $\dot{V}$ kifejezésében:

$\dot{V} = < P\dot{x}, x > + < Px, \dot{x} > = < (PA + A^T P)x, x >$.

Akkor $\dot{V} < 0$ (negatív definit), ha $\exists Q > 0$ pozitív definit mátrix, hogy teljesül a **Ljapunov-egyenlet**:

$$PA + A^T P = -Q, \quad P > 0, \quad Q > 0.$$

A következő állítások ekvivalensek:

i) Az A mátrix minden s_i sajátértékére teljesül $\operatorname{Re} s_i < 0$.

ii) $\exists Q > 0$, hogy a Ljapunov-egyenletnek $\exists P > 0$ megoldása.

iii) $\forall Q > 0$ esetén a Ljapunov-egyenletnek létezik

$$P := \int_0^\infty e^{A^T t} Q\, e^{At}\, dt > 0 \text{ megoldása.}$$

Csak az i) $\Rightarrow$ iii) esetet **bizonyítjuk**. Mivel $Q > 0$, ezért a Q mátrixnak létezik pozitív definit négyzetgyöke: $\sqrt{Q} > 0$, ezért

$$< Px, x >= \int_0^\infty \left\| \sqrt{Q}\, e^{At} x \right\|^2 dt > 0, \text{ ha } x \neq 0,$$

tehát P pozitív definit. Ha i) teljesül, akkor $\forall x$ esetén $x(t) = e^{At} x \to 0$. Ahhoz, hogy ebből következzék iii), már csak azt kell belátni, hogy P kielégíti a Ljapunov-egyenletet $\forall x$ esetén.

Tekintsük ezért a Ljapunov-egyenlet bal oldalát:

$$(PA + A^T P)x = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At}\, dt\, Ax + A^T \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At}\, dt\, x =$$

$$= \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} Ax\, dt + A^T \int_0^\infty e^{A^T t} Q\, e^{At} x\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{A^T t} Q\, A e^{At} x\, dt + A^T \int_0^\infty e^{A^T t} Q\, e^{At} x\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{A^T t} Q\, \dot{x}(t)\, dt + A^T \int_0^\infty e^{A^T t} Q\, x(t)\, dt.$$

Alkalmazzuk a differenciálás $uv' = (uv)' - u'v$ szorzat szabályát $u = e^{A^T t} Q$ és $v' = \dot{x}(t)$ választással, akkor

$$(PA + A^T P)x =$$

$$= \int_0^\infty [e^{A^T t} Q x(t)]'\, dt - \int_0^\infty A^T e^{A^T t} Q\, x(t)\, dt + A^T \int_0^\infty e^{A^T t} Q\, x(t)\, dt =$$

$$= e^{A^T t} Q\, x(t) \Big|_0^\infty = -Q\, x,$$

tehát P valóban kielégíti a Ljapunov-egyenletet. Beláttuk tehát, hogy i) $\Rightarrow$ iii).

LA SALLE STABILITÁS TÉTELE

Definíció (invariáns halmaz):
Az M halmaz invariáns, ha bármelyik pontján átmenő trajektória (az $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenlet megoldása), annak bal odali és jobb oldali fele is, teljes egészében a halmazban fekszik. Ehhez elvben a halmaz pontja mint kezdeti feltétel körül a differenciálegyenlet megoldását pozitív és negatív időértékekre is meg kell határozni.

Ha egy E halmaz nem invariáns, akkor beszélhetünk az E által tartalmazott M maximális invariáns halmazról:

$$M = \max\{H \subset E : x(0) \in H, x(t) \text{megoldás} \\ \Rightarrow \forall t : x(t) \in H\}.$$

Tétel (La Salle stabilitás tétele): Legyen az $\dot{x} = f(x)$ rendszernek $0 = f(0)$ egyensúlyi pontja és $f(x) \in C_x^{(1)}$. Létezzen $V(x)$ Ljapunov-függvény, mely kielégíti az alábbi feltételeket rögzített $r > 0$ esetén az $\{x : |V(x)| \le r\} =: \Omega_r$ kompakt halmazon:

i) $V(x)$ pozitív definit: $V(x) \ge 0$ és $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $\dot{V}(x) = < \operatorname{grad} V, f > \le 0$ (negatív szemidefinit),

iii) $V(x) \in C_x^{(1)}$ (folytonosan differenciálható).

