UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESTADÍSTICA ACTUARIAL II

CA0307

ENTREGA SPRINT 5 Y 6

Estudiantes:
Bonilla Flores Jeremy - B72990
Rodríguez Trejos Dominick - B76600
Urrutia Cascante Cristhofer - C37996
Valverde Guzman Gabriel - C38060

Profesor:
Dr. Maikol Solís

12 de noviembre de 2025

Índice

1. Pregunta de investigación

¿De qué manera se puede optimizar un portafolio de inversiones para mitigar el riesgo financiero?

2. Introducción

Invertir en la bolsa puede generar ganancias ó perdidas a las personas o empresas que invierten. Más que buscar ganar a toda costa, la idea es evadir las pérdidas considerables. Este proyecto ofrecerá una herramienta práctica para evaluar portafolios de inversión y así disminuir el riesgo financiero. Por eso conviene comparar portafolios con una medida de riesgo clara y consistente para después decidir cómo invertir.

El presente trabajo ofrece que el usuario pueda elegir qué activos quiere analizar(una empresa específica, varias, entre otros), definir el periodo del estudio y el nivel de confianza y en base a esta información el programa importará los precios, calculará los rendimientos diarios en logaritmos y estimará medidas de riesgo como lo son el **VaR** y el **CVaR** (pérdida promedio en los peores escenarios). Luego el programa ajustará la asignación del portafolio de inversión para minimizar el CVaR, obteniendo una distribución que prioriza la resiliencia del portafolio de inversiones frente a caídas extremas. Para finalizar se propone un esquema centrado en el CVaR, el cual cada usuario puede adaptar a sus necesidades específicas, en las siguientes secciones se amplían conceptos, datos y alcances.

3. Motivación

Un portafolio de inversión es un instrumento financiero muy complejo y que involucra altos niveles de incertidumbre, volatilidad y especulación, si bien es claro que el inversionista desea formar su portafolio de manera que reciba la mayor cantidad de beneficios posibles, la estrategia para cumplir este objetivo usualmente no es clara ni directa, y un error en la toma de decisiones del inversionista puede implicar perdidas gigantescas. De aquí nace la importancia de la presente investigación, pues, la prevención de estas grandes perdidas de inversión es fundamental para el funcionamiento y financiamiento de corporaciones y entidades financieras a nivel local y global, por lo que la necesidad de establecer estrategias para la creación de portafolios de inversión se ha convertido en una de las grandes prioridades del mundo moderno.

El problema al que se enfrenta el inversionista es que tiene una gran cantidad de opciones para invertir, pero no tiene claro cuales debe elegir, Markowitz y cols. (2008) propone que el inversionista se comporta de manera racional y por lo tanto debe construir su portafolio con el objetivo de maximizar las ganancias esperadas y minimizar el riesgo tomado.

Y así, el inversionista se encuentra con una gran pregunta ¿cuál es el camino a tomar para evitar perdidas y aumentar los beneficios obtenidos? En nuestra historia, se ha intentando responder a esta pregunta una infinidad de veces, desde la Teoría del portafolio de Harry Markowitz al establecimiento de medidas de riesgo como el Value at Risk y demás, todas con el objetivo de brindarle al inversionista la información necesaria para tomar las decisiones correctas en el manejo de su portafolio, con este proyecto se busca proponer una respuesta más a esta pregunta.

4. Conceptos

- *Acciones*

  Son instrumentos financieros que representan un porcentaje de propiedad parcial de una empresa, estos son vendidos a inversores, los cuales reciben beneficios y derechos con la compra de estos títulos.

- *Mercado de valores*

  La Superintendencia General de Valores SUGEVAL, entidad responsable de regular y supervisar el funcionamiento del mercado de valores lo define como un sector del sistema financiero donde los oferente y demandantes de valores pueden comunicarse y transar.

- *Riesgo*

  La Real Academia Española define riesgo como la contingencia o proximidad de un daño; la inversión en acciones implica un riesgo financiero y la SUGEVAL indica que el nivel de riesgo de estos instrumentos financieros depende de diversos factores y en general tiene que ver con la capacidad del emisor de hacer frente a sus obligaciones.

- *Rentabilidad*

  La renta generada por una inversión se puede entender como el ingreso por intereses, rendimientos, beneficios y dividendos, dependiendo del tipo de inversión, y puede ser fija o variable dependiente de la ganancias o rendimientos de la empresa

- *Value at Risk (VaR)*

  Cortés (2022) propone que es una medida estadística asociada al riesgo financiero y relacionada a la volatilidad del nivel de precios, tasas de interés y de cambio; esta es utilizada para medir el riesgo financiero asociado a portafolios de inversión. VaR mide la mayor perdida posible que ocasiona una acción o portafolio en un periodo de tiempo determinado.

  VaR se basa en la Teoría de Portafolio, la cuál propone que un portafolio esta debidamente optimizado cuando maximiza sus beneficios dado un nivel de riesgo o minimiza el riesgo para obtener un cierto nivel de beneficios.

  Matemáticamente, dado un nivel de confianza $1-\alpha$ se define de la siguiente manera:

  $$\mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{P}(X \leqslant x) \leqslant 1-\alpha\}$$

- *Conditional Value at Risk (CVaR)*

  Similarmente a VaR, es una medida estadística relacionada al riesgo financiero, la diferencia entre estos es que el CVaR mide la perdida esperada en los casos extremos de perdida, se dice que brinda la información que se encuentra sobre la cola de la distribución de perdidas, de cierta manera se dice que considera los casos más extremos de perdidas posibles.

  Matemáticamente, dado un nivel de confianza $1-\alpha$ se define de la siguiente manera:

  $$\mathrm{CVaR}_{1-\alpha}(X) = \mathrm{E}\left[X \mid X \leqslant \mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X)\right]$$

5. Antecedentes

Con respecto a la presente investigación se pueden denotar tres temas fundamentales: los conceptos y medidas asociadas a los instrumentos financieros de los portafolios de inversión, la importancia o peso de estos conceptos y medidas y la optimización de dicho portafolios.

Considerando lo anterior se debe proceder con la búsqueda de fuentes que traten estos tres temas, con el objetivo de delimitar correctamente los limites de la investigación y sus prioridades.

De esta revisión de material, se lograron encontrar varias investigaciones relevantes a los atributos de los instrumentos financieros transados en el mercado de valores, entre estos cabe destacar el trabajo de Zheng y cols. (2023) que, por medio de un método de agrupamiento llamado Partición Alrededor de Medoids (PAM) lograron clasificar 92 fondos de inversión del mercado de valores costarricense en 8 grupos según su similitud, tomaron en consideración variables como rendimiento, riesgo, desviación estándar y demás, con el objetivo de que los elementos en cada grupo sean lo más homogéneos posibles, para que el inversionista pueda visualizar y analizar sus opciones fácilmente, destacando la importancia del análisis de los atributos de estos instrumentos financieros.

