MATLAB在高等数学以及线性代数中的运用

线性代数中的应用

行列式求值

1. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

   线性代数求解方法：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb + bca + cba - c^3 - a^3 - b^3$$

   MATLAB求解方法：

```
syms a b c
A=[a b c;b c a;c a b];
detA = det(A)

%运行结果
detA = - a^3 + 3*a*b*c - b^3 - c^3
```

2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0, \text{其中} a, b, c \text{互不相等}$

   线性代数求解方法：

$$\text{四阶范德蒙德行列式可得，原式} = (x-a)(x-b)(x-c)(a-b)(a-c)(b-c) = 0$$

   MATLAB求解方法：

```
syms x a b c
A = [1 1 1 1;x a b c;x^2 a^2 b^2 c^2;x^3 a^3 b^3 c^3];
detA = factor(det(A)) %求解并因式分解

%运行结果
detA = [-1, c - x, b - x, b - c, a - x, a - c, a - b]
```

基本运算

3. 求$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$的值

   线性代数求解方法：

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

MATLAB求解方法:

```
A = [2 1 4 0;1 -1 3 4]*[1 3 1;0 -1 2;1 -3 1;4 0 -2]

%运行结果
A =

     6    -7     8
    20    -5    -6
```

4. 矩阵转置

线性代数求解方法：

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$$

$$A'=\begin{pmatrix} a & e \\ b & f \\ c & g \\ d & h \end{pmatrix}$$

MATLAB求解方法:

```
syms a b c d e f g h
A=[a b c d;e f g h];
A'

%运行结果
ans =

[conj(a), conj(e)]
[conj(b), conj(f)]
[conj(c), conj(g)]
[conj(d), conj(h)]
```

5. $A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ 求A^n

线性代数求解方法：

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix} \lambda^3 & 0 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

总结归纳可知：$A^n=\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

MATLAB求解方法:

```
syms x n
A = [x 0 1;0 x 0;0 0 x];
An = A^n;

%运行结果
An =

[exp(n*log(x)),             0, (n*exp(n*log(x)))/x]
[            0, exp(n*log(x)),                   0]
[            0,             0,       exp(n*log(x))]

%进一步简化
```

```
simplify (An)

%运行结果
An =

[x^n,   0, n*x^(n - 1)]
[  0, x^n,           0]
[  0,   0,         x^n]
```

矩阵求逆

6. 求方阵$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-4&1\end{pmatrix}$的逆矩阵

线性代数求解方法：

$$|A|=2\neq 0A\text{可逆}$$
$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&2&0\\-13&6&-1\\-32&14&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-\frac{13}{2}&3&-\frac{1}{2}\\-16&7&-1\end{pmatrix}$$

MATLAB求解方法:

```
A = [1 2 -1;3 4 -2;5 -4 1];
A_inv = inv(A)

%运行结果
A_inv =

   -2.0000    1.0000    0.0000
   -6.5000    3.0000   -0.5000
  -16.0000    7.0000   -1.0000
```

7. 求方阵$A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$的逆矩阵

线性代数求解方法：

$$A^{-1}=\frac{1}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

MATLAB求解方法:

```
syms x
A = [cos(x) -sin(x);sin(x) cos(x)];
A_inv = inv(A);
A_inv = simplify(A_inv) %进一步化简三角函数

%运行结果
A_inv =

[ cos(x), sin(x)]
[-sin(x), cos(x)]
```

矩阵的秩

8. $A=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\4&-1&-5&-6\\1&-3&-4&-7\\2&1&-1&0\end{pmatrix}$

线性代数求解方法：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\4&-1&-5&-6\\1&-3&-4&-7\\2&1&-1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&-9&-9&-18\\0&-5&-5&-11\\0&-3&-3&-6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&1&2\\0&1&1&2\\0&1&1&2\end{pmatrix}\quad\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\therefore R(A)=2$$

MATLAB求解方法:

```
A = [1 2 1 3;4 -1 -5 -6;1 -3 -4 -7;2 1 -1 0];
A_rank = rank(A)

%运行结果
A_rank = 2
```

特征值特征向量

9. 求矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$的特征值

线性代数求解方法：

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$$
$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&-3-\lambda&3\\-1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&\lambda^2-2\\5&-3-\lambda&-7-5\lambda\\-1&0&-0\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}-1&\lambda^2-2\\3+\lambda&7+5\lambda\end{vmatrix}=-(1+\lambda)^3$$
$$\therefore \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$$

MATLAB求解方法:

```
A =  [2 -1 2;5 -3 3;-1 0 -2];
d=eig(A)

%运行结果
d =

  -1.0000 + 0.0000i
  -1.0000 + 0.0000i
  -1.0000 - 0.0000i
```

10. 求矩阵$A=\begin{pmatrix}4&2&-5\\6&4&-9\\5&3&-7\end{pmatrix}$的特征值特征向量

线性代数求解方法：

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -5\\ 6 & 4 & -9\\ 5 & 3 & -7\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2 & 5\\ -6 & \lambda-4 & 9\\ -5 & -3 & \lambda+7\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2(\lambda-1)=0$$

$$\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=0$$

$$当\lambda_1=0E-A=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 5\\ -6 & -3 & 9\\ -5 & -3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$(E-A)x=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

$$令x_1=0$$

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$同理\xi_2=\xi_3=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$$

MATLAB求解方法：

```
A =  [4 2 -5;6 4 -9;5 3 -7];
d=eig(A)
[V,D]=eig(A);
V

%运行结果
D =

    1.0000
    0.0000
    0.0000

V =

    0.5774    0.2673    0.2673
    0.5774    0.8018    0.8018
    0.5774    0.5345    0.5345
```

求解矩阵方程

11. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $,AX=2X+A,求X$

线性代数求解方法：

$$AX=2X+A\rightarrow(A-2E)X=A$$

$$(A-2E,A)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore A-2E可逆，X=(A-E)^{-1}A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

MATLAB求解方法：

```
A = [1 -1 0;0 1 -1;-1 0 1];
E = [1 0 0;0 1 0;0 0 1];
```

```
A_2E_inv =inv(A-2*E);
X =  A_2E_inv*A

%运行结果
X =

     0     1    -1
    -1     0     1
     1    -1     0
```

12. $\begin{cases} 2x_1+3x_2 & =8 \\ x_1+3x_1 & =7 \end{cases}$

线性代数求解方法：

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 & =8 \\ x_1+3x_1 & =7 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \end{cases}$$

MATLAB求解方法:

```
A = [2 3;1 3];
B = [8 7]';
C = cat(2,A,B);
R = rref(C)

%运行结果
R =

     1     0     1
     0     1     2
%x1=1,x2=2
```

13. 利用LU分解法求解 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix}$$
$$\text{分解得到：} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix} = LU$$
$$Ly = \begin{pmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 14 \\ -10 \\ -72 \end{pmatrix}$$
$$Ux = \begin{pmatrix} 14 \\ -10 \\ -72 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

MATLAB求解方法:

```
A = [1 2 3;2 5 2;3 1 5];
[L,U] = lu(A);
B = [14 18 20]';
x = U\(L\B)

%运行结果
x =

    1.0000
    2.0000
    3.0000
```

二次型和标准型

14. 规范正交化下列向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

线性代数求解方法：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$
$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\beta_1,\alpha_2]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\beta_1,\alpha_3]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1--\frac{[\beta_2,\alpha_3]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$
分别单位化得到：
$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

MATLAB求解方法：

```
alpha_1 = [1 -1 0];
alpha_2 = [-1 1 1];
alpha_3 = [1 1 1];
A = [alpha_1;alpha_2;alpha_3];
orth(A)

%运行结果
ans =

   -0.5207   -0.4271   -0.7392
    0.7558    0.1721   -0.6318
    0.3971   -0.8877    0.2332
```

15. 求$f=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$化为标准型的变换矩阵

线性代数求解方法：

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$
特征值$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$
$$\lambda_1=-2,\lambda_1E-A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix},$$
$$\lambda_2=1,\lambda_2E-A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\xi_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$
单位正交化$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$

令$P=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}$使$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},x=Py$化为标准型