Legyen az $E = \{x \in \Omega_r : \dot{V}(x) = 0\}$ halmaz maximális invariáns halmaza M. Akkor tetszőleges $x(0) \in \Omega_r$ kezdeti feltételt kielégítő $x(t)$ trajektória aszimptotikusan tart az M halmazhoz.

Ez részletesebben azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik T, hogy minden $t > T$ esetén $x(t)$ az M halmaz ε-környezetében marad:

$$\text{létezik } y(t, \varepsilon) \in M + \{x : \|x\| < \varepsilon\}, \text{ hogy } \|x(t) - y\| < \varepsilon.$$

Következmény: Ha az $E = \{x \in \Omega_r : \dot{V}(x) = 0\}$ halmaz maximális invariáns halmaza $M = \{0\}$, akkor tetszőleges $x(0) \in \Omega_r$ esetén az $x(t)$ trajektória aszimptotikusan tart a $0 = f(0)$ egyensúlyi ponthoz.

Következmény: Legyen $x = (y^T, z^T)^T$ és teljesüljenek a La Salle-tétel feltételein kívül még:

i) $\dot{V}(x) = \dot{V}(y, z) = 0 \Rightarrow y = 0$,

ii) $\dot{y} = \varphi(y, z)$ alakú és $\varphi(0, z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Akkor az $y = 0$, $z = 0$ egyensúlyi pont aszimptotikusan stabilis.

Nyilvánvaló ugyanis, hogy az i) feltétel és E definíciója miatt az $M \subset E$ halmaz minden pontjában $y = 0$. Innen következik az M halmaz invarianciája alapján $\dot{y} = 0$ minden M -ben futó $x(t)$ trajektória esetén, és így ii) alapján $z = 0$. Ezért M egyetlen pontból áll, és így alkalmazható az előző következmény eredménye.

Példa (a La Salle-tétel használatának illusztrációja): Tekintsünk egy nyíltláncú, merev, visszacsatolás nélküli robotot, amelynek állapotegyenlete

$$H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + D(q) = \tau,$$

ahol rendre $q, \dot{q}, \ddot{q}$ jelöli a csuklóváltozókból álló vektort, annak sebességét és gyorsulását, τ a szegmenseket meghajtó nyomatékok vektora, $H = [D_{jk}]$ az általánosított inercia mátrix, $C = [C_{ik}]$, $C_{ik} = \sum_j D_{ijk}\dot{q}_j$ és $C\dot{q}$ írja le az centripetális és Coriolis hatást, $D = [D_i]$ a gravitációs hatás.

Legyen a feladat a robot irányítása $q_a = \text{const}$ alapjelváltás esetén (PTP, point-to-point control).

Legyen az irányítási törvény

$$\tau := D(q) + K_P(q_a - q) - K_D\dot{q},\ \ K_P > 0,\ K_D > 0,$$

ami arányos+differenciáló szabályozásnak és nemlineáris előrecsatolásnak felel meg a gravitációs hatás alapján. A zárt szabályozási kört akkor

$$H\ddot{q} + C\dot{q} + D = D + K_P(q_a - q) - K_D\dot{q}$$

írja le, ahonnan következik

$$H\ddot{q} = -C\dot{q} + K_P(q_a - q) - K_D\dot{q}.$$

A robot kinetikus energiája a $H > 0$ mátrix kvadratikus alakja. Egy elemi rugó potenciális energiája $P = 0.5kx^2$, ahol x a rugó elmozdulása és k a rugóállandó. Ennek mintájára álljon a Ljapunov-függvény jelölt a kinetikus és a "potenciális" energia összegéből:

$$V = \frac{1}{2} < H\dot{q}, \dot{q} > + \frac{1}{2} < K_P(q_a - q), q_a - q > .$$

Felhasználjuk, hogy $\dot{H} - 2C$ antiszimmetrikus mátrix, ezért kvadratikus alakja azonosan nulla, továbbá $\dot{q}_a = 0$. Képezzük V deriváltját:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} < \dot{H}\dot{q}, \dot{q} > + \frac{1}{2} < H\ddot{q}, \dot{q} > + \frac{1}{2} < H\dot{q}, \ddot{q} > +$$

$$+ \frac{1}{2} < K_P(\dot{q}_a - \dot{q}), q_a - q > + \frac{1}{2} < K_P(q_a - q), \dot{q}_a - \dot{q} >=$$

$$= \frac{1}{2} < \dot{H}\dot{q}, \dot{q} > + < (-C\dot{q} + K_P(q_a - q) - K_D\dot{q}), \dot{q} > +$$

