



UNIVERSIDAD DE  
COSTA RICA

ESTADÍSTICA ACTUARIAL II

CA0307

---

PLANTEAMIENTO

---

**Estudiantes:**

Bonilla Flores Jeremy - B72990  
Rodríguez Trejos Dominick - B76600  
Urrutia Cascante Cristhofer - C37996  
Valverde Guzman Gabriel - C38060

**Profesor:**

Dr. Maikol Solís

5 de septiembre de 2025

# Índice

<b>1. Pregunta de investigación</b>	<b>2</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>3. Motivación</b>	<b>2</b>
<b>4. Conceptos</b>	<b>3</b>
<b>5. Antecedentes</b>	<b>4</b>
<b>6. Marco teórico</b>	<b>5</b>
6.1. Mercado de valores y acciones . . . . .	5
6.2. Teoría del portafolio . . . . .	5
6.3. Value at Risk (VaR) . . . . .	6
6.4. Conditional Value at Risk (CVaR) . . . . .	7
<b>7. Datos</b>	<b>8</b>
<b>Referencias</b>	<b>9</b>
<b>8. Anexos</b>	<b>10</b>

# 1. Pregunta de investigación

¿De qué manera se puede optimizar un portafolio de inversiones para mitigar el riesgo financiero?

## 2. Introducción

Invertir en la bolsa puede generar ganancias ó pérdidas a las personas o empresas que invierten. Más que buscar ganar a toda costa, la idea es evadir las pérdidas considerables. Este proyecto ofrecerá una herramienta práctica para evaluar portafolios de inversión y así disminuir el riesgo financiero. Por eso conviene comparar portafolios con una medida de riesgo clara y consistente para después decidir cómo invertir.

El presente trabajo ofrece que el usuario pueda elegir qué activos quiere analizar (una empresa específica, varias, entre otros), definir el periodo del estudio y el nivel de confianza y en base a esta información el programa importará los precios, calculará los rendimientos diarios en logaritmos y estimará medidas de riesgo como lo son el **VaR** y el **CVaR** (pérdida promedio en los peores escenarios). Luego el programa ajustará la asignación del portafolio de inversión para minimizar el CVaR, obteniendo una distribución que prioriza la resiliencia del portafolio de inversiones frente a caídas extremas. Para finalizar se propone un esquema centrado en el CVaR, el cual cada usuario puede adaptar a sus necesidades específicas, en las siguientes secciones se amplían conceptos, datos y alcances.

## 3. Motivación

Un portafolio de inversión es un instrumento financiero muy complejo y que involucra altos niveles de incertidumbre, volatilidad y especulación, si bien es claro que el inversionista desea formar su portafolio de manera que reciba la mayor cantidad de beneficios posibles, la estrategia para cumplir este objetivo usualmente no es clara ni directa, y un error en la toma de decisiones del inversionista puede implicar pérdidas gigantescas. De aquí nace la importancia de la presente investigación, pues, la prevención de estas grandes pérdidas de inversión es fundamental para el funcionamiento y financiamiento de corporaciones y entidades financieras a nivel local y global, por lo que la necesidad de establecer estrategias para la creación de portafolios de inversión se ha convertido en una de las grandes prioridades del mundo moderno.

El problema al que se enfrenta el inversionista es que tiene una gran cantidad de opciones para invertir, pero no tiene claro cuales debe elegir, Markowitz y cols. (2008) propone que el inversionista se comporta de manera racional y por lo tanto debe construir su portafolio con el objetivo de maximizar las ganancias esperadas y minimizar el riesgo tomado.

Y así, el inversionista se encuentra con una gran pregunta ¿cuál es el camino a tomar para evitar pérdidas y aumentar los beneficios obtenidos? En nuestra historia, se ha intentando responder a esta pregunta una infinidad de veces, desde la Teoría del portafolio de Harry Markowitz al establecimiento de medidas de riesgo como el Value at Risk y demás, todas con el objetivo de brindarle al inversionista la información necesaria para tomar las decisiones correctas en el manejo de su portafolio, con este proyecto se busca proponer una respuesta más a esta pregunta.

## 4. Conceptos

### ■ *Acciones*

Son instrumentos financieros que representan un porcentaje de propiedad parcial de una empresa, estos son vendidos a inversores, los cuales reciben beneficios y derechos con la compra de estos títulos.

### ■ *Mercado de valores*

La Superintendencia General de Valores SUGEVAL, entidad responsable de regular y supervisar el funcionamiento del mercado de valores lo define como un sector del sistema financiero donde los oferente y demandantes de valores pueden comunicarse y transar.

