

Comparación de la estructura de dependencia entre variables de préstamos estudiantiles en universidades públicas y privadas mediante cópulas del programa *Federal Family Education Loan (FFEL)*

Gabriel Sanabria Alvarado

Carné C27184 – GABRIEL.SANABRIAALVARADO@ucr.ac.cr

Diego Alberto Vega Víquez

Carné C38367 – DIEGO.VEGAVIQUEZ@ucr.ac.cr

Jeikel Navarro Solís

Carné C25518 – JEIKEL.NAVARRO@ucr.ac.cr

Universidad de Costa Rica

CA-0307 Estadística Actuarial II

28 de noviembre de 2025

Resumen

El objetivo de este trabajo es comparar la estructura de dependencia entre variables clave de los préstamos estudiantiles, en particular, número de préstamos y los montos desembolsados en las modalidades FFEL Subsidized y FFEL Unsubsidized— en universidades públicas y privadas de Estados Unidos, mediante el uso de cópulas. Para ello se utiliza la base administrativa *2009-2010 Award Year FFEL Volume by School*, que resume, a nivel institucional, los volúmenes de préstamos otorgados bajo el programa *Federal Family Education Loan (FFEL)* en el contexto de la crisis financiera de 2008-2009.

Los resultados muestran, en ambos tipos de institución, una coherencia interna fuerte dentro de cada programa (relación número de préstamos vs monto desembolsado), bien descrita por cópulas gaussianas con $\tau \approx 0.84-0.85$ y sin dependencia de cola. La diferencia principal aparece en la relación cruzada entre Subsidized y Unsubsidized: en el sector privado se ajustan cópulas BB6 con $\lambda_U \approx 0.85$, lo que indica un acoplamiento extremo muy intenso, mientras que en el sector público se obtienen cópulas Tawn con $\lambda_U \approx 0.05$, reflejando una dependencia de cola superior moderada. Estos hallazgos sugieren que las concentraciones extremas de crédito estudiantil son más probables en un subconjunto de universidades privadas, con implicaciones directas para la gestión del riesgo y la evaluación de la sostenibilidad del financiamiento educativo.

Palabras clave: préstamos estudiantiles; cópulas; dependencia de cola; universidades públicas y privadas.

1. INTRODUCCIÓN

El financiamiento de la educación superior ha sido siempre un aspecto vital para el acceso y la permanencia de los estudiantes en las universidades. En particular, los préstamos estudiantiles constituyen una de las principales fuentes de recursos para cubrir los costos de matrícula y manutención, lo que genera un impacto directo en las condiciones financieras de los estudiantes y sus familias. La dinámica de estos préstamos no depende únicamente de los montos otorgados, sino también de la interacción entre múltiples variables.

En el contexto de esta investigación, resulta fundamental comprender cómo se relacionan estas variables en distintos sectores de la educación superior, específicamente en universidades públicas y privadas. Las dependencias entre variables financieras suelen exhibir comportamientos no lineales, asimetría y colas pesadas, lo que dificulta su caracterización mediante métodos estadísticos tradicionales basados exclusivamente en correlaciones lineales. Ante este desafío, las cópulas ofrecen una herramienta robusta para modelar y comparar estructuras de dependencia, al permitir describir con mayor precisión la interacción entre variables sin imponer supuestos de linealidad o normalidad.

El *Federal Family Education Loan (FFEL) Program* fue uno de los principales mecanismos de financiamiento de la educación superior en Estados Unidos hasta su eliminación en el año 2010. Bajo este esquema, prestamistas privados originaban préstamos estudiantiles con garantía federal, de modo que el gobierno asumía parte del riesgo crediticio asociado a estos financiamientos. Durante el año académico 2009–2010, el Departamento de Educación implementó medidas extraordinarias con el objetivo de sostener el flujo de crédito educativo en el marco de la crisis financiera global de 2008–2009.