Además, se debe destacar el trabajo de Carballo (2015) el cual hace un análisis a fondo de las metodologías empleadas por las superintendencias costarricenses, entre estas la SUGEVAL, para el cálculo del VaR de portafolios de inversión; con este análisis exhaustivo, los autores logran identificar las ventajas y limitaciones de las diversas metodologías del cálculo del VaR, y al mismo tiempo destacan la importancia y utilidad del VaR como medida en temas de riesgo financiero y análisis de portafolios de inversión, la investigación concluye que entre las superintendencias se debe buscar la estandarización en sus métodos para obtener una mayor precisión en el cálculo del VaR.

En cuanto al tema del peso o importancia de estas medidas, la mayoría de estudios encontrados mencionan al rendimiento y riesgo como atributos fundamentales a tomar en cuenta al momento de construir un portafolio de inversión, además, cabe destacar que algunos de estos estudios tiene como objetivo plantear una estrategia de inversión para una entidad especifica, debido a esto, se toma en consideración el estado financiero y contexto de la entidad en la construcción de un posible portafolio de inversión, entre estos se puede destacar el estudio de Arrieta y cols. (2021), en el cuál buscan brindar una guía para la construcción de un portafolio de inversiones para la Cooperativa de Ahorro y Crédito Refaccionario de la Comunidad de San Ramón, Alajuela, Responsabilidad Limitada (COOPESANRAMÓN R.L.)

Por último, en tema de optimización de portafolios, se puede identificar que los estudios relacionados a este tema tratan con la Teoría del Portafolio como punto de partida para crear estrategias de inversión para disminuir el riesgo del portafolio y aumentar la rentabilidad del mismo; considere el estudio de Valverde (2016) que busca elaborar una estrategia de inversión para el Banco I.M, como se menciono anteriormente Valverde (2016) parte de la Teoría de Portafolio para construir un portafolio que minimiza el riesgo y maximiza la rentabilidad, además, el estudio enfatiza la importancia de la diversificación del portafolio.

6. Marco teórico

6.1. Mercado de valores y acciones

Mercado de valores: Según la Bolsa Nacional de Valores el mercado de valores (BNV) es el mecanismo que permite la emisión, colocación y distribución de valores (acciones y bonos). En Costa Rica, su operación se realiza a través de la BNV y se encuentra regulada y supervisada por la SUGEVAL dentro del marco del CONASSIF.

Acciones: Según la SUGEVAL las acciones, son un mecanismo de financiamiento para las empresas, y convierte al dueño de esta en copropietario y su rentabilidad proviene de los dividendos y de ganancias o pérdidas del capital por variaciones en el precio. Además, por su naturaleza, conllevan riesgos como el precio, liquidez y emisor.

Asimismo, en el mercado de valores los inversionistas compran y venden acciones y esta combinación conforman los portafolios de inversión. Claramente se espera una ganancia, pero el riesgo siempre esta existente en estos portafolios. Nuestro interés en este proyecto es optimizar esos portafolios y minimizar el riesgo, para ello se van a explorar algunas teorías y conceptos relevantes a la optimización de beneficios y mitigación de riesgos la teoría de portafolios, a continuación se presentan algunos de los más relevantes.

6.2. Teoría del portafolio

Los estudios encontrados durante la investigación preliminar del proyecto reafirman la importancia de la Teoría del portafolio en temas de análisis de riesgo financiero y optimización de portafolios, por lo que se debe estudiar con detalle esta teoría y entender sus pilares fundamentales para el desarrollo de la presente investigación.

Harry Markowitz, creador y desarrollador de la Teoría de portafolio en 1952, propone que el proceso de selección o creación de un portafolio de inversión se puede dividir en dos partes, una de observación rendimientos de los instrumentos financieros disponibles y la segunda donde se aplica lo observado en la primera para tomar la decisión de cuales instrumentos integrar al portafolio, en su informe Markowitz y cols. (2008) toca la segunda etapa de creación del portafolio y propone las siguientes hipótesis:

- Debido a que el futuro es incierto, el inversionista debe considerar la ganancia o rendimiento y el riesgo esperado, osea, estas son tratadas como variables aleatorias.
- Los inversionista se comportan de manera racional, por lo que este aspira a maximizar o mejorar su ganancia esperada y es adverso a la varianza en esta. De esta manera describe el comportamiento fundamental del inversionista.
- Rechaza la teoría de que la diversificación del portafolio elimina la varianza en la ganancia esperada, y propone que la diversificación eficiente no debe basarse en el número de activos distintos dentro del portafolio, sino, en la correlación de estos, tanto en términos de riesgo como rentabilidad.

En su teoría, Markowitz relaciona el riesgo directamente con la variabilidad del beneficio o retorno de la inversión Medina (2003) menciona que, bajo la teoría de Markowitz, esta volatilidad en el beneficio esperado es el elemento fundamental que los inversionistas deben tomar en cuenta para la construcción de sus portafolios, que estos deben ser adversos al riesgo incluso si resulta en una ganancia esperada menor.

Por rendimiento o beneficio, Markowitz se refiere a la ganancia esperada de una inversión o la esperanza del retorno de la inversión, considerando que, por hipótesis, el rendimiento se trata como una variable aleatoria y se hace uso de conceptos de probabilidad para hacer estimaciones o aproximaciones del posible retorno del portafolio.

El último factor a destacar que los inversionistas deben considerar bajo la teoría de Markowitz, es la correlación entre el retorno y riesgo esperado de sus inversiones, Medina (2003) describe que *“entre más baja sea la correlación entre los retornos de los activos individuales, menor será la variabilidad (riesgo) del portafolio”* recalcando la importancia de este concepto.

En esencia, la Teoría moderna del portafolio, propone que el inversionista debe considerar el retorno esperado y el riesgo de su inversión al momento de construir su portafolio y que además debe adoptar el concepto de diversificación eficiente para optimizar su portafolio.

En su tiempo, la teoría de Markowitz fue revolucionaria, pero en nuestros tiempos modernos, el modelo propuesto por Markowitz tiene serias limitaciones; sin embargo, a raíz de sus ideas fundamentales se han establecido mejores modelos para la optimización de portafolios, y medidas estadísticas más útiles para el manejo de riesgo financiero, entre estas el Value at Risk (VaR) y el Conditional Value at Risk (CVaR) que serán dos puntos fundamentales en la presente investigación.

6.3. Value at Risk (VaR)

Como se definió anteriormente, Value at Risk o Valor en Riesgo (VaR) es una medida asociada al riesgo financiero y mide la mayor perdida posible asociada a una inversión.

