SZELEKCIÓS SÉMA, LUENBERGER-FÉLE NORMÁLALAK

LTI rendszer és irányíthatósági mátrixa:

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx + Du,\ x \in R^n,\ u \in R^r,\ y \in R^m.$$

$$M_c = [B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B],\ \text{ahol}\ B = [b_1\ b_2\ \cdots\ b_r]$$

Szelekciós séma:
A szekciós séma r oszlopból és maximum n sorból áll, és a séma minden egyes helye egy $A^j b_i$ oszlopvektornak felel meg. Szigorúan balról jobbfelé haladva az M_c mátrix oszlopain, teszteljünk minden egyes oszlopot, hogy lineárisan független-e a tőle balra lévő oszlopoktól M_c-ben (a sémában a soron belül tőle balra és a fölötte lévő sorokban lévő vektoroktól). Ha $A^j b_i$ az éppen vizsgált oszlop, és $A^j b_i$ lineárisan független a tőle balra lévő oszlopoktól M_c-ben, akkor írjuk be $A^j b_i$-t a szelekciós séma $j+1$-edik sorának i-edik oszlopába, ha pedig nem, akkor jelöljük meg $\circ$ jellel (karikával) ezt a helyet a szelekciós sémában, és hagyjuk ki a vizsgálatát minden $A^k b_i$, $k > j$ oszlopnak a továbbiakban.
Definiáljuk a ν_i *irányíthatósági indexet* a séma i-edik oszlopában a $\circ$ fölött elhelyezkedő vektorok számával ($\nu_i = j$, ha a $\circ$ az $A^j b_i$ tesztelésénél keletkezett a sémában). Ezáltal minden i bemenő jelhez keletkezett egy $\nu_i \geq 1$ irányíthatósági index (mivel $b_1, \cdots, b_r$ lineárisan függetlenek a feltevés szerint). Vezessük be még a $\sigma_1 = \nu_1,\ \sigma_2 = \nu_1 + \nu_2,\ \cdots,\ \sigma_r = \nu_1 + \nu_2 + \cdots \nu_r$ indexeket is.

Szelekciós séma illusztrálása $r = 3$ és $n = 9$ esetén:

$$\begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \\ Ab_1 & Ab_2 & Ab_3 \\ A^2b_1 & \circ & A^2b_3 \\ A^3b_1 & & \circ \\ \circ & & \end{array}$$

$$\nu_1 = 4 \quad \nu_2 = 2 \quad \nu_3 = 3$$

$$\sigma_1 = 4 \quad \sigma_2 = 6 \quad \sigma_3 = 9$$

A konstrukció szerint a következő vektorok lineárisan függetlenek: $b_1, Ab_1, A^2b_1, A^3b_1, b_2, Ab_2, b_3, Ab_3\ A^2b_3$, és mivel a feltevés szerint a rendszer irányítható, ezért az állapottér egy bázisát alkotják.

Álljon a P mátrix ezekből az oszlopokból és legyen q_i^T a P^{-1} mátrix σ_i-edik sora:

$$P = [b_1 \quad Ab_1 \quad A^2 b_1 \quad A^3 b_1 \quad b_2 \quad Ab_2 \quad b_3 \quad Ab_3 \quad A^2 b_3]$$

$$q_i^T := P^{-1} \text{ mátrix } \sigma_i\text{-edik sora.}$$

Vezessük be az alábbi T koordinátatranszformációt, és határozzuk meg fokozatosan TAT^{-1} és TB értékét. Ennek során vegyük figyelembe, hogy $TT^{-1} = I$, $P^{-1}P = I$:

$$T := \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_1^T A \\ q_1^T A^2 \\ q_1^T A^3 \\ q_2^T \\ q_2^T A \\ q_3^T \\ q_3^T A \\ q_3^T A^2 \end{bmatrix} \Rightarrow TA = \begin{bmatrix} q_1^T A \\ q_1^T A^2 \\ q_1^T A^3 \\ q_1^T A^4 \\ q_2^T A \\ q_2^T A^2 \\ q_3^T A \\ q_3^T A^2 \\ q_3^T A^3 \end{bmatrix}$$

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Itt kihasználtuk, hogy például a $(TAT^{-1})_{23}$ elem számításakor TA 2-ik sorát, ami $q_1^T A^2$ miatt a T mátrix 3-ik sora, kell összeszorozni a T^{-1} mátrix 3-ik oszlopával, ezért az eredmény 1. Ha viszont a $(TAT^{-1})_{22}$ elemet számítjuk, akkor TA 2-ik sorát, ami $q_1^T A^2$ miatt a T mátrix 3-ik sora, kell összeszorozni a T^{-1} mátrix 2-ik oszlopával, ezért az eredmény 0. Másrészt például $(TAT^{-1})_{4i}$ számításakor TA 4-ik sorát, ami $q_1^T A^4$ miatt már nem sora a T mátrixnak, kell összeszorozni a T^{-1} mátrix i-edik oszlopával, ezért az eredménynek semmi köze TT^{-1} elemeihez, az eredmény általános, amit $*$-gal jelöltünk.

$$TB=\begin{bmatrix} q_1^T b_1 & q_1^T b_2 & q_1^T b_3 \\ q_1^T Ab_1 & q_1^T Ab_2 & q_1^T Ab_3 \\ q_1^T A^2 b_1 & q_1^T A^2 b_2 & q_1^T A^2 b_3 \\ q_1^T A^3 b_1 & q_1^T A^3 b_2 & q_1^T A^3 b_3 \\ q_2^T b_1 & q_2^T b_2 & q_2^T b_3 \\ q_2^T Ab_1 & q_2^T Ab_2 & q_2^T Ab_3 \\ q_3^T b_1 & q_3^T b_2 & q_3^T b_3 \\ q_3^T Ab_1 & q_3^T Ab_2 & q_3^T Ab_3 \\ q_3^T A^2 b_1 & q_3^T A^2 b_2 & q_3^T A^2 b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_{212} & \alpha_{313} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan például $(TB)_{22}$ számításakor q_1^T-t, ami P^{-1} 4-ik sora, kell összeszorozni Ab_2-vel, ami P-nek 6-ik oszlopa, ezért az eredmény 0. Másrészt viszont például $(TB)_{41}$ számításakor q_1^T-t, ami P^{-1} 4-ik sora, kell megszorozni A^3b_1-gyel, ami P-nek a 4-ik oszlopa, ezért az eredmény 1 lesz. $(TB)_{42}$ számításakor kihasználható, hogy q_1^T-t, ami P^{-1} 4-ik sora, kell megszorozni A^3b_2-vel, ami ugyan nem szerepel közvetlenül P oszlopai között, de P bizonyos oszlopainak lineáris kombinációja, ezért az eredmény α_{212}.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a példában a T koordinátatranszformáció elvégzése után az $\hat{A}=TAT^{-1}$ mátrix általános elemei a $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ sorokban helyezkednek el és a többi elem 0 vagy 1, ahol az egyesek a főátló feletti diagonálisban helyezkednek el, kivéve persze a $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ sorok elemeit.

A $\hat{B}=TB$ mátrix elemei a $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ sorok elemeinek kivételével mind nullák, és ha kiemeljük belőle a $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$-edik sorokat, akkor egy felső háromszögmátrix keletkezik, amelynek a diagonálisában egyesek állnak, és így ez a részmátrix invertálható is.

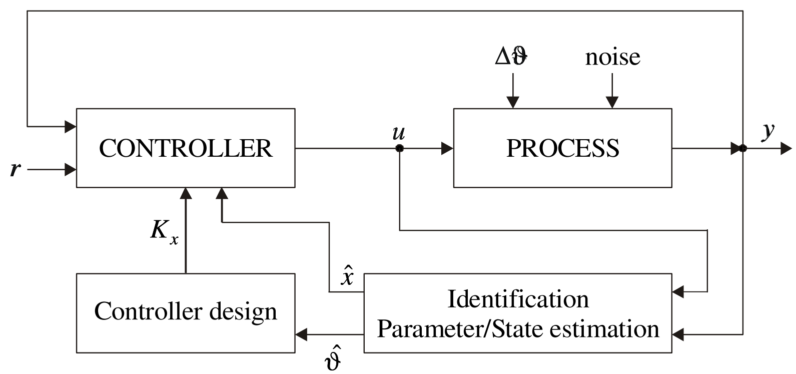
A $\hat{C}=CT^{-1}$ és a $\hat{D}=D$ mátrixok elemei általánosak.

Ezt az alakot *Luenberger-féle irányíthatósági* normálalaknak nevezik.

Az irányíthatóság és megfigyelhetőség dualitása miatt egy fiktív rendszer közbeiktatásával, irányíthatósági normálalak képzésével, majd az eredmény transzponálásával képezhetjük *Luenberger-féle megfigyelhetőségi* normálalakot.

MIMO INDIREKT ADAPTÍV IRÁNYÍTÁS

Az *indirekt adaptív irányítás* sémáját az alábbi ábra mutatja.



Az irányítás a következő módon jellemezhető:

i) innovációs zajmodell feltételezése,
ii) online identifikáció és állapotbecslés (rekurzív technikával),
iii) online szabályozótervezés minden identifikációs lépés után (pólusáthelyezés, LQ optimum, prediktív irányítás stb.).

Az innovációs zajmodellben a rendszerzaj a mérési zajból az L konstans lineáris leképezéssel áll elő:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Le(t),$$
$$y(t) = Cx(t) + e(t).$$

Az *állapotbecslő* ezért a következő lehet:

$$\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[\underbrace{y(t) - C\hat{x}(t)}_{\varepsilon(t)}],$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t).$$

A lineáris rendszer nemtriviális paramétereit helyezzük el egy ϑ oszlopvektorban:

$$A, B, C, L \to \vartheta\,.$$

A rendszer paraméterezésére segítségül hívhatjuk a Luenberger-féle normálalakokat.

Például, ha a 2-bemenetű és 2-kimenetű rendszer irányíthatósági indexei $\nu_1 = 2$ és $\nu_2 = 3$, tehát $\sigma_1 = 2$ és $\sigma_2 = 5$, akkor Luenberger-féle irányíthatósági normálalakot feltételezve az állapotegyenlet általános elemeit leképezhetjük például a következő módon a $\vartheta \in R^{30}$ vektor elemeibe:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vartheta_2 & \vartheta_1 & \vartheta_5 & \vartheta_4 & \vartheta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vartheta_7 & \vartheta_6 & \vartheta_{10} & \vartheta_9 & \vartheta_8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} \vartheta_{15} & \vartheta_{20} \\ \vartheta_{14} & \vartheta_{19} \\ \vartheta_{13} & \vartheta_{18} \\ \vartheta_{12} & \vartheta_{17} \\ \vartheta_{11} & \vartheta_{16} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \vartheta_{25} & \vartheta_{24} & \vartheta_{23} & \vartheta_{22} & \vartheta_{21} \\ \vartheta_{30} & \vartheta_{29} & \vartheta_{28} & \vartheta_{27} & \vartheta_{26} \end{bmatrix}.$$

Az állapotegyenletről ezután áttérünk a lineáris paraméterbecslésnél megszokott alakra. Az áttérés elve a következő:

$$\hat{y}(t) = \varphi^T(t)\hat{\vartheta}(t-1),$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - \varphi^T(t)\hat{\vartheta}(t-1),$$

$$\varphi^T(t) = -\frac{d\varepsilon(t)}{d\hat{\vartheta}(t-1)} = \frac{d\hat{y}(t)}{d\hat{\vartheta}(t-1)},$$

$$\varphi^T(t+1) = \frac{d\hat{y}(t+1)}{d\hat{\vartheta}(t)}$$

$$= \frac{d}{d\hat{\vartheta}(t)}[C\hat{x}(t+1)] = \underbrace{\frac{dC}{d\hat{\vartheta}}\hat{x}(t+1)}_{V_k} + C\underbrace{\frac{d\hat{x}(t+1)}{d\hat{\vartheta}}}_{W_{k+1}}$$