$f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2,$

变换矩阵$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

MATLAB求解方法：

```
A = [0 -1 1;-1 0 1;1 1 0];
[P,E] = eig(A);

%运行结果
P =

   -0.5774   -0.3938    0.7152
   -0.5774    0.8163   -0.0166
    0.5774    0.4225    0.6987


E =

   -2.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0         0    1.0000
%P矩阵即为所求
```

高等数学中的应用

求极限

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5+x^2}{x-3}$

   高等数学求解方法：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{5+x^2}{x-3}&=\frac{\lim_{x\to 2}5+x^2}{\lim_{x\to 2}x-3}\\ &=\frac{9}{-1}\\ &=-9\end{aligned}$$

MATLAB求解方法:

```
syms x
f = (5+x^2)/(x-3)
w = limit(f,2)

%运行结果
w = -9
```

2. $\lim_{x\to\infty}(\frac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}}$

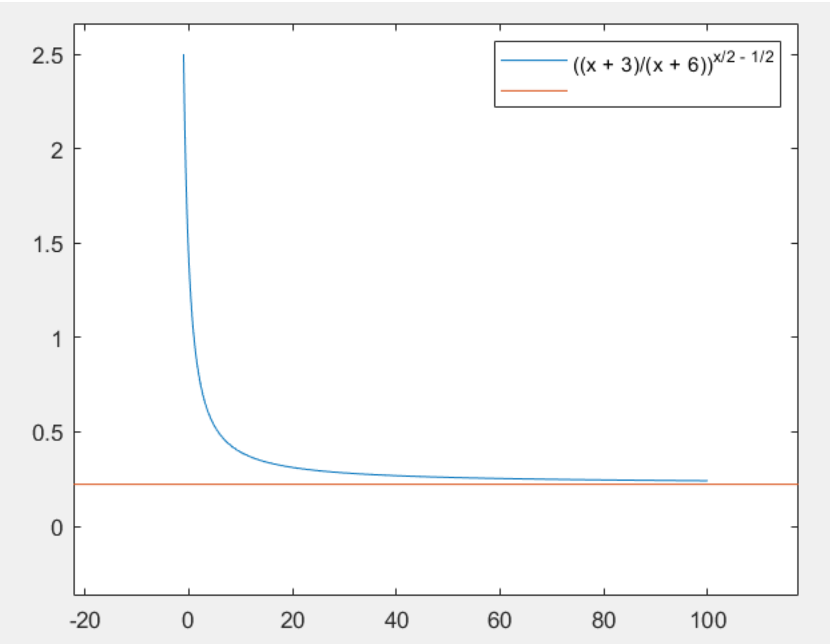
高等数学求解方法：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\frac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}} &= \lim_{x\to\infty}[(1-\frac{3}{x+6})^{-\frac{x+6}{3}}]^{-\frac{3}{2}}\cdot\lim_{x\to\infty}(1-\frac{3}{x+6})^{-\frac{7}{2}} \\ &= e^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

MATLAB求解方法:

```
syms x
f = ((3+x)/(6+x))^((x-1)/2)
w = limit(f,Inf)

%运行结果
w = exp(-3/2)
```



求微分

3. 求函数$y=x\sin 2x$的微分

高等数学求解方法：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y &= y'\mathrm{d}x \\ &= (\sin 2x + x\cos 2x\cdot 2)\mathrm{d}x \\ &= (\sin 2x + 2x\cos 2x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

MATLAB求解方法:

```
syms x
y = x*sin(2*x) ;
w = diff(y,x,1)

%运行结果
w = sin(2*x) + 2*x*cos(2*x)
```

求导数

4. $(\dfrac{\arcsin x}{\arccos x})'$

高等数学求解方法：

$$
\begin{aligned}
(\frac{\arcsin x}{\arccos x})' &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x - \arcsin x(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})}{\arccos^2 x} \\
&= \frac{\arccos x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x} \\
&= \frac{1}{\arccos x\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{\arccos^2 x\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

MATLAB求解方法:

```
syms x
y = asin(x)/acos(x) ;
w = diff(y,1)

%运行结果
ans =1/(acos(x)*(1 - x^2)^(1/2)) + asin(x)/(acos(x)^2*(1 - x^2)^(1/2))
```