### ■ *Riesgo*

La Real Academia Española define riesgo como la contingencia o proximidad de un daño; la inversión en acciones implica un riesgo financiero y la SUGEVAL indica que el nivel de riesgo de estos instrumentos financieros depende de diversos factores y en general tiene que ver con la capacidad del emisor de hacer frente a sus obligaciones.

### ■ *Rentabilidad*

La renta generada por una inversión se puede entender como el ingreso por intereses, rendimientos, beneficios y dividendos, dependiendo del tipo de inversión, y puede ser fija o variable dependiente de la ganancias o rendimientos de la empresa

### ■ *Value at Risk (VaR)*

Cortés (2022) propone que es una medida estadística asociada al riesgo financiero y relacionada a la volatilidad del nivel de precios, tasas de interés y de cambio; esta es utilizada para medir el riesgo financiero asociado a portafolios de inversión. VaR mide la mayor pérdida posible que ocasiona una acción o portafolio en un periodo de tiempo determinado.

VaR se basa en la Teoría de Portafolio, la cuál propone que un portafolio esta debidamente optimizado cuando maximiza sus beneficios dado un nivel de riesgo o minimiza el riesgo para obtener un cierto nivel de beneficios.

Matemáticamente, dado un nivel de confianza  $1 - \alpha$  se define de la siguiente manera:

$$\text{VaR}_{1-\alpha}(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \leq x) \leq 1 - \alpha\}$$

### ■ *Conditional Value at Risk (CVaR)*

Similarmente a VaR, es una medida estadística relacionada al riesgo financiero, la diferencia entre estos es que el CVaR mide la pérdida esperada en los casos extremos de pérdida, se dice que brinda la información que se encuentra sobre la cola de la distribución de pérdidas, de cierta manera se dice que considera los casos más extremos de pérdidas posibles.

Matemáticamente, dado un nivel de confianza  $1 - \alpha$  se define de la siguiente manera:

$$\text{CVaR}_{1-\alpha}(X) = E[X \mid X \leq \text{VaR}_{1-\alpha}(X)]$$

## 5. Antecedentes

Con respecto a la presente investigación se pueden denotar tres temas fundamentales: los conceptos y medidas asociadas a los instrumentos financieros de los portafolios de inversión, la importancia o peso de estos conceptos y medidas y la optimización de dicho portafolios.

Considerando lo anterior se debe proceder con la búsqueda de fuentes que traten estos tres temas, con el objetivo de delimitar correctamente los límites de la investigación y sus prioridades.

De esta revisión de material, se lograron encontrar varias investigaciones relevantes a los atributos de los instrumentos financieros transados en el mercado de valores, entre estos cabe destacar el trabajo de Zheng y cols. (2023) que, por medio de un método de agrupamiento llamado Partición Alrededor de Medoids (PAM) lograron clasificar 92 fondos de inversión del mercado de valores costarricense en 8 grupos según su similitud, tomaron en consideración variables como rendimiento, riesgo, desviación estándar y demás, con el objetivo de que los elementos en cada grupo sean lo más homogéneos posibles, para que el inversionista pueda visualizar y analizar sus opciones fácilmente, destacando la importancia del análisis de los atributos de estos instrumentos financieros.

Además, se debe destacar el trabajo de Carballo (2015) el cual hace un análisis a fondo de las metodologías empleadas por las superintendencias costarricenses, entre estas la SUGEVAL, para el cálculo del VaR de portafolios de inversión; con este análisis exhaustivo, los autores logran identificar las ventajas y limitaciones de las diversas metodologías del cálculo del VaR, y al mismo tiempo destacan la importancia y utilidad del VaR como medida en temas de riesgo financiero y análisis de portafolios de inversión, la investigación concluye que entre las superintendencias se debe buscar la estandarización en sus métodos para obtener una mayor precisión en el cálculo del VaR.

En cuanto al tema del peso o importancia de estas medidas, la mayoría de estudios encontrados mencionan al rendimiento y riesgo como atributos fundamentales a tomar en cuenta al momento de construir un portafolio de inversión, además, cabe destacar que algunos de estos estudios tiene como objetivo plantear una estrategia de inversión para una entidad específica, debido a esto, se toma en consideración el estado financiero y contexto de la entidad en la construcción de un posible portafolio de inversión, entre estos se puede destacar el estudio de Arrieta y cols. (2021), en el cuál buscan brindar una guía para la construcción de un portafolio de inversiones para la Cooperativa de Ahorro y Crédito Refaccionario de la Comunidad de San Ramón, Alajuela, Responsabilidad Limitada (COOPESANRAMÓN R.L.)

Por último, en tema de optimización de portafolios, se puede identificar que los estudios relacionados a este tema tratan con la Teoría del Portafolio como punto de partida para crear estrategias de inversión para disminuir el riesgo del portafolio y aumentar la rentabilidad del mismo; considere el estudio de Valverde (2016) que busca elaborar una estrategia de inversión para el Banco I.M, como se menciona anteriormente Valverde (2016) parte de la Teoría de Portafolio para construir un portafolio que minimiza el riesgo y maximiza la rentabilidad, además, el estudio enfatiza la importancia de la diversificación del portafolio.

## 6. Marco teórico

### 6.1. Mercado de valores y acciones

**Mercado de valores:** Según la Bolsa Nacional de Valores el mercado de valores (BNV) es el mecanismo que permite la emisión, colocación y distribución de valores (acciones y bonos). En Costa Rica, su operación se realiza a través de la BNV y se encuentra regulada y supervisada por la SUGEVAL dentro del marco del CONASSIF.

**Acciones:** Según la SUGEVAL las acciones, son un mecanismo de financiamiento para las empresas, y convierte al dueño de esta en copropietario y su rentabilidad proviene de los dividendos y de ganancias o pérdidas del capital por variaciones en el precio. Además, por su naturaleza, conllevan riesgos como el precio, liquidez y emisor.

Asimismo, en el mercado de valores los inversionistas compran y venden acciones y esta combinación conforman los portafolios de inversión. Claramente se espera una ganancia, pero el riesgo siempre está existente en estos portafolios. Nuestro interés en este proyecto es optimizar esos portafolios y minimizar el riesgo, para ello se van a explorar algunas teorías y conceptos relevantes a la optimización de beneficios y mitigación de riesgos la teoría de portafolios, a continuación se presentan algunos de los más relevantes.

### 6.2. Teoría del portafolio

Los estudios encontrados durante la investigación preliminar del proyecto reafirman la importancia de la Teoría del portafolio en temas de análisis de riesgo financiero y optimización de portafolios, por lo que se debe estudiar con detalle esta teoría y entender sus pilares fundamentales para el desarrollo de la presente investigación.

Harry Markowitz, creador y desarrollador de la Teoría de portafolio en 1952, propone que el proceso de selección o creación de un portafolio de inversión se puede dividir en dos partes, una de observación rendimientos de los instrumentos financieros disponibles y la segunda donde se aplica lo observado en la primera para tomar la decisión de cuáles instrumentos integrar al portafolio, en su informe Markowitz y cols. (2008) toca la segunda etapa de creación del portafolio y propone las siguientes hipótesis:

- Debido a que el futuro es incierto, el inversionista debe considerar la ganancia o rendimiento y el riesgo esperado, o sea, estas son tratadas como variables aleatorias.
- Los inversionista se comportan de manera racional, por lo que este aspira a maximizar o mejorar su ganancia esperada y es adverso a la varianza en esta. De esta manera describe el comportamiento fundamental del inversionista.
- Rechaza la teoría de que la diversificación del portafolio elimina la varianza en la ganancia esperada, y propone que la diversificación eficiente no debe basarse en el número de activos distintos dentro del portafolio, sino, en la correlación de estos, tanto en términos de riesgo como rentabilidad.

En su teoría, Markowitz relaciona el riesgo directamente con la variabilidad del beneficio o retorno de la inversión Medina (2003) menciona que, bajo la teoría de Markowitz, esta volatilidad

en el beneficio esperado es el elemento fundamental que los inversionistas deben tomar en cuenta para la construcción de sus portafolios, que estos deben ser adversos al riesgo incluso si resulta en una ganancia esperada menor.

Por rendimiento o beneficio, Markowitz se refiere a la ganancia esperada de una inversión o la esperanza del retorno de la inversión, considerando que, por hipótesis, el rendimiento se trata como una variable aleatoria y se hace uso de conceptos de probabilidad para hacer estimaciones o aproximaciones del posible retorno del portafolio.

El último factor a destacar que los inversionistas deben considerar bajo la teoría de Markowitz, es la correlación entre el retorno y riesgo esperado de sus inversiones, Medina (2003) describe que *“entre más baja sea la correlación entre los retornos de los activos individuales, menor será la variabilidad (riesgo) del portafolio”* recalcando la importancia de este concepto.

En esencia, la Teoría moderna del portafolio, propone que el inversionista debe considerar el retorno esperado y el riesgo de su inversión al momento de construir su portafolio y que además debe adoptar el concepto de diversificación eficiente para optimizar su portafolio.

En su tiempo, la teoría de Markowitz fue revolucionaria, pero en nuestros tiempos modernos, el modelo propuesto por Markowitz tiene serias limitaciones; sin embargo, a raíz de sus ideas fundamentales se han establecido mejores modelos para la optimización de portafolios, y medidas estadísticas más útiles para el manejo de riesgo financiero, entre estas el Value at Risk (VaR) y el Conditional Value at Risk (CVaR) que serán dos puntos fundamentales en la presente investigación.

### 6.3. Value at Risk (VaR)

Como se definió anteriormente, Value at Risk o Valor en Riesgo (VaR) es una medida asociada al riesgo financiero y mide la mayor pérdida posible asociada a una inversión.

En su artículo, Johnson (2001) propone que el VaR nace de la necesidad de medir bajo un cierto nivel de significancia el monto o porcentaje de pérdida que sufre un portafolio en un periodo de tiempo específico.

En esencia, la medida de VaR brinda al inversionista una idea de la posibilidad de pérdida que su portafolio puede experimentar en un periodo dado y de la cantidad de pérdida. Considere un nivel de significancia de  $\alpha$ , entonces, matemáticamente, se puede definir VaR como:

$$\text{VaR}_{1-\alpha}(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \leq x) \leq 1 - \alpha\}$$

Considerando un nivel de significancia de 5 %, el cual Johnson (2001) define como el estándar, entonces se puede decir que se espera que el valor del portafolio caerá en mayor magnitud al valor obtenido solamente el 5 % de las veces dentro del periodo establecido.

Cabe destacar que VaR solamente le brinda al inversionista una idea del valor límite de su pérdida, no le brinda información o medida de la pérdida posible en los peores escenarios, los cuáles son parte de las preocupaciones del inversionista, como respuesta a esta inquietud se puede acudir al Conditional Value at Risk (CVaR) para obtener información de los casos más extremos de pérdida.

## 6.4. Conditional Value at Risk (CVaR)

Conditional Value at Risk (CVaR), similar al VaR, es una medida de riesgos financiero que le brinda al inversionista información fundamental para la optimización de su portafolio de inversión.

CVaR, al igual que VaR, se mide para un nivel de significancia específico y dentro de un periodo dado, Lappalainen (2008) propone que a diferencia del anterior, le brinda al inversionista la pérdida esperada en los  $\alpha\%$  peores casos, en vez de brindarle un límite a la pérdida esperada en los casos no extremos, o sea, CVaR le indica al inversionista la pérdida esperada en los casos más extremos. Matemáticamente, se puede definir de la siguiente manera:

$$\text{CVaR}_{1-\alpha}(X) = E[X \mid X \leq \text{VaR}_{1-\alpha}(X)]$$

Y nuevamente, considerando un nivel de significancia de 5 %, se puede decir que se espera que el valor del portafolio caerá en la magnitud del valor obtenido en el 5 % de los peores escenarios posibles, debido a esto es común referirse a CVaR con el nombre Expected Tail Loss (ETL).

En comparación a VaR, se presenta algunas ventajas con el uso de CVaR, principalmente el CVaR brinda información de los casos de pérdida más extremos y además, Lappalainen (2008) menciona que CVaR es una medida subaditiva, esto significa que si se tuvieran dos riesgos, llámense A y B, entonces al combinarlos el riesgo obtenido será menor a la suma de los riesgos individuales de A y B; Lappalainen (2008) destaca que esto es relevante en temas de diversificación de portafolios, pues al diversificar el portafolio el riesgo no debería ser menor, no mayor.

Por estas y más razones, el CVaR se ha popularizado en temas de optimización de portafolios y es incluso considerado como una medida superior al VaR.



## 7. Datos

### Descripción de la base de datos a utilizar

Como tal, no se maneja una base de datos fija. Se utiliza una librería de Python que se llama *yfinance* Blend (2020). La misma realiza *web-scraping* para obtener datos sobre precios de acciones, índices, *ETF* o *Exchange Traded Fund* que son fondos de inversión que cotizan en la bolsa con énfasis en sectores comerciales/industriales específicos.

Una vez obtenidos los precios, se procede a aplicar la fórmula para obtener los rendimientos diarios como sigue:

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

donde  $P_t$  son los precios del activo financiero en el día  $t$ . La primordial razón al usar rendimientos logarítmicos es la de proporcionar mejor estabilidad de los datos, lo cual ayuda a tener una matriz de covarianza más fiable. Además de que los *log-returns* son fiables ante modelos de normalidad John (2022).

Ticker	BND
Date	
2023-01-04	0.005661
2023-01-05	-0.001102
2023-01-06	0.010967
2023-01-09	0.002723
2023-01-10	-0.003951
...	...
2024-12-24	0.001434
2024-12-26	0.000696
2024-12-27	-0.002088
2024-12-30	0.003895

Figura 1: Rendimientos diarios de *BND* 2023-2025.

La figura anterior muestra -a modo de ejemplo- la serie de tiempo de *BND*, el cual es un *ETF* dedicado a la inversión en bonos del tesoro, principalmente en Estados Unidos. Sin embargo, para cuestiones de inferencia sobre estos datos, se ignorará la parte temporal y se trabajará sobre modelos deterministas basados en la frecuencia de los datos.

### Caso de estudio: *BND*

Se encontró que los rendimientos de varios *ETF* que invierten en bonos del gobierno, y a mediano plazo ( $\sim 2$ ) años cumplen con el criterio de normalidad de acuerdo al test de Anderson-Darling (SixSigma, 2025) con un nivel de significancia del 5% entre las fechas 2023-01-01 y 2025-01-01. A partir de ahí, se utilizó la fórmula del *VaR* y *CVaR* de la distribución normal y se hallaron sus valores con un nivel  $\alpha = 0,95$ . Para más detalles consultar el Anexo.

## Referencias

- Arrieta, R. F. J., Brenes, R. M. V., y Segura, R. Y. P. (2021). *Propuesta de priorización y selección de activos financieros para la conformación de portafolios de inversión para cooper-sanramon r.l.* Descargado de <https://repositorio.sibdi.ucr.ac.cr/items/24edef8d-1f92-4abe-90ce-b3e0ad6bded4>
- Blend, G. (2020). *yfinance library – a complete guide*. Descargado de <https://algotrading101.com/learn/yfinance-guide/>
- Carballo, R. D. (2015). *Análisis comparativo de las metodologías que utilizan las superintendencias de costa rica, para el cálculo del valor en riesgo (var), de los portafolios de inversiones*. Descargado de <https://repositorio.sibdi.ucr.ac.cr/handle/123456789/19513>
- Cortés, J. G. (2022). *Value at risk (var)* (Vol. 23) (n.º 45). Descargado de [https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S2594-01632022000100095](https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2594-01632022000100095)
- John, H. C. (2022). *Options, futures, and other derivatives 11th edition*. Pearson.
- Johnson, C. (2001). *Value at risk: teoría y aplicaciones* (Vol. 28).
- Lappalainen, M. (2008). *Portfolio optimization with cvar*.
- Markowitz, H., Fabozzi, F., y Gupta, F. (2008, 09). Portfolio selection.. doi: 10.1002/9780470404324.hof002001
- Medina, A. L. (2003). *Aplicación de la teoría del portafolio en el mercado accionario colombiano* (Vol. 22) (n.º 39). Descargado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2497671>
- SixSigma. (2025). *A complete guide to the anderson-darling normality test*. <https://www.6sigma.us/six-sigma-in-focus/anderson-darling-normality-test/>. (Consultado el 4 de septiembre de 2025)
- SUGEVAL. (2025). *Información institucional*. Descargado de <https://www.sugeval.fi.cr/informacioninstitucional/informacin-institucional>
- Valverde, A. A. (2016). *Elaboración de una estrategia de inversión a corto plazo del banco i.m. s.a., mediante el análisis y evaluación de instrumentos financieros internacionales cuya calificación se ajuste a lo solicitado en el marco regulatorio y permita generar una rentabilidad del portafolio de inversión*. Descargado de <https://repositorio.sibdi.ucr.ac.cr/items/83d5ae38-f47a-46a8-a8e3-b766e3d0958c>
- Zheng, G. M., Hernández, R. M., y Solís, M. (2023, feb.). *¿cómo elegir inversiones que se ajustan a sus necesidades? una propuesta de categorización de los fondos de inversión para mercados emergentes latinoamericanos, caso costa rica* (Vol. 41) (n.º 1). Descargado de <https://archivo.revistas.ucr.ac.cr/index.php/economicas/misc/view/49426> doi: 10.15517/rce.v41i1.49426

## 8. Anexos

Anexo del caso de estudio concreto *BND*.