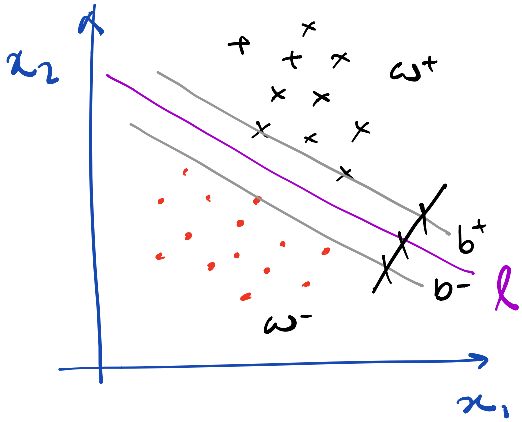
# SVM: Support Vector Machine




En SVM se busca una línea de separación $l$ tal que se maximice el margen.

El margen $b = b^+ = b^-$ definido como la distancia perpendicular de la línea $l$ al punto más cercano de cada clase

Definición de $l$:

$l: \; g(\underline{x}) = 0$

donde
$$\boxed{g(\underline{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0}$$

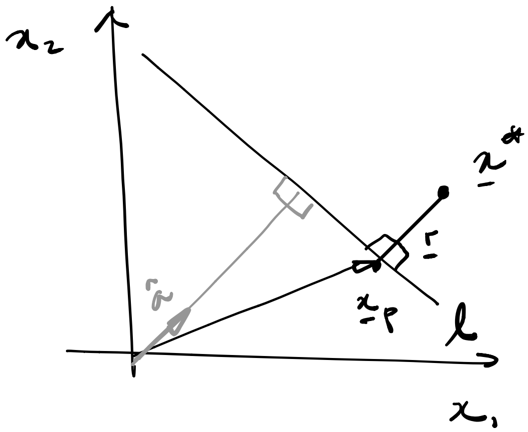
La clasificación de un punto $\underline{x}$ es:

$$g(\underline{x}) \begin{cases} > 0 \longrightarrow \text{clase } +1 \\ \leq 0 \longrightarrow \text{clase } -1 \end{cases}$$

¿Cómo estimar la recta $l$?

1 $\longrightarrow$ cálculo de distancia de un punto $\underline{x}^*$ a una recta
2 $\longrightarrow$ planteamiento del problema
3 $\longrightarrow$ planteamiento de cómo resolverlo
4 $\longrightarrow$ solución

## ① Distancia de un punto $\underline{x}^*$ a la recta:




$$\underline{x}^* = \underline{x}_p + \underline{r}$$

$$\underline{r} = r\,\hat{\underline{a}}$$

$\hat{a}$ → vector unitario $\perp \ell$

$r$ → distancia a $\ell$

Se puede demostrar que

$$r = \frac{|g(\underline{x}^*)|}{\|\underline{a}\|}$$

donde $\underline{a} = [a_1\ a_2]^T$

## ② Planteamiento del problema

Para encontrar $\ell$, se debe cumplir que las distancias de los puntos de entrenamiento $\underline{x}_i$ a la recta $\ell$ deben ser $\geq b$:

$$\frac{|g(\underline{x}_i)|}{\|\underline{a}\|} \geq b \quad \text{para } i = 1 \ldots N \quad (1)$$

Se debe encontrar $a_1, a_2, \ldots a_0$ tal que se cumpla la condición anterior.

Considerando que $|g(\underline{x}_i)| = z_i\, g(x_i)$

donde $z_i = \pm 1$ si $\underline{x}_i$ pertenece a la clase $\pm 1$.

(1) se puede escribir como:

$$\frac{z_i\, g(\underline{x}_i)}{\|\underline{a}\|} \geq b \qquad (2)$$

Es necesario imponer una restricción adicional a $\underline{a}$ y $a_0$ para que no escale al infinito:

$$\text{sujeto a} \quad b\|\underline{a}\| = 1$$

Entonces (2) es:

$$z_i\, g(\underline{x}_i) \geq 1$$

o bien $$\boxed{z_i\, g(\underline{x}_i) - 1 \geq 0} \qquad (3)$$

Se persigue entonces maximizar $b$, esto equivale a minimizar $\|\underline{a}\|$ tal que se cumpla (3).

PROBLEMA:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad \|\underline{a}\| \\ \text{Sujeto a:} \\ \quad z_i(\underline{a}\,\underline{x}_i^T + a_0) - 1 \geq 0 \quad \text{para } i \in [1, N] \end{array}}$$

③ ¿Cómo resolver el problema de optimización?

