Testy statystyczne

Hipotezy statystyczne

- Niech θ oznacza tradycyjnie parametr modelu statystycznego
- Dotychczasowe rozważania dotyczyły metod estymacji tego parametru (punktowej lub przedziałowej)
- Teraz, zamiast szacować nieznaną wartość parametru, będziemy weryfikowali hipotezę mówiącą, że jego "prawdziwa" wartość nie różni się istotnie od zadanej wartości, co zapisujemy
$$\theta = \theta_0$$
gdzie θ_0 jest ustalone
- Poza samą hipotezą (nazywać ją będziemy hipotezą zerową) musimy jeszcze podać hipotezę alternatywną, czyli ustalić jaka jest nasza decyzja w przypadku odrzucenia hipotezy zerowej
- Przykładowo, dla hipotezy zerowej
$$H_0\colon \theta = \theta_0$$
możliwe są następujące alternatywy
$$H_1\colon \theta \neq \theta_0, \qquad H_1\colon \theta > \theta_0, \qquad H_1\colon \theta < \theta_0$$

Przykłady układów hipotez

- Hipoteza zerowa: wartość oczekiwana (średnia) badanej cechy **nie różni się istotnie** od 20
  Hipoteza alternatywna: wartość oczekiwana (średnia) badanej cechy **jest istotnie większa** od 20
- Hipoteza zerowa: wartości oczekiwane (średnie) badanej cechy w dwóch grupach **nie różnią się istotnie**
  Hipoteza alternatywna: wartości oczekiwane (średnie) badanej cechy w dwóch grupach **różnią się istotnie**
- Hipoteza zerowa: **nie ma istotnej zależności** pomiędzy dwoma badanymi cechami
  Hipoteza alternatywna: **istnieje istotna zależność** między dwoma badanymi cechami

Obszary krytyczne

- Konstruując procedurę testową wyznaczmy tzw. **obszar krytyczny** (obszar odrzuceń hipotezy zerowej)
- Najbardziej typowy jest prawostronny obszar krytyczny postaci
$$R = \{x : T(x) \geq k\}$$
gdzie T jest statystyką testową, a k oznacza wartość krytyczną
- Stąd jeśli wartość statystyki testowej jest duża (przekracza wartość krytyczną), to odrzucamy hipotezę zerową
- Inne postaci obszarów krytycznych:
Lewostronny obszar krytyczny
$$R = \{x : T(x) \leq k\}$$
Dwustronny obszar krytyczny
$$R = \{x :\ T(x) \geq k_1 \text{ lub } T(x) \leq k_2\}$$

Błędy pierwszego i drugiego rodzaju

Prawdopodobieństwo tego błędu nie jest kontrolowane. Wiemy tylko, że jest możliwie minimalne.

		Decyzja	
		Przyjmujemy hipotezę zerową	Odrzucamy hipotezę zerową
„Rzeczywisty stan natury"	Hipoteza zerowa	Decyzja poprawna	Błąd I rodzaju
	Hipoteza alternatywna	Błąd II rodzaju	Decyzja poprawna

Prawdopodobieństwo tego błędu jest kontrolowane. Zawsze poniżej poziomu istotności.

Błędy pierwszego i drugiego rodzaju

- Przyjmując lub odrzucając hipotezę zerową podejmujemy decyzję, która może być poprawna lub błędna
- Podczas testowania hipotezy zerowej możemy popełnić jeden z dwóch następujących błędów:

  1. Odrzucamy hipotezę zerową gdy jest ona prawdziwa –
     błąd I rodzaju

  2. Przyjmujemy hipotezę zerową gdy jest ona fałszywa –
     błąd II rodzaju

Wybór wartości krytycznej

- Ustalamy poziom istotności testu α i dobieramy wartość krytyczną tak, aby

  1. Prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju było mniejsze lub równe α

  2. Prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju było minimalne

Wynik testowania hipotez

- Ponieważ decyzja przyjęcia hipotezy zerowej może pociągnąć za sobą popełnienie błędu II rodzaju (prawdopodobieństwo tego błędu nie jest kontrolowane i nawet w najlepszych testach może być bardzo duże), to wynikiem testowania hipotez statystycznych jest jedna z dwóch decyzji:

  1. "odrzucamy hipotezę zerową" tzn. stwierdzamy występowanie istotnych statystycznych różnic (zależności), na poziomie istotności α

  2. "nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej" tzn. nie stwierdzamy występowania istotnych statystycznie różnic (zależności), na poziomie istotności α

p-wartość

- p-wartość (p) jest najmniejszym poziomem istotności testu, przy którym odrzucamy hipotezę zerową

- **Wniosek:**

  Jeżeli $p \leq \alpha$, to odrzucamy H_0

  Jeżeli $p > \alpha$, to nie ma podstaw do odrzucenia H_0

Sposób obliczenia p-wartości

- Prawostronny obszar krytyczny:
$$P_0\big(T \geq T(x)\big)$$
- Lewostronny obszar krytyczny:
$$P_0\big(T \leq T(x)\big)$$
- Dwustronny obszar krytyczny:
$$2\min\left\{ P_0\big(T \geq T(x)\big), P_0\big(T \leq T(x)\big) \right\}$$