$$+ < K_P(q_a - q), \dot{q}_a - \dot{q} >=$$

$$= \frac{1}{2} < (\dot{H} - 2C)\dot{q}, \dot{q} > - < K_D\dot{q}, \dot{q} >=$$

$$= - < K_D\dot{q}, \dot{q} > .$$

Mivel $K_D > 0$, ezért $\dot{V} \le 0$ (negatív szemidefinit), tehát $\dot{V}$ addig csökken, amíg $\dot{q} = 0$ be nem következik. Legyen $z := q - q_a$, $y := \dot{q}$ és $x := (y^T, z^T)^T$, akkor

$$\dot{y} = H^{-1}\{-Cy - K_P z - K_D y\},$$

$$\dot{z} = y,$$

$$E = \{x : \dot{V}(x) = 0\}.$$

Legyen $M \subset E$ a maximális invariáns halmaz, akkor

$$x \in E \Leftrightarrow y = 0,$$

$$x \in M \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \dot{y} = 0 \Rightarrow -H^{-1}K_P\, z = 0 \Rightarrow z = 0,$$

$$M = \{0\}.$$

A La Salle-tétel következménye szerint $x(t) \to 0$, ezért $z(t) = q(t) - q_a \to 0$. A választott szabályozási törvény esetén ezért a $q(t)$ szabályozott jellemző aszimptotikusan tart a $q_a = \text{const}$ alapjelhez.

K ÉS KL ÖSSZEHASONLÍTÁSI FÜGGVÉNYEK

Stabilitásvizsgálatot támogató függvények:

(i) Az $\alpha:[0,a)\to R^+$ függvényt K-függvénynek nevezzük, ha $\alpha(\cdot)$ szigorúan monoton növekvő és $\alpha(0)=0$. Speciálisan, ha $a=\infty$ és $\alpha(r)\to\infty$ ha $r\to\infty$, akkor $\alpha(r)$ egy K_∞-függvény.

(ii) A $\beta:[0,a)\times R^+\to R^+$ függvényt KL-függvénynek nevezzük, ha $\beta(r,s)$ teljesíti, hogy $\beta(\cdot,s)$ egy K-függvény az első változóban minden rögzített s esetén, míg $\beta(r,\cdot)$ monoton csökkenő a második változóban minden rögzített r esetén és $\beta(r,s)\to 0$ ha $s\to\infty$.

Példák:
$\alpha(r)=\mathrm{a}tan(r)$ K-függvény, de nem K_∞-függvény, azonban $\alpha(r)=r^c$ egy K_∞-függvény $c>0$ esetén, míg $\beta(r,s)=r^c e^{-s}$ egy KL-függvény $c>0$ esetén.

A következő tételek $\dot{x}=f(t,x)$ esetén érvényesek.

Tétel: A $\xi\equiv 0$ egyensúlyi pont

(i) Egyenletesen stabil (US)$\Leftrightarrow$ létezik $\alpha(r)$ K-függvény és $c>0$ függetlenül t_0-tól, hogy teljesül $\|x(t)\|\le\alpha(\|x(t_0)\|),\forall t\ge t_0\ge 0,\forall\|x(t_0)\|<c$,

(ii) Egyenletesen aszimptotikusan stabil (UAS)$\Leftrightarrow$ létezik $\beta(r,s)$ KL-függvény és $c>0$ függetlenül t_0-tól, hogy teljesül $\|x(t)\|\le\beta(\|x(t_0)\|,t-t_0),\forall t\ge t_0\ge 0,\forall\|x(t_0)\|<c$,

(iii) Globálisan egyenletesen aszimptotikusan stabil (GUAS) $\Leftrightarrow$ létezik $\beta(r,s)$ KL-függvény, hogy teljesül $\|x(t)\|\le\beta(\|x(t_0)\|,t-t_0),\forall t\ge t_0\ge 0,\forall x(t_0)\in R^n$.

A következő tétel a Ljapunov függvény és a K és KL függvények kapcsolatát mutatja be. Feltesszük, hogy $0\in D\subset R^n$ nyílt halmaz, $V(t,x)$ folytonosan differenciálható, $W_1(x)\le V(t,x)\le W_2(x)$, ahol $W_1(x), W_2(x)$ pozitív definit, továbbá $\dfrac{\partial V}{\partial x}f(t,x)+\dfrac{\partial V}{\partial t}\le 0$.

