Conceitos Básicos

Prof. Matheus Nohra Haddad
matheus.haddad@ufv.br

Otimização

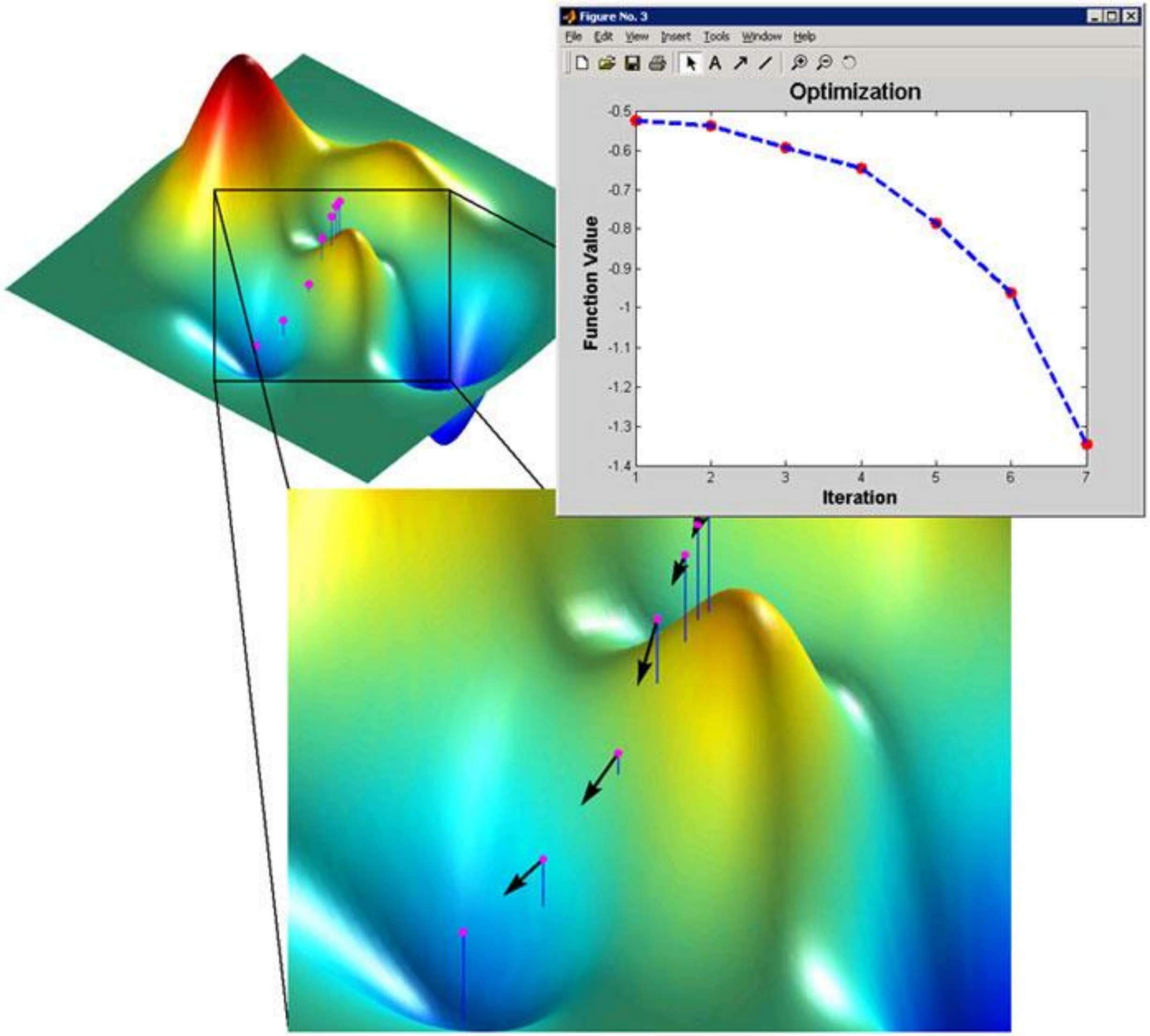


Figure No. 3
File Edit View Insert Tools Window Help
Optimization
Function Value
Iteration
-0.5
-0.6
-0.7
-0.8
-0.9
-1
-1.1
-1.2
-1.3
-1.4
1
2
3
4
5
6
7