5. 求二阶导：$y = e^{-t}\sin t$

高等数学求解方法：

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-t}\sin t \\
y' &= e^{-t}(-1)\sin t + e^{-t}\cos t \\
&= e^{-t}(\cos t - \sin t) \\
y'' &= e^{-t}(-\cos t + \sin t) + e^{-t}(-\cos t - \sin t) \\
&= e^{-t}(-2\cos t) \\
&= -2e^{-t}\cos t
\end{aligned}
$$

MATLAB求解方法:

```
syms x t
y = exp(-t)*sin(t);
w = diff(y,2)

%运行结果
w = -2*exp(-t)*cos(t)
```

求不定积分

6. 求不定积分 $\displaystyle\int \sec x(\sec x - \tan x)\mathrm{d}x$

高等数学求解方法：

$$\begin{aligned}\int \sec x(\sec x-\tan x)\mathrm{d}x &= \int \sec^2 x\mathrm{d}x-\int \sec x\tan x\mathrm{d}x\\ &=\tan x-\sec x+C\end{aligned}$$

MATLAB求解方法:

```
syms x
f = sec(x)*(sec(x)-tan(x));
F = int (f)

%运行结果
F = -2/(tan(x/2) + 1)
```

求定积分

7. 求定积分：$\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$

高等数学求解方法：

$$\begin{aligned}&\text{令}u=\sqrt{x}\text{，所以}x=u^2,\text{带入原式}\\ &\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}=\int_1^2\frac{2u\mathrm{d}u}{1+u}\\ &\qquad\qquad\quad=[2u-2\ln(1+u)]_1^2\\ &\qquad\qquad\quad=2+2\ln\frac{2}{3}\end{aligned}$$

MATLAB求解方法:

```
syms x
f = 1/(1+x^0.5);
F = int(f,1,4)

%运行结果
 F = log(4/9) + 2   %matlab默认log的底为e
```

8. 求定积分 $\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1}$

高等数学求解方法：

$$\begin{aligned}&\text{令}u=\sqrt{1-x}\text{，所以}x=1-u^2,\text{带入原式}\\ &\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1}=\int_{\frac{1}{2}}^0\frac{-2u\mathrm{d}u}{u-1}\\ &\qquad\qquad\qquad=-2[u+\ln(1-u)]_{\frac{1}{2}}^0\\ &\qquad\qquad\qquad=1-2\ln 2\end{aligned}$$

MATLAB求解方法:

```
syms x
f = 1/((1-x)^0.5-1);
F = int(f,3/4,1)

%运行结果
F = 1 - log(4)  %matlab默认log的底为e
```

9. D是由两条抛物线$y=\sqrt{x},y=x^2$围成的闭合区域

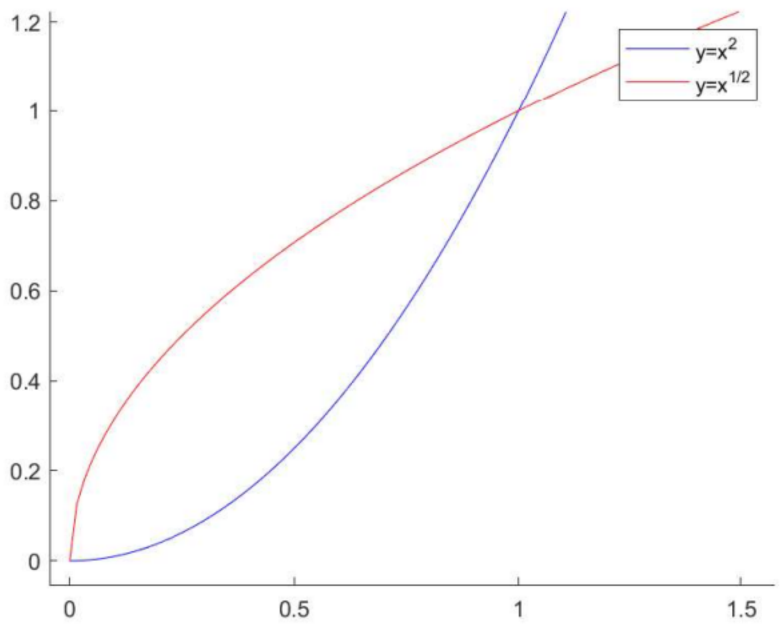
求二重积分：$\iint\limits_D x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma$