Tétel: Ha teljesülnek a fenti feltételek, akkor a $\xi \equiv 0$ egyensúlyi pont

(i) Egyenletesen stabil (US),
(ii) Egyenletesen aszimptotikusan stabil (UAS), ha
$$\frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) + \frac{\partial V}{\partial t} \le -W_3(x),$$
ahol $W_3(x)$ pozitív definit,
(iii) Ha az előző feltétel mellett teljesül még az is, hogy r és c megválasztható úgy, hogy $B_r := \{x : \|x\| \le r\} \subset D$ és $0 < c < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$, akkor minden trajektóriára, amely $\{x \in B_r : W_2(x) \le c\}$-ből indul, teljesül $\|x(t)\| \le \beta(\|x(t_0)\|, t-t_0), \forall t \ge t_0 \ge 0$ valamilyen KL-függvény esetén.
Speciálisan, ha $D = R^n$ és $W_1(x)$ radiálisan korlátlan, akkor az egyensúlyi pont globálisan egyenletesen aszimptotikusan stabil (GUAS).

Megjegyzés: A rendkívül erős (iii) eredmény bizonyítása igényli a megkonstruálását olyan K-függvénynek, amelyekkel teljesül $\alpha_1(\|x\|) \le W_1(x)$, $W_2(x) \le \alpha_2(\|x\|)$, $\alpha_3(\|x\|) \le W_3(x)$. Ezek ismeretében már választható $\alpha = \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}$, továbbá $y(t) =: \sigma(y_0, t-t_0)$, amely az $\dot{y} = -\alpha(y),\ y(t_0) = V(t_0, x(t_0))$ skalár nemlineáris differenciálegyenlet megoldása és végül
$$\beta(x(t_0), t-t_0) := \alpha_1^{-1}(\sigma(\alpha_2(\|x(t_0)\|), t-t_0)).$$

Bemenet-állapot stabilitás (input-to-state stability, ISS):

Az $\dot{x} = f(t,x,u)$ nemlineáris rendszert ISS stabilnak nebezzük, ha létezik $\beta(r,s)$ KL-függvény és $\gamma(r)$ K-függvény, hogy minden $x(t_0)$ kezdeti feltétel és minden $u(t)$ korlátos bemenet esetén létezik az $x(t),\ \forall t \ge t_0$ megoldás, amely kielégíti a következő egyenlőtlenséget:
$$\|x(t)\| \le \beta(\|x(t_0)\|, t-t_0) + \gamma(\sup_{t_0 \le \tau \le t} \|u(\tau)\|).$$

Tétel (ISS stabilitás elégséges feltétele): Teljesüljön
$$\alpha_1(\|x\|) \le V(t,x) \le \alpha_2(\|x\|)$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} f(t,x,u) + \frac{\partial V}{\partial t} \le -W_3(x), \forall \|x\| \ge \rho(\|u\|) > 0$$
minden $(t,x,u) \in [0,\infty) \times R^n \times R^m$, ahol α_1, α_2 K_∞-függvények, ρ K-függvény és $W_3(x)$ pozitív definit. Akkor $\dot{x} = f(t,x,u)$ ISS stabil $\gamma := \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \rho$ választással.

BARBALAT-LEMMÁK

Lemma (Barbalat lemmák):

1. Legyen $f: R^1 \to R^1$ egyenletesen folytonos a $[0,\infty)$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $\lim_{t\to\infty} \int_0^t f(\tau)d\tau$ létezik és véges. Akkor $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.
2. Tegyük fel, hogy $f \in L_\infty$, $\dot{f} \in L_\infty$ és $\lim_{t\to\infty} \int_0^t f(\tau)d\tau$ létezik és véges. Akkor $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.
3. Tegyük fel, hogy $f(t)$ differenciálható, $\lim_{t\to\infty} f(t)$ létezik és véges, továbbá $\dot{f}$ egyenletesen folytonos, akkor $\dot{f}(t) \to 0$, ha $t \to \infty$.

Bizonyítás:

