Appunti delle Lezioni di Calcolo Numerico

Lezione 4

Calcolo di soluzioni di equazioni non lineari

e degli estremi liberi di funzioni

Indice:

1 Metodo di bisezione

Consideriamo il problema della determinazione delle soluzioni reali dell'equazione

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

dove $f(x)$ è una funzione non lineare, a valori reali e definita nell'intervallo chiuso $[a, b]$ dell'asse reale. Questo problema può ammettere una o più soluzioni o non ammettere soluzione.[1]

Si descrive un metodo, detto **metodo di bisezione**, per determinare una soluzione dell'equazione

$$f(x) = 0$$

nell'ipotesi che la funzione $f(x)$ sia continua in $[a, b]$ e che assuma valori discordi in segno negli estremi dell'intervallo, ovvero $f(a)f(b) < 0$.
Per il *teorema degli zeri di una funzione continua*, esiste almeno uno zero $x^* \in (a, b)$ di $f(x)$.

Sulla base di questo risultato, il metodo di bisezione costruisce una successione di intervalli sempre più piccoli, contenenti una soluzione, in cui i valori della funzione agli estremi di ogni intervallo della successione hanno segno discorde.
Per costruire questa successione di intervalli si procede nel seguente modo ricorsivo.
Denotati $a_1 = a$ e $b_1 = b$, si calcola il punto di mezzo dell'intervallo $[a_1, b_1]$ e lo si indica con c_1, cioè

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

e in esso si calcola il valore della funzione $f(c_1)$. Se $f(c_1) = 0$, allora c_1 è uno zero di $f(x)$ in $[a, b]$ e il metodo si conclude; se $f(c_1) \neq 0$, si definisce l'intervallo $[a_2, b_2]$ come

$$[a_2, b_2] = \begin{cases} [c_1, b_1] & \text{se} \quad f(a_1)\, f(c_1) > 0 \\ [a_1, c_1] & \text{se} \quad f(a_1)\, f(c_1) < 0 \end{cases}$$

Dalla costruzione di $[a_2, b_2]$ segue immediatamente che $f(a_2)$ e $f(b_2)$ hanno segno discorde e che l'intervallo $[a_2, b_2]$ contiene lo zero ed è contenuto nell'intervallo $[a_1, b_1]$.
Si calcola ora il punto di mezzo c_2 dell'intervallo $[a_2, b_2]$ e si procede come prima.

In generale, (vedi figura 1), per $k = 1, 2, ...$, si calcola il punto di mezzo dell'intervallo $[a_k, b_k]$

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

Se $f(c_k) = 0$, allora c_k è uno zero di $f(x)$ in $[a, b]$ e il metodo si conclude; se $f(c_k) \neq 0$, si definisce l'intervallo $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ come

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [c_k, b_k] & \text{se} \quad f(a_k)\, f(c_k) > 0 \\ [a_k, c_k] & \text{se} \quad f(a_k)\, f(c_k) < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che, fissata una tolleranza τ è possibile calcolare il numero di iterazioni k del metodo di bisezione necessarie per ottenere un'approssimazione c_k della soluzione x^* tale che

$$|c_k - x^*| \leq \tau$$

[1] Notiamo che l'esistenza o meno di una soluzione di $f(x) = 0$ non dipende solo dalla funzione $f(x)$ ma anche dal *dominio* $[a, b]$ di f. Ad esempio, se consideriamo la funzione $f(x) = x^2 - 1$ per $x \in [a, b]$ abbiamo che se $[a, b] = [-2, 2]$, l'equazione $f(x) = 0$ ammette due soluzioni, se $[a, b] = [0, 3]$, l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola soluzioni mentre se $[a, b] = [2, 5]$, l'equazione $f(x) = 0$ non ammette soluzioni.

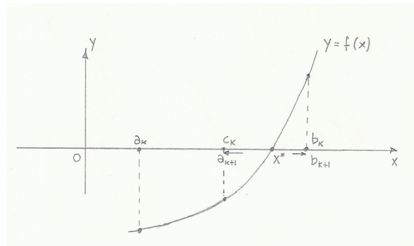

Fig. 1: Metodo di bisezione.