高等数学求解方法：

D区域可以表示为：$0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma &= \int_0^1 x\mathrm{d}x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{y}\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3}x(y^{\frac{3}{2}})|_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{6}{55}\end{aligned}$$

MATLAB求解方法：




```
syms x y
f = x*(y^0.5); %原函数
F = int(f,'y',x^2,x^0.5); %先对y积分
D = int(F,'x',0,1) %再对x积分

%运行结果
D = 6/55
```

10. 利用三重积分计算曲面所围成立体体积$z = 6 - x^2 - y^2$及$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

高等数学求解方法：

$$
\begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}
$$

$$
\implies \sqrt{x^2+y^2} = 2
$$

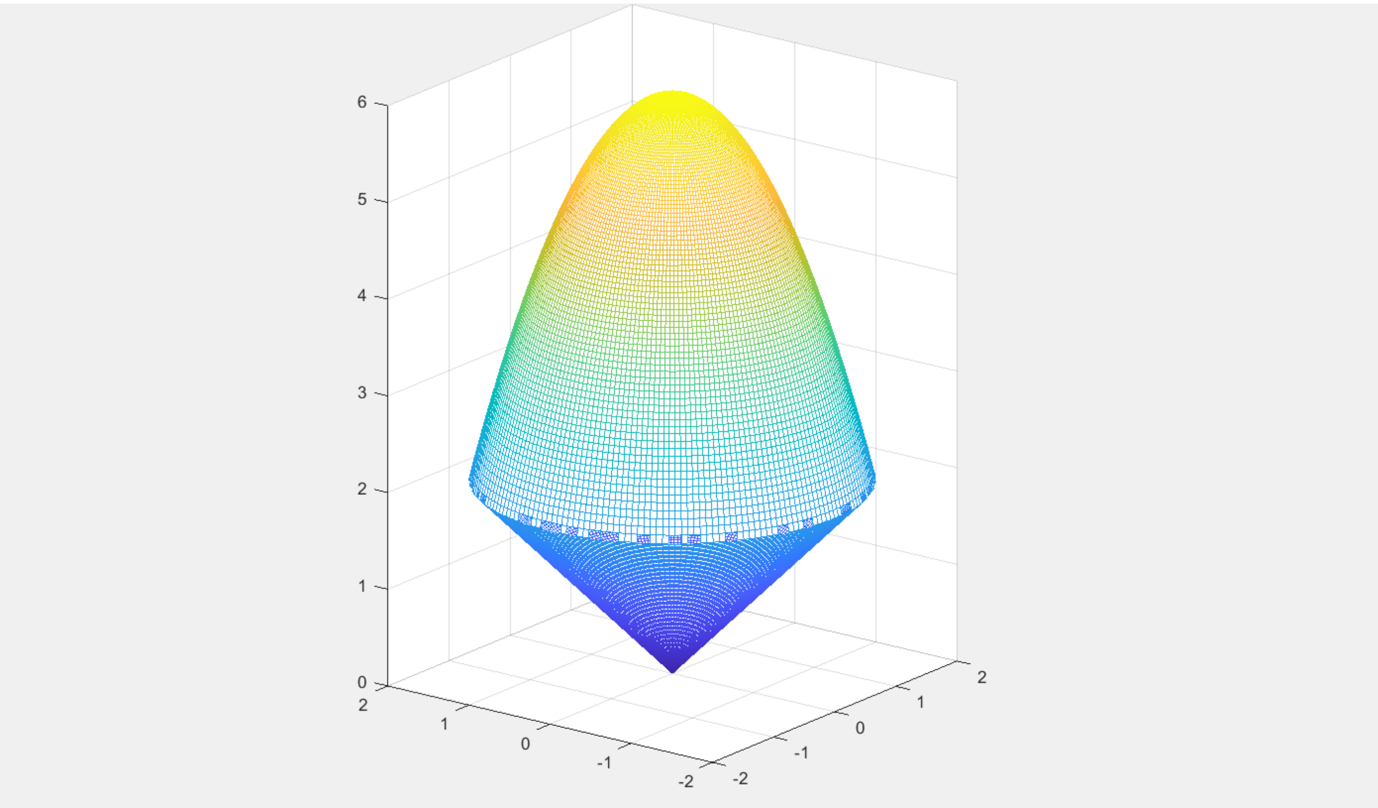
$$
\Omega在xOy上投影D_{xy} = x^2 + y^2 \le 4
$$

