量子藏宝图

题解作者：[Elliot]

出题人、验题人、文案设计等：见 [Hackergame 2022 幕后工作人员]。

题目描述

- 题目分类：math
- 题目分值：300

相传，**伯恩斯坦**曾到访过一个叫做「坎瑞亚」的古国。游历期间，他发明了一种基于量子计算的密码算法，这种算法可以利用量子计算机进行快速运算。然而，时光荏苒，时过境迁，这种算法竟遗失在了历史长河里。这天，旅行者（你）在游历提瓦特大陆时，收到了一封神秘的匿名邮件。据邮件所说，旅行者若是能够重新解密这一算法，便能获得一个名为 **FLAG** 的金色圣遗物。似乎 **FLAG** 正是隐藏在算法之中。

题解

出题思路

本题旨在借助量子信息学中的经典算法，来向大家介绍量子信息学的基本知识。这两个算法分别是：BB84协议[1]和Bernstein-Vazirani算法[2]。其中，BB84协议是最早设计的量子密钥分发方案，由Bennertt和Brassard在1984年提出；Bernstein-Vazirani算法则是最早被理论证明量子计算优越的算法之一，由伯恩斯坦和瓦济拉尼在1992年提出。

本题通过引入两个挑战，考察答题者的资料收集、线性代数和对量子信息学的基本掌握。

第一部分： BB84 协议

该部分对应了**第一章-第一幕**的内容，要求答题者和服务器协商出一个长度为128比特的随机密钥。

1.1 量子信息学基础

量子比特：量子信息学的基础单位是量子比特（Qubit），通常将其编码一个2x1的列向量，例如：

$|0\rangle = [1,0]^T, |1\rangle = [0,1]^T$

在物理上说，一个Qubit通常被编码在一个物理量上（对应的，经典比特通常被编码在电压上）。量子态可以被编码在光量子的偏振特性上，比如 $|0\rangle$ 编码为水平偏振（0°）光子，$|1\rangle$ 被编码（90°）在垂直偏振光子。一个水平偏振的光子可以通过水平放置的偏振片，而垂直偏振光子无法通过。

量子测量： 因此，我们可以让一个光子通过一个偏振片，然后探测这个光子，以此实现对量子态的测量。例如，我们可以让一个光量子通过一个水平偏振片，然后探测这个光子。如果能够探测到，那么这个光子是 $|0\rangle$，反之是 $|1\rangle$。这种测量被成为 **Pauli-Z 基测量**[3]。

量子操作：但是，单个量子比特的表达能力比经典比特强。比如，将一个 $|0\rangle$ 的光子通过一个 45° 的偏振片。此时，该光量子会变成状态：

$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,1]^T$

此时，如果再次进行**Pauli-Z 基测量**，得到的量子态是随机的，有 $(1/\sqrt{2})^2 = 1/2$ 的概率能够测量得到光子，有1/2概率无法探测到光子。也就是说，测量结果是量子态在测量基上的投影分量。

另一种测量是**Pauli-X基测量**，让光子通过一个 45° 的偏振片，则一个 45° 偏振的光子一定能被探测，一个 135°的光子一定不能被探测到（因为 135° 和 45° 正交，其在 45° 方向上的投影分量为0）。一个 0° 或 90° 的光子有1/2可能性被测量到，有1/2的概率不被测量到。

我们通常将 0° 和 90° 光子称为 **Z** 基态制备的量子，他通过 **Pauli-Z** 基测量可以得到量子态，通过 **Pauli-X**基的测量则将产生误码。反之， 45° 和 135° 光子称为 **X** 基态制备的量子，通过 **Pauli-X** 基测量可以得到精确结果，而**Pauli-Z** 基础测量则会产生完全随机乱码。

量子信息学将常见的量子操作形式化为 **量子逻辑门** [4]，用一个矩阵来表示。如果用一个矩阵操作一个量子态，则新的量子态是矩阵和量子态向量的乘积结果。例如，一个常见的量子门是 **Pauli-X** 门（对应经典的逻辑非门），其矩阵表示是：
$$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

一个 $|0\rangle$ 的量子态经过该逻辑门可以得到 $|1\rangle$ 量子态：

$$|1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

和经典逻辑的 “与门“ 或 ”或门” 类似，量子逻辑门同样存在多比特量子逻辑门，一个最经典的是CNOT，量子受控非门。该门有两个输入，一个控制比特q_0 ，一个受控比特 q_1 。如果 $q_0 = |0\rangle$ ，那么q_1 状态不变；反之，如果 $q_0 = |1\rangle$ ，那么q_1 状态反转（相当于执行 **Pauli-X** 门）。其状态矩阵是：

$$CNOT = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

假设 $q_0 = |1\rangle$ 和 $q_1 = |0\rangle$ 系统的状态 $S = q_0 \otimes q_1 = |1\rangle \otimes |0\rangle = [0,0,1,0]^T$ （迪尔卡积）。经过CNOT门后状态为：

$$CNOT \cdot S = [0,0,0,1]^T = [0,1]^T \otimes [0,1]^T = |1\rangle \times |1\rangle$$

即 q_1 被反转。

人们将量子门组合起来，构建了量子门电路，并证明了量子门电路在表达量子算法方面的完备性。关于量子电路的介绍可以参考[5] [6]。

1.2 BB84 协议

BB84 协议 [1] 利用了量子测量的投影特性，构造了第一个”信息论“安全的密钥分发协议。密钥分发协议是这样一种场景：Alice和 Bob作为通信双方，需要使用某种加密算法对消息明文进行加密。但是任何加密算法均需要一个双方共享的密钥，该密钥需要满足如下需求：

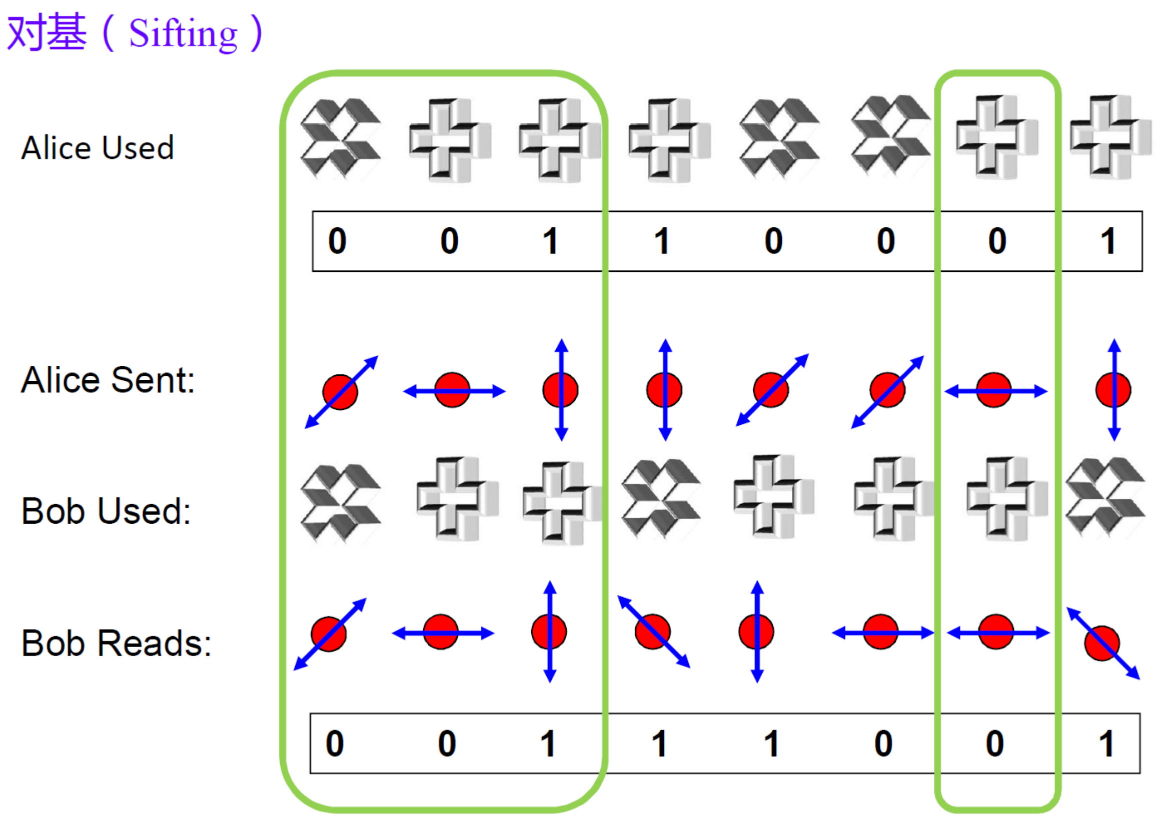
1. 该密钥应当是密码学安全的随机字符串序列
2. 该密钥不能被除了 Alice 和 Bob 之外的其他实体得知（比如一个攻击者Eva）