$$\underbrace{\frac{d\hat{x}(t+1)}{d\hat{\vartheta}}}_{W_{k+1}} = \frac{dA}{d\hat{\vartheta}}\hat{x}(t) + A\underbrace{\frac{d\hat{x}(t)}{d\hat{\vartheta}}}_{W_k} + \frac{dB}{d\hat{\vartheta}}u(t) + \frac{dL}{d\hat{\vartheta}}\varepsilon(t) - L\underbrace{\frac{dC}{d\hat{\vartheta}}\hat{x}(t)}_{V_k} - LC\underbrace{\frac{d\hat{x}(t)}{d\hat{\vartheta}}}_{W_k}.$$

$$M_k = \left[\frac{dA}{d\hat{\vartheta}}\hat{x}(t) + \frac{dB}{d\hat{\vartheta}}u(t) + \frac{dL}{d\hat{\vartheta}}\varepsilon(t)\right],$$

$$W_{k+1} = (A - LC)W_k + M_k - LV_k,$$

Legyen $\lambda \in (0,1)$ a felejtési tényező, akkor a szimultán állapot- és paraméterbecslésre a következő rekurzív algoritmus adható.

Rekurzív állapot- és paraméterbecslési algoritmus

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - \varphi^T(t)\hat{\vartheta}(t-1)$$
$$K(t) = P(t-1)\varphi(t)[\lambda I + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)]^{-1}$$
$$P(t) = [I - K(t)\varphi^T(t)]P(t-1)/\lambda$$
$$\hat{\vartheta}(t) = \hat{\vartheta}(t-1) + K(t)\varepsilon(t)$$
$$\hat{\vartheta}(t) \to A, B, C, L$$
$$M_k = \left[\frac{dA}{d\vartheta}\hat{x}(t) + \frac{dB}{d\vartheta}u(t) + \frac{dL}{d\vartheta}\varepsilon(t)\right]$$
$$V_k = \frac{dC}{d\vartheta}\hat{x}(t)$$
$$W_{k+1} = (A - LC)W_k + M_k - LV_k$$
$$\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L\varepsilon(t)$$
$$V_k = \frac{dC}{d\vartheta}\hat{x}(t+1)$$
$$\varphi^T(t+1) = V_k + CW_{k+1}$$
$$\hat{y}(t+1) = C\hat{x}(t+1)$$

Hátra van még annak tisztázása, hogyan kell a $\frac{dA}{d\vartheta}x$ stb. alakú deriváltakat számítani. Jelölje E_{jk} azt a mátrixot, amelynek minden eleme nulla, kivéve a j-edik sor és k-adik oszlop talalálkozásában álló elemet, amely 1. Mivel

$$\frac{dA}{d\vartheta}x = \frac{d}{d\vartheta}\left(\sum_j \sum_k a_{jk} E_{jk} x\right),$$

$$E_{jk}x = E_{jk}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow j, \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

ezért ha $a_{jk} \leftrightarrow \vartheta_i$ az egymásnak megfelelő elemek, akkor $\frac{dA}{d\vartheta}x$ egy $(row\,A) \times (\dim \vartheta)$ méretű mátrix, amelynek i-edik oszlopa a fenti $E_{jk}x$.

Tekintsük ennek illusztrálására a korábban adott módon paraméterezett rendszert a Luenberger-féle irányíthatósági alakban.

$$\frac{dA}{d\vartheta}x=\left[\begin{array}{cccccccccc|c|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
x_2 & x_1 & x_5 & x_4 & x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & x_1 & x_5 & x_4 & x_3 & &
\end{array}\right]_{5\times 30}$$

$$\frac{dL}{d\vartheta}\varepsilon=\left[\begin{array}{c|cccccccccc|c}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 & \\
 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & \\
 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}\right]_{5\times 30}$$

$$\frac{dC}{d\vartheta}x=\left[\begin{array}{c|c|cccccccccc}
0 & 0 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1
\end{array}\right]_{2\times 30}$$