$$
\Omega = \{(x,y,z) | \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 6 - (x^2+y^2), x^2+y^2 \le 4\}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}v \\
&= \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-(x^2+y^2)} \mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_{D_{xy}} [6 - (x^2+y^2) - \sqrt{x^2+y^2}] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 (6 - \rho^2 - \rho) d\rho \\
&= \frac{32}{3}\pi
\end{aligned}
$$

MATLAB求解方法：

```
%绘制图像
[t,r] = meshgrid([0:0.01*pi:3*pi],[0:0.02:3]);
x = r.*cos(t);
y = r.*sin(t);
Z1 = sqrt(x.^2+y.^2);
Z2 = 6-x.^2-y.^2;
z1 = Z1;
z2 = Z2;
z1(Z1>Z2)=nan;
z2(Z1>Z2)=nan;
mesh(x,y,z1)
hold on
mesh(x,y,z2)
```




```
syms x y
f1 = @(x,y,z) (x.^2+y.^2<=z.^2);
f2 = @(x,y,z) (x.^2+y.^2<=6-z);
V1 = triplequad(f1,-2,2,-2,2,0,2);
V2 = triplequad(f2,-2,2,-2,2,2,6);
```

```
V = V1 + V2

%运行结果
v = 33.5103 %经检验等于32/3*pi
```

求解常微分方程

11. 求微分方程的通解$y'+y\tan x=\sin 2x$

高等数学求解方法：

$$
\begin{aligned}
y&=e^{-\int \tan x \mathrm{d}x}(\int \sin 2x e^{\int \tan x \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)\\
&=\cos x(\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\mathrm{d}x+C)\\
&=\cos x(\int 2\sin x\mathrm{d}x+C)\\
&=C\cos x-2\cos^2 x=C\cos x-\cos(2x)-1
\end{aligned}
$$

MATLAB求解方法:

```
syms x
y = dsolve('Dy+y*tan(x) = sin(2*x)','x')

%运行结果
y = C1*cos(x) - cos(2*x) - 1
```

求解带有初值条件的常微分方程

12. 求微分方程满足已知初值条件的特解$y''-y=4xe^x,y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=1$

高等数学求解方法：

$r^2-1=0$求解特征根$r_{1,2}=\pm 1$，对应齐次线性方程的通解为：

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

$\because f(x)=4xe^x,\lambda=1,\therefore$ 设$y^*=xe^x(Ax+B)=e^x(Ax^2+Bx)$是原方程的一个特解，
带入原方程得

$$
\begin{gathered}
4Ax+2A+2B=4x\\
\therefore A=1,B=-1\\
\therefore y^*=e^x(x^2-x)
\end{gathered}
$$

原方程的通解为：

$$
\begin{gathered}
y=C_1e^x+C_2e^{-x}+e^x(x^2-x)\\
y=e^x(x^2-x+C_1)+C_2e^{-x}\\
y'=e^x(x^2+x-1+C_1)-C_2e^{-x}
\end{gathered}
$$

初值条件为$x=0,y=0,y'=1$带入得：

$$
\begin{cases}
C_1+C_2=0\\
C_1-C_2-1=1
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
C_1=1\\
C_2=-1
\end{cases}
$$

$\therefore$ 所求特解为：

$$y=e^x(x^2-x+1)-e^{-x}$$

MATLAB求解方法:

```
syms x
y = dsolve('D2y - y = 4*x*exp(x)','y(0) = 0','Dy(0) = 1','x')

%运行结果
y = exp(x)/2 - exp(-x) + x^2*exp(x) - (exp(x)*(2*x - 1))/2
```

$y = \frac{\mathrm{e}^x}{2} - \mathrm{e}^{-x} + x^2\,\mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}^x\,(2\,x-1)}{2} = e^x(x^2-x+1)-e^{-x}$进一步化简后结果相同