现代密码学通常基于某些数学难解问题构造密钥分发协议，比如D-H密钥交换协议或者基于椭圆曲线的D-H密钥交换（ECDH）协议等，但是通常存在如下两个问题：

1. 产生的密钥长度受限。实际密钥将不得不进行派生。
2. D-H密钥交换和ECDH的安全假设在量子计算模型下被认为是不安全的。

BB84协议的主要流程是：

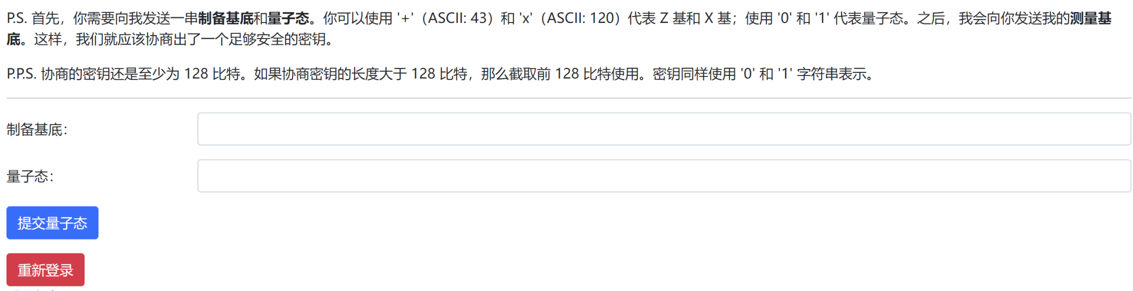
1. Alice 随机产生随机数 0 或者 1，并随机产生制备基 **Pauli-X** 或者 **Pauli-Z**。然后，将随机数编码到这个制备基上。（将 $|0\rangle$ 和 $|+\rangle$ 编码为0，将 $|1\rangle$ 和 $|-\rangle$ 编码为1）。将量子发送给 Bob
2. Bob 随机选择 **Pauli-X** 基或者 **Pauli-Z** 基对接收到的光子进行测量，得到结果0或者1（将 $|0\rangle$ 和 $|+\rangle$ 编码为0，将 $|1\rangle$ 和 $|-\rangle$ 编码为1）。
3. Alice 公开选择的制备量子态的基 X 或者Z，而 Bob 公开测量基。如果双方答案一致，则将测量结果保留作为密钥。



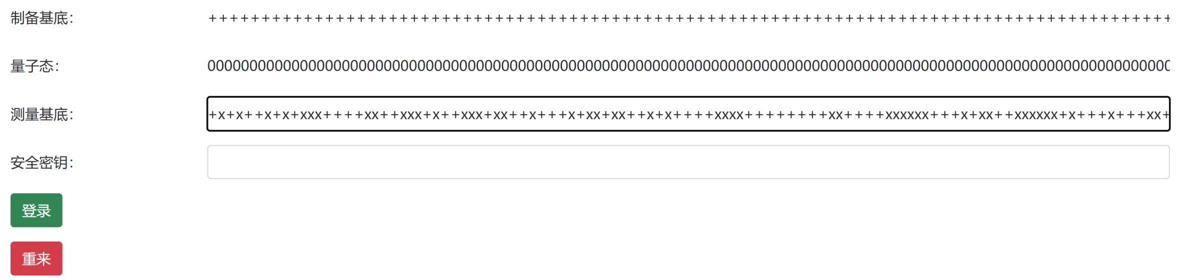
该流程满足了密钥交换的两个需求：

1. 只要 Alice 和 Bob 的随机数是安全的，那么密钥结果是随机字符串。
2. 中间人 Eva 将无法得知传输的量子态的准确信息。Eva 可以截取 Alice 发送的光子并测量。但是他不能保证选择的测量基和Alice的制备基一致，最终将无法准确恢复量子态并发送给 Bob。另一方面，Alice 和 Bob 可以通过对产生密钥进行校验的方式，证实链路上不存在窃听攻击。