En su articulo, Johnson (2001) propone que el VaR nace de la necesidad de medir bajo un cierto nivel de significancia el monto o porcentaje de perdida que sufre un portafolio en un periodo de tiempo especifico.

En esencia, la medida de VaR brinda al inversionista una idea de la posibilidad de perdida que su portafolio puede experimentar en un periodo dado y de la cantidad de perdida. Considere un nivel de significancia de α, entonces, matemáticamente, se puede definir VaR como:

$$\mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X) = \operatorname{ínf}\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{P}(X \leqslant x) \leqslant 1-\alpha\}$$

Considerando un nivel de significancia de 5 %, él cual Johnson (2001) define como el estándar, entonces se puede decir que se espera que el valor del portafolio caerá en mayor magnitud al valor obtenido solamente el 5 % de las veces dentro del periodo establecido.

Cabe destacar que VaR solamente le brinda al inversionista una idea del valor limite de su perdida, no le brinda información o medida de la perdida posible en los peores escenarios, los cuáles son parte de las preocupaciones del inversionista, como respuesta a esta inquietud se puede acudir al Conditional Value at Risk (CVaR) para obtener información de los casos más extremos de perdida.

6.4. Conditional Value at Risk (CVaR)

Conditional Value at Risk (CVaR), similar al VaR, es una medida de riesgos financiero que le brinda al inversionista información fundamental para la optimización de su portafolio de inversión.

CVaR, al igual que VaR, se mide para un nivel de significancia especifico y dentro de un periodo dado, Lappalainen (2008) propone que a diferencia del anterior, le brinda al inversionista la perdida esperada en los $\alpha\,\%$ peores casos, en vez de brindarle un limite a la perdida esperada en los casos no extremos, osea, CVaR le indica al inversionista la perdida esperada en los casos más extremos. Matemáticamente, se puede definir de la siguiente manera:

$$\mathrm{CVaR}_{1-\alpha}(X) = \mathrm{E}\left[X \mid X \leqslant \mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X)\right]$$

Y nuevamente, considerando un nivel de significancia de 5 %, se puede decir que se espera que el valor del portafolio caerá en la magnitud del valor obtenido en el 5 % de los peores escenarios posibles, debido a esto es común referirse a CVaR con el nombre Expected Tail Loss (ETL).

En comparación a VaR, se presenta algunas ventajas con el uso de CVaR, principalmente el CVaR brinda información de los casos de perdida más extremos y además, Lappalainen (2008) menciona que CVaR es una medida subaditivida, esto significa que si se tuvieran dos riesgos, llámense A y B, entonces al combinarlos el riesgo obtenido será menor a la suma de los riesgos individuales de A y B; Lappalainen (2008) destaca que esto es relevante en temas de diversificación de portafolios, pues al diversificar el portafolio el riesgo no debería ser menor, no mayor.

Por estas y más razones, el CVaR se ha popularizado en temas de optimización de portafolios y es incluso considerado como una medida superior al VaR.

7. Datos

Descripción de la base de datos a utilizar

Como tal, no se maneja una base de datos fija. Se utiliza una librería de Python que se llama *yfinance* Blend (2020). La misma realiza *web-scrapping* para obtener datos sobre precios de acciones, índices, *ETF* o *Exhange Traded Fund* que son fondos de inversión que cotizan en la bolsa con énfasis en sectores comerciales/industriales específicos.

Una vez obtenidos los precios, se procede a aplicar la fórmula para obtener los rendimientos diarios como sigue:

$$R_t = \ln(\frac{P_t}{P_{t-1}})$$

donde P_t son los precios del activo financiero en el día t. La primordial razón al usar rendimientos logarítimicos es la de proporcionar mejor estabilidad de los datos, lo cual ayuda a tener una matriz de covarianza más fiable. Además de que los *log-returns* son fiables ante modelos de normalidad John (2022).

```
Ticker             BND
Date
2023-01-04    0.005661
2023-01-05   -0.001102
2023-01-06    0.010967
2023-01-09    0.002723
2023-01-10   -0.003951
...                ...
2024-12-24    0.001434
2024-12-26    0.000696
2024-12-27   -0.002088
2024-12-30    0.003895
```

Figura 1: Rendimientos diarios de *BND* 2023-2025.

La figura anterior muestra -a modo de ejemplo- la serie de tiempo de *BND*, el cual es un *ETF* dedicado a la inversión en bonos del tesoro, principalmente en Estados Unidos. Sin embargo, para cuestiones de inferencia sobre estos datos, se ignorará la parte temporal y se trabajará sobre modelos deterministas basados en la frecuencia de los datos.

Caso de estudio: *BND*

Se encontró que los rendimientos de varios *ETF* que invierten en bonos del gobierno, y a mediano plazo ($\sim$ 2) años cumplen con el criterio de normalidad de acuerdo al test de Anderson-Darling (SixSigma, 2025) con un nivel de significancia del 5% entre las fechas *2023-01-01 y 2025-01-01*. A partir de ahí, se utilizó la fórmula del *VaR* y *CVaR* de la distribución normal y se hallaron sus valores con un nivel $\alpha = 0{,}95$. Para más detalles consultar el Anexo.

8. Metodología

La estimación u observación de casos severos o extremos es común en una infinidad de ámbitos de nuestra sociedad, y la capacidad de predecir, prevenir y evitar estos casos se ha convertido en una grande e importante prioridad, esto argumentan Padoan y Rizzelli (2025) en su estudio, donde confirman que la Teoría de Valores Extremos es fundamental para el trabajo con estos casos.

Para esta investigación, donde el análisis de riesgo financiero se hará sobre los peores o más extremos casos de perdida es fundamental indagar en la Teoría de Valores Extremos y en los diversos método o modelos asociados a esta.

8.1. Teoría de Valores Extremos

En su estudio, Abdulali y cols. (2022), confirma que La Teoría de Valores Extremos se basa en la observación, modelado y medida de eventos que tienen una probabilidad muy pequeña de suceder, se dice que estos eventos se dan en los peores o más extremos casos, y son eventos que superan un valor o barrera especifica, esto, junto con la baja probabilidad de ocurrencia, los caracteriza como eventos extremos.

En análisis de riesgo, ya sea financiero o de otro tipo, es fundamental incluir estos casos extremos, pues corresponden a los eventos como menor probabilidad pero con mayor riesgo asociado, esto ha convertido a la Teoría de Valores Extremos en un pilar de estudios de análisis de riesgo.

En esencia, esta teoría busca brindar la mayor información posible acerca de los valores máximos y mínimos, los extremos, y del comportamiento de las colas de la distribución a trabajar, esto lo hace por medio de diversos modelos, medidas y distribuciones.

Esta teoría considera diversos tipos de distribuciones para el trabajo de estos casos de valores extremos, estas mostrarían la distribución de las muestras de datos que exceden la barrera o *threshold* establecido. De estas, la que se estudiara para esta investigación será la Distribución Generalizada de Pareto (GPD).

Además, de los modelos o métodos relacionados a la Teoría de Valores Extremos, uno de los más comunes sería el de Peaks-Over-Threshold (POT), este será el método a utilizar para el análisis de riesgo de los instrumentos financieros.

A continuación, se procede con la definición del método y distribución a utilizar.

8.2. Distribución generalizada de Pareto (GPD)

Como se menciono anteriormente, la distribución generalizada de Pareto (GPD) brinda información de la distribución de los valores de la muestra que sobrepasan una barrera establecida y estos valores constituyen a eventos extremos.

de Zea Bermudez y Kotz (2010) confirman en su estudio la importancia y utilidad de la GPD en análisis de riesgo en general, no solamente en temas de riesgo financiero.

Para definir esta distribución, considere X una variable aleatoria, se dice que X se comporta como una GPD si su función de distribución acumulada es como la siguiente:

$$F(x|k,\xi,\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}\left(1-\frac{k(x-\xi)}{\sigma}\right)^{\frac{1}{k}}, & \text{si } k \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x-\xi}{\sigma}}, & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Donde:

- k es la forma.
- ξ la ubicación.
- σ es la escala.

Acerca del uso de GPD, de Zea Bermudez y Kotz (2010) proponen que uno de los aspectos más importantes es la estimación de los parámetros para la distribución, y menciona algunos de los métodos más populares para esta estimación, entre estos:

- Estimación por medio de Máxima Verosimilitud (MLE)
- Probability Weighted Moments (PWM)
- Método de Momentos (MOM)

Para esta investigación, la estimación de los parámetros se hará por medio del método de Máxima Verosimilitud.

8.3. Propiedades relevantes de la distribución GPD

(i) Porque es importante el POT (Teorema de Pickands–Balkema–de Haan). En el enfoque POT que se utilizo, para un umbral u suficientemente grande la distribución condicional de los excedentes $X-u \mid X>u$ se aproxima por una GPD(ξ,σ). Este resultado de la POT se ve claramente respaldado en el modelado de colas con GPD. Balkema y de Haan (1974).

(ii) Estabilidad de umbral. Si $X-u \mid X>u \sim$ GPD(ξ,σ_u) y elevamos el umbral a $v>u$, entonces $X-v \mid X>v \sim$ GPD(ξ,σ_v) con la misma forma ξ y

$$\sigma_v \;=\; \sigma_u + \xi\,(v-u).$$

Con este podemos ver y verificar la coherencia al mover u Coles (2001).

(iii) Función de exceso medio lineal. Para $\xi<1$, el exceso medio

$$e(u) \;=\; \mathbb{E}[X-u \mid X>u] \;=\; \frac{\sigma+\xi\,u}{1-\xi}$$

es lineal en u (pendiente $\xi/(1-\xi)$). El *mean-excess plot* es un diagnóstico para umbral y la validación del GPD Ghosh y Resnick (2010).

(iv) Existencia de momentos. El k-ésimo momento existe si $\xi < 1/k$. En particular, $\mathbb{E}[X]$ existe si $\xi < 1$ y $\mathrm{Var}(X)$ existe si $\xi < \frac{1}{2}$ Beirlant y cols. (2004). Esto va permitir la interpretación de la estabilidad de medidas de riesgos en la cola.

(v) Cuantiles. Para $0 < p < 1$ y $\xi \neq 0$, el cuantil de los excedentes es

$$Q_Y(p) = \frac{\sigma}{\xi}\Big((1-p)^{-\xi} - 1\Big), \qquad Q_Y(p) = -\sigma \ln(1-p) \text{ si } \xi = 0.$$

Para $X = u + Y$, $Q_X(p) = u + Q_Y(p)$ McNeil y cols. (2015).

(vi) Clases de cola según ξ.

- $\xi > 0$: cola pesada (tipo Pareto).
- $\xi = 0$: cola tipo exponencial (caso límite).
- $\xi < 0$: soporte acotado por arriba; la cola termina en $u - \sigma/\xi$(cola corta).

Coles (2001)

8.4. Prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov

Considerando la importancia del uso de la distribución GPD, será esencial confirmar que es la distribución ideal y que se asemeja más a la distribución real de los datos. Para esto, se va a aplicar la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov.

Esta prueba, como señala Marques Dos Santos (2001), se basa en la comparación entre la función de distribución acumulada de una distribución teoría ($F_t(X)$) con la distribución acumulada de una muestra ($F_m(X)$), en esencia, la prueba explora que tan similares son las dos distribuciones y dependiendo de que tan parecidas sean concluye si la muestra observada proviene de una distribución cuya función de distribución acumulada es $F_t(X)$, en otras palabras, si se observan una diferencia muy pequeña entre $F_t(X)$ y $F_m(X)$ entonces, se concluye que la muestra de datos debe tener a $F_t(X)$ como su distribución acumulada.

La prueba se define de la siguiente manera:

1. Se plantean las hipótesis:
   - H_0**:** $F_m(X) = F_t(X) \quad \forall X \in \mathbb{R}$
   - H_1**:** $F_m(X) \neq F_t(X)$
2. Se calculan los valores $F_m(X)$ para los valores de la muestra $X_1, X_2, ..., X_n$
3. Se determina la desviación máxima, que sería el estadístico por medio del cuál se rechaza o no la hipótesis nula, esta se calcula con la siguiente expresión:

$$D = \max_{0 \leqslant j \leqslant n-1} \{ \left| F_m(X_j) - F_t(X_j) \right| \}$$

4. Escoger el nivel de significancia α

5. Se compara el valor del estadístico obtenido con el valor critico D_α y se concluye según lo observado:
   - $D > D_\alpha$**:** Se rechaza la H_0
   - $D \leqslant D_\alpha$**:** Se acepta la H_0

8.5. Peaks-Over-Threshold (POT)

En este método, lo que se busca es modelar los excedentes de la cola de una distribución fácilmente, la distribución que hará esto será la Distribución Generalizada de Pareto.

Acá, se elige un umbral u que será el que indique donde inicia la cola de la distribución, y al mismo tiempo le restamos todo lo que esté por debajo de él para obtener esos excedentes, que serán modelados con una GPD vía MLE.

8.6. VaR y CVaR bajo POT + GPD

Modelar con una GPD permite obtener una fórmula cerrada para el VaR y CVaR:

$$\mathrm{VaR} = \mathrm{u} - \frac{\sigma}{\xi}\left[\left(\frac{1-\alpha}{p_{\mathrm{u}}}\right)^{-\xi} - 1\right]$$

$$\mathrm{CVaR} = \mathrm{VaR} - \frac{\sigma - \xi(\mathrm{VaR} - \mathrm{u})}{1-\xi}$$

Podrá encontrar una aplicación de esta metodología en el.

