

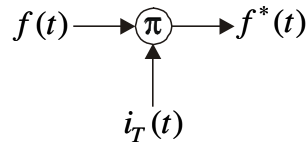
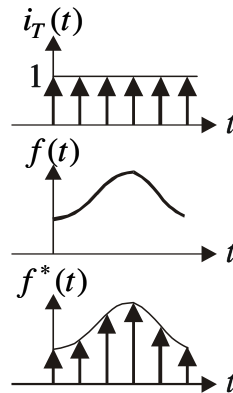
MATEMATIKAI MINTAVÉTELEZÉS

Matematikai mintavétel:

hordozó: $i_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$

jel: $f(t)$

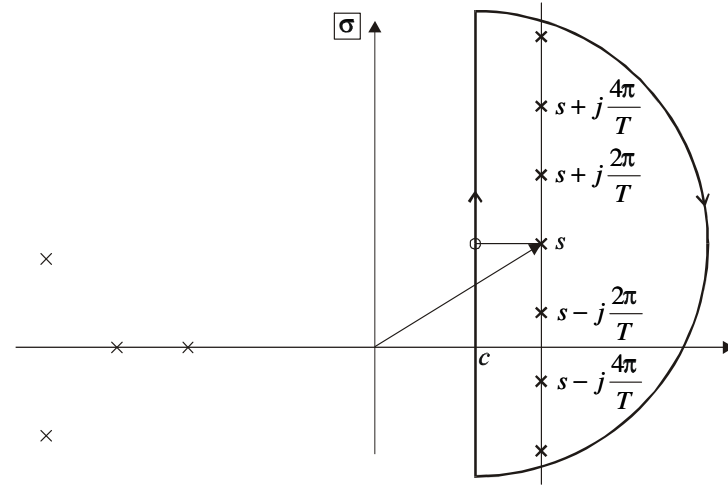
modulált jel: $f^*(t)$



$$I_T(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} = \frac{1}{1 - e^{-sT}},$$

$$1 = e^{-sT} = 1 \cdot e^{jk2\pi} \Rightarrow s_k = -k \frac{2\pi}{T} j, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$F^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\sigma) \frac{1}{1 - e^{-(s-\sigma)T}} d\sigma \quad \text{komplex konv.}$$



$$s - \sigma_k = -k \frac{2\pi}{T} j \Rightarrow \sigma_k = s + k \frac{2\pi}{T} j, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$F^*(s) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Res}_{\sigma_k} \left\{ F(\sigma) \frac{1}{1 - e^{-(s-\sigma)T}} \right\},$$

$$\text{Res}_{\sigma_k} = \lim_{\sigma \rightarrow \sigma_k} (\sigma - \sigma_k) F(\sigma) \frac{1}{1 - e^{-(s-\sigma)T}}.$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_k} \frac{\sigma - \sigma_k}{1 - e^{-(s-\sigma)T}} = \lim_{\sigma \rightarrow \sigma_k} \frac{1}{-e^{-(s-\sigma)T} T} = -\frac{1}{T},$$

SHANNON-TÉTEL

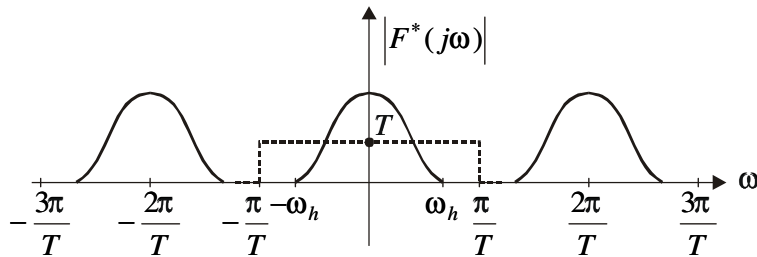
$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s + jk \frac{2\pi}{T})$$

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j(\omega + k \frac{2\pi}{T})), \text{ periódikus } 2\pi/T - \text{vel}$$