1.3 第一阶段解题思路



根据题意，我们在 BB84 协议中充当 Alice 的角色。我们需要首先制备“随机”的基底和量子态。考虑到 Bob 有 1/2 的概率会选择错误的测量基，我们尽可能输入长度超过 $2\times128=256$ 的基底和量子态。为了简单起见，我们制备全部量子态为0，全部制备基底为+。



我们接收到来自Bob的随机测量基底为:

```
+X+X++X+X+XXX++++XX++XXX+X++XXX+XX++X+++X+XX+XX++X+X++++XXXX++++++++XX++++XXXXXX+++X+XX++XXXXXX+X+++X+++XX+X++X++XX++XXX+X++X+XXXXXXXX+X+X++X++X+++XX+X+XX+++X+++XXX+X++X+XX+XXXX+++X+X+X+XXXXX+X+XXX++X++XXXXX++XXX+++XX++++X++XX+XX+XXX+XXXX++XXX+X+X+X+XX+X+++++XX++++XXX++X+X+X+X+++X+X++XX+XX+X+X+X+X++
```

我们发现其中有148 个 ''+'，和我们的制备基底一致。对应的密钥保留，最终安全密钥是长度为 148 的 '0...' 字符串。

第二阶段 Bernstein-Vazirani算法

根据题干中的"伯恩斯坦"的描述，我们需要解题者自行搜索了解Bernstein-Vazirani算法。该部分对应了 **第二章-第一幕** 的题目。

2.1 算法简介

Bernstein-Vazirani算法 [2] 是最早的被证明量子计算优越性（即量子计算模型比经典计算模型高效）的算法之一，这个网页 [7] 给出了关于这个算法的很好的描述。

该算法针对这样一个问题：假设存在一个黑盒函数 $f_s(x)$ ，该黑盒函数中藏有一个长度为n的秘密字符串 $s \leftarrow \{0,1\}^n$。算法的输入是一个和 s 等长的字符串 $x \in \{0,1\}^n$，输出 s 和 x 的正交积:

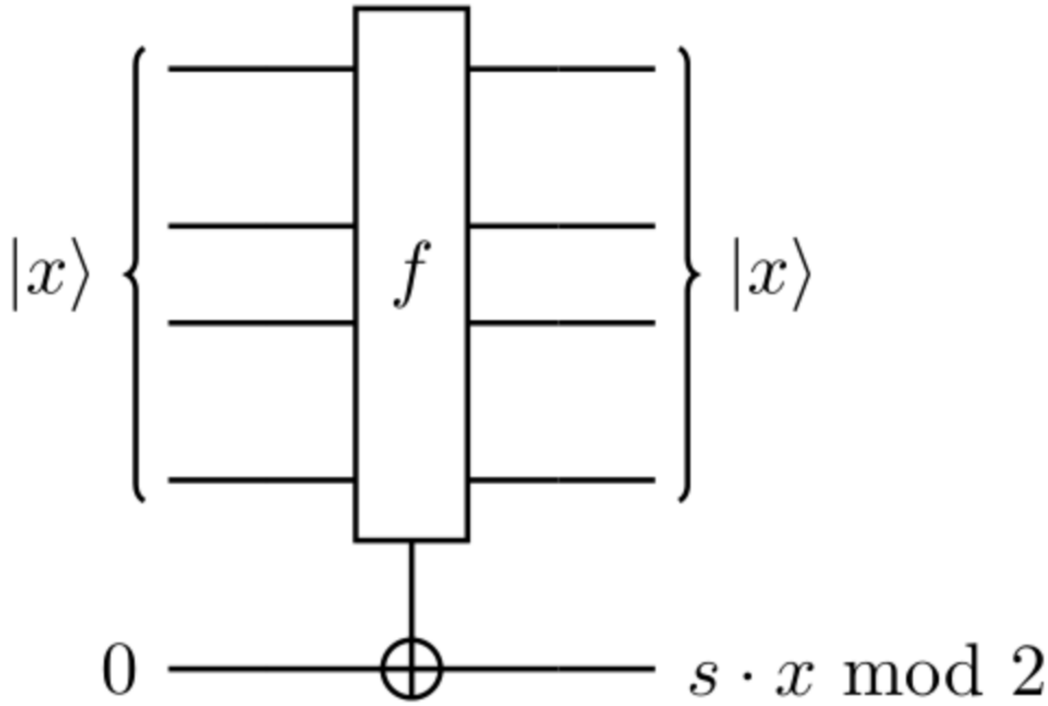
$f_s(x) = s \cdot x \mod 2 = \sum_{i=0}^{n} s[i] \cdot x[i] \mod 2$

经典解法：经典解法的计算复杂度为 $O(n)$ ，具体做法是构造 n 个字符串 $x_1 = 000..00001$, $x_2 = 000..00010$ ... $x_n = 100..00000$。分别将x_i 输入得到 $f(x_i) = s[i]$ （秘密字符串的第 i 比特）

$$
\begin{gathered}
f(1000\cdots0_n) = s_1 \\
f(0100\cdots0_n) = s_2 \\
f(0010\cdots0_n) = s_3 \\
\vdots \\
f(0000\cdots1_n) = s_n
\end{gathered}
$$

量子算法：Bernstein-Vazirani算法的计算复杂度为 $O(1)$ ，该算法巧妙的运用了量子计算模型的并发特性。具体实现如下：

我们首先构造一个量子电路版本的黑盒函 F ，该函数输入是 n 个的输入量子比特寄存器 $|x\rangle_{(0,n)}$ 和一个输出寄存器 $|y\rangle_{(n+1)} = |0\rangle$ 。经过该门电路后，前 n 个输入量子比特的状态不变，为 $|x\rangle_{(0,n)}$ ，而输出寄存器 $|y\rangle_{(n+1)} = |s \cdot x \mod 2\rangle$ 。下图是该黑盒操作的示意图：



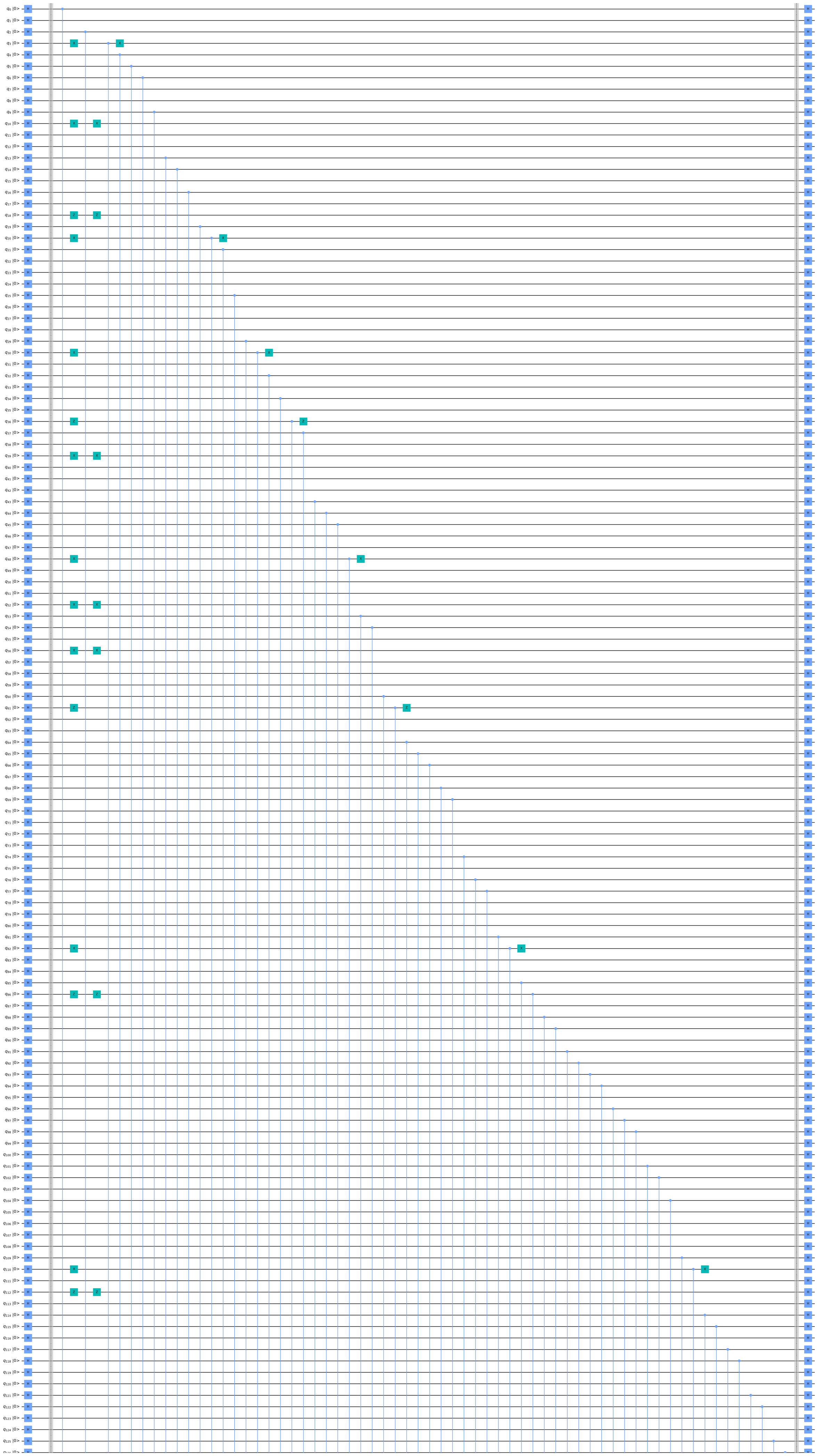
具体解法为：

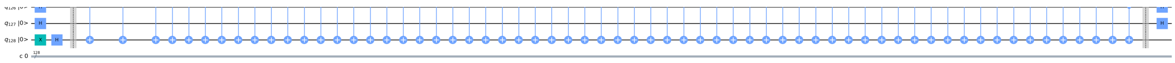
1. 将输入寄存器 $|x\rangle_{(0,n)}$ 的每一个 Qubit 置为 $|0\rangle$ 。将输出寄存器 $|y\rangle_{(n+1)}$ 置为 $|0\rangle$
2. 将输出寄存器通过一个 **Pauli-X** ($X=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$) 操作，转化为 $|1\rangle=[0,1]^T$ ；再通过 Hadamard 门 $H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$ ，转化为 $|-\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1]^T$
3. 将输入寄存器 $|x\rangle_{(0,n)}$ 的每一个 Qubit 经过 Hadamard 门 $H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$
4. 将输入寄存器 $|x\rangle_{(0,n)}$ 和输出寄存器 $|y\rangle_{(n+1)}$ 通过黑盒函数 F，得到 $|x\rangle_{(0,n)}$ 和 $|y\rangle_{(n+1)}=|s\cdot x \mod 2\rangle$
5. 将输入寄存器 $|x\rangle_{(0,n)}$ 的每一个 Qubit 再次 Hadamard 门 $H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$
6. 使用 **Pauli-Z** 基测量输入寄存器 $|x\rangle_{(0,n)}$ ，其第 i 个 Qubit 的测量结果即为 $|x\rangle_i=|s_i\rangle$

可以发现，该算法调用以此黑盒函数 F ，即可实现求解。具体解法可以参考 [7]，这里就不给出了。只提一点，通过前三步的构造，输入寄存器的状态器是 $|x\rangle_{0,n}=\frac{1}{\sqrt{2}^n}\sum_{i=1}^{n}|x_i\rangle$ 。其中，$|x_i\rangle=|0000...i000\rangle$ 的第 i 比特为 1 。实质上实现了对经典算法中的每一个输入的叠加，以此构造了并行特性。

2.2 本题解法

本题，我们得到了整个算法的量子电路图，包括黑盒函数 F 的内部结果，可以推测这题是需要我们根据电路图本身来求解秘密值 s。我们发现，在图中的两条灰色竖线部分正好对应了黑盒函数 F ，我们下面来针对这部分重点分析。





首先，我们观察到了大量 CNOT 门电路（蓝色细连线），比如，第一个CNOT 门将 q_0 和 q_{128} 连接。根据该电路的效果：

1. 如果 $q_0 = 0$（对应了 $x_0 = 0$），那么 q_{128} 不变。对应了 y 不变
2. 如果 $q_0 = 1$（对应了 $x_0 = 1$），那么 q_{128} 反转。对应了 $y = y + 1 \mod 2 = y + s_0 \cdot 1 \mod 2 = y + s_0 \cdot x_0 \mod 2$

也就是说，如果 $s_i = 1$，那么存在一个 CNOT 门 连接 q_i 和 q_{128}。

但是，我们还进一步观察到了若干成对出现的 X 和 Z 门，我们分别来对其进行讨论。

X 门混淆: 观察到 Bernstein-Vazirani 算法中，输入黑盒的 $|q_i\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,1]^T$,该状态经过一次 X 门之后的状态是:

$$|q_i'\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = |q_i\rangle, \forall i < 128$$

即，X 门对于输入寄存器 Qubit 的状态不变。

Z 门混淆:

Pauli-Z 门的矩阵表达是: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

我们已知输入Qubit状态为 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 假设此时输出寄存器 q_{128} 的状态是 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, (s.t.\ a^2 + b^2 = 1)$, 系统联合状态为

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1a \\ 1b \\ 1a \\ 1b \end{bmatrix}$$

经过 Z 门 后，状态为

$$\xrightarrow{Z_i} Z \otimes I \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1a \\ 1b \\ 1a \\ 1b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1a \\ 1b \\ 1a \\ 1b \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ -a \\ -b \end{bmatrix}$$

经过 CNOT 门后 状态为

$$\xrightarrow{CNOT} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ -a \\ -b \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ -b \\ -a \end{bmatrix}$$

最后，再次经过Z门后，状态为:

$$\xrightarrow{Z_i} Z\otimes I\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}a\\b\\-b\\-a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}a\\b\\-b\\-a\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}a\\b\\b\\a\end{bmatrix}$$

另一方面，我们考察不经过两次 Z 门，直接一次 CNOT 门的结果。

$$\xrightarrow{CNOT}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}a\\b\\a\\b\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}a\\b\\b\\a\end{bmatrix}$$

也就是说：

$$(Z\otimes I)\cdot \mathrm{CNOT}(Z\otimes I)=\mathrm{CNOT}$$

总结，成对出现的 Z 门结果抵消，不会产生影响。

解法

最终只需要找到包含 CNOT 门的量子比特 q_i 其对应的 $s_i=1$。根据题意将其按照大端序排列，按 ASCII 查表，得到flag：

```
flag{f470a85b9b}
```

注意，q_{128} 对应了首个比特，q_0 对应了末位比特。

2.3 一种可能的非预期解

答题者可能会直接想办法将上述量子电路图的图片转化为电路本身，然后在现有的量子计算模拟平台（例如：[8] [9]）中得到结果。我认为这种思路也是允许的，一方面我将该电路**构造的足够大**，密钥长度为 128 bit， 复现难度很高；另外，因为能够将其复现并运行，应当本身对量子计算模型有所了解了，两者难度相当。

---

1. C. H. Bennett and G. Brassard. "Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing". In Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing, volume 175, page 8. New York, 1984. ↩ ↩
2. Ethan Bernstein and Umesh Vazirani (1997). "Quantum Complexity Theory". *SIAM Journal on Computing*. **26** (5): 1411–1473. doi:10.1137/S0097539796300921 ↩ ↩
3. Pauli measurements - Azure Quantum | Microsoft Learn ↩
4. Quantum logic gate - Wikipedia ↩
5. Defining Quantum Circuits (qiskit.org) ↩
6. Quantum circuit - Wikipedia ↩
7. Bernstein-Vazirani Algorithm (qiskit.org) ↩ ↩
8. Qiskit ↩
9. ertuil/SimQN: A discrete time scheduler designed for Quantum Network (github.com) ↩