8.7. Estimación de densidad por Kernels

La expresión que se logró obtener anteriormente es extremadamente útil para el trabajo con VaR y CVaR, pero se debe destacar que el criterio obtenido para CVaR depende del valor ρ_u ó la probabilidad de que una observación se encuentre por debajo del umbral seleccionado; este valor debe ser aproximado y para esta estimación se hará uso de la estimación de densidad por Kernels estudiada en clases.

En su estudio Weglarczyk (2018) deja claro que la estimación por medio de Kernels pretende construir un función de densidad de probabilidad $\hat{f}_h(x)$ que se aproxima a la función de densidad verdadera de la muestra, esto lo logra con ayuda de una función $K(u)$ que suaviza los datos. Este estadístico $\hat{f}_h(x)$ se construye de la siguiente manera:

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$$

Para esta expresión es necesario definir la función del Kernel a utilizar ($K(u)$) y el ancho de banda (h), para el caso de esta investigación se considera un ancho de banda de referencia normal y una función de Kernel Gaussiana, por lo que se va a considerar las siguientes:

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} \qquad h = 1{,}06 s n^{\frac{-1}{5}}$$

Donde:

- **s:** desviación estándar de la muestra $\left(s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)$

Por medio de este estadístico, es posible estimar el valor de la probabilidad de que una observación se encuentre por debajo del umbral seleccionado.

9. Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos de un caso de estudio especifico, en el cuál se busca realizar un análisis de riesgo financiero a con base en los resultados obtenidos de CVaR para cada una de las opciones de inversión consideradas, esto con el objetivo de determinar cuales son las decisiones de inversión que involucran un menor riesgo financiero para el inversionista.

9.1. Caso de estudio: Invesco y SPDR S&P 500

Para el estudio se consideran dos Fondos Cotizados en Bolsa o mejor conocidos por sus siglas ETF (Exchange Traded Fund), SPDR S&P 500 y NASDAQ Composite, estos dos son de los más importantes y más reconocidos a nivel global.

9.1.1. SPDR S&P 500 (SPY)

Como se menciono anteriormente, este es un ETF, y se negocia en la bolsa de valores estadounidense con las siglas SPY; históricamente, en el año 1993 SPY fue el primer ETF indexado y cotizado en la bolsa de valores estadounidense y buscaba replicar el índice Standard and Poor's 500 (S&P 500), él cual esta compuesto por 500 empresas estadounidense de alta capitalización.

Al invertir en acciones de SPY, el inversionista esta indirectamente invirtiendo en el S&P 500, es decir, le permite al inversionista poseer el indice completo con una sola acción, disminuyendo los costos de gestión relacionados a la compra de acciones.

La cartera de SPY es altamente diversificada, y distribuye la mayoría de sus inversiones en los siguientes sectores, con la posibilidad de cambios dependiendo del estado del mercado:

- Tecnologías de la información.
- Finanzas.
- Salud.
- Consumo discrecional o de ocio.
- Servicios de comunicación.

9.1.2. Invesco QQQ

Invesco es una firma global de gestión de activos financieros, y ofrece opciones de inversión en diversos tipos de fondos, entre estos, se va a trabajar con el ETF Invesco QQQ, que se negocia en la bolsa de valores estadounidense con la siglas QQQ.

Similarmente a SPY, Invesco QQQ busca replicar el índice Nasdaq-100, este índice representa las 100 empresas no financieras que cotizan en el Nasdaq Stock Market, cabe destacar que estas empresas son de las más importantes en el sector de industria de la tecnología, comunicación y consumo y a diferencia de SPY, excluye las empresas del sector financiero.

Los principales sectores de inversión de Invesco QQQ son los siguientes;

- Tecnologías de la información.
- Salud.
- Consumo discrecional o de ocio.
- Servicios de comunicación.

Con una mejor idea de las opciones a considerar, se debe definir cuáles rendimientos van a ser observados para el análisis, se decidio tomar los rendimientos de SPY y QQQ desde el primero de enero del 2018 (01/01/2018) hasta el primero de enero del 2025 (01/01/2025). A continuación, se pueden observar los resultados obtenidos del análisis realizado

9.2. Resultados obtenidos

Como se menciona anteriormente, la variable de interés será los rendimientos de cada una de las opciones de inversión, las siguientes visualizaciones presentan la distribución de los rendimientos diarios reportados para SPY y QQQ.

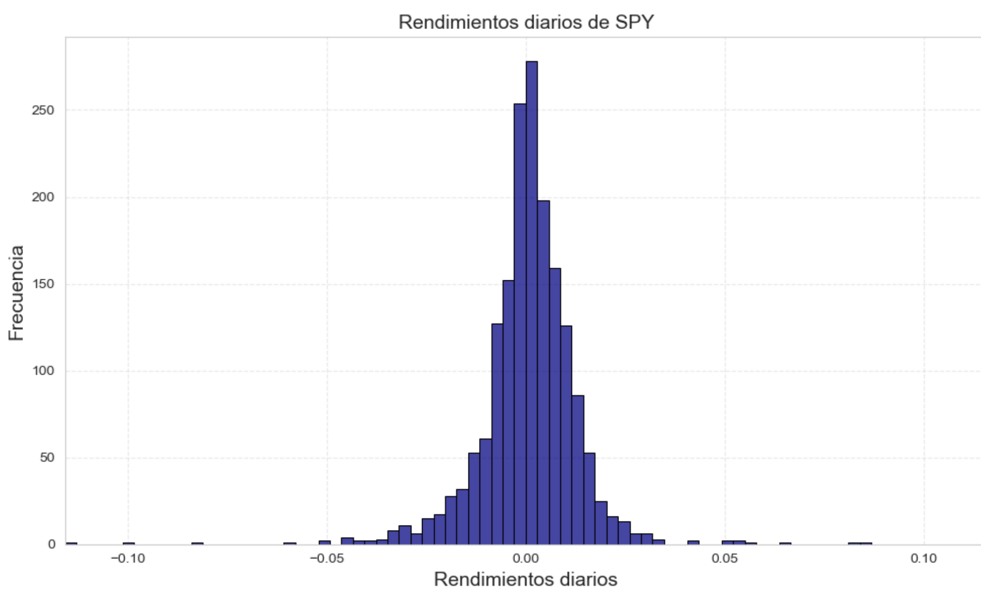

Figura 2: Distribución de los rendimientos diarios de SPY
Fuente: creación propia

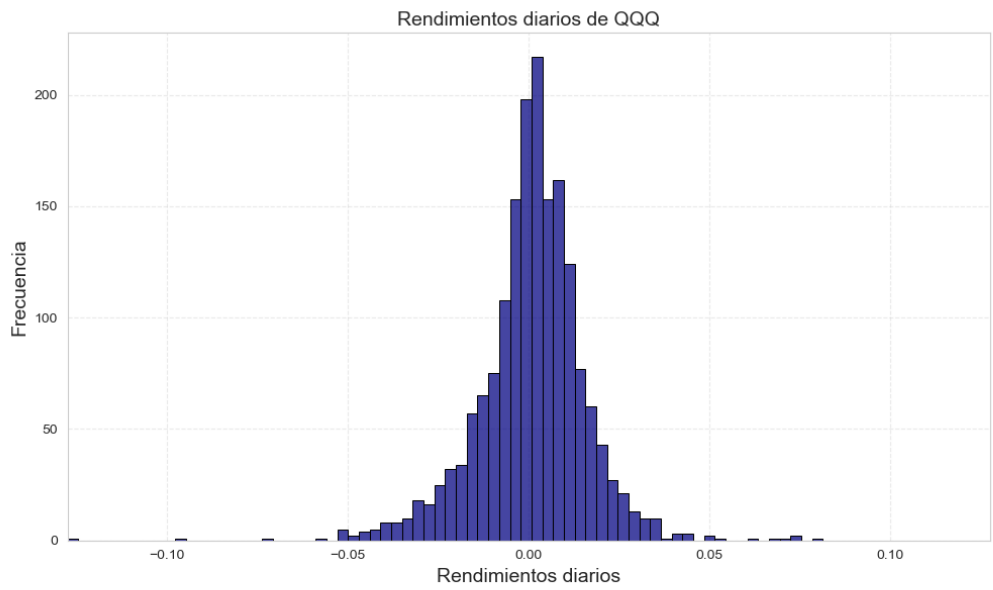

Figura 3: Distribución de los rendimientos diarios de QQQ
Fuente: creación propia

Para el análisis de riesgo, es importante trabajar con los rendimientos negativos de las distribuciones anteriores, pues la idea es observar los escenarios donde la perdida del inversionista es mayor, es decir, donde los rendimientos son negativos, por lo que se procede a definir la cola izquierda de ambas distribuciones tomando como máximo el cuantil empirico de nivel $0,1$, osea el cuantil del $10\,\%$ de las observaciones, este valor servirá de umbral.

En lo siguientes gráficos, se puede visualizar estas colas izquierdas de las distribuciones anteriores

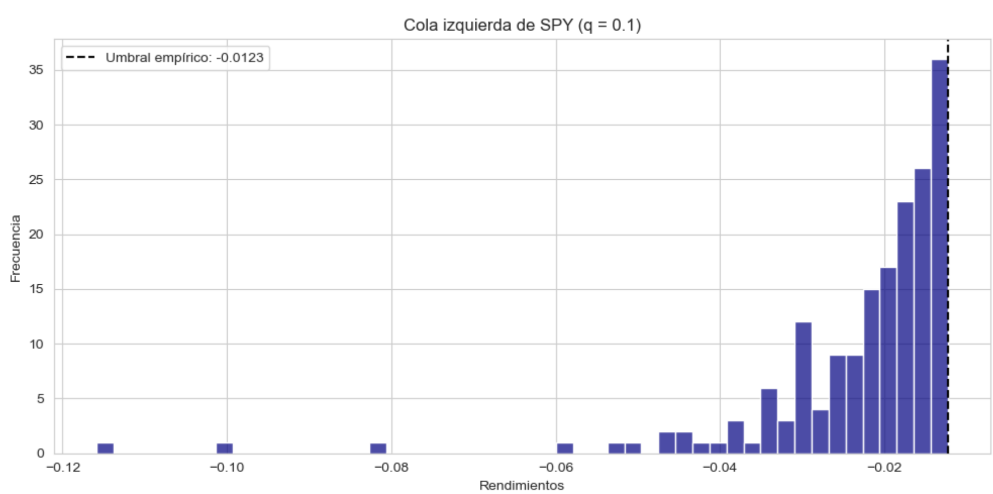

Figura 4: Cola izquierda de la distribución de los rendimientos diarios de SPY
Fuente: creación propia

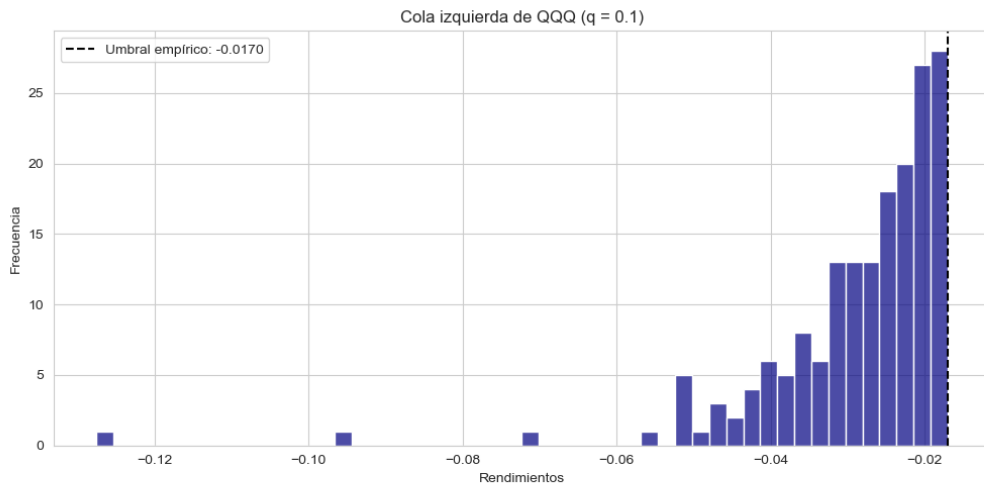

Figura 5: Cola izquierda de la distribución de los rendimientos diarios de QQQ
Fuente: creación propia

Seguidamente, se aplica el método de Peaks-Over-Threshold (POT) haciendo uso de la distribución de Pareto Generalizada (GPD), tomando el umbral brindado por el cuantil empírico al 10 % es posible modelar los excedentes de la cola izquierda, es decir, la diferencia entre el umbral y los valores observados para los rendimientos ubicados en la cola izquierda y así se obtiene la distribución de los excedentes.