Possiamo infatti calcolare la lunghezza dell'intervallo $[a_k, b_k]$ in termini dell'intervallo assegnato $[a, b]$; infatti

$$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \frac{1}{2^2}(b_{k-2} - a_{k-2}) = ... = \frac{1}{2^{k-1}}(b - a)$$

Dunque il punto medio $c_k = (a_k+b_k)/2$ dell'intervallo $[a_k, b_k]$ è tale che la soluzione x^* appartiene all'intervallo $(c_k - \delta_k, c_k + \delta_k)$ con

$$\delta_k \leq \frac{1}{2}(b_k - a_k) = \frac{1}{2^k}(b - a)$$

Allora, fissata una tolleranza τ, il numero di passi necessari per ottenere un'approssimazione c_k della soluzione x^* con precisione τ è dato da

$$|c_k - x^*| \leq \delta_k \leq \frac{1}{2^k}(b - a) \leq \tau$$

che comporta

$$k \geq \left\lceil \log_2 \left(\frac{b - a}{\tau} \right) \right\rceil \tag{2}$$

dove con il simbolo $\lceil y \rceil$ si denota il più piccolo intero superiore al numero reale y.

Ad esempio, si vuole calcolare, con il metodo di bisezione, la soluzione x^* dell'equazione

$$f(x) = x^2 - 78.8 = 0$$

ovvero la radice quadrata del numero 78.8. Il valore di x^* è $x^* = \sqrt{78.8} = 8.876936408....$
Calcoliamo il numero di iterazioni necessarie per ottenere un'approssimazione c_k della soluzione x^* con una precisione di $\tau = 10^{-4}$. Si pone $a = 6$ e $b = 12$.
Dalla formula (2) si ha

$$\log_2 \left(\frac{12 - 6}{10^{-4}} \right) = \log_2 (60000) = 15.8726...$$

dunque sono necessarie $k = 16$ iterazioni per calcolare la soluzione con una precisione di 10^{-4}.
Le prime 8 iterazioni del metodo di bisezione sono riportate in tabella

k	a_k	b_k	c_k	$f(c_k)$
1	6	12	9.0	2.2
2	6	9	7.5	-22.5499
3	7.5	9	8.25	-10.737499
4	8.25	9	8.625	-4.409375
5	8.625	9	8.8125	-1.139843
6	8.8125	9	8.90625	0.521289
7	8.8125	8.90625	8.859375	-0.311474
8	8.859375	8.90625	8.882812	0.104357

Nella pratica, il calcolo del punto di mezzo del segmento $[a_k, b_k]$ non si calcola con la formula

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2} \tag{3}$$

bensì con la formula

$$c_k = a_k + \frac{b_k - a_k}{2}$$

L'esempio seguente mostra che, quando a_k e b_k sono molto vicini, lavorando nell'aritmetica dei numeri finiti, la formula (3) può produrre un punto di mezzo esterno all'intervallo.
Infatti, supponiamo di lavorare in base 10 con 3 cifre a disposizione per la mantissa e siano $a_k = 0.983$ e $b_k = 0.986$ i valori degli estremi dell'intervallo $[a_k, b_k]$.
Utilizziamo la formula (3) per il calcolo del punto di mezzo c_k. Il calcolo di $0.983 + 0.986$ fornisce il numero reale 1.969 ovvero il numero finito $0.196 \cdot 10^1$. La divisione tra numeri finiti $0.196 \cdot 10^1 / 0.200 \cdot 10^1$ fornisce il numero reale 0.98 ovvero il numero finito 0.980 che è esterno ad $[a_k, b_k]$. Eseguendo invece i calcoli nell'aritmetica del calcolatore di $a_k + (b_k - a_k)/2$ si ottiene il numero finito 0.984 interno ad $[a_k, b_k]$.

Scriviamo ora i metodo di bisezione in forma algoritmica utilizzando le variabili a, b e c per memorizzare, rispettivamente, a_k, b_k e c_k. Abbiamo la seguente *pseudo-codifica*:

```
Dati gli estremi dell'intervallo a, b e la tolleranza τ

s ← ⌈log₂((b − a)/τ)⌉

| per k = 1, 2, ..., s
|
| c ← a + (b−a)/2
|
| se f(c) = 0  stop
|
| | se f(a) ∗ f(c) < 0  allora
| |
| |     b ← c
| |
| | altrimenti
| |
| |     a ← c

Risultato: c
```

La condizione $f(c) = 0$ non è in pratica verificabile mediante i numeri finiti. Questa condizione si sostituisce con

$$\text{se } |f(c)| \leq \tau \quad \text{stop}$$

dove τ è la tolleranza prefissata.

2 Metodo di Newton

Si considera il problema della determinazione degli zeri di una funzione $f(x)$, ovvero delle soluzioni dell'equazione

$$f(x) = 0 \tag{4}$$

dove $f(x)$ è una funzione a valori reali e definita nell'intervallo chiuso $[a, b]$ dell'asse reale.
Sia $\Phi(x)$ una funzione qualsiasi che soddisfa la condizione

$$0 < |\Phi(x)| < \infty \qquad \forall x \in [a, b] \tag{5}$$

Definita la funzione

$$g(x) = x - \Phi(x)f(x) \tag{6}$$

si vede che i punti fissi in $[a, b]$ del problema

$$x = g(x) \tag{7}$$

sono le soluzioni dell'equazione (4) e viceversa, ovvero i problemi (4) e (7) con $g(x)$ come in (6) sono equivalenti.

Dimostrazione. Si suppone che il punto x^* sia tale che $f(x^*) = 0$, allora vale $g(x^*) = x^* - \Phi(x^*)f(x^*) = x^*$ in quanto $|\Phi(x)| < \infty$. Dunque x^* è punto fisso di $g(x)$.
Viceversa, sia x^* punto fisso di $g(x)$, allora $x^* = g(x^*)$ implica $\Phi(x^*)f(x^*) = 0$. Questa equazione è soddisfatta solo se $f(x^*) = 0$ poiché $|\Phi(x)| > 0$. Dunque x^* è uno zero di $f(x)$. ♯

Una classe di metodi per risolvere il problema (4) è allora data dal metodo delle approssimazioni successive

$$x_{k+1} = g(x_k) \tag{8}$$

dove la funzione $g(x)$ ha espressione come in (6). Si ha la formula

$$x_{k+1} = x_k - \Phi(x_k)f(x_k)$$

Considerando diverse espressioni per la funzione $\Phi(x)$ che soddisfano la condizione (5) si hanno diversi metodi per la risoluzione del problema (4).

In precedenza abbiamo visto dal *teorema di convergenza locale* del metodo delle approssimazioni successive che la successione degli iterati x_0, x_1, x_2,... generata con il metodo (8), converge se la funzione $g(x)$ è continua e derivabile in un intorno del punto fisso x^* e se in tale intorno $|g'(x)| < 1$.
Allora, se potessimo trovare una funzione $\Phi(x)$, soddisfacente (5), per cui $g'(x^*) = 0$,[2] disporremmo di un metodo iterativo (8) per determinare una soluzione x^* dell'equazione (4). Per trovare tale funzione $\Phi(x)$ calcoliamo la derivata di $g(x)$. Dalla (6) abbiamo

$$g'(x) = 1 - \Phi'(x)f(x) - \Phi(x)f'(x)$$

Essendo x^* una soluzione dell'equazione (4), si ottiene

$$g'(x^*) = 1 - \Phi'(x^*)f(x^*) - \Phi(x^*)f'(x^*) = 1 - \Phi(x^*)f'(x^*)$$

Sia $f'(x^*) \neq 0$; si ha $g'(x^*) = 0$ se

$$\Phi(x^*) = 1/f'(x^*)$$

[2] Se $g'(x^*) = 0$ e $g'(x)$ è continua allora esiste un intorno di x^* tale che $|g'(x)| < 1$ per x punto dell'intorno.

Un modo ovvio per soddisfare quest'ultima equazione è scegliere in ogni punto x

$$\Phi(x) = 1/f'(x) \tag{9}$$

Con questa scelta, il metodo delle approssimazioni successive (8) diventa

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{10}$$

Il metodo iterativo (10) si chiama **metodo di Newton** (1690).[3]

La formula (10) ha una semplice interpretazione geometrica. Nel piano cartesiano xy si considera la curva di equazione $y = f(x)$ e la retta tangente ad essa nel punto $P_k = (x_k, f(x_k))$. Perciò, l'equazione della tangente alla curva in P_k è

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k)$$

Questa tangente interseca l'asse delle ascisse nel punto $(x_{k+1}, 0)$, ove x_{k+1} soddisfa la relazione

$$0 - f(x_k) = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

cioè x_{k+1} ha l'espressione (10). (Si veda figura 2).

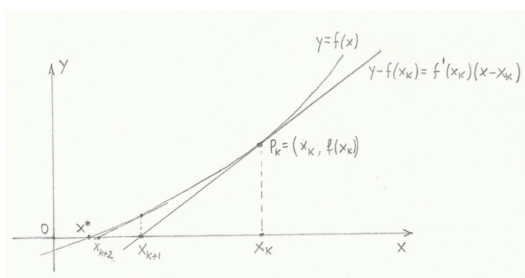

Fig. 2: Interpretazione geometrica del metodo di Newton.

La convergenza del metodo di Newton si basa sul *teorema di convergenza locale* del metodo delle approssimazioni successive. Dal valore in (9) della funzione $\Phi(x)$ abbiamo

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad\qquad g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

e dunque, le ipotesi del *teorema di convergenza locale* del metodo delle approssimazioni successive sono soddisfatte se

1) $f(x) = 0$ ammette soluzione x^*;

2) $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ sono continue in un intervallo contenente la soluzione x^*;

3) $f'(x^*) \neq 0$.

[3] Altrimenti denotato come *metodo di Newton-Raphson* o *metodo delle tangenti*.
Isaac Newton (1643-1727) matematico, fisico e astronomo inglese e Joseph Raphson (1648-1715) matematico inglese.

Infatti la condizione di continuità di $f(x)$ e della sua derivata prima e derivata seconda assicura la continuità di $g'(x)$. La condizione $f'(x^*) \neq 0$ garantisce $g'(x^*) = 0$ e dunque $|g'(x)| < 1$ per x appartenente ad un intorno di x^*, $[x^* - \rho, x^* + \rho]$ con $\rho > 0$; in tale intorno di x^*, la derivata prima di f "continua" ad essere diversa da zero.
Pertanto,

> *esiste un numero $\rho > 0$ tale che, per ogni iterato iniziale $x_0 \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$, gli iterati x_k generati dal metodo di Newton* (10) *appartengono a $[x^* - \rho, x^* + \rho]$ e convergono a x^*, unica soluzione in $[x^* - \rho, x^* + \rho]$.*

3 Convergenza quadratica del metodo di Newton

Analizziamo ora la *velocità* con cui le successioni (convergenti) convergono al loro punto limite. Definiamo l'**ordine di convergenza** della successione per una successione convergente.

Sia $\{x_k\}$ una successione convergente a x^*. Se esiste un numero $p \geq 1$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = c$$

con $0 < c \leq 1$ per $p = 1$ e $c > 0$ per $p > 1$, allora si dice che la successione $\{x_k\}$ ha ordine di convergenza p.

La costante c è detta **costante asintotica dell'errore**.
Per $p = 1$ si ha la *convergenza lineare* della successione $\{x_k\}$, per $p > 1$ si ha la *convergenza superlineare* della successione $\{x_k\}$, in particolare per $p = 2$ la convergenza si dice *quadratica* e per $p = 3$ si dice *cubica*.
Si dice anche che se $p = 1$ la successione ha *velocità di convergenza lineare*, se $p = 2$ la successione ha *velocità di convergenza quadratica* etc.

Si osserva che una successione $\{x_k\}$ che converge quadraticamente riduce l'errore (che sarà comunque nullo solo all'infinito) più rapidamente di una successione che converge linearmente.

Per evidenziare ciò si considera l'esempio seguente: supponiamo $c = 0.5$, e sia $\{\tilde{x}_k\}$ una successione che converge linearmente al punto x^* e sia $\{\hat{x}_k\}$ una successione convergente quadraticamente a x^*.
Posto $\tilde{e}_k = |\tilde{x}_k - x^*|$ e $\hat{e}_k = |\hat{x}_k - x^*|$ con $\tilde{e}_0 = \hat{e}_0 = 0.1$, ovvero le due successioni hanno lo stesso iterato iniziale, si hanno i seguenti valori per l'errore per $k = 1, ..., 5$:

$$\begin{array}{ll}
\tilde{e}_1 = 0.5 \cdot 0.1 = 5.0 \cdot 10^{-2} & \hat{e}_1 = 0.5 \cdot (0.1)^2 = 5.0 \cdot 10^{-3} \\
\tilde{e}_2 = 0.5 \cdot (5.0 \cdot 10^{-2}) = 2.5 \cdot 10^{-2} & \hat{e}_2 = 0.5 \cdot (5.0 \cdot 10^{-3})^2 = 1.25 \cdot 10^{-5} \\
\tilde{e}_3 = 0.5 \cdot (2.5 \cdot 10^{-2}) = 1.25 \cdot 10^{-2} & \hat{e}_3 = 0.5 \cdot (1.25 \cdot 10^{-5})^2 = 7.8125 \cdot 10^{-11} \\
\tilde{e}_4 = 0.5 \cdot (1.25 \cdot 10^{-2}) = 6.25 \cdot 10^{-3} & \hat{e}_4 = 0.5 \cdot (7.8125 \cdot 10^{-11})^2 = 3.05175 \cdot 10^{-21} \\
\tilde{e}_5 = 0.5 \cdot (6.25 \cdot 10^{-3}) = 3.125 \cdot 10^{-3} & \hat{e}_5 = 0.5 \cdot (3.05175 \cdot 10^{-21})^2 = 4.6566 \cdot 10^{-42}
\end{array}$$

Come si vede, una successione che converge quadraticamente dopo pochissime iterazioni ha ridotto notevolmente l'errore. Abbiamo che una riduzione consistente dell'errore equivale ad una riduzione altrettanto consistente della differenza tra due iterati consecutivi della successione[4] e dunque un minor numero di iterazioni necessarie per calcolare un'approssimazione del valore limite x^* con una tolleranza assegnata.

Si può dimostrare che sotto le ipotesi **1)**, **2)** e **3)** del paragrafo precedente,

il metodo di Newton ha velocità di convergenza quadratica e la costante asintotica dell'errore è $c = f''(x^*)/(2f'(x^*))$.

Per provare questo risultato sulla velocità di convergenza del metodo di Newton si fa uso della *formula di Taylor*.

[4] Si vedano le formule di maggiorazione dell'errore e della differenza tra due iterati del Teorema 2 della *Lezione 3 "Calcolo del punto fisso"*.

Dimostrazione. Dimostriamo la velocità di convergenza quadratica. Suppuniamo che la funzione f sia continua assieme alle sue derivate prima e seconda in un intorno della soluzione x^*. Per la formula di Taylor si ha

$$f(x^*) = f(x_k) + (x^* - x_k)f'(x_k) + \frac{1}{2}(x^* - x_k)^2 f''(\xi_k)$$

dove ξ_k è un punto intermedio tra x_k e x^*. Poiché $f(x^*) = 0$ abbiamo

$$-f(x_k) - (x^* - x_k)f'(x_k) = \frac{1}{2}(x^* - x_k)^2 f''(\xi_k)$$

cioè

$$-f(x_k) + (x_k - x^*)f'(x_k) = \frac{1}{2}(x_k - x^*)^2 f''(\xi_k) \tag{11}$$

Dall'equazione di Newton (10) abbiamo

$$f'(x_k)(x_{k+1} - x^*) = f'(x_k)(x_k - x^*) - f(x_k)$$

che sostituendo in (11) quest'ultima diventa

$$f'(x_k)(x_{k+1} - x^*) = \frac{1}{2}(x_k - x^*)^2 f''(\xi_k)$$

Essendo $f'(x)$ diversa da zero in un intorno di x^* contenente x_k, la relazione sopra diventa

$$\frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^2} = \frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}$$

Poiché

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^* \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} \xi_k = x^*$$

ed inoltre, poiché le funzioni $f'(x)$ e $f''(x)$ sono continue vale che

$$\lim_{k\to\infty} f'(x_k) = f'(x^*) \qquad \text{e} \qquad \lim_{k\to\infty} f''(\xi_k) = f'(x^*)$$

allora

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

$\sharp$

Si può dimostrare[5] che

> *se le funzioni $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ sono continue in un intervallo contenente la soluzione x^* e $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) = 0$ (ovvero lo zero x^* di $f(x)$ ha molteplicità uguale a 2), allