LOKÁLIS MAXIMUM ELV

Ismétlés: $\min\{F(x): x\in A\} = F(x_0)$, ahol A konvex és $A^\circ \neq \emptyset$. A lokális minimum szükséges feltétele:

$$F'(x_0)(x-x_0)\geq 0,\ \forall x\in A$$

Tétel (lokális optimum I.):

$(x,u)\in E = C^n[0,T]\times L_\infty^r[0,T]$, ahol $T>0$ fix

$\phi: R^n\times R^r\times[0,T]\to R^1$,

$f: R^n\times R^r\times[0,T]\to R^n$

$F: E\to R^1$

V nyílt környezete $(x_0,u_0)\in E$-nek

Feladat:

$$F(x,u) := \int_0^T \phi(x(t),u(t),t)\,dt \to \min$$

Korlátozás:

$$Q=\{(x,u): \frac{dx}{dt} = f(x(t),u(t),t)$$
$$x(0)=a,\ x(T)=b$$
$$u(t)\in M,\ ahol\ M\ konvex\ és\ M^\circ\neq\emptyset\}$$

Lokális optimum:

$$\min_{Q\cap V} F(x,u) = F(x_0,u_0)$$

A lokális optimum szükséges feltétele:

Létezik $\lambda_0\in R^1, \lambda_0\geq 0$ és $\psi:[0,T]\to R^n$ abszolút folytonos függvény, hogy a λ_0 szám és a $\psi(\cdot)$ függvény közül nem mindkettő nulla, továbbá teljesül a következő differenciálegyenlet és egyenlőtlenség:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -f_x'^T(x_0(t),u_0(t),t)\psi(t) + \lambda_0\phi_x'(x_0(t),u_0(t),t)$$

$$< -f_u'^T(x_0(t),u_0(t),t)\psi(t) + \lambda_0\phi_u'(x_0(t),u_0(t),t), u-u_0(t) >$$
≥ 0, minden $u\in M$ és m.m $t\in[0,T]$ esetén.

Hamilton-függvény:

$$H(x,u,\psi,t) := < f(x,u,t),\psi > - \lambda_0\phi(x,u,t)$$
$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Következmény:

A tétel állítása átfogalmazható a következő alakra:

$$< -H_u'(x_0(t),u_0(t),\psi(t),t),\ u-u_0(t) > \geq 0$$

minden $u \in M$ és m.m. $t \in [0,T]$ esetén. De ez szükséges feltétele annak, hogy $u_0(t) \in M$ és V környezete $u_0(t)$ esetén

$$\min_{u \in M \cap V} \{-H(x_0(t),u,\psi(t),t)\} = -H(x_0(t),u_0(t),\psi(t),t)$$

teljesüljön, azaz a $H(x_0(t),u,\psi(t),t)$ függvény m.m. $t \in [0,T]$ esetén az $u = u_0(t)$ pontban elégíti ki az M halmazon az u szerinti *lokális maximum* szükséges feltételét. Innen a "lokális maximum elv" elnevezés.

Tétel (lokális optimum II.):

Feladat:

$$F(x,u) := \int_0^T \phi(x(t),u(t),t)\,dt + \varphi(x(T)) \to \min$$

Korlátozás:

$$Q = \{(x,u) : \frac{dx}{dt} = f(x(t),u(t),t),\ x(0) = a$$

$$u(t) \in M,\ ahol\ M\ konvex\ és\ M^{\circ} \neq \emptyset\}$$

Lokális optimum:

$$\min_{Q \cap V} F(x,u) = F(x_0,u_0)$$

A lokális optimum szükséges feltétele:

Létezik $\lambda_0 \in R^1, \lambda_0 \geq 0$ és $\psi : [0,T] \to R^n$ abszolút folytonos függvény, hogy a λ_0 szám és a $\psi(\cdot)$ függvény közül nem mindkettő nulla, továbbá teljesül a következő differenciálegyenlet és egyenlőtlenség:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -f_x'^T(x_0(t),u_0(t),t)\psi(t) + \lambda_0 \phi_x'(x_0(t),u_0(t),t)$$

$$\psi(T) = -\lambda_0 \varphi'(x(T))$$

$$< -f_u'^T(x_0(t),u_0(t),t)\psi(t) + \lambda_0 \phi_u'(x_0(t),u_0(t),t), u - u_0(t) >$$

≥ 0, minden $u \in M$ és m.m $t \in [0,T]$ esetén.

A feltételek a Hamilton-függvénnyel a lokális maximum elv alakjára hozhatók. Különbség azonban az előző feladathoz képest, hogy $\psi(T)$-re van előírt feltétel, míg az előző feladatban ilyen nem volt. Azonban $\psi(0)$ most sem ismert, ami a problémát bonyolulttá teszi.

Következmény:

1) Ha $M = R^r$ (nincs korlátozás $u(t)$-re), akkor $H'_u = f'^T_u(x_0(t), u_0(t), t)\psi(t) - \lambda_0 \phi'_u(x_0(t), u_0(t), t) \equiv 0$.

2) Ha $\lambda_0 > 0$, akkor mindkét oldalon oszthatunk $(-\lambda_0)$-lal és bevezethetjük a $\hat{\psi} := \psi/(-\lambda_0)$ és $\hat{H} :=< f, \hat{\psi} > +\phi$ jelölést. Ezzel a jelöléssel $\hat{H}'_u(x_0(t), u_0(t), \hat{\psi}(t), t) \equiv 0$ és $\dfrac{d\hat{\psi}}{dt} = -\dfrac{\partial \hat{H}}{\partial x}$ m.m., ahol $\hat{\psi}(T) = \varphi'(x_0(T))$.

Folytonosidejű LQ irányítási feladat:

Legyen $(x,u) \in E = C^n[0,T] \times L^r_\infty[0,T]$, $T > 0$ fix, a minimalizálandó $F(x,u)$ egy kvadratikus költségfüggvény és a rendszer folytonosidejű időben változó lineáris (LTV) rendszer:

$$F(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^T [< Q(t)x(t), x(t) > + < R(t)u(t), u(t) >]\,dt + \frac{1}{2} < Q(T)x(T), x(T) >, \quad \text{ahol} \quad Q(t) \geq 0,\ R(t) > 0,$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0.$$

Alkalmazzuk a lokális maximum elvet az új formában és a diszkrétidejű esethez való hasonlóság kidomborítása céljából a $\lambda(t) := \hat{\psi}(t)$ jelölés mellett:

$$\hat{H} =< Ax + Bu, \lambda > + \frac{1}{2}(< Qx, x > + < Ru, u >),$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\hat{H}'_x = -A^T(t)\lambda(t) - Q(t)x(t),\ \lambda(T) = Q(T)x(T),$$

$$\hat{H}'_u = B^T(t)\lambda(t) + R(t)u(t) = 0 \Rightarrow u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t).$$

Visszaírva az optimális irányítás alakját az állapotegyenletbe, a következő vegyes kezdeti és végérték problémát kapjuk:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad x(0) = x_0, \quad \lambda(T) = Q(T)\,x(T).$$

Keressük a megoldást $\lambda(t) = P(t)x(t)$ alakban:

$$\dot{\lambda} = \dot{P}x + P\dot{x} = \dot{P}x + P(Ax - BR^{-1}B^T Px) = -Qx - A^T Px,$$

akkor a (P-ben kvadratikus) folytonosidejű Riccati-differenciálegyenlethez jutunk:

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q(t) = 0,$$
$$P(T) = Q(T),$$

amelynek $P(t) \geq 0$ pozitív megoldását keressük. Az optimális LQ irányítás állapot-visszacsatolás, amely $P(t)$ ismeretében:

$$u(t) = -K(t)x(t), \text{ ahol } K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t).$$

Ha $T = \infty$ és az optimalizálási kritérium és a rendszer konstans (LTI), akkor az optimális irányítás az $u = -K_\infty x$ konstans állapotvisszacsatolás, ahol $K_\infty = R^{-1}B^T P_\infty$ és P_∞ megoldása a következő folytonosidejű algebrai Riccati-egyenletnek:

$$P_\infty A + A^T P_\infty - P_\infty BR^{-1}B^T P_\infty + Q = 0.$$

Az algebrai Riccati-egyenlet megoldására több szoftver eszköz (pl. MATLAB CST-ben `lqr,lqr2`) ismeretes.

Az LQ optimális irányítás mellett:

i) $F(x,u)$ optimalizálási kritérium véges, ha (A,B) irányítható (stabilizálható).

ii) Legyen $Q = C^T C$ (például $C := \sqrt{Q}$), akkor a zárt rendszer stabilis, ha (A,C) megfigyelhető (detektálható).

Tétel (Pontrjagin-féle maximum elv):

Feladat:

$$F(x,u) := \int_0^T \phi(x(t),u(t))\,dt \to \min, \ \ T>0 \ \text{szabad}$$

Korlátozás:

$$Q = \{(x,u) : \frac{dx}{dt} = f(x(t),u(t)), \quad x(0)=a, \quad x(T)=b$$

$$u(t) \in M, \ ahol \ M \neq \emptyset \ tetsz\H{o}leges\}$$

Globális optimum:

$$\min_Q F(x,u) = F(x_0,u_0), \ \ T>0 \ \text{szabad}$$

A globális optimum szükséges feltétele:

Létezik $\lambda_0 \in R^1, \lambda_0 \geq 0$ és $\psi : [0,T] \to R^n$ abszolút folytonos függvény, hogy a λ_0 szám és a $\psi(\cdot)$ függvény közül nem mindkettő nulla, továbbá teljesül a következő differenciálegyenlet és egyenlőtlenség:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -f_x'^T(x_0(t),u_0(t))\psi(t) + \lambda_0 \phi_x'(x_0(t),u_0(t))$$

$$H(x,u,\psi(t)) := \langle f(x,u),\psi \rangle - \lambda_0 \phi(x,u)$$

$$\max_{u \in M} H(x_0(t),u,\psi(t)) = H(x_0(t),u_0(t),\psi(t)) = 0$$

Következmény (bang-bang elv):

Feladat és korlátozás:

$$F(x,u) = \int_0^T \phi(x(t))\,dt, \ \ T>0 \ \text{szabad}$$

$$\dot{x} = g(x) + Bu, \quad x(0)=a, \quad x(T)=b,$$

$$M = \{u \in R^r : |u_i| \leq 1, \ i=1,\ldots,r\}.$$

Legyen $\lambda_0 > 0$, akkor a Hamilton-függvényt és a társ-differenciálegyenletet végigoszthatjuk λ_0-lal, és elvégezhető a $H := H/\lambda_0$ és a $\psi := \psi/\lambda_0$ helyettesítés. A Hamilton-függvénynek ezután a normalizálás után is maximuma lesz az optimális irányítás esetén. A vizsgált rendszer esetén a normalizálás után

$$H(x,u,\psi) = \langle g(x) + Bu, \psi \rangle - \phi(x),$$

$$\dot{\psi}(t) = -g_x'^T(x_0(t))\psi(t) + \phi_x'(x_0(t)),$$

és a Pontrjagin-féle maximum elv szerint

$$\max_{u \in M} [\langle g(x_0(t)) + Bu, \psi(t) \rangle - \phi(x_0(t))] =$$

$$= \langle g(x_0(t)) + Bu_0(t), \psi(t) \rangle - \phi(x_0(t))$$

Definiáljuk az előjelfüggvényt vektor argumentum esetén:

$$sign(x) := (sign(x_1),\ldots,sign(x_n))^T,$$

akkor a Pontrjagin-féle maximum elvből következik:

$$\max_{|u_i|\leq 1} < u, B^T\psi(t) > = < u_0(t), B^T\psi(t) \Rightarrow u_0(t) := sign(B^T\psi(t)),$$

Ezért az optimális irányítás $u_{0i}(t)$ komponensei minden időpontban csak ± 1 értéket vehetnek fel, tehát a negatív és a pozitív szélsőértékük között választhatnak (bang-bang). Hogy mikor melyiket kell választani, az $B^T\psi(t)$-től függ, tehát lényegében $\psi(t)$ aktuális értékétől.

Mivel $x_0(t)$ is ismeretlen, és $\psi(t)$ meghatározásához $x_0(t)$ is szükséges, amely viszont $u_0(t)$-től függ, ezért a bang-bang elv ugyan egyszerűsíti a problémát, de a megmaradó

$$\dot{x}_0(t) = g(x_0(t)) + B\, sign(B^T\psi(t))$$
$$\dot{\psi}(t) = -g_x'^T(x_0(t))\psi(t) + \phi_x(x_0(t))$$

csatolt probléma, beleértve az általában kevert vagy hiányzó kezdeti és végérték feltételeket is, még ebben a viszonylag egyszerűbb esetben is numerikus szempontból kellően bonyolult marad.

Lineáris rendszer esetén kapcsolási görbék meghatározásával igyekszenek egyszerűsíteni a problémát.

Megjegyzés:

i) Ha a kezdeti és/vagy végállapotnak az $S(x)$ felületen kell lennie, akkor ψ-nek ebben az időpontban merőlegesnek kell lennie a felület érintősíkjára (transzverzalitási feltétel).

ii) Speciálisan, ha hiányzik a korlátozás a kezdeti és/vagy végállapotban, akkor $\psi = 0$ ebben az időpontban (azaz merőleges a teljes térre).

QP ÉS NP PROGRAMOZÁSI FELADATOK MEGOLDÁSA

KVADRATIKUS PROGRAMOZÁSI ALGORITMUSOK

A kvadratikus programozás alapfeladata a következő:

$$\min_x J(x) = \frac{1}{2} < Hx, x > + < c, x > + d \,,$$
$$x \geq 0\,, \quad A_1 x = b_1\,, \quad A_2 x \leq b_2\,,$$

ahol $x \in R^n$, $H \geq 0$ $n \times n$ méretű pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrix, $b_1 \in R^{m_1}$, $b_2 \in R^{m_2}$, $J'_x = Hx + c =: g(x)$ a célfüggvény gradiense és $J''_x = H$ a célfüggvény Hess-mátrixa. A korlátozások egyenlőség és egyenlőtlenség alakjában adottak. A minimum helyét d nem befolyásolja, ezért el is hagyható lenne.

Mivel $H \geq 0$ miatt $J(x)$ konvex és a korlátozások lineárisak, ezért a minimum szükséges feltétele nem túl szigorú feltételek teljesülésekor (pl. $Z^T HZ$ pozitív definit, lásd később) egyúttal elégséges feltétel is. A minimum szükséges feltételét a KKT-tétel adja.

Ha A_i sorait rendre $a_{i1}^T, \ldots, a_{im_i}^T$ jelölik, akkor $A_1 x = b_1$ ekvivalens $a_{1j}^T x - b_{1j} = 0$-val, $j = 1, \ldots, m_1$, és $A_2 x \leq b_2$ ekvivalens $a_{2j}^T x - b_{2j} \leq 0$-val, $j = 1, \ldots, m_2$. A skalár multiplikátorral szorzott $\lambda_{1j}(a_{1j}^T x - b_{1j})$ és $\lambda_{2j}(a_{2j}^T x - b_{2j})$ korlátozások rendre felírhatók a $< \lambda_1, A_1 x - b_1 > = < A_1^T \lambda_1, x > - < \lambda_1, b_1 >$ és a $< \lambda_2, A_2 x - b_2 > = < A_2^T \lambda_2, x > - < \lambda_2, b_2 >$ alakban is a λ_1 és λ_2 vektor multiplikátorokkal.

Mivel $J'_x = Hx + c$ és $-x \le 0$, ezért a minimum feltétele:

$$Hx + c - \lambda + A_1^T \lambda_1 + A_2^T \lambda_2 = 0,$$
$$\lambda_i \ge 0, \quad \lambda_i x_i = 0, \quad i = 1,\dots,n,$$
$$\lambda_{2i} \ge 0, \quad \lambda_{2i}(a_{2i}^T x_i - b_{2i}) = 0, \quad i = 1,\dots,m_2,$$
$$A_1 x = b_1$$

AKTÍV HALMAZ MÓDSZEREK:

1. Egyenlőség alakjában adott korlátozások

$$\min_x J(x) = \frac{1}{2} < Hx, x > + < c, x > + d,$$
$$Ax = b,$$

ahol A $m \times n$ típusú mátrix, amelynek sorai $a_1^T, \dots, a_m^T$.

Egy x pontot *megvalósítható pontnak* (feasible point) fogunk nevezni, ha kielégíti a korlátozást. Ha x_0 az optimális megvalósítható megoldás és x egy (nem optimális) megvalósítható megoldás, akkor $x_0 = x + p$, ahol p-t *megvalósítható iránynak* (feasible direction) fogjuk nevezni.

Feltesszük, hogy $m < n$ és $rank(A) = m$, különben ugyanis vagy redundáns, vagy pedig ellentmondó egyenletek szerepelnének a korlátozásban. Elvben tehát $n - m$ változót ki lehet küszöbölni a változók közül. Fejezzük ki x-et az $x = Yx_Y + Zx_Z$ alakban, ahol $AY = I$ és $AZ = 0$. Ekkor $Ax = x_Y$ és $Zx_Z \in \text{kernel}(A)$. Mivel $x_0 = Yx_{0Y} + Zx_{0Z}$, $Ax_0 = AYx_{0Y} + AZx_{0Z} = x_{0Y} = b$, $x = Yx_Y + Zx_Z$ és $Ax = AYx_Y + AZx_Z = x_Y = b = x_{0Y}$, ezért $x = Yx_{0Y} + Zx_Z$ és $p = x_0 - x = Z(x_{0Z} - x_Z) =: Zp_Z$ és $Ap = AZp_Z = 0$.

A Lagrange-multiplikátor szabály szerint az optimális megvalósítható megoldás kielégíti a

$$J'_x(x_0) + A^T\lambda_0 = Hx_0 + c + A^T\lambda_0 = 0 \Rightarrow Hx_0 + c = -A^T\lambda_0$$
$$Z^T g(x_0) = -Z^T A^T \lambda_0 = 0^T$$

feltételt, ahol kihasználtuk, hogy $g(x_0) = Hx_0 + c = J'_x(x_0)$ a gradiens az optimum helyén és $Z^T A^T = 0^T$.

Legyen x egy (közelítő) megvalósítható megoldás. Mivel $x_0 = x + p$ és $p = Zp_Z$, ezért

$$\frac{1}{2} < H(x+p), x+p > + < c, x+p > + d =$$
$$= \frac{1}{2} < Hp, p > + < Hx, p > + \frac{1}{2} < Hx, x > + < c, p > + < c, x > + d =$$
$$= \frac{1}{2} < Hp, p > + < Hx + c, p > + d + \frac{1}{2} < Hx, x > + < c, x > =$$
$$= \frac{1}{2} < Z^T HZp_Z, p_Z > + < Z^T g(x), p_Z > + d + \frac{1}{2} < Hx, x > + < c, x > .$$

Az x (közelítő) megvalósítható megoldás ismeretében az optimális x_0 megvalósítható megoldás a következő, korlátozás nélküli optimalizálási feladat megoldásaként nyerhető:

$$\min_{p_Z} J(p_Z) = \frac{1}{2} < \hat{H}p_Z, p_Z > + < \hat{c}, p_Z > + \hat{d},$$
$$\hat{H} = Z^T HZ \geq 0, \ \hat{c} = Z^T g(x), \ \hat{d} = d + \frac{1}{2} < Hx, x > + < c, x >$$

Az optimális megoldás a $J'_{p_Z} = \hat{H} p_Z + \hat{c} = 0$ feltételből határozható meg:

$$Z^T HZp_Z = -Z^T g(x),$$

ahol $g(x) = Hx + c$ az eredeti célfüggvény gradiense a közelítő megoldás helyén. Ha "+" jelöli a Moore-Penrose pszeudoinverzet, akkor

$$p_Z = -(Z^T HZ)^+ Z^T g(x) \quad \text{és} \quad p = Zp_Z \text{ megvalósítható irány.}$$

A módszer alkalmazásához ismerni kell egy kezdeti x megvalósítható megoldást (initial feasible point) és meg kell határozni A-nak az Y, Z felbontását. A MATLAB szolgáltatásaival $Y = \texttt{pinv}(A)$ és $Z = \texttt{null}(A)$ megfelelne, de jelentős számítási idővel jár, és kevésbbé előnyös iteratív alkalmazáskor, amikor A lépésről lépésre változhat.

A QR felbontást alkalmazva a következőképp járhatunk el:

i) Képezzük az A^T mátrix QR felbontását a MATLAB `qr` függvényével. Akkor $A^T = Q * R$, ahol Q ortonormált, R felső háromszögmátrix, és ezért $A * Q = R^T = [R_1^T \;\; 0]$.

ii) $Y = Q(:,1:m) * (R_1^T)^{-1}$

iii) $Z = Q(:,m+1:n)$

iv) $x = Y * b$ megvalósítható megoldás

Ha az iteráció során egy új $\hat{a}^T$ sort kell beszúrni, mert a feltételek bővülnek, akkor

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A \\ \hat{a}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T Q^T \\ \hat{a}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^T & 0 \\ \hat{a}^T Q \end{bmatrix} Q^T = \begin{bmatrix} \hat{R}_1^T & 0 \end{bmatrix} \hat{Q}^T ,$$

ahol $\hat{Q} = QH$ és H Householder mátrix. $\hat{Q}$ első $1,\dots,m$ oszlopa azonos Q oszlopaival, míg a többi $m+1,\dots,n$ oszlopa lineáris kombinációja Q utolsó $m+1,\dots,n$ oszlopának.

Ha az iteráció során az s-edik sort el kell hagyni A-ból, mert a feltételek száma csökken, akkor $\hat{A}$-nak eggyel kevesebb sora lesz, mint A-nak, ezért $\hat{A}Q = [M \quad 0]$, ahol M-nek az első $1,\dots,s-1$ sora azonos R_1^T soraival, és a maradék $s,\dots,m-1$ sorokban a diagonálisban lévő elemtől jobbra is van még egy nemnulla elem. M alsó háromszögmátrix alakra hozható síkbeli forgatás tarnszformációkkal, amelyeket Q-ra jobbról kell alkalmazni. Ezek a forgatások nem befolyásolják Q utolsó $n-m$ oszlopát, ezért $\hat{Z}$ a régi Z mátrix lesz, kiegészítve egy extra oszloppal: $\hat{Z} = [Z \quad \hat{z}]$, ahol $\hat{z}$ lineáris kombinációja Q első m oszlopának.

2. Egyenlőtlenség alakjában adott korlátozások

Legyen az optimalizálási feladat

$$\min_x J(x) = \frac{1}{2} < Hx, x > + < c, x > + d ,$$
$$Ax \le b ,$$

ahol A $m \times n$ típusú mátrix, amelynek sorai $a_1^T,\dots,a_m^T$.

Ha x egy megvalósítható pont, akkor $Ax \le b$. Határozzuk meg az aktív korlátozásokat, amelyre $a_{i_j}^T x = b_{i_j}$, $j = 1, \ldots, m_x$, és helyezzünk el minden ilyen $a_{i_j}^T$-t és b_{i_j}-t rendre egy A_1 mátrixban és egy b_1 vektorban, akkor $A_1 x = b_1$. Alkalmazzuk ezután az előző módszert az A_1 mátrixszal és a b_1 vektorral. A nem aktív korlátozások A_2-be és b_2-be kerülnek, tehát $A_2 x < b_2$.

Egy p irány ú.n. *javító megvalósítható irány*, ha $A_1 p \le 0$ és $< g(x), p >< 0$. Ekkor ugyanis $\lambda > 0$ esetén $J(x + \lambda p) \approx J(x) + \lambda < g(x), p > \le J(x)$, továbbá $A_1(x + \lambda p) = A_1 x + \lambda A_1 p \le b_1$ és $A_2(x + \lambda p) = A_2 x + \lambda A_2 p < b_2$, feltéve, hogy $\lambda > 0$ elég kicsi. Ezért a p irányban megfelelő lépésközzel továbblépve a $J(x)$ kritérium csökken és a korlátozás is teljesül.

A $P = P^T$ mátrixot projekciós mátrixnak nevezzük, ha $P^2 = P$. Például $P = I - A_1^+ A_1$ egy projekciós mátrix, ahol A_1^+ a Moore-Penrose pszeudoinverze A_1-nek. Ha A_1 $m_1 \times n$ méretű és $rank(A_1) = m_1 < n$, akkor $P = I - A_1^T (A_1 A_1^T)^{-1} A_1$ szintén egy projekciós mátrix. Ha P projekciós mátrix és $p = -Pg(x)$, akkor p egy javító megvalósítható irány, mivel

$$\begin{aligned} < g(x), p >=< g(x), -Pg(x) >= - < g(x), P^2 g(x) >= - < Pg(x), Pg(x) >= \\ = -\|Pg(x)\|^2 < 0. \end{aligned}$$

Az A_1-hez más technikával meghatározott $p = -Z(Z^T HZ)^+ Z^T g(x)$ irány is egy javító megvalósítható irány, mivel $A_1 Z = 0$ miatt $A_1 p = 0$, és p az x pontból a minimumhoz tartozó x_0 pontba mutat, tehát ebben az irányban a kritériumfüggvény csökken.

Vigyázni kell azonban milyen α lépéshosszt választunk, mert nagy lépéshossz esetén az új pont nem biztos, hogy megvalósítható (a korlátozásokat kielégítő) marad.

Ha nem sérülnének a korlátozások, akkor az *optimális válsztás*

$$\alpha_{opt} = \arg\ \min \varphi(\alpha) = \arg\ \min J(x+\alpha p)$$

lenne, amiből

$$\varphi'(\alpha) = < H(x+\alpha p)+c, p > = < g(x), p > + \alpha < Hp, p >$$

miatt következik

$$\alpha_{opt} = -\frac{< g(x), p >}{< Hp, p >}.$$

Azonban egy *maximális lépéshossz* is megadható, amelynél nagyobb lépéshossznál már az eddig teljesülő inaktív korlátozások sérülnének. Jelölje az aktív és az inaktív korlátozások indexhalmazát rendre I_{A_1} illetve I_{A_2}, akkor egy eddig inaktív korlátozás sérülni kezdene, ha $a_{2i}^T(x+\alpha p) = b_{2i}$, $i \in I_{A_2}$, ezért a maximális lépéshossz

$$\alpha_{\max} = \min\left\{ \frac{b_{2i} - a_{2i}^T x}{a_{2i}^T p} :\ i \in I_{A_2} \right\}.$$

Egy másik problémát a *Lagrange-multiplikátorok* okozhatnak az optimum helyén. Egyenlőtlenség alakjában adott $Ax \le b$ korlátozások esetén

$$Hx + c + A^T \lambda = 0,$$
$$\lambda_i \ge 0, \quad \lambda_{2i}(a_{2i}^T x_i - b_{2i}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m_2.$$

Az inaktív korlátozásokhoz tartozó multiplikátorok mind nullák: $\lambda_i = 0,\ i \in I_{A_2}$, ezért a feltételek egyszerűsödnek:

$$Hx + c = g(x) = -A_1^T \lambda_1 \text{ és } \lambda_1 \ge 0.$$

Meg kell tehát oldani a $g(x)=-A_1^T\lambda_1$ egyenletrendszert λ_1-re és ellenőrizni kell, hogy λ_1 minden komponense pozitív-e. Ha vannak negatív komponensek is, akkor célszerű elhagyni mindazon feltételt az aktív halmazból, amelyik a legnagyobb abszolút értékű negatív multiplikátorhoz tartozik. Jelölje ezt $\lambda_{1,delete}=\min\{\lambda_{1i}:\lambda_{1i}<0,\ i\in I_{A_1}\}$, akkor az elhagyandó aktív feltételek:

$$I_{delete}=\{i\in I_{A_1}:\lambda_{1i}=\lambda_{1,delete},\ i\in I_{A_1}\}.$$

A teszthez a λ_1 Lagrange-multiplikátor meghatározható $\lambda_1=-(A_1A_1^T)^{-1}A_1g(x)$ alapján, vagy ha már meghatároztuk az $A_1^T=Q*R$ felbontást, akkor MATLAB környezetben balosztással is:

$$\lambda_1=-R\setminus Q'\cdot g(x)$$

3. Kezdeti megvalósítható pont meghatározása

i) Legyen a korlátozás $Ax\le b$ alakú, ahol az A mátrix $m\times n$ méretű. Válasszunk egy tetszőleges x^0 kezdőpontot.

ii) Legyen $d=Ax^0-b$.

iii) Ha $d=(d_1,\ldots,d_m)^T\le 0$, akkor stop ($x^0$ megvalósítható pont).

iv) $d_{\max}=\max\{d_i:1\le i\le m\}$.

v) Legyen $\hat{x}=(x^T\ \ z)^T$, $z\in R^1$, $\hat{A}=[A\quad \mathbf{1}_{m,1\times 1}]$, $\hat{J}(\hat{x})=(0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 1)\hat{x}=z$ és $\hat{x}^0=[x^{0T}\ \ d_{\max}]^T$. Oldjuk meg a következő (speciális lineáris programozási, LP) *segédproblémát*: $\min\limits_{\hat{x}}\hat{J}(\hat{x})=z$, $\hat{A}\hat{x}\le b$, ahol $\hat{x}^0$ megvalósítható induló pont a segédfeladathoz. Bármilyen, az LP feladat megoldására alkalmas módszer (szimplex, stb.) szóbajöhet, beleértve az aktív halmaz módszert is.

vi) Legyen $\hat{x}_{opt}=(x_{opt}^T\ \ z_{opt})^T=\arg\min\limits_{\hat{x}}\hat{J}(\hat{x})$ a segédfeladat optimális megoldása. Ha $z_{opt}=\hat{J}(\hat{x}_{opt})<0$, akkor x_{opt} az eredeti feladat egy megvalósítható pontja, mivel $a_i^Tx_{opt}-z_{opt}\le b_i\Rightarrow a_i^Tx_{opt}-b_i\le z_{opt}\le 0,\ i=1,\ldots,m\Rightarrow Ax_{opt}\le b$.

Az aktív halmaz módszeren alapuló QP algoritmus

1) Határozzunk meg egy induló x^0 megvalósítható irányt (lásd előző LP segédprobléma). Legyen $k = 0$.

2) Határozzuk meg x^k esetén az aktív és az inaktív korlátozásokat és az azokat azonosító I_{A_1}, A_1, b_1, I_{A_2}, A_2, b_2 jellemzőket.

3) Határozzuk meg a $g(x^k)$ gradienst és a p^k javító megvalósítható irányt.

4) Ha $p^k \neq 0$, akkor határozzuk meg $\alpha = \min\{\alpha_{opt}, \alpha_{\max}\}$ értékét. Legyen az új megvalósítható pont $x^{k+1} := x^k + \alpha p^k$, $k := k + 1$ és ugrás 2)-re.

5) Ha $p^k = 0$, akkor ellenőrizendő, hogy teljesül-e az optimum feltétele. Ehhez meg kell határozni a λ_1 Lagrange-multiplikátort az aktív korlátozásokhoz.

6) Ha $\lambda_1 \geq 0$, akkor optimumban vagyunk és stop.

7) Ha $\neg(\lambda_1 \geq 0)$, akkor meghatározandó $\lambda_{1,delete}$ és az aktív korlátozásokból elhagyandó feltételek I_{delate} indexhalmaza. Elvégzendő az aktív korlátozások redukciója és ugrás 2)-re.

Az algoritmus minden lépésére korábban már eljárásokat dolgoztunk ki.

Nemlineáris programozási feladat (NP)

$$\min F_0(x)$$
$$F_i(x)=0,\ i=1,\dots,m_1,\ F_i(x)\le 0,\ i=m_1+1,\dots,m$$

Megoldására a QP módszert *lokálisan*, az x^k aktuális közelítés környezetében alkalmazhatjuk a következő algoritmus szerint:.

1) Válasszunk egy x^0 megvalósítható pontot, és legyen $k=0$.

2) Linearizáljuk a nemlineáris függvényeket az x^k közelítő megoldás helyén, és vezessük be a következő jelöléseket: $\tilde{x}:=x-x_k$, $g(x^k):=F'_{0x}(x^k)$, $H:=F''_{0x}(x^k)$, $a_i^T:=F'_{ix}(x^k)$, $b_i=-F_i(x^k)$, $i=1,\dots,m$.

3) Alkalmazzuk az aktív halmaz módszeren és a megvalósítható irányokon alapuló QP algoritmust, de annak 4) pontjában alkalmazzunk iránymenti keresést az $\alpha\ge 0$ skalárváltozóban $\alpha=\arg\min J(\alpha p^k)$ meghatározására, és tartsuk be az $F_i(x^k+\alpha p^k)\le 0,\ i=1,\dots,m$ feltételt az iránymenti keresés során.

4) Az aktív halmaz módszer stop feltételének elérésekor legyen $x^{k+1}:=x^k+\tilde{x}_{opt}$ és ugrás 1)-re, illetve valamilyen ésszerű leállási feltétel teljesülésekor (csak kicsit változó x^{k+1}, vagy a maximális iterációszám elérése) stop.

MATLAB *Optimization Toolbox* idevágó szolgáltatásai:

A MATLAB *Optimization Toolbox* függvényeket tartalmaz a különféle optimalizálási feladatok megoldására. Az ott használt jelölésekkel a feladat elég általános alakja

$$\min f(x)$$

$$c(x) \le 0,\ ceq(x) = 0,\ lb \le x \le ub,$$

ahol x vektor, $f(x)$ skalárértékű optimalizálási kritérium, $c(x)$ és $ceq(x)$ vektorértékű korlátozások, lb és ub az x vektor alsó illetve felső korlátja.