Desde el punto de vista estadístico, el análisis de este tipo de datos requiere herramientas capaces de separar el comportamiento individual de cada variable (sus distribuciones marginales) de la forma en que interactúan entre sí (su estructura de dependencia). El marco teórico de las cópulas, basado en el teorema de Sklar, permite descomponer la distribución conjunta de un vector aleatorio en la combinación de sus distribuciones marginales y una función de cópula que captura toda la dependencia. En este trabajo se modelan las marginales de las variables financieras mediante distribuciones continuas con colas pesadas (como `weibull_min` y `johnsonsu`) y se transforman posteriormente a la escala uniforme $(0, 1)$ mediante el *Probability Integral Transform* (PIT).

Sobre esta escala común, las cópulas permiten estudiar la dependencia a través de medidas globales, como el coeficiente τ de Kendall, y de medidas específicas para eventos extremos, como los coeficientes de dependencia de cola superior e inferior, λ_U y λ_L . Mientras que τ resume la concordancia general entre variables (esto es, qué tan alineados están los rankings de las instituciones según distintas métricas), los coeficientes de cola describen la probabilidad de que se produzcan simultáneamente valores muy altos o muy bajos en ambas variables. Estas herramientas son especialmente pertinentes en el análisis de riesgo, donde interesa no solo la relación promedio, sino también la ocurrencia conjunta de episodios de endeudamiento extremo.

En el contexto del programa FFEL, resulta de particular interés analizar la relación entre el

número de préstamos y los montos desembolsados en las modalidades *Subsidized* y *Unsubsidized*, diferenciando entre universidades públicas y privadas. A nivel conceptual, ello permite responder preguntas como: ¿se comportan de la misma forma los programas de crédito en ambos tipos de institución?, ¿las universidades que concentran un gran número de préstamos en un programa tienden también a concentrar montos extremos en el otro?, ¿existe mayor sincronía de eventos extremos en el sector privado que en el público?

En este marco, la pregunta central de investigación puede formularse de la siguiente manera:

¿En qué medida difiere la estructura de dependencia entre variables clave de los préstamos estudiantiles —en particular, el número de préstamos y los montos desembolsados en las modalidades FFEL Subsidized y FFEL Unsubsidized— entre universidades públicas y privadas, cuando dicha dependencia se modela mediante cópulas y se analizan tanto la concordancia global como la dependencia en las colas?

En coherencia con esta pregunta, el objetivo principal de este trabajo es *comparar las dependencias estadísticas entre variables clave de los préstamos estudiantiles —incluyendo el número de préstamos y los montos desembolsados— en universidades públicas y privadas mediante el uso de cópulas, con el propósito de identificar patrones estructurales diferenciados en la distribución del crédito educativo*. De este modo, el estudio de la estructura de dependencia mediante cópulas en el contexto de los préstamos estudiantiles permite identificar diferencias significativas entre universidades públicas y privadas, aportando información relevante para la gestión del riesgo crediticio, la formulación de políticas de financiamiento y la evaluación de la equidad en el acceso a la educación superior. En este sentido, la comparación entre ambos sectores no solo posee interés académico y metodológico, sino también un impacto social y económico, al proporcionar evidencia empírica sobre los patrones de endeudamiento y las condiciones bajo las cuales los estudiantes acceden a recursos financieros.

2. METODOLOGÍA

La base de datos utilizada proviene del portal oficial del Gobierno de los Estados Unidos, específicamente del *National Student Loan Data System* (<https://catalog.data.gov/>), y es de acceso público. Contiene información sobre préstamos estudiantiles otorgados por instituciones de educación superior entre el 1 de abril y el 30 de julio de 2010. El conjunto de datos incluye 3 793 observaciones a nivel de universidad, con variables identificadoras, características institucionales y métricas financieras para las modalidades de préstamo *subsidized* y *unsubsidized* (número de beneficiarios, cantidad de préstamos, montos originados y montos desembolsados).

Desde un punto de vista descriptivo, la base presenta asimetría positiva marcada y una fuerte concentración de los montos de préstamo en un número reducido de instituciones, rasgo típico de datos financieros: la mayoría de las universidades registra volúmenes moderados, mientras que unas pocas concentran montos extraordinarios. Los datos se segmentaron según el tipo de institución (*School Type*), distinguiendo entre universidades públicas y privadas, lo que permite comparar estructuras de dependencia diferenciadas y analizar el efecto del tipo de

institución en los patrones de financiamiento estudiantil. Estas diferencias en escala, dispersión y correlaciones empíricas motivan el uso de cópulas como herramienta central para estudiar la dependencia entre las variables financieras.

2.1 ANÁLISIS EXPLORATORIO Y PREPARACIÓN DE LOS DATOS

En una primera etapa se evaluó la calidad y estructura de la base de datos: valores faltantes, observaciones atípicas y forma de las distribuciones empíricas de las principales variables numéricas (número de préstamos, montos originados y montos desembolsados por modalidad). Se calcularon estadísticas descriptivas y matrices de correlación empírica por tipo de institución.

Este análisis confirmó la presencia de asimetría positiva y colas pesadas en los montos de préstamo, así como una relación positiva general entre número de préstamos y montos, con intensidad distinta en universidades públicas y privadas. Para el análisis de dependencia se consideró principalmente el subconjunto de instituciones públicas y privadas, que concentran la mayor parte de las observaciones. Las variables numéricas se trataron como continuas, lo cual es razonable dada la magnitud de los conteos.

2.2 MODELACIÓN DE LAS DISTRIBUCIONES MARGINALES

Sea X una variable aleatoria que representa un monto financiero asociado a préstamos estudiantiles. El marco de las cópulas permite modelar por separado la distribución marginal de cada variable y su dependencia conjunta. En una primera fase se consideraron diversas familias marginales (Lognormal, Gamma, t de Student, `weibull_min`, `johnsonsu`), y los parámetros se estimaron por máxima verosimilitud.

Los modelos se compararon mediante el test de Kolmogorov–Smirnov, criterios de información (AIC y BIC) y análisis gráfico (histogramas con densidades ajustadas). En la práctica, para las variables de interés los mejores ajustes marginales correspondieron únicamente a dos familias: `weibull_min` y `johnsonsu`.

2.3 PROBABILITY INTEGRAL TRANSFORM (PIT)

Una vez seleccionadas las distribuciones marginales, se aplicó el *Probability Integral Transform* (PIT) a cada observación. Si X tiene función de distribución acumulada F_X , se define

$$U = F_X(X),$$

de modo que, bajo un modelo marginal correctamente especificado, U sigue aproximadamente una distribución uniforme en $(0, 1)$. Esta transformación lleva todas las variables a un dominio común y es condición necesaria para la aplicación de cópulas.

La validez del PIT se evaluó mediante histogramas y gráficos QQ de las variables transformadas, comparándolas con la uniforme teórica. La ausencia significativa de patrones sistemáticos (curvaturas, acumulación excesiva en los extremos) se interpretó como evidencia de un ajuste marginal relativamente adecuada.

2.4 AJUSTE DE MODELOS DE CÓPULAS

Con las variables transformadas mediante el PIT, se modeló la dependencia conjunta usando diferentes familias de cópulas. En una primera etapa se consideraron cópulas arquimedianas clásicas (Clayton, Gumbel, Frank) y cópulas elípticas (Gaussiana y t de Student). Posteriormente, motivados por la evidencia de colas superiores pesadas en algunos pares, se incorporaron cópulas más flexibles, como Tawn y BB6, capaces de capturar asimetrías diferenciadas en las colas.

Para un conjunto de observaciones transformadas $\{(u_{1i}, u_{2i})\}_{i=1}^n$, la log-verosimilitud asociada a una cópula C_θ es

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^n \log c_\theta(u_{1i}, u_{2i}),$$

donde c_θ es la densidad de la cópula. Los parámetros de dependencia se estimaron mediante máxima verosimilitud, utilizando como valores iniciales estimaciones basadas en el coeficiente τ de Kendall empírico.

La elección de cópulas frente a medidas de correlación lineal se justifica por la necesidad de: capturar relaciones no lineales entre montos y cantidades de préstamos, describir adecuadamente la dependencia en colas, relevante para eventos extremos de endeudamiento, y separar el modelado marginal del de dependencia, comparando estructuras entre instituciones públicas y privadas manteniendo constantes las distribuciones individuales.

2.5 SELECCIÓN DE MODELOS Y VALIDACIÓN GRÁFICA

La comparación entre familias de cópulas se realizó mediante los criterios de información de Akaike (AIC) y Bayesiano (BIC),

$$\text{AIC} = -2\ell(\hat{\theta}) + 2k, \quad \text{BIC} = -2\ell(\hat{\theta}) + k \log(n),$$

donde $\hat{\theta}$ es el estimador de máxima verosimilitud, k el número de parámetros y n el tamaño muestral. Se descartaron las familias con valores claramente mayores de AIC/BIC, y entre los modelos con desempeños similares se priorizaron aquellos cuya estructura de colas y contornos de densidad resultaban coherentes con los patrones observados.

La selección numérica se complementó con validación gráfica: diagramas de dispersión en la escala uniforme, curvas de nivel de la densidad de la cópula ajustada, comparaciones entre datos empíricos y simulados, y gráficos QQ de $C_\theta(u_{1i}, u_{2i})$ frente a la uniforme. La ausencia de patrones sistemáticos en estos gráficos se interpretó como evidencia de un ajuste adecuado; cuando se observaron discrepancias en las colas, se consideraron familias alternativas.

2.6 MEDIDAS DE DEPENDENCIA Y ANÁLISIS DE EVENTOS EXTREMOS

Una vez seleccionadas las cópulas que mejor describen la estructura de dependencia, se calcularon medidas de asociación y riesgo conjunto. El coeficiente τ de Kendall relacionado a la cópula se utilizó como medida global de concordancia entre variables.

Adicionalmente, se analizaron los coeficientes de dependencia de cola superior e inferior,

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(U_2 > u \mid U_1 > u), \quad \lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(U_2 \leq u \mid U_1 \leq u),$$

lo que permite cuantificar la probabilidad de eventos extremos simultáneos. Estas medidas proporcionan una caracterización más completa de la dependencia, especialmente relevante para el análisis del riesgo de concentraciones extremas de crédito.

2.7 SUPUESTOS DEL MODELO DE CÓPULAS

El enfoque adoptado descansa en los siguientes supuestos principales:

- **Continuidad marginal:** las variables analizadas son continuas, o se aproximan razonablemente como tales, de modo que el PIT produce variables aproximadamente uniformes en $(0, 1)$.
- **Especificación correcta de las marginales:** las distribuciones `weibull_min` y `johnsonsu` capturan adecuadamente la forma de las distribuciones empíricas, según pruebas de bondad de ajuste y análisis gráfico.
- **Independencia entre observaciones:** las observaciones corresponden a distintas instituciones en un período fijo; se asume independencia entre instituciones dentro de cada tipo.
- **Estructura de dependencia homogénea:** para cada subgrupo (públicas o privadas) se asume una única cópula subyacente, es decir, una estructura de dependencia estable dentro del grupo.
- **Adecuación de la familia de cópula seleccionada:** se supone que las familias elegidas (Gaussiana, Tawn, BB6, etc.) son suficientemente flexibles para capturar las características principales de la dependencia, en particular en las colas.

El reconocimiento explícito de estos supuestos facilita la interpretación de los resultados y señala posibles direcciones para trabajos futuros con modelos semiparamétricos, cópulas de mayor dimensión o estructuras que permitan heterogeneidad en la dependencia entre instituciones.

3. RESULTADOS

3.1 COMPORTAMIENTO MARGINAL Y TRANSFORMACIÓN PIT

- Las variables financieras (cantidad y montos desembolsados) presentan asimetría positiva marcada y colas derechas pesadas.
- En la práctica, para las variables de interés los mejores ajustes marginales correspondieron únicamente a dos familias de distribuciones: `weibull_min` y `johnsonsu`. De forma cualitativa, estas distribuciones pueden interpretarse así:

- **weibull_min.** Es una distribución sesgada a la derecha, con muchos valores pequeños y pocos valores grandes. En el contexto de los préstamos, representa bien situaciones donde la mayoría de las instituciones registra volúmenes relativamente bajos de desembolsos, mientras que sólo unas pocas concentran valores altos.
 - **johnsonsu.** Es una familia muy flexible, capaz de capturar tanto asimetría como colas pesadas. Su ajuste en las variables financieras refleja la presencia de observaciones extremas: un número reducido de universidades con montos extraordinariamente elevados, que generan una cola derecha mucho más larga que la que describiría una distribución simétrica estándar.
- La aplicación del PIT a las distribuciones ajustadas (**weibull_min** y **johnsonsu**) generó variables transformadas cuya distribución empírica es cercana a una uniforme $U(0,1)$. Este comportamiento respalda la adecuada especificación de las marginales y justifica el uso posterior de cópulas para modelar la dependencia conjunta.

3.2 AJUSTE DE CÓPULAS EN INSTITUCIONES PRIVADAS

Para instituciones privadas se analizaron, en primer lugar, las relaciones entre los programas de préstamo *FFEL Subsidized* y *FFEL Unsubsidized*. Los ajustes seleccionados corresponden a la familia BB6, una cópula archimedianas flexible que permite capturar asimetrías en la estructura de dependencia.

En el caso del número de desembolsos (# of Disbursements), el ajuste mediante cópula BB6 presenta un coeficiente de Kendall de aproximadamente $\tau = 0.853$, con dependencia de cola inferior nula ($\lambda_L = 0$) y una dependencia de cola superior muy marcada ($\lambda_U \approx 0.852$). Un patrón similar se observa al considerar los montos desembolsados (\$ of Disbursements), donde se obtiene $\tau \approx 0.812$, $\lambda_L = 0$ y $\lambda_U \approx 0.860$.

Las nubes de puntos de los datos transformados a escala uniforme $U(0,1)$ muestran una fuerte concentración a lo largo de la diagonal principal, indicando asociación positiva elevada entre ambos programas. Los contornos de densidad de la cópula BB6 ajustada reproducen adecuadamente la forma de la nube empírica y, en particular, la concentración de masa en la región de colas altas.

Los QQ-plots de $C(U_1, U_2)$ frente a una uniforme $(0,1)$ muestran alineamientos cercanos a la diagonal, lo que sugiere un ajuste satisfactorio en el cuerpo de la distribución conjunta. Las simulaciones generadas a partir de la cópula BB6 (panel inferior derecho de las figuras correspondientes) reproducen tanto la dispersión global como la acumulación de observaciones en la parte superior derecha, lo que respalda el uso de esta familia para modelar la dependencia en instituciones privadas.

En segundo lugar, se estudió la relación interna dentro de cada programa, específicamente entre el número de desembolsos y el monto desembolsado para *FFEL Subsidized* y *FFEL Unsubsidized* por separado. En ambos casos, la cópula seleccionada fue la gaussiana, con coeficientes de Kendall del orden de $\tau \approx 0.85$ y sin dependencia de cola ($\lambda_L = \lambda_U = 0$). Esto indica una asociación fuerte pero esencialmente simétrica y sin colas pesadas: valores extraordinaria-

mente altos en el número de desembolsos no implican una probabilidad desproporcionada de montos igualmente extremos, una vez controladas las marginales.

3.3 AJUSTE DE CÓPULAS EN INSTITUCIONES PÚBLICAS

Para instituciones públicas, el análisis de la relación interna ($\#$ vs $\$$ dentro del mismo programa) nuevamente favorece la cópula gaussiana como modelo parsimonioso. Los valores de Kendall se sitúan alrededor de $\tau \approx 0.84$ para Subsidized y $\tau \approx 0.84$ para Unsubsidized, con $\lambda_L = \lambda_U = 0$. El comportamiento es análogo al observado en privadas: relación fuerte pero simétrica entre número de desembolsos y montos, sin evidencia de dependencia de cola.

Sin embargo, al cruzar programas (*FFEL Subsidized* vs *FFEL Unsubsidized*), el modelo seleccionado cambia. Para el número de desembolsos, la cópula Tawn proporciona el mejor ajuste, con $\tau \approx 0.790$, $\lambda_L = 0.000$ y una dependencia de cola superior moderada, $\lambda_U \approx 0.051$. En el caso de los montos desembolsados, la misma familia Tawn resulta preferida, con $\tau \approx 0.760$, $\lambda_L = 0.000$ y $\lambda_U \approx 0.049$.

Los contornos de densidad muestran, en este caso, una ligera concentración en la región de colas altas, pero mucho menos pronunciada que en las instituciones privadas. Las simulaciones obtenidas de la cópula Tawn reproducen esta estructura: se observa asociación positiva entre los programas, aunque los valores extremos tienden a no alinearse con la misma intensidad que en el sector privado.

3.4 IMPORTANCIA DE LOS VALORES SIMULADOS

Las simulaciones generadas a partir de las cópulas ajustadas cumplen un rol central en la interpretación de los resultados. Cada par de variables (U_1, U_2) simulado representa un potencial escenario conjunto para las variables originales, respetando tanto la estructura marginal como la dependencia estimada.

En términos prácticos, estas simulaciones permiten:

- Estimar probabilidades de eventos conjuntos extremos que no serían fáciles de obtener sin un modelo de cópulas; una vez conocida la cópula, estas probabilidades pueden aproximarse numéricamente o mediante simulación cerrada.
- Construir escenarios de estrés para analizar el impacto de incrementos simultáneos en ambos programas de préstamo, diferenciando entre instituciones públicas y privadas.
- Comparar gráficamente la estructura de dependencia empírica con la teórica, verificando si el modelo es capaz de reproducir no sólo los valores centrales, sino también la dispersión en las colas.

En las figuras de simulación, se observa que, para instituciones privadas, la cópula BB6 genera nubes de puntos densamente concentradas en la parte superior derecha, lo que implica una alta probabilidad de que, cuando un programa presenta valores extremos, el otro también

lo haga. En contraste, las simulaciones bajo la cópula Tawn para instituciones públicas muestran menos concentración en la región extrema conjunta, reflejando una dependencia de cola superior más moderada.

3.5 INTERPRETACIÓN DE LA DEPENDENCIA DE COLA

Los valores estimados de λ_L y λ_U proporcionan información adicional sobre el comportamiento conjunto en los extremos:

- En todos los casos analizados, la dependencia de cola inferior es prácticamente nula ($\lambda_L = 0$). Esto sugiere que la ocurrencia simultánea de valores muy bajos en ambas variables es compatible con la independencia asintótica; es decir, los mínimos conjuntos no son más frecuentes de lo que cabría esperar por azar una vez consideradas las marginales.
- En instituciones privadas, los pares *Subsidized–Unsubsidized* presentan valores de λ_U cercanos a 0.85, lo que indica una dependencia de cola superior muy intensa. En la práctica, esto se traduce en que, si una institución privada presenta niveles extremos de actividad en uno de los programas (ya sea en número o en montos), existe una probabilidad muy alta de que el otro programa también se encuentre en una situación extrema.
- En instituciones públicas, los valores de λ_U para los pares cruzados son mucho menores (del orden de 0.05). Esto implica que, aunque existe asociación positiva entre los programas, la probabilidad de extremos conjuntos es solo ligeramente superior a la que implicaría la independencia asintótica. En consecuencia, las políticas o shocks que afecten fuertemente a un programa no necesariamente se traducen en extremos simultáneos en el otro.

En conjunto, estos resultados muestran que la dependencia entre programas de préstamo es notablemente más fuerte en las instituciones privadas que en las públicas cuando se consideran los extremos superiores. Desde una perspectiva de riesgo, esto sugiere que el sector privado es más vulnerable a escenarios en los que ambos programas se expanden simultáneamente a niveles extraordinarios, mientras que en el sector público los programas parecen operar de manera algo más desacoplada en las colas.

En conjunto, los resultados sugieren que la estructura de dependencia entre programas de préstamo estudiantil no es homogénea entre instituciones públicas y privadas. Mientras que las primeras presentan una dependencia de cola moderada, las segundas exhiben una fuerte comovilidad en los extremos, lo que tiene implicaciones directas para la evaluación del riesgo de concentraciones extremas de crédito en el sistema educativo privado.

4. CONCLUSIONES

A partir del análisis con cópulas de los préstamos FFEL, se pueden extraer las siguientes conclusiones principales:

1. Las variables financieras presentan distribuciones marginales con fuerte asimetría y colas derechas pesadas, bien descritas por las familias `weibull_min` y `johnsonsu`. Esto confirma que la mayor parte de las universidades opera con volúmenes moderados, mientras que un subconjunto reducido concentra montos extraordinarios de crédito.
2. Dentro de cada programa (relación número de desembolsos vs monto desembolsado) existe una dependencia positiva fuerte tanto en universidades públicas como privadas, adecuadamente modelada por cópulas gaussianas con $\tau \approx 0.84\text{--}0.85$ y sin dependencia de cola. Es decir, las instituciones que otorgan más préstamos tienden a mover más dinero, pero los episodios en que ambas variables son simultáneamente extremas no son mucho más frecuentes de lo esperable dado su comportamiento marginal.
3. La diferencia clave entre sectores aparece en la relación cruzada entre *FFEL Subsidized* y *FFEL Unsubsidized*. En el sector privado, las cópulas BB6 con $\lambda_U \approx 0.85$ muestran un fuerte acoplamiento en los extremos: las instituciones con uso extremo de un programa tienden también a estar en niveles extremos en el otro. En el sector público, las cópulas Tawn con $\lambda_U \approx 0.05$ indican una dependencia fuerte en el cuerpo de la distribución pero mucho más moderada en las colas.
4. Desde la perspectiva de riesgo, lo anterior sugiere que las concentraciones extremas de crédito estudiantil son más probables en un subconjunto de universidades privadas, mientras que el sector público presenta una estructura de riesgo más distribuida y potencialmente más resistente a episodios de estrés severo.

Este estudio presenta algunas limitaciones: la base de datos estransversal y agregada a nivel institucional, por lo que no se analizan cambios temporales ni heterogeneidad a nivel de estudiantes, y el análisis se centra en relaciones bivariadas y en familias de cópulas paramétricas específicas. Investigaciones futuras podrían incorporar series de tiempo, cópulas de mayor dimensión (por ejemplo, *vine copulas*) y covariables socioeconómicas que ayuden a explicar por qué ciertas instituciones se concentran sistemáticamente en los extremos del endeudamiento estudiantil.

REFERENCIAS

- Aas, K., Czado, C., Frigessi, A., & Bakken, H. (2009). Pair-copula Constructions of Multiple Dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(2), 182-198. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.07.003>
- Akaike, H. (1974). A New Look at the Statistical Model Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716-723. <https://doi.org/10.1109/TAC.1974.1100705>
- Bedford, T., & Cooke, R. M. (2002). Vines—A New Graphical Model for Dependent Random Variables. *The Annals of Statistics*, 30(4), 1031-1068. <https://doi.org/10.1214/aos/1031689016>
- Clemente, A. D. (2020). Modeling Portfolio Credit Risk Taking into Account the Default Correlations Using a Copula Approach: Implementation to an Italian Loan Portfolio [Copyright - © 2020. This work is licensed under <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/> (the “License”). Notwithstanding the ProQuest Terms and Conditions, you may use this content in accordance with the terms of the License; Última actualización - 2025-05-28]. *Journal of Risk and Financial Management*, 13(6), 129. <https://proquest.proxyucr.elogim.com/scholarly-journals/modeling-portfolio-credit-risk-taking-into/docview/2415562551/se-2>
- Crook, J., & Moreira, F. (2011). Checking for asymmetric default dependence in a credit card portfolio: A copula approach. *Journal of Empirical Finance*, 18(4), 728-742. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2011.05.005>
- DeCarlo, L. T. (1997). On the Meaning and Use of Kurtosis. *Psychological Methods*, 2(3), 292-307. <https://doi.org/10.1037/1082-989X.2.3.292>
- Embrechts, P., Lindskog, F., & McNeil, A. (2003). Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management. En S. T. Rachev (Ed.), *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance* (pp. 329-384). Elsevier. [https://doi.org/10.1016/S0927-0507\(03\)10005-2](https://doi.org/10.1016/S0927-0507(03)10005-2)
- Genest, C., Ghoudi, K., & Rivest, L.-P. (1995). A Semiparametric Estimation Procedure of Dependence Parameters in Multivariate Families of Distributions. *Biometrika*, 82(3), 543-552. <https://doi.org/10.1093/biomet/82.3.543>
- Genest, C., Rémillard, B., & Beaudoin, D. (2009). Goodness-of-fit Tests for Copulas: A Review and a Power Study. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(2), 199-213. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.10.005>
- Gerth, F., & Temnov, G. (2021). New Ways of Modeling Loan-to-Income Distributions and their Evolution in Time - A Probability Copula Approach. *International Review of Economics Finance*, 71, 217-236. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.iref.2020.08.022>
- Haugh, M. (2016). An Introduction to Copulas. <https://www.columbia.edu/~mh2078/QRM/Copulas.pdf>
- Joe, H. (2014). *Dependence Modeling with Copulas*. Chapman & Hall/CRC.
- Li, D. X. (2000). On Default Correlation: A Copula Function Approach. *The Journal of Fixed Income*, 9(4), 43-54. <https://doi.org/10.3905/jfi.2000.319257>

- Magwegwe, F. (2025). The Determinants of Student Loan Repayment Worry. *Journal of Consumer Affairs*, 59. <https://doi.org/10.1111/joca.70011>
- McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools* (Revised). Princeton University Press.
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas* (2.^a ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/0-387-28678-0>
- Pourkhanali, A., Kim, J.-M., Tafakori, L., & Fard, F. A. (2016). Measuring systemic risk using vine-copula. *Economic Modelling*, 53, 63-74. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.econmod.2015.11.010>
- Rosenblatt, M. (1952). Remarks on a Multivariate Transformation. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23(3), 470-472. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177729394>
- Schwarz, G. (1978a). Estimating the Dimension of a Model. *The Annals of Statistics*, 6(2), 461-464. <https://doi.org/10.1214/aos/1176344136>
- Schwarz, G. (1978b). Estimating the Dimension of a Model. *The Annals of Statistics*, 6(2), 461-464. Consultado el 16 de octubre de 2025, desde <http://www.jstor.org/stable/2958889>
- Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 8, 229-231.
- U.S. Department of Education. (2010). Federal Student Aid Annual Report 2010.
- U.S. Department of Education. (2012). Federal Family Education Loan Program: Annual Reports and Data.
- U.S. Department of Education. (2023). National Student Loan Data System – Catalog.