Estymacja punktowa

Estymacja punktowa

- Niech $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ będzie próbą z populacji o rozkładzie P_θ, gdzie $\theta \in \Theta$ jest parametrem
- **Estymatorem** parametru θ nazywamy statystykę $T(X)$ o wartościach w zbiorze Θ, której wartość dla konkretnej realizacji x próby X, przyjmujemy za ocenę nieznanej wartości parametru θ
- Estymator ten oznaczamy

$$\hat{\theta}(X) \quad \text{lub} \quad \hat{\theta}$$

Estymacja punktowa

Popularne metody wyznaczania estymatorów punktowych:

- Metoda momentów
- Metoda największej wiarygodności

Metoda momentów

- Niech $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ będzie próbą z populacji o rozkładzie P_θ, gdzie $\theta \in \Theta \subset R^d$
- Ponadto, niech rozkłady P_θ posiadają skończone momenty do rzędu d włącznie
- Metoda momentów polega na przyrównaniu kolejnych d momentów z próby

$$m_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^i, \qquad i = 1,2,\dots,d$$

do odpowiednich momentów rozkładu populacji

$$E\left(X^i\right), \qquad i = 1,2,\dots,d$$

Metoda momentów

- Rozwiązując otrzymany w ten sposób układ równań uzyskujemy **estymatory metody momentów (EMM)**
- **Uwaga:** W metodzie momentów możemy zamiast momentów zwykłych wykorzystać momenty centralne

Metoda największej wiarygodności

- Niech $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ będzie próbą z populacji o rozkładzie P_θ, gdzie $\theta \in \Theta \subset R^d$
- Ponadto, niech rozkłady P_θ opisane będą za pomocą funkcji prawdopodobieństwa (gęstości) p_θ
- **Definicja:**
  Funkcję L określoną wzorem
  $$L(\theta, x) = p_\theta(x)$$
  nazywamy **funkcją wiarygodności**
- **Uwaga:** Funkcją wiarygodności nazywamy czasem funkcję $\ln p_\theta(x)$

Metoda największej wiarygodności

- **Definicja:**
  Estymatorem największej wiarygodności (ENW) parametru θ nazywamy statystykę $\hat{\theta}(X)$, której wartości $\hat{\theta}(x)$ spełniają warunek
  $$\forall\, x \in X \qquad L\big(\hat{\theta}(x), x\big) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta, x)$$
- **Uwaga:** Dla każdego parametru θ, ENW może nie istnieć lub może być wyznaczony niejednoznacznie
- **Uwaga:** Zazwyczaj, podczas wyznaczania ENW, wygodniej jest operować funkcją $\ln L$ niż funkcją L

Estymacja parametru λ w modelu wykładniczym

- **Fakt:**
  Estymatorem metody momentów (EMM) oraz estymatorem największej wiarygodności (ENW) parametru λ, w modelu jednej próby prostej z rozkładu wykładniczego, jest statystyka

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$$

Estymacja parametrów μ i σ^2 w modelu normalnym

- Fakt:
  Estymatorami metody momentów (EMM) oraz estymatorami największej wiarygodności (ENW) parametrów μ i σ^2, w modelu jednej próby prostej z rozkładu normalnego, są statystyki

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$

oraz

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$$

Estymatory nieobciążone

Estymatory nieobciążone

- Niech $\theta \in \Theta$ oznacza parametr modelu statystycznego
- **Definicja:**
  Statystykę $\hat{\theta}$ nazywamy **estymatorem nieobciążonym** parametru θ, gdy dla każdego $\theta \in \Theta$ zachodzi równość
  $$E(\hat{\theta}) = \theta$$
- **Uwaga:** Klasa estymatorów nieobciążonych danego parametru może być pusta. Zazwyczaj jednak, dla danego parametru istnieje wiele różnych estymatorów nieobciążonych. Najlepszym z nich jest ten, który ma minimalną wariancję. Nazywamy go **estymatorem nieobciążonym o minimalnej wariancji (ENMW)**

Estymatory nieobciążone o minimalnej wariancji

- **Twierdzenie:**
  Jeżeli dla parametru θ istnieje estymator nieobciążony o minimalnej wariancji, to jest on wyznaczony jednoznacznie (z dokładnością do zbioru miary zero)

Estymatory nieobciążone

- **Fakt:**
  W modelu jednej próby prostej z rozkładu wykładniczego, EMM i ENW parametru λ postaci
  $$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{\bar{X}}}$$
  jest obciążonym estymatorem tego parametru
  Estymator nieobciążony (o minimalnej wariancji) parametru λ ma postać
  $$\hat{\lambda} = \frac{n-1}{n}\frac{1}{\bar{\bar{X}}}$$

Operatory nieobciążone

- **Fakt:**
  W modelu jednej próby prostej z rozkładu normalnego, EMM i ENW parametru μ postaci
  $$\hat{\mu} = \bar{X}$$
  jest nieobciążonym (o minimalnej wariancji) estymatorem tego parametru
  Ponadto, statystyka
  $$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$
  jest nieobciążonym estymatorem (o minimalnej wariancji) parametru σ^2