1. Ha az első állítás nem igaz, akkor létezik $\varepsilon_0 > 0$, hogy minden $T > 0$ esetén található $T_1 \ge T$, amelyre teljesül $|f(T_1)| \ge \varepsilon_0$. Mivel $f(t)$ egyenletesen folytonos, ezért létezik $\delta > 0$, hogy $|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon_0 / 2$ minden $t > 0$ és $0 < \tau < \delta$ esetén. Ezért minden $t \in [T_1, T_1 + \delta]$ esetén

$$\begin{aligned} |f(t)| &= |f(t) - f(T_1) + f(T_1)| \ge |f(T_1)| - |f(t) - f(T_1)| \\ &> \varepsilon_0 - \varepsilon_0 / 2 = \varepsilon_0 / 2, \end{aligned}$$

amiből következik

$$\left| \int_{T_1}^{T_1+\delta} f(t)dt \right| = \int_{T_1}^{T_1+\delta} |f(t)| dt > (\varepsilon_0 / 2)\delta,$$

ahol az egyenlőség a két integrál között teljesül, mert $f(t)$ nem vált előjelet $t \in [T_1, T_1 + \delta]$ esetén. Ezért $\int_0^t f(\tau)d\tau$ nem konvergálhat véges határértékhez ha $t \to \infty$, ami ellentmondás. Ezért az első állítás igaz.

2. A második állítás következik abból a tényből, hogy ha $\dot{f} \in L_\infty$ akkor f egyenletesen folytonos és alkalmazható az első állítás.

3. A harmadik állítás következik abból a tényből, hogy $f(\infty) - f(0) = \int_0^\infty \dot{f}(t)dt$ miatt a jobb oldal létezik és véges, ezért alkalmazható az első állítás f helyett $\dot{f}$ -tal.

A következő lemma közvetlen következménye a Barbalat-lemmának, és olyan hatású, mint az invariáns halmaz tétel a Ljapunov stabilitás analízisben, de *időben változó* rendszer esetén.

Lemma (a Barbalat-lemma Ljapunov-féle alakja):

A skalárértékű $V(x,t)$ függvény elégítse ki a következő három feltételt:

i) $V(x,t)$ alulról korlátos
ii) $\dot{V}(x,t)$ negatív szemidefinit
iii) $\dot{V}(x,t)$ egyenletesen folytonos t-ben.

Akkor $\dot{V}(x,t) \to 0$, ha $t \to \infty$.

Vegyük észre, hogy $V(x,t)$ egyszerűen alulról korlátos lehet, nem kell pozitív definitnek lennie. Jegyezzük meg, hogy $\dot{V}(x,t)$ egyenletesen folytonos, ha $\ddot{V}(x,t)$ létezik és korlátos.

LP STABILITÁS

Lp norma:

$\|f\|_p = (\int_0^\infty |f(t)|^p \, dt)^{1/p} < \infty \Rightarrow f \in L_p[0,\infty)$, $p \in [1,\infty)$

$\|f\|_\infty = ess\ sup|f(t)| < \infty \Rightarrow f \in L_\infty[0,\infty)$

Az így definiált függvényterek Banach-terek (lineáris normált tér, amelyben a Cauchy-sorozatok konvergensek).

Speciálisan $p=2$ esetén $L_2[0,\infty)$ Hilbert-tér (végtelen dimenziós Banach-tér, amelyben létezik $< f, g >$ skalárszorzat és a norma skalárszorzattal van definiálva: $\|f\|_2^2 =< f, f >$).

Lp-stabil nemlineáris rendszer:

Legyen $G: L_p^n \to L_p^m$ *nemlineáris* rendszer, amely az $u \in L_p^n[0,\infty)$ bemenőjelet leképezi $y \in L_p^m[0,\infty)$ kimenőjelbe. Akkor a nemlineáris rendszer:

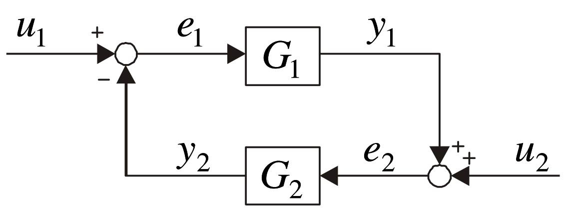
(i) L_p-stabil véges erősítéssel (wfg), ha létezik $\gamma_p, \beta_p \geq 0$ konstans, hogy

$$u \in L_p^n \Rightarrow \|y\|_p \leq \gamma_p \|u\|_p + \beta_p,$$

(ii) L_p-stabil véges erősítéssel bias nélkül (wb), ha létezik $\gamma_p \geq 0$ konstans, hogy

$$u \in L_p^n \Rightarrow \|y\|_p \leq \gamma_p \|u\|_p.$$

Nemlineáris rendszer erősítése: $\gamma_p(G) = \inf\{\gamma_p\}$, amely kielégíti az (i) wfg vagy (ii) wb feltételt.