Feltevés: az analóg jel sávkorlátozott, $\omega_h = 2\pi f_h$

Shannon: Ha az analóg jel sávkorlátozott és határkör-frekvenciája $\omega_h = 2\pi f_h$, továbbá a mintavételi idő kielégíti a $T \leq \pi/\omega_h = 1/(2f_h)$ feltételt, akkor az analóg jel rekonstruálható a matematikailag mintavételezett jelből (tehát az analóg jel mintáiból) egy T erősítésű ideális aluláteresztő szűrővel, amelynek határ-körfrekvenciája $\omega_N = \pi/T$

Nyquist frekvencia: $\omega_N = \pi/T$



Inverz Fourier-transzformálttal:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-jkT\omega} \right) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} e^{j(t-kT)\omega} d\omega. \end{aligned}$$

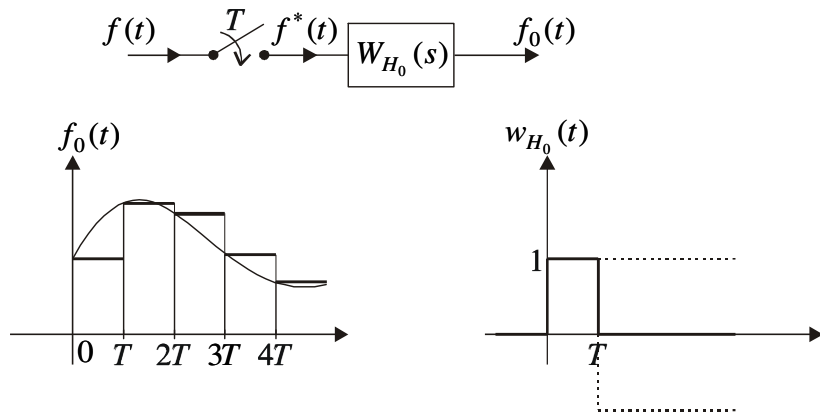
Végeredmény:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\sin(\omega_s(t-kT)/2)}{\omega_s(t-kT)/2}.$$

Ideális aluláteresztő szűrő nem kauzális, súlyfüggvénye pozitív és negatív t -re egyaránt:

$$w(t) = \frac{\sin(\omega_s t / 2)}{\omega_s t / 2}.$$

NULLADRENDŰ TARTÓSZERV



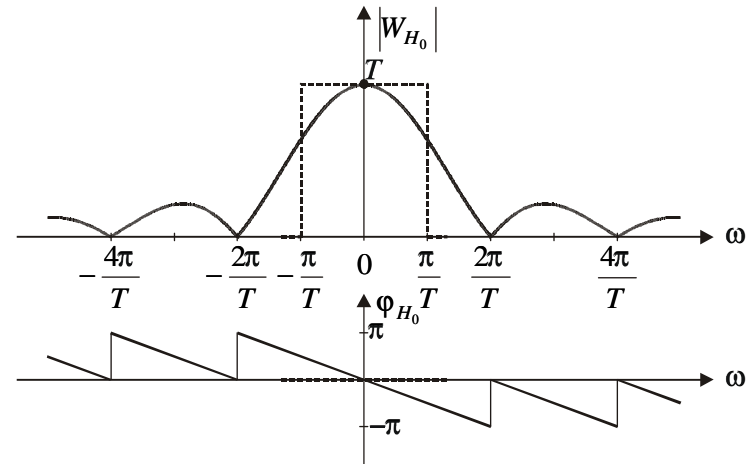
$$w_{H_0}(t) = 1(t) - 1(t - T), \quad W_{H_0}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

$$W_{H_0}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T \cdot \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2j} \cdot \frac{1}{\frac{\omega T}{2}} \cdot e^{-j\frac{\omega T}{2}} \Rightarrow$$

$$W_{H_0}(j\omega) = T \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} \cdot e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

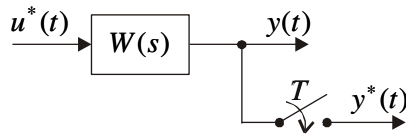
$$|W_{H_0}(j\omega)| = T \frac{\left| \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right|}{\frac{\omega T}{2}} \quad (\text{amplitúdó})$$

$$\varphi_{H_0}(j\omega) = -\frac{\omega T}{2} + \arg \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} \quad \text{radián (fázis)}$$



JELTERJEDÉS MINTAVÉTELEZETT RENDSZEREKBEN

Matematikai mintavétel esetén:



$$Y(s) = W(s)U^*(s) = W(s) \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) e^{-skT},$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w(t - kT) u(kT) \Rightarrow y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} w([n - k]T) u(kT)$$

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} w([n - k]T) u(kT) \right) e^{-snT} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} w([n - k]T) e^{-s(n-k)T} u(kT) e^{-skT} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} w(iT) e^{-siT} u(kT) e^{-skT} = \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} w(iT) e^{-siT} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} u(kT) e^{-skT} \right) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

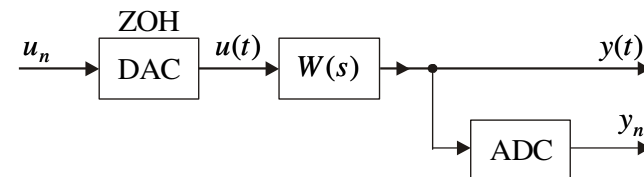
Jelölés: $z = e^{sT}$

Tartószerelv nélkül:

$$\begin{aligned} Z\{y(nT)\} &= Z\{w(nT)\}Z\{u(nT)\}. \\ D(z) &= Z\{w(nT)\} \end{aligned}$$

Tartószerelv alkalmazásakor:

$$\begin{aligned} W(s) \frac{1 - e^{-sT}}{s} &= (1 - e^{-sT}) \frac{W(s)}{s} = (1 - e^{-sT}) \mathcal{L}\{v(t)\} \\ D(z) &= (1 - z^{-1})Z\{v(nT)\}. \end{aligned}$$



MATLAB+Control System Toolbox: c2d

Pólus pólusba képződik: $z_i = e^{s_i T}$ szerint

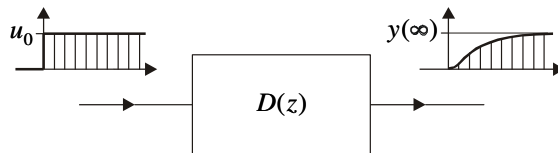
MINTAVÉTELES SZABÁLYOZÁSI KÖR

Hasonlósági tétel:

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z)$$

Ekvivalens statikus átviteli tényező:

$$A = y(\infty) / u_0$$

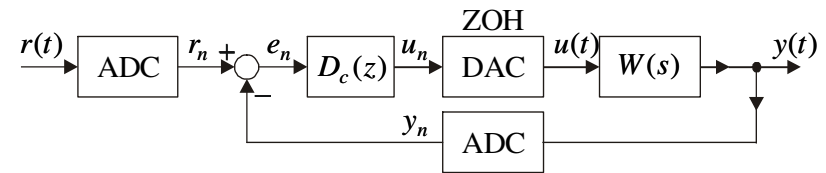


$$Y(z) = D(z) \frac{u_0}{1 - z^{-1}} \Rightarrow$$

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) D(z) \frac{u_0}{1 - z^{-1}} = D(1) u_0$$

$$A = \frac{y(\infty)}{u_0} = D(1)$$

Szabályozási kör:



Beavatkozó jel kimenetre:

$$U(z) = \frac{D_c(z)}{1 + D(z)D_c(z)} R(z)$$

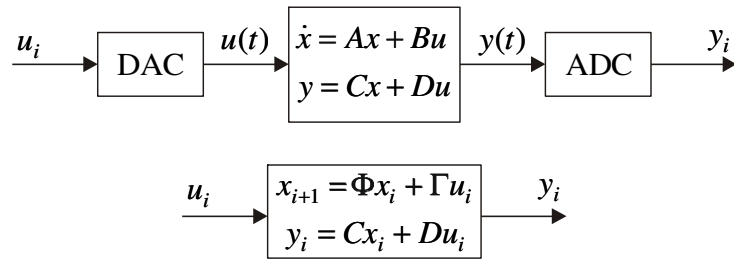
$$D_{ur}(z) = \frac{D_c(z)}{1 + D(z)D_c(z)}$$

Szabályozott jellemző kimenetre:

$$Y(z) = \frac{D(z)D_c(z)}{1 + D(z)D_c(z)} R(z)$$

$$D_{yr}(z) = \frac{D(z)D_c(z)}{1 + D(z)D_c(z)}$$

JELTERJEDÉS ÁLLAPOTTÉRBEN



Lépcsős bemenet:

$$u(t) = u(iT), \text{ röviden } u(t) = u_i, \text{ ha } t \in [iT, (i+1)T)$$

$$x([i+1]T) = e^{AT} x(iT) + \int_{iT}^{(i+1)T} e^{A([i+1]T-\vartheta)} B u(iT) d\vartheta$$

Jelölés: $\sigma = [i+1]T - \vartheta$, $d\sigma = -d\vartheta$

$$\begin{aligned} x([i+1]T) &= e^{AT} x(iT) - \int_{iT}^0 e^{A\sigma} d\sigma B u(iT) = \\ &= e^{AT} x(iT) + \int_0^T e^{A\sigma} d\sigma B u(iT). \end{aligned}$$

Folytonosról diszkrét időre áttérés:

$$x_{i+1} = \Phi x_i + \Gamma u_i$$

$$y_i = C x_i + D u_i,$$

ahol

$$\Phi = e^{AT} \quad \text{és} \quad \Gamma = \int_0^T e^{A\sigma} d\sigma B.$$

Mátrixfüggvény integrálása elkerülhető:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t)}{dt} &= e^{At} A = A e^{At} \quad \text{és} \quad \frac{d\Gamma(t)}{dt} = e^{At} B \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi(t) & \Gamma(t) \\ 0 & I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi(t) & \Gamma(t) \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Phi(t) & \Gamma(t) \\ 0 & I \end{bmatrix} &= \exp\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t\right) \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ 0 & I \end{bmatrix} &= \exp\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T\right) \end{aligned}$$

DIFFERENCIÁLÓ ÉS INTEGRÁLÓ OPERÁTOROK KÖZELÍTÉSE

1. Hátrtartó differencia (BWD, backward difference):

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(t) - y(t-T)}{T} \Rightarrow sY \approx \frac{1 - e^{-sT}}{T} Y,$$

$$s := \frac{1 - e^{-sT}}{T} = \frac{1 - z^{-1}}{T} = \frac{z-1}{Tz}.$$

2. Előretartó differencia (FWD, forward difference):

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(t+T) - y(t)}{T} \Rightarrow sY \approx \frac{e^{sT} - 1}{T} Y,$$

$$s := \frac{e^{sT} - 1}{T} = \frac{z-1}{T}.$$

3. Bal oldali téglalapszabály (LSR, left-side rule):

$$y(nT) = \int_0^{nT} x(t) dt \approx \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) \cdot T \Rightarrow$$

$$y_{n+1} \approx y_n + Tx_n, \quad zY \approx Y + TX,$$

$$Y = \frac{1}{s} X \approx \frac{T}{z-1} X,$$

$$s^{-1} := \frac{T}{z-1} \Leftrightarrow s := \frac{z-1}{T}.$$

4. Jobb oldali téglalapszabály (RSR, right-side rule):

$$y(nT) = \int_0^{nT} x(t) dt \approx \sum_{k=1}^n x(kT) \cdot T \Rightarrow$$

$$y_{n+1} \approx y_n + Tx_{n+1}, \quad zY \approx Y + TzX,$$

$$Y = \frac{1}{s} X \approx \frac{Tz}{z-1} X,$$

$$s^{-1} := \frac{Tz}{z-1} \Leftrightarrow s := \frac{z-1}{Tz}.$$

5. Trapézszabály (TR, trapezoidal rule), vagy más néven Tustin-képlet:

$$y(nT) = \int_0^{nT} x(t) dt \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x(kT) + x([k+1]T)}{2} \cdot T \Rightarrow$$

$$y_{n+1} \approx y_n + \frac{T}{2}(x_n + x_{n+1}) \Rightarrow zY = Y + \frac{T}{2}(X + zX),$$

$$Y = \frac{1}{s} X \approx \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} X,$$

$$s^{-1} := \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow s := \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}.$$

MINTAVÉTELES KÖZELÍTÉS MEGVALÓSÍTÁSA

Egységugrás ekvivalencia:

Cél: $W(s)$ analóg tag és annak $D(z)$ közelítése az $u(t) = 1(t)$ bemenő jelre egyformán válaszoljon (a mintavételi időpontokban)

$$D(z) \frac{1}{1-z^{-1}} = Z\mathcal{L}^{-1} \left\{ W(s) \cdot \frac{1}{s} \right\} \Rightarrow$$

$$D(z) = (1-z^{-1})Z\mathcal{L}^{-1} \left\{ W(s) \cdot \frac{1}{s} \right\} = (1-z^{-1})Z\{v(nT)\}.$$

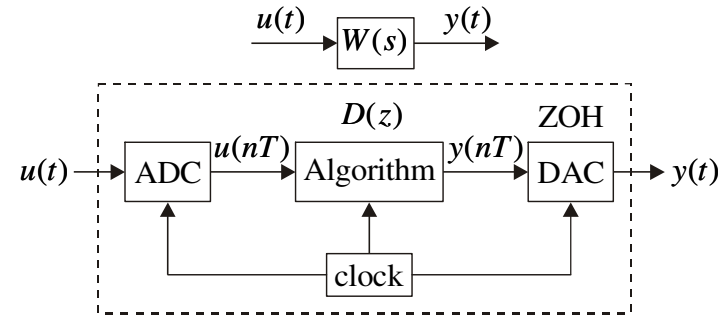
Sebességugrás ekvivalencia:

Cél: $W(s)$ analóg tag és annak $D(z)$ közelítése az $u(t) = t \cdot 1(t)$ bemenő jelre egyformán válaszoljon (a mintavételi időpontokban)

$$D(z) \frac{Tz}{(z-1)^2} = Z\mathcal{L}^{-1} \left\{ W(s) \cdot \frac{1}{s^2} \right\} \Rightarrow$$

$$D(z) = \frac{(z-1)^2}{Tz} Z\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s^2} \right\}.$$

Mintavételes közelítés:



Algoritmus:

$$D(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \Rightarrow$$

$$(a_n + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-n})Y = (b_n + b_{n-1}z^{-1} + \dots + b_0z^{-n})U,$$

$$a_n y_k + a_{n-1} y_{k-1} + \dots + a_0 y_{k-n} = b_n u_k + b_{n-1} u_{k-1} + \dots + b_0 u_{k-n},$$

Megvalósítás szoftverben:

$$(y_{k-1}, \dots, y_{k-n}, u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-n}) \rightarrow y_k$$

$$y_k := -\frac{a_{n-1}}{a_n} y_{k-1} - \dots - \frac{a_0}{a_n} y_{k-n} + \frac{b_n}{a_n} u_k + \frac{b_{n-1}}{a_n} u_{k-1} + \dots + \frac{b_0}{a_n} u_{k-n}$$

IDEÁLIS PID SZABÁLYOZÓ MEGVALÓSÍTÁSA

Integrátor és differenciátor közelítés:

Az ideális *PID* szabályozó mintavételes közelítésekor az integráló tagot jobb oldali téglalapszabállyal (RSR), a differenciáló tagot pedig hátrtartó differenciával (BWD) közelítjük

$$W_{PID}(s) = A_p \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right)$$

$$D_{PID}(z) = A_p \left(1 + \frac{Tz}{z-1} \cdot \frac{1}{T_I} + \frac{z-1}{Tz} T_D \right)$$

Közös nevezőre hozás:

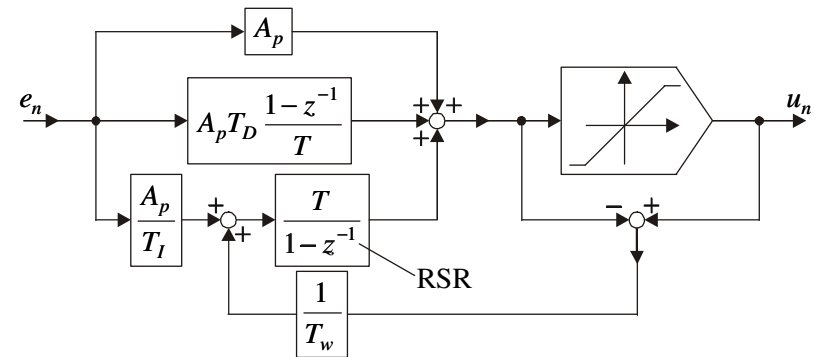
$$D_{PID}(z) = \frac{A_p(1 - z^{-1}) + A_p \frac{T}{T_I} + A_p \frac{T_D}{T} (1 - 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - z^{-1}},$$

$$D_{PID}(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

$$q_0 = A_p \left(1 + \frac{T}{T_I} + \frac{T_D}{T} \right), \quad q_1 = -A_p \left(1 + \frac{2T_D}{T} \right), \quad q_2 = A_p \frac{T_D}{T}.$$

Integrátor antiwindup kiegészítés:

A szabályozót a beavatkozó szerv követi, amely rendszerint telítéssel rendelkezik. Nagy hibajeleknél a szabályozó kimenete a telítéses jelleggörbe vízszintes szakaszára kerül, és ha az integrátor tovább integrál, akkor a telítéses jelleggörbe bemenő jele tovább nő, és a hiba előjelének megfordulásakor még hosszú időnek kell eltelnie, amíg a bemenőjel ismét visszakérül a jelleggörbe lineáris szakaszára. Emiatt a szabályozási tranziensek ideje szükségtelenül megnő, és a szabályozási rendszer minőségi jellemzői leromlanak.



KÖZELÍTŐ PID SZABÁLYOZÓ MEGVALÓSÍTÁSA

Egységugrás ekvivalenciát alkalmazunk:

$$W_{PID}(s) = A_p \left(1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{sT_D}{1+sT_c} \right) \Rightarrow D_{PID}(z) = (1-z^{-1})Z\{v_{PID,n}\}$$

Átmeneti függvény:

$$v_{PID}(t) = A_p + \frac{A_p}{T_I}t + A_p \frac{T_D}{T_c} e^{-t/T_c},$$

Átmeneti függvény Z-transzformáltja:

$$Z\{v_{PID,n}\} = A_p \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{A_p}{T_I} \cdot \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{A_p T_D}{T_c} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}e^{-T/T_c}},$$

Mintavételes szabályozó:

$$D_{PID}(z) = A_p + \frac{A_p}{T_I} \cdot \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{A_p T_D}{T_c} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}e^{-T/T_c}}.$$

Közös nevezőre hozás:

$$\frac{A_p(1-z^{-1})(1-z^{-1}e^{-T/T_c}) + \frac{A_p T}{T_I} z^{-1}(1-z^{-1}e^{-T/T_c}) + \frac{A_p T_D}{T_c} (1-z^{-1})^2}{(1-z^{-1})(1-z^{-1}e^{-T/T_c})}$$

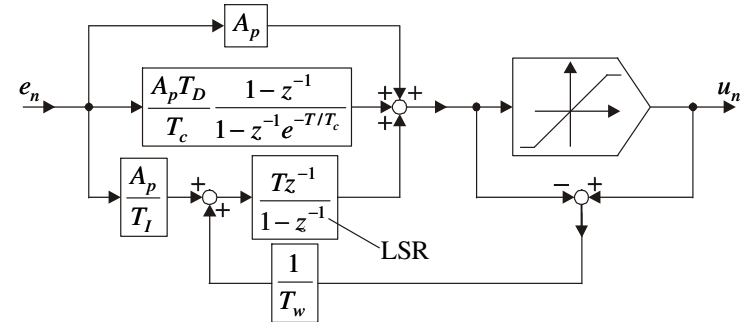
DDC megvalósítás:

$$D_{PID}(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}}$$

$$p_0 = 1 \quad q_0 = A_p \left(1 + \frac{T_D}{T_c} \right)$$

$$p_1 = -(1 + e^{-T/T_c}) \quad q_1 = -A_p \left(1 + e^{-T/T_c} - \frac{T}{T_I} + \frac{2T_D}{T_c} \right)$$

$$p_2 = e^{-T/T_c} \quad q_2 = A_p \left\{ e^{-T/T_c} \left(1 - \frac{T}{T_I} \right) + \frac{T_D}{T_c} \right\}$$



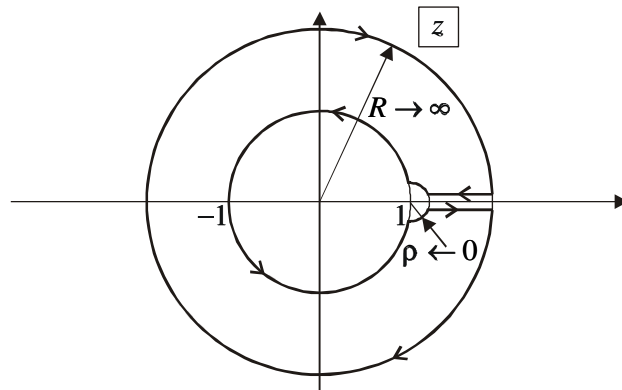
MINTAVÉTELES STABILITÁSI KRITÉRIUMOK

Zárt rendszer karakterisztikus egyenlete:

$$1 + D_0(z) = 0 \Rightarrow z_i \text{ megoldás és } |z_i| < 1$$

Nyquist kritérium:

Mivel a Nyquist-féle stabilitási kritérium az argumentum elven alapul, és az argumentum elv tetszőleges komplex függvényre teljesül, ezért a Nyquist-kritérium a $D_0(z)$ felnyitott körre is érvényes marad, de mivel a stabilitási tartomány a z -síkon az egységkör belseje, ezért a C kontúrgörbét az alábbi ábra szerint kell megválasztani:



Bode stabilitáskritérium:

Hasonlóan alkalmazható a Nyquist-féle stabilitási kritériumból levezetett Bode-féle stabilitási kritérium, de itt is transzcendens $z = e^{j\omega T}$ értékeknél kell felrajzolni a Bode-diagramot a $0 < \omega \leq \pi / T$ tartományban. A stabilitási teszt mintavételes szabályozás esetén is a φ_t fázistöbblet tesztelését jelenti.

MATLAB környezetben a Control System Toolbox dbode függvényével lehet a mintavételes rendszer Bode-diagramját felrajzoltatni.

Mintavételi idő megválasztása:

Analóg szabályozó mintavételes közelítésekor a mintavételi időt úgy kell megválasztani, hogy a Shannon-tétel érvényben legyen. Másrészt viszont a DAC átalakító, mint nulladrendű tartószerv (ZOH) a fázismenete alapján rossz irányban befolyásolja a fázistöbbletet. Célszerű lerögzíteni, hogy kb. 5° és 15° közötti fázistöbblet romlást engedünk csak meg a vágási frekvencián:

$$\omega_c T \in 2 * [5^\circ, 15^\circ] \frac{\pi}{180^\circ} \approx [0.17, 0.51]$$