Otimização

- Otimização é uma área de pesquisa que utiliza métodos computacionais para procurar pela melhor forma de projetar e operar um dado sistema, representada pela “melhor” combinação de valores das variáveis do problema, considerando seus objetivos, suas restrições de projeto e/ou de operação;

- Categorias: variáveis reais X variáveis discretas

Otimização

- O problema de otimização:

$$\min f(x), x \in \mathcal{F}$$

$$f(\cdot): \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$$

$$\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^{n_f}$$

$$\mathcal{X} = \{x = \{(x_1, v_1), \cdots, (x_n, v_n)\} : \; v_i \in \mathcal{D}_i\}$$

$$\mathcal{F} = \left\{x \in \mathcal{X} : \; g_i(x) \leq 0, i = 1, \cdots, n_g; h_j(x) = 0, j = 1, \cdots, n_h\right\}$$

Otimização

- O problema de otimização:

$$\min f(x), x \in \mathcal{F}$$

$$\Updownarrow$$

$$find\; x \in \mathcal{F} : f(x) \leq f(y), \forall\, y \in \mathcal{F}$$

Otimização

- O problema de otimização:

- *Otimização linear ou programação linear;*
- *Otimização ou programação não linear;*
- *Otimização linear inteira;*
- *Otimização combinatória;*
- *Otimização multiobjetivo;*

Otimização

- O problema de otimização:

- *Otimização ou programação não linear: processo de busca pela melhor solução em problemas com variáveis contínuas e funções não lineares;*

- *Otimização combinatória: processo de busca pela melhor solução em problemas com variáveis que assumem valores discretos;*

Otimização

- Métodos exatos: garantem que a solução ótima é encontrada, desde que certas premissas sobre o problema sejam respeitadas. Em problemas NP-difíceis, não existe algoritmo que garanta que a solução ótima seja encontrada em tempo polinomial;

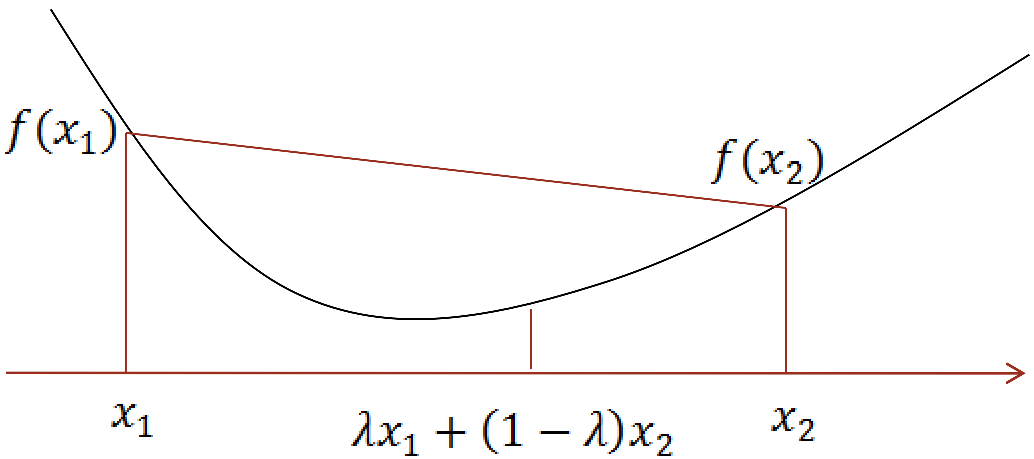
- Técnicas heurísticas e metaheurísticas: uma forma prática de tratar problemas NP-difíceis. Não garantem que a “melhor” solução é encontrada, mas que uma solução “boa” é encontrada em tempo polinomial

Otimização

- **Caracterização de funções:**

- Função convexa:

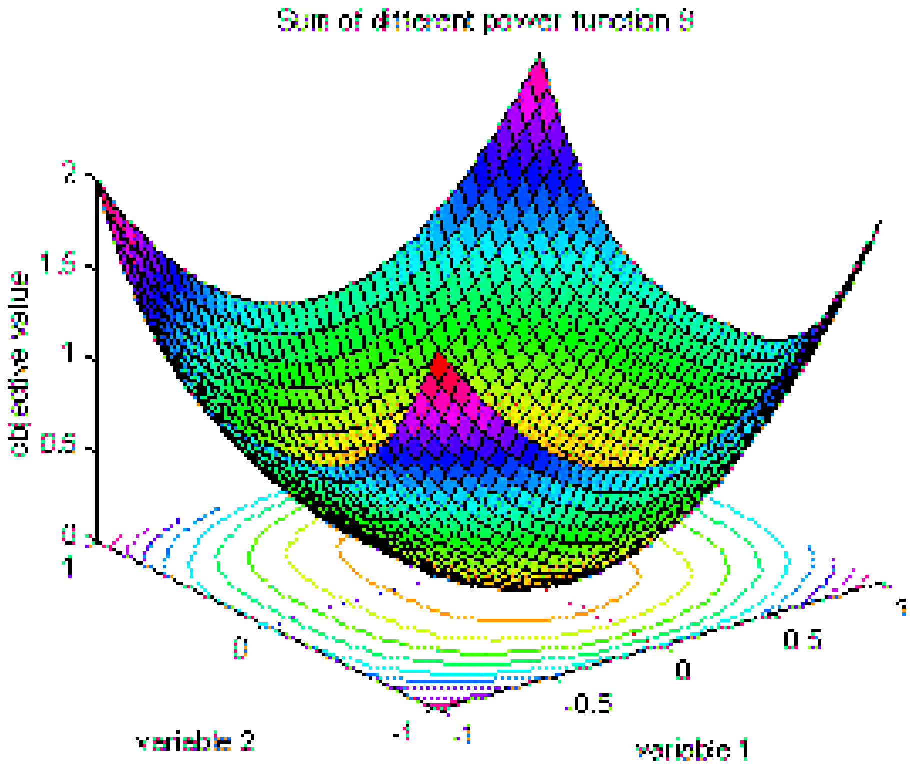
$$f[\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2] \leq \lambda f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}_2)$$



Otimização

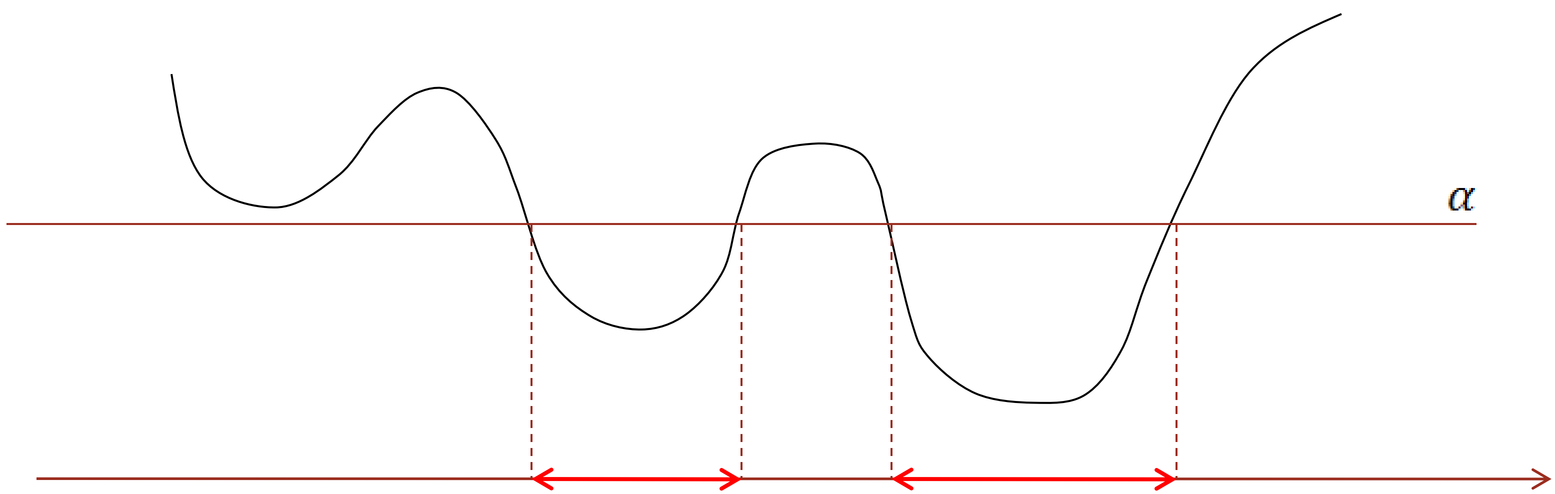
- **Caracterização de funções:**

- Função convexa:



Otimização

- **Caracterização de funções:**
- Região de sub-nível: $R(f,\alpha) = \{x \in \mathcal{X} : f(x) \leq \alpha\}$
- Função multimodal: uma função cuja região de sub-nível é desconexa para algum nível.



Otimização

- **Caracterização de soluções:**

- Mínimo local ou solução ótima local:

$$f(x^*) \leq f(z), \forall z \in N(x^*)$$

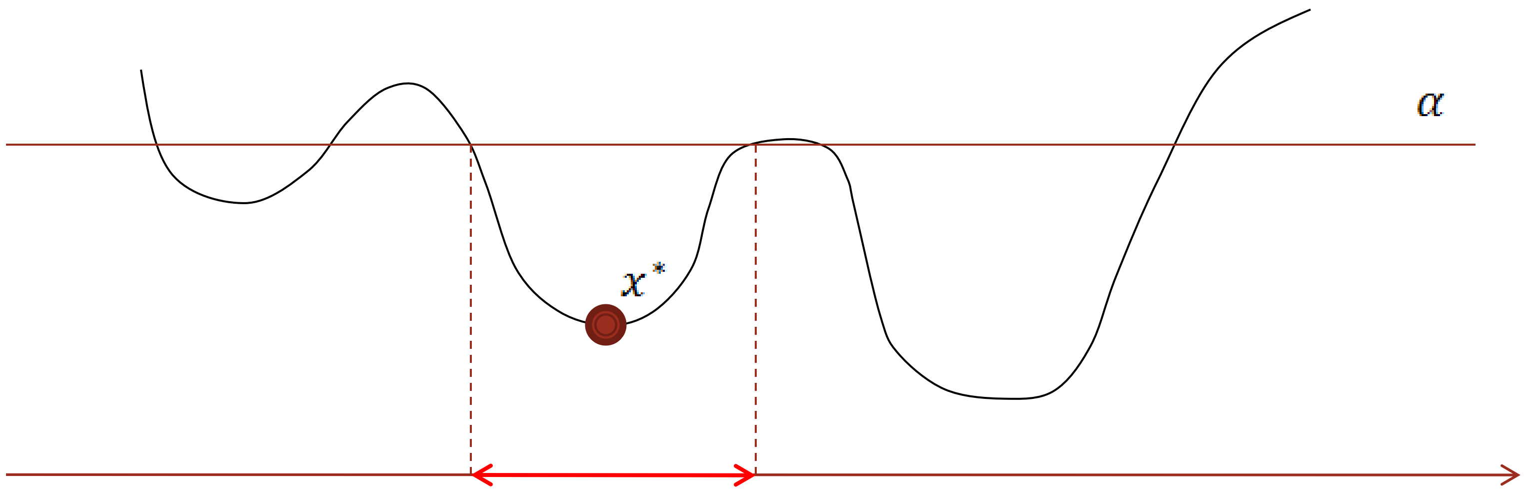
- Mínimo global ou solução ótima global:

$$f(x^*) \leq f(z), \forall z \in \mathcal{X}$$

Otimização

- **Caracterização de soluções:**

- Bacia de atração: a maior região de sub-nível conexa que contém o ótimo local:



Otimização

- Métodos exatos ou determinísticos de busca:

$$escolher \ x^0$$

$$d^k = g(\nabla f)$$

$$x^{k+1} = x^k + \eta^k d^k$$

Otimização

- Algumas premissas devem ser garantidas: convexidade, diferenciabilidade, continuidade;