Tétel (kis erősítés tétel): Tekintsük az ábra szerinti nemlineáris rendszert, és legyen G_1, G_2 kauzális és L_2-stabil wfg (wb), $\gamma_{1p} = \gamma_{1p}(G_1)$ és $\gamma_{2p} = \gamma_{2p}(G_2)$. Akkor a zárt rendszer L_2-stabil, ha

$$\gamma_{1p} \cdot \gamma_{2p} < 1.$$

PASSZÍV RENDSZEREK

Legyen $G : L_2^n \to L_2^n$ nemlineáris rendszer
($<u, y>$ skalárszorzathoz $p = 2$ és $\dim u = \dim y$ kell)

Definíciók:

(i) G passzív, ha $\exists \beta \in R^1$, hogy

$$<u, Gu> = \int_0^\infty <u(t), (Gu)(t)> dt \geq \beta, \ \forall u \in L_2,$$

(ii) G szigorúan bemenet passzív, ha $\exists \delta > 0, \beta \in R^1$,

hogy $<u, Gu> \geq \delta \|u\|_2^2 + \beta$, $\forall u \in L_2$,

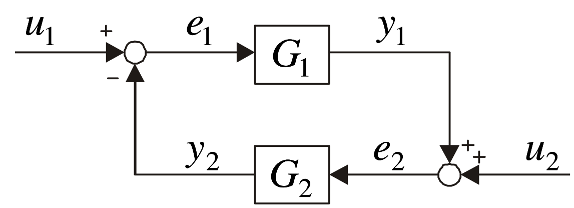
(iii) G szigorúan kimenet passzív, ha $\exists \varepsilon > 0, \beta \in R^1$,

hogy $<u, Gu> \geq \varepsilon \|(Gu)\|_2^2 + \beta$, $\forall u \in L_2$.

Vegyük észre, hogy $u \equiv 0 \in L_2$, ezért $0 \geq \beta$.
Könnyen megmutatható, hogy szigorúan kimenet passzív rendszer L_2-stabil wfg.

Tétel (passzivitás L2 térben):

Tekintsük az ábra szerinti nemlineáris rendszert, és legyen $G_1, G_2 \in L_2^n$.



(i) Ha G_1 és G_2 mindketten szigorúan kimenet passzív nemlineáris rendszerek és mindkét u_1 és u_2 bemenet aktív, akkor az (y_1, y_2) kimenet számára a zárt rendszer szigorúan kimenet passzív és L_2-stabil wfg.

(ii) Ha G_1 szigorúan kimenet passzív, G_2 passzív és $u_2 = 0$ (azaz csak u_1 aktív), akkor az y_1 kimenet számára a zárt rendszer szigorúan kimenet passzív és L_2-stabil wfg.

(iii) Ha G_1 passzív, G_2 szigorúan bemenet passzív és $u_2 = 0$ (azaz csak u_1 aktív), akkor az y_1 kimenet számára a zárt rendszer szigorúan kimenet passzív és L_2-stabil wfg.

DISSZIPATÍV RENDSZEREK

A disszipativitás felfogható a passzivitás megfelelőjének állapottérben, ahol a nemlineáris rendszer:

$$\Sigma : \dot{x} = f(x,u),\ y = h(x,u),\ x \in R^n,\ u, y \in R^m$$

Disszipatív rendszer definíciója:

A valós értékű $s(u, y)$ függvény neve táplálási ráta (supply rate). A rendszert disszipatívnak nevezzük, ha létezik $S : R^n \to R^+$ ú.n. tároló függvény (storage function), hogy minden $x(t_0) \in R^n$ és minden $t_1 \geq t_0$ esetén teljesül a következő disszipativitási egyenlőtlenség:

$$S(x(t_1)) \leq S(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(u(t), y(t))dt.$$

Speciálisan egyenlőség esetén a rendszert veszteségmentesnek nevezzük. Az alkalmazásokban $S(x) =: V(x)$ átveszi a Ljapunov függvény szerepét.

Példaként, tekintsük az $s(u, y) := < u, y >$ táplálási rátát, és tegyük fel, hogy $S \geq 0$. Akkor teljesül

$$\int_0^T < u(t), y(t) > dt \geq S(x(T)) - S(x(0)) \geq -S(x(0))$$

minden $x(0)$, minden $T > 0$ és minden $u(\cdot)$ bemenőjel esetén, ezért a $G_{x(0)}$ bemenet-kimenet leképezés passzív a $\beta = -S(x(0))$ választás mellett. Itt S tekinthető a tárolt energiának, ami motiválja a következő definíciókat.

Passzív disszipatív rendszer definíciója;

A nem lineáris rendszer:

(i) passzív, ha disszipatív $s(u, y) = < u, y >$ esetén,

(ii) *szigotúan bemenet passzív*, ha disszipatív és $s(u, y) = < u, y > -\delta \|u\|^2$, ahol $\delta > 0$,

(iii) *szigorúan kimenet passzív*, ha disszipatív és $s(u, y) = < u, y > -\varepsilon \|y\|^2$, ahol $\varepsilon > 0$,

(iv) *konzervatív*, ha veszteségmentes és $s(u, y) = < u, y >$,

(v) L_2-erősítése $\leq \gamma$, ha disszipatív és $s(u, y) = \frac{1}{2}\gamma^2 \|u\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2$, ahol $\gamma > 0$.

Például az utóbbi esetben

$$\frac{1}{2}\int_0^T (\gamma^2 \|u(t)\|^2 - \|y(t)\|^2)dt \geq S(x(T)) - S(x(0)) \geq -S(x(0)),$$

ahonnan átcsoportosítással következik

$$\int_0^T \|y(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|u(t)\|^2 dt + 2S(x(0)),$$

ami ekvivalens azzal, hogy a rendszer L_p-stabil wfg $\leq \gamma$.

A disszipativitási feltétel differenciális alakra is hozható, elosztván az egyenlőtlenséget $t_1 - t_0$ értékével és elvégezvén a $t_1 \to t_0$ határátmenetet.

Differenciális disszipativitási egyenlőtlenség:

$$S'_x(x) f(x,u) \leq s(u, h(x,u)), \forall x, u,$$
$$S'_x(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial S}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Bemenet affin esetben $\Sigma_a : \dot{x} = f(x) + g(x)u,\ y = h(x)$,

$$s(u, y) = \langle u, y \rangle = \langle u, h(x) \rangle,$$
$$S'_x(x)[f(x) + g(x)u] \leq u^T h(x), \forall x, u$$

ahonnan (először $u = 0$ választással) következik:

Hill-Moylan feltételek:

$$S'_x(x) f(x) \leq 0,$$
$$S'_x(x) g(x) = h^T(x).$$

Speciális esetek:

(1) LTI rendszer esetén a feltételek ekvivalensek a Kalman-Yacubovitch-Popov feltételekkel, ha a tároló függvény $S(x) = \frac{1}{2} x^T P x$, ahol $P = P^T \geq 0$, nevezetesen $A^T P + PA \leq 0$ és $B^T P = C$.

(2) Ha Σ_a szigorúan kimenet passzív, $s(u, y) = \langle u, y \rangle - \varepsilon \|y\|^2$, ahol $\varepsilon > 0$, akkor (először $u = 0$ választással) teljesül

$$S'_x(x) f(x) \leq -\varepsilon h^T(x) h(x),$$
$$S'_x(x) g(x) = h^T(x).$$

(3) Ha Σ_a véges L_2-erősítésű, $s(u, y) = \frac{1}{2}\gamma^2 \|u\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2$, akkor

$$S'_x(x)[f(x) + g(x)u] - \frac{1}{2}\gamma^2 \|u\|^2 + \frac{1}{2}\|h(x)\|^2 \leq 0, \forall x, u.$$

(4) A maximum az egyenlőtlenség bal oldalán akkor áll fenn, ha $u^* = \frac{1}{\gamma^2} g^T(x) S_x'^T(x)$, amelyet visszahelyettesítve a Hamilton-Jacobi-Belmann egyenlőtlenséget kapjuk:

$$S_x'(x) f(x) + \frac{1}{2\gamma^2} S_x'(x) g(x) g^T(x) S_x'^T(x) + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \le 0, \forall x.$$

Ezért a Σ_a bemenet affin rendszer L_2-erősítése $\le \gamma$, akkor és csakis akkor, ha az egyenlőtlenségnek létezik folytonosan differenciálható $S \ge 0$ megoldása. Megjegyezzük, hogy az egyenlőség alak szoros kapcsolatban áll a dinamikus programozás Hamilton-Jacobi-Belmann egyenletével.

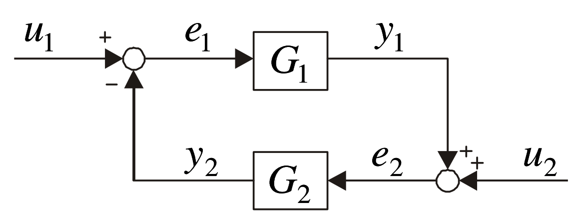
Zero-állapot detektálhatóság:

A Σ_a bemenet affin rendszert zéró-állapot detektálhatónak nevezzük, ha $u(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0, \forall t \ge 0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0$.