Általános elvként elmondható, hogy a hívásoknál `'fun'` egy olyan függvénynek a neve, amelyik a bemenetként kapott x-hez meghatározza $f(x)$ értékét, míg `'nonlcon'` egy másik függvény, amely $c(x)$ és $ceq(x)$ értékét határozza meg.

Ha be van kapcsolva a grad és/vagy Hessian kapcsoló az *options*-ban, (lásd *optimset*), akkor a `'fun'` függvénynek ezek értékét is ki kell számítania, különben értékük véges differenciákkal vagy más módon lesz közelítve.

Ha lb vagy ub dimenziója kisebb x dimenziójánál, akkor x első komponensei közül csak annyi van alsó illetve felső korlátozásnak alávetve, amennyi lb illetve ub dimenziója, közbenső változókat pedig [ ]-vel lehet kimaszkolni.

Ha $x0$ szerepel a híváskor és megvalósítható, akkor innen indul az optimalizálás, ellenkező esetben egy kezdeti segédprobléma automatikusan meghatározza az induló $x0$ értéket.

Ha a bemeneti paraméterek között szerepel *options*, akkor ez befolyásolja a közbenső lépések listázását, x_{opt} illetve $f(x_{opt})$ pontosságát, stb.

A kimeneti paraméterek között x_{opt} a módszerrel megtalált optimális megoldás, és további információkat is lehet kérni az optimalizálás folyamatáról.

Kvadratikus programozás (QP):

$[x,fval,exitflag,output,lambda] = quadprog(H,c,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)$

ahol az optimalizálási feladat $\min f(x) = \frac{1}{2} < Hx, x > + < c, x >$, $Ax \le b$, $Aeq * x = beq$, $lb \le x \le ub$, a kezdeti közelítés $x0$, és $options$ specifikus előírásokat tartalmaz a kereséshez (lásd *help optimset*). Ha hiányoznak feltételek, akkor azt [ ] segítségével kell megadni. A kimeneti paraméterek között *exitflag* egy integer, amely információt tartalmaz az algoritmus befejeződéséről (értéke 1 konvergencia esetén, 0 `options.MaxIter` elérése miatti leálláskor, stb.). Az *output* egy struktúra, amely az optimalizálás folyamatáról tartalmaz információt. A *lambda* kimeneti paraméter egy struktúra, amely a λ Lagrange-multiplikátorokat tartalmazza.

Lineáris programozás (LP):

$[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)$

ahol a feladat $\min f(x) =< c, x >$, $Ax \le b$, $Aeq * x = beq$, $lb \le x \le ub$, a kezdeti közelítés $x0$ és *options* specifikus előírásokat tartalmaz a kereséshez. A kimeneti paraméterek jelentése hasonló, mint *quadprog* esetén.

Nemlineáris programozás (NP):

$[x,fval,exitflag,output,lambda,grad,hessian] = fmincon($`'fun'`$,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,$`'nonlcon'`$,options)$

ahol a feladat $\min f(x)$, $c(x) \le 0$, $ceq(x) = 0$, $Ax \le b$, $Aeq * x = beq$, $lb \le x \le ub$, a kezdeti közelítés $x0$, és *options* specifikus előírásokat tartalmaz a kereséshez. A `nonlcon` függvény bemenete x, két kimenete pedig c és ceq. Az első négy kimeneti paraméter jelentése hasonló, mint *quadprog* esetén.

Az Optimization Toolbox függvényei korábban mind az aktív halmaz és a megvalósítható irányok módszerén alapultak. Ez vonatkozott az LP-re is, amely a QP-ben használt módszert alkalmazta. Az újabb verziók lehetővé teszik a belsőpontos módszer használatát is (lásd LMI, Linear Matrix Inequalities, amely a robusztus irányításokhoz szükséges).

A kvázi Newton-módszerek körében alkalmazásra került a BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) módszer, amely a Hess mátrixot a gradiens értékeiből $\lim_{i\to\infty} H_i \to H$ alakkal közelíti, valamint a DFP (Davidon-Fletcher-Powell) módszer és a módosított DFP (Gill&Murray) módszer, amelyek a $\lim_{i\to\infty} H_i \to H^{-1}$ alakkal közelítenek. Mindhárom módszer H_{i+1} értékét H_i-ből, valamint a gradiens értékéből határozza meg.

Az NP probléma keretprogramja a Schittkowski által javasolt SQP (Sequential Quadratic Programming) módszert használja, amely BFGS módszerrel frissíti a Lagrange-függvény Hess mátrixát, QP részfeladattal határozza meg a keresési irányt és egy értékelő függvénnyel (merit function) bünteti a korlátozások megsértését az iránymenti keresés során.