El problema se traduce a:

$$\underbrace{J(\underline{a}, a_o, \underline{\lambda}) = \frac{1}{2}\|\underline{a}\|^2}_{A} \underbrace{-}_{B} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left[z_i(\underline{a}^T \underline{x}_i + a_o) - 1\right]}_{C} \rightarrow \min \quad (4)$$

A: Se persigue minimizar $\|\underline{a}\|$

B: Se persigue maximizar segundo término C

C: Con $\lambda_i \geq 0$ se fuerza a encontrar una solución que clasifique correctamente ($z_i(\underline{a}\underline{x}_i^T + a_o) - 1 \geq 0$)

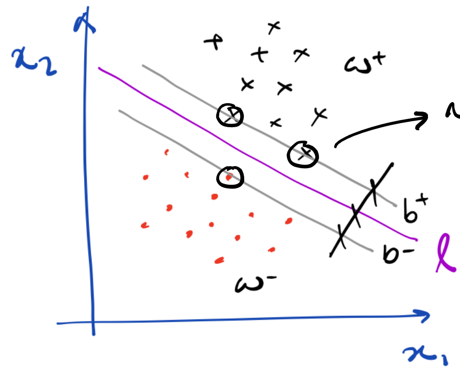
Según Kuhn-Tucker, (4) se puede transformar en:

$$J(\underline{\lambda}) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{N} \lambda_i \lambda_j z_i z_j \underbrace{\underline{x}_i^T \underline{x}_j}_{\langle \underline{x}_i^T, \underline{x}_j \rangle \text{ producto punto}} \rightarrow \max \quad (5)$$

Sujeto a $\lambda_i \geq 0$

④ Solución

Al resolver (5), sólo los vectores de soporte, i.e, los puntos $\underline{x}_i$ que tienen contacto con los bordes del margen tienen $\lambda_i \neq 0$. El resto son muestras irrelevantes:




vectores de soporte con $\lambda_i > 0$

En este ejemplo hay 3 vectores de soporte: $N_{SV} = 3$.

Al resolver (5) la solución es $\lambda_i$.

Derivando (4), igualando a cero, y conociendo $\lambda_i$ se obtiene la solución para $\underline{a}$:

$$\boxed{\underline{a} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i z_i \underline{x}_i} \rightarrow \underline{a} = \underbrace{\sum_{k=1}^{N_{SV}}}_{} \lambda_k z_k \underline{x}_k$$

vectores de soporte

Usando los vectores de soporte se obtiene $a_0$ ya que para ellos se cumple

$$z_i(\underline{a}^T \underline{x}_i + a_0) - 1 = 0 \qquad (1/z_i = z_i)$$

$$\underline{a}^T \underline{x}_i + a_0 = z_i$$

$$\boxed{a_0 = z_i - \underline{a}^T \underline{x}_i}$$

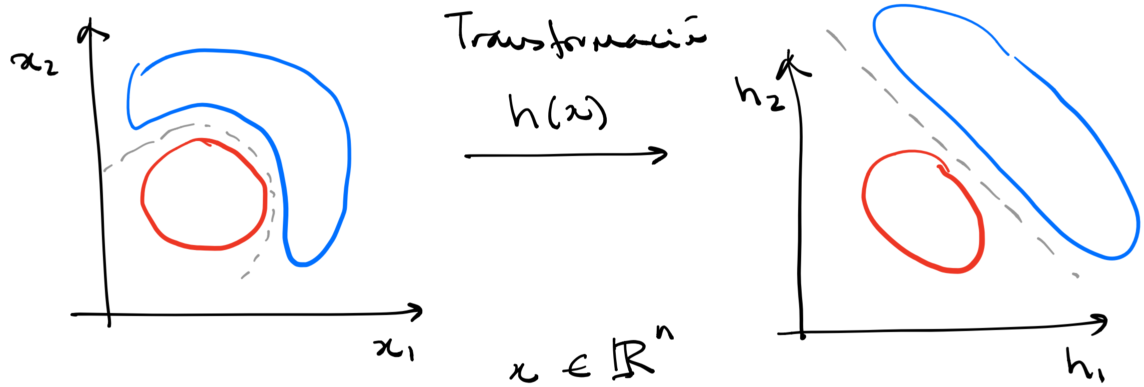
$x_i$ es vector de soporte

El hiperplano queda definido como:

$$g(\underline{x}) = \underline{a}^T \underline{x} + a_0$$

$$\boxed{g(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i z_i \underbrace{\underline{x}_i^T \underline{x}}_{\langle \underline{x}_i, \underline{x} \rangle} + a_0}$$

## 5 Bonus: Líneas de decisión no-lineales.




$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$\underline{h} \in \mathbb{R}^m$ $\qquad m \geq n$

La línea de separación sería

$$g(x) = g(h(\underline{x})) = \underline{a}^T h(\underline{x}) + a_0$$

$$g(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i z_i \langle h(x_i), h(x) \rangle + a_0$$

<u>IMPORTANTE</u>: no interesa $h(x)$, sino su producto punto

Función de kernel

$$\langle h(x_i), h(x) \rangle = \underbrace{K(x_i, x)}$$

Muy utilizadas:

Polinomio grado n : $(1 + \langle x_i, x \rangle)^n$

Radial Basis : $\exp(-\|x_i - x\|^2 / c)$

Neural Network : $\tanh(k_1 \langle x_i, x \rangle + k_2)$