Tétel (passzivitás és aszimptotikus stabilitás kapcsolata):

Legyen Σ_a zéró-állapot detektálható. Legyen $S \ge 0$, ahol $S(0) = 0$ megoldása (2)-nek a szigorúan kimenet passzív esetben, vagy (3)-nak véges L_2-erősítés esetén. Akkor $\xi \equiv 0$ aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pont. Ha továbbá $S(x)$ proper, azaz $\{x : S(x) \le c\}$ kompakt, $\forall c > 0$, akkor az egyensúlyi pont globálisan aszimptotikusan stabil.

A továbbiakban összekapcsolt disszipatív rendszerek stabilitását vizsgáljuk, ahol a G_i nemlineáris rendszer állapotegyenlettel adott:



$$\Sigma_i : \dot{x}_i = f_i(x_i, e_i), y_i = h_i(x_i, e_i), \ i = 1,2.$$

Szigorú disszipativitási feltétel (SDC):

$$S_i(x_i(t_1)) \le S_i(x_i(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} (< e_i(t), y_i(t) > - \varepsilon_i \|y_i(t)\|^2) dt, i = 1,2.$$

Tétel (visszacsatolt disszipatív rendszerek stabilitása):

(1) Legyen mindkét Σ_1 és Σ_2 rendszer passzív (szigorúan kimenet passzív) és az (u_1, u_2) külső bemenőjelek aktívak, akkor a zárt rendszer az (y_1, y_2) kimenetre passzív (szigorúan kimenet passzív).

(2) Elégítse ki S_i az (SDC) feltételt, legyen folytonosan differenciálható és legyen (izolált) lokális minimuma az x_i^* pontban, $i = 1,2$, továbbá ne legyenek aktívak a külső bemenőjelek, azaz $u_1 = u_2 = 0$. Akkor (x_1^*, x_2^*) stabil egyensúlyi pontja a zárt rendszernek.

(3) Legyen Σ_i szigorúan kimenet passzív és zéró-állapot detektálható. Elégítse ki S_i az (SDC) feltételt, legyen folytonosan differenciálható és legyen (izolált) lokális minimuma az $x_i^* = 0$ pontban, $i = 1,2$, továbbá ne legyenek aktívak a külső bemenőjelek, azaz $u_1 = u_2 = 0$. Akkor $(0,0)$ aszimptotikusan stabil egyensúlyi pontja a zárt rendszernek. Ha továbbá S_i-nek globális minimuma van az $x_i^* = 0$ pontban, $i = 1,2$, akkor $(0,0)$ globálisan aszimptotikusan stabil egyensúlyi pontja a zárt rendszernek.

Tétel (kis erősítés tétel disszipatív rendszerek esetén):

(1) Legyen Σ_i zéró-állapot detektálható, véges γ_i erősítésű, $i = 1,2$, és teljesüljön $\gamma_1 \cdot \gamma_2 < 1$. Elégítse ki S_i az (SDC) feltételt, legyen folytonosan differenciálható és legyen (izolált) lokális minimuma az $x_i^* = 0$ pontban, $i = 1,2$, továbbá ne legyenek aktívak a külső bemenőjelek, azaz $u_1 = u_2 = 0$. Akkor $(0,0)$ aszimptotikusan stabil egyensúlyi pontja a zárt rendszernek. Ha továbbá S_i-nek egyértelmű globális minimuma van az $x_i^* = 0$ pontban, $i = 1,2$, akkor $(0,0)$ globálisan aszimptotikusan stabil egyensúlyi pontja a zárt rendszernek.

(2) Legyen Σ_{ai} *bemenet affin* rendszer, véges γ_i erősítésű, $i = 1,2$, és teljesüljön $\gamma_1 \cdot \gamma_2 < 1$. Elégítse ki S_i az (SDC) feltételt, legyen folytonosan differenciálható és $S_i(0) = 0$ (ezért $S_i(x)$ pozitív szemidefinit), és legyen $x_i^* = 0$ aszimptotikusan stabil egyensúlyi pontja a gerjesztetlen $\dot{x}_i = f_i(x_i)$ rendszernek, $i = 1,2$, továbbá ne legyenek aktívak a külső bemenőjelek, azaz $u_1 = u_2 = 0$. Akkor $(0,0)$ aszimptotikusan stabil egyensúlyi pontja a zárt rendszernek.