级数求和

13. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+...$

高等数学求解方法：

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}) \\
S_n &= \frac{1}{2}[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3})-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}] \\
&= \frac{1}{2}[1-\frac{1}{2n+1}]
\end{aligned}
$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$$

MATLAB求解方法：

```
syms x n
symsum(1/((2*n-1)*(2*n+1)) , n,1,inf)

%运行结果
ans = 1/2
```

级数展开

14. 将函数$f(x)=\cos x$展开为泰勒级数

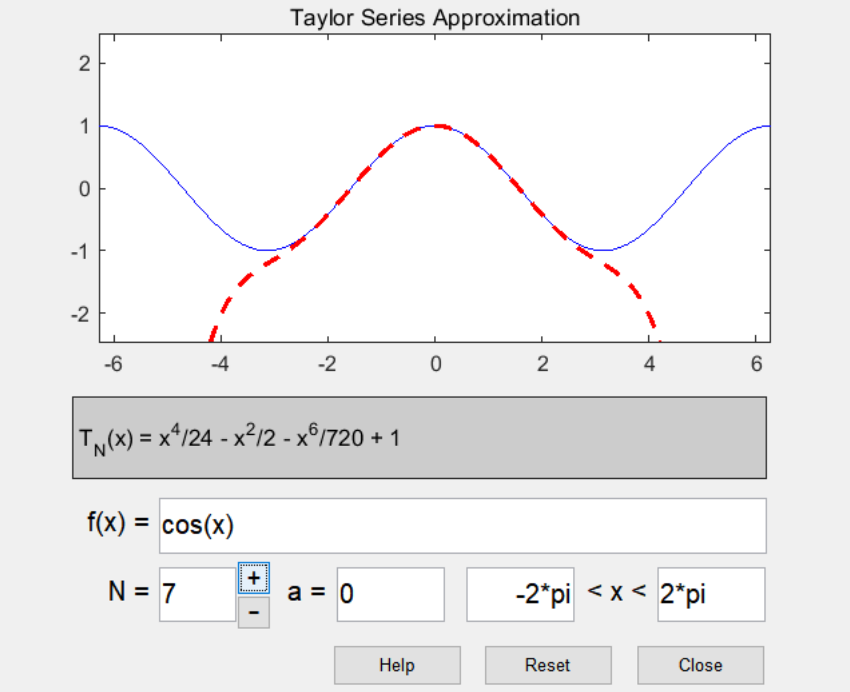
高等数学求解方法：

$$f^{(n)}(x_0)=\cos(x_0+n\cdot\frac{\pi}{2})(n=0,1,2...)$$

$$\cos x_0+\cos(x_0+\frac{\pi}{2})(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\frac{\pi}{2})}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{\cos(x_0+\frac{n\pi}{2})}{n!}(x-x_0)^n$$

MATLAB求解方法：

```
syms x
f = cos(x);
taylortool(f)
```



因式分解

15. $16x^4 - 72x^2 + 81$

数学方法：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (4x^2)^2 - 2(4m^2)\cdot 9 + 9^2 \\
&= (4m^2 - 9)^2 \\
&= (2m-3)^2(2m+3)^2
\end{aligned}
$$

MATLAB求解方法：

```
syms x
factor(16*x^4-72*x^2+81)

%运行结果
ans = [2*x - 3, 2*x - 3, 2*x + 3, 2*x + 3]
```

总结

MATLAB是一种强大的计算机软件，可以在高等数学和线性代数中进行各种计算和分析。在工程方面，MATLAB可帮助用户进行各种数据处理可视化，包括图像处理，信号处理，控制系统设计等。
MATLAB还可以用于模拟各种工程系统，帮助用户预测系统的行为并优化设计。
MATLAB可以增强个人的计算能力和编程技能，使其在各种数学和工程领域的计算中能够更加熟练和高效。这对于个人在求职或者职业发展方面都是非常有帮助的。学习MATLAB还可以帮助个人更好地理解和应用各种数学模型和算法，提升个人的分析能力和解决问题的能力。这对于个人在学习和工作中遇到的各种挑战都是非常有价值的。
本次作业作业源码公开在 Github pages

Matlab-coursework_22

A matlab coursework and a final assignment. Introduces 30 basic uses of matlab in advanced mathematics and linear algebra