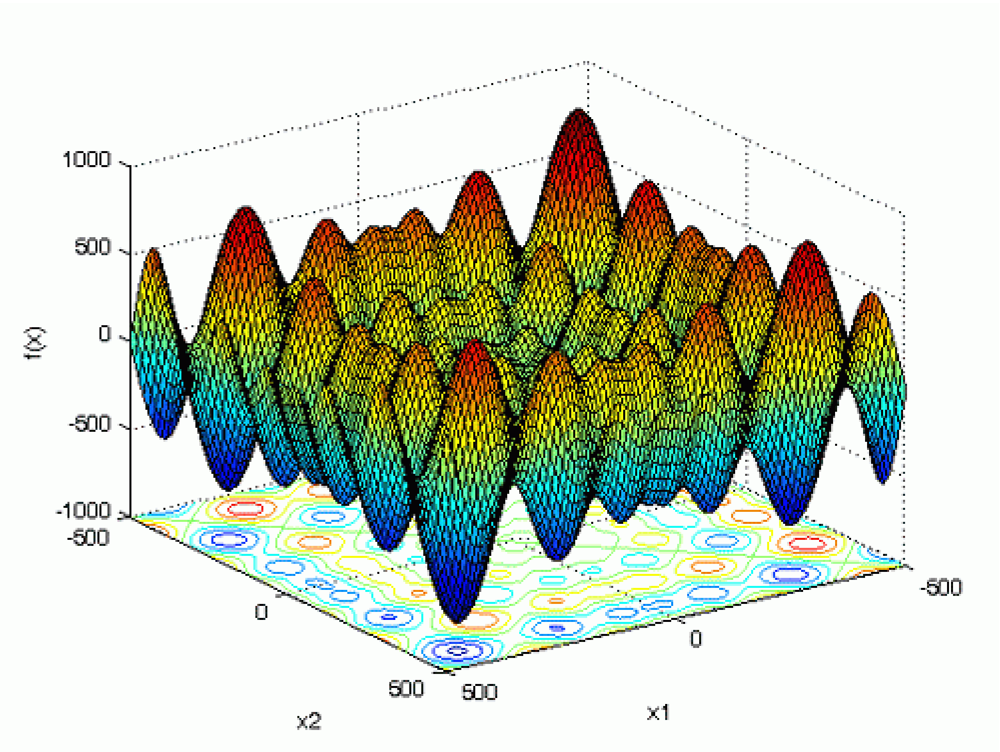
- Requer o cálculo de derivadas – nem sempre possível;

- Um método de busca local converge para o mínimo local da bacia de atração na qual foi inicializado;

- Em funções multimodais, há somente garantia de que uma solução ótima local é obtida;

Otimização

- Problemas multimodais:



Otimização

- Problemas de otimização combinatória:
- Problema da mochila: sabendo o peso e o benefício de cada item em um conjunto de N itens, escolher os que trarão maior benefício sem violar a capacidade da mochila.
- N = 50, há 10^{15} configurações possíveis;

$$\max \sum_{i=1}^{N} b_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i x_i \leq C$$

$$x_i \in \{0,1\}$$

Otimização

- Problemas de otimização combinatória:

- Problema do caixeiro viajante: dado um conjunto de N cidades, encontrar a rota de custo mínimo que passe uma única vez em cada cidade;

Otimização

- **Métodos de busca local:**

- Para definir um método de busca local, deve-se definir uma estrutura de vizinhança;
- As soluções vizinhas de x são aquelas que podem ser obtidas a partir de uma modificação elementar em x;

- Exemplo: problema da mochila.

Otimização

- **Métodos de busca local:**

- Dada uma solução inicial, uma estrutura de vizinhança, e uma função avaliadora:

$$x \leftarrow x^0;$$

$$while\ \exists s \in N(x) \mid f(s) < f(x)\ do$$

$$\qquad x \leftarrow s;$$

Otimização

- Métodos de busca local convergem para mínimos locais, dependendo da estrutura de vizinhança utilizada e do ponto inicial;
- A complexidade da busca local pode ser exponencial em alguns problemas;
- Em problemas NP-difíceis, heurísticas são geralmente utilizadas para produzir boas soluções, sem garantias formais de otimalidade;

Otimização

- Em ciência da computação, metaheurísticas são métodos heurísticos que combinam procedimentos – geralmente outras heurísticas – para resolver problemas computacionais, isto é, heurísticas de alto nível;

- Algoritmos evolutivos são uma classe de metaheurísticas;