Como se menciono anteriormente en la metodología del proyecto, será conveniente si estos excedentes se pueden aproximar como una GPD, en las siguientes visualizaciones se puede observar la similitud entre la GPD ajustada:

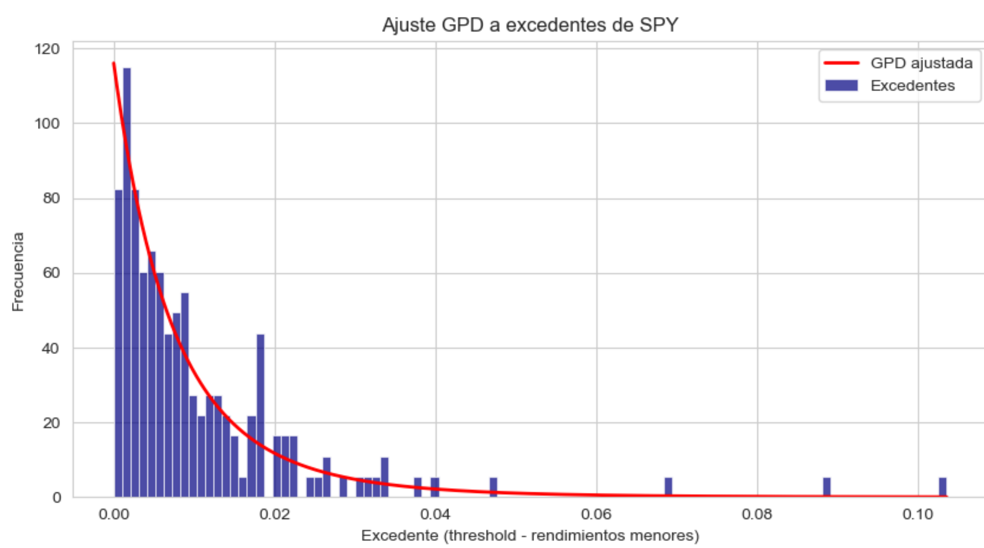

Figura 6: Distribución de los excedentes de la cola izquierda de los rendimientos diarios de SPY
Fuente: creación propia

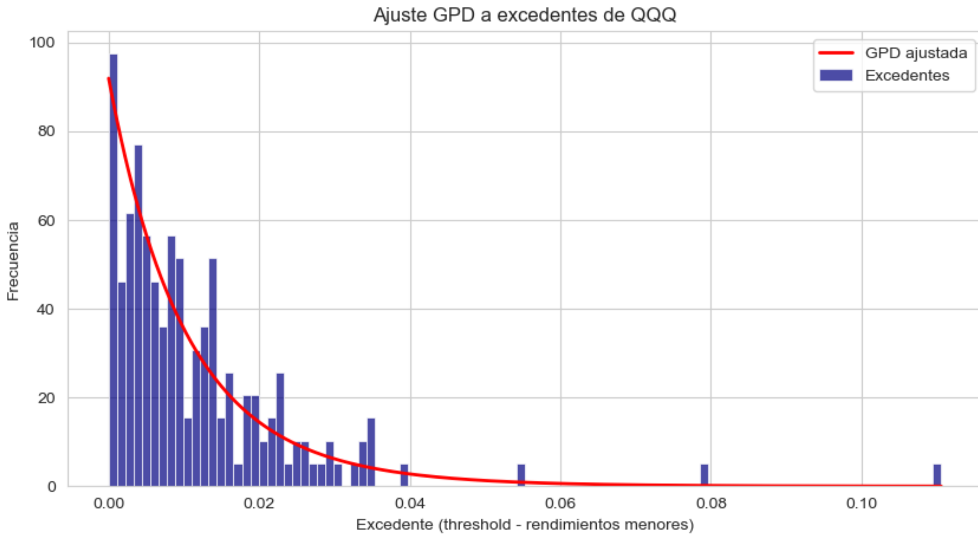

Figura 7: Distribución de los excedentes de la cola izquierda de los rendimientos diarios de QQQ
Fuente: creación propia

Cabe mencionar que los parámetros de la GPD utilizada son aproximados por medio del método de máxima verosimilitud, además se utilizó la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov para confirmar que la GPD utilizada es una aproximación aceptable para la distribución de los excedentes de la cola izquierda.

Para finalizar, es posible calcular los valores de VaR y CVaR gracias a la aproximación con la GPD, estos resultados, junto con los valores obtenidos para los parámetros de la GPD y el ρ-valor de la prueba de Kolmogorov-Smirnov para SPY y QQQ se pueden ver el siguiente cuadro:

Medida	**SPY**	**QQQ**
Cuantil empírico al 10 %	$-0{,}0123$	$-0{,}0170$
ξ	0,1815	0,068
σ	0,0086	0,0108
ρ-valor	0,99	0,724
$VaR_{1-95\,\%}$	$-0{,}018$	$-0{,}0248$
$CVaR_{1-95\,\%}$	$-0{,}03$	$-0{,}037$

Cuadro 1: Resumen variables cuantitativas

9.3. Interpretación de los resultados

El análisis se realizó sobre los **rendimientos negativos** de los ETF **SPY** y **QQQ**, modelando la **cola inferior** de sus distribuciones mediante la metodología **Peaks Over Threshold (POT)** con una **distribución Pareto Generalizada (GPD)** aplicada a los excedentes definidos como $Y = u - X$, donde u corresponde al **cuantil empírico al 10 %**. Esto implica que se modeló únicamente el 10 % de los rendimientos más negativos, es decir, los eventos de **mayor pérdida**.

Parámetros del modelo

- **Cuantil empírico al 10 %:** El umbral (u) es más bajo para **QQQ** ($-0{,}0170$) que para **SPY** ($-0{,}0123$), lo que indica que el ETF QQQ experimenta rendimientos más negativos en su décimo percentil; en otras palabras, sus pérdidas moderadas son más pronunciadas.

- **Parámetro de forma (ξ):** En ambos casos es positivo ($\xi_{SPY} = 0{,}1815$, $\xi_{QQQ} = 0{,}068$), lo que implica **colas pesadas** en la distribución de pérdidas. Esto significa que existen probabilidades no despreciables de observar eventos de pérdida más extremos que el umbral. Sin embargo, el valor de ξ es mayor para SPY, indicando que su cola inferior es **más pesada** (más propensa a pérdidas extremas) en comparación con QQQ.

- **Parámetro de escala (σ):** Es ligeramente mayor en QQQ (0.0108) que en SPY (0.0086), lo cual refleja una **dispersión algo mayor** en las pérdidas excedentes del QQQ. Esto se asocia con una **volatilidad más alta** dentro de la región extrema, aunque no necesariamente con una cola más pesada.

- **p-valor (KS test):** Ambos modelos presentan p-valores altos (0,99 para SPY y 0,724 para QQQ), lo que sugiere que no se rechaza la hipótesis nula de buen ajuste. Por tanto, la GPD describe adecuadamente las colas de pérdidas extremas para ambos activos.

VaR y CVaR al 1 - 95 %

El $\mathbf{VaR}_{1-95\,\%}$ representa la pérdida mínima esperada en el 5 % de los peores días:

- SPY: $-0{,}018$

- QQQ: $-0{,}0248$

Esto indica que, en promedio, QQQ presenta pérdidas más severas en los eventos del 5 % inferior.

El $\mathbf{CVaR}_{1-95\,\%}$ (Expected Shortfall) mide la pérdida promedio más allá del VaR:

- SPY: $-0{,}03$

- QQQ: $-0{,}037$

En los peores escenarios (5 % más adversos), QQQ sufre una pérdida media 1.23 puntos porcentuales mayor que SPY, confirmando una **mayor exposición al riesgo extremo**.

Conclusión

Ambos ETFs exhiben colas pesadas ($\xi > 0$), lo cual confirma la presencia de **riesgo extremo** en los rendimientos. Aunque SPY tiene una cola más pesada (ξ mayor), el QQQ presenta **pérdidas más amplias** (mayor σ, VaR y CVaR más negativos).

En conjunto, esto sugiere que:

- **SPY** tiene una probabilidad relativamente mayor de eventos extremos.

- **QQQ** experimenta pérdidas más grandes cuando esos eventos ocurren.

Desde una perspectiva de gestión de riesgo, QQQ es **más riesgoso en magnitud de pérdidas extremas**, aunque SPY muestra colas ligeramente más gruesas en términos de frecuencia de eventos extremos.

Referencias

Abdulali, B. A. A., Abu Bakar, M. A., Ibrahim, K., y Mohd Ariff, N. (2022). Extreme value distributions: An overview of estimation and simulation. *Journal of Probability and Statistics*, *2022*(1), 5449751. Descargado de https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1155/2022/5449751 doi: https://doi.org/10.1155/2022/5449751

Arrieta, R. F. J., Brenes, R. M. V., y Segura, R. Y. P. (2021). *Propuesta de priorización y selección de activos financieros para la conformación de portafolios de inversión para coopersanramon r.l.* Descargado de https://repositorio.sibdi.ucr.ac.cr/items/24edef8d-1f92-4abe-90ce-b3e0ad6bded4

Balkema, A. A., y de Haan, L. (1974). Residual life time at great age. *The Annals of Probability*, *2*(5), 792-804. Descargado de https://projecteuclid.org/journals/annals-of-probability/volume-2/issue-5/Residual-Life-Time-at-Great-Age/10.1214/aop/1176996548.full doi: 10.1214/aop/1176996548

Beirlant, J., Goegebeur, Y., Segers, J., y Teugels, J. (2004). *Statistics of extremes: Theory and applications*. Chichester: Wiley. Descargado de https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/0470012382 doi: 10.1002/0470012382

Blend, G. (2020). *yfinance library – a complete guide.* Descargado de https://algotrading101.com/learn/yfinance-guide/

Carballo, R. D. (2015). *Análisis comparativo de las metodologías que utilizan las superintendencias de costa rica, para el cálculo del valor en riesgo (var), de los portafolios de inversiones.* Descargado de https://repositorio.sibdi.ucr.ac.cr/handle/123456789/19513

Coles, S. (2001). *An introduction to statistical modeling of extreme values*. London: Springer. Descargado de https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4471-3675-0 doi: 10.1007/978-1-4471-3675-0

Cortés, J. G. (2022). *Value at risk (var)* (Vol. 23) (n.º 45). Descargado de https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2594-01632022000100095

de Zea Bermudez, P., y Kotz, S. (2010). Parameter estimation of the generalized pareto distribution—part i. *Journal of Statistical Planning and Inference*, *140*(6), 1353-1373. Descargado de https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378375809002766 doi: https://doi.org/10.1016/j.jspi.2008.11.019

Ghosh, S. S., y Resnick, S. I. (2010). A discussion on mean excess plots. *Insurance: Mathematics and Economics*, *47*(2), 185-198. Descargado de https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304414910001079 doi: 10.1016/j.insmatheco.2010.06.004

John, H. C. (2022). *Options, futures, and other derivatives 11th edition*. Pearson.

Johnson, C. (2001). *Value at risk: teoría y aplicaciones* (Vol. 28).

Lappalainen, M. (2008). *Portfolio optimization with cvar.*

Markowitz, H., Fabozzi, F., y Gupta, F. (2008, 09). Portfolio selection.. doi: 10.1002/9780470404324.hof002001

Marques Dos Santos, M. J. (2001). *Estadistica basica: Un enfoque no parametrico*. Unam. Descargado de https://books.google.co.cr/books?id=SaGNZ9CDle0C

McNeil, A. J., Frey, R., y Embrechts, P. (2015). *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools* (2.ª ed.). Princeton University Press. Descargado de https://press.princeton.edu/books/hardcover/9780691166278/quantitative-risk-management doi: 10.1515/9781400866281

Medina, A. L. (2003). *Aplicación de la teoría del portafolio en el mercado accionario colombiano* (Vol. 22) (n.º 39). Descargado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2497671

Padoan, S. A., y Rizzelli, S. (2025). *Statistical prediction of peaks over a threshold.* Descargado de https://arxiv.org/abs/2504.04602

SixSigma. (2025). *A complete guide to the anderson-darling normality test.* https://www.6sigma.us/six-sigma-in-focus/anderson-darling-normality-test/. (Consultado el 4 de septiembre de 2025)

SUGEVAL. (2025). *Información institucional.* Descargado de https://www.sugeval.fi.cr/informacioninstitucional/informacin-institucional

Valverde, A. A. (2016). *Elaboración de una estrategia de inversión a corto plazo del banco i.m. s.a., mediante el análisis y evaluación de instrumentos financieros internacionales cuya calificación se ajuste a lo solicitado en el marco regulatorio y permita generar una rentabilidad del portafolio de inversión.* Descargado de https://repositorio.sibdi.ucr.ac.cr/items/83d5ae38-f47a-46a8-a8e3-b766e3d0958c

Weglarczyk, S. (2018). Kernel density estimation and its application. *ITM Web of Conferences*, *23*. doi: 10.1051/itmconf/20182300037

Zheng, G. M., Hernández, R. M., y Solís, M. (2023, feb.). *¿cómo elegir inversiones que se ajustan a sus necesidades? una propuesta de categorización de los fondos de inversión para mercados emergentes latinoamericanos, caso costa rica* (Vol. 41) (n.º 1). Descargado de https://archivo.revistas.ucr.ac.cr/index.php/economicas/misc/view/49426 doi: 10.15517/rce.v41i1.49426

10. Anexos

Anexo del caso de estudio concreto *BND*.

Sprint 1
Sprint 2
Sprint 3
Sprint 4
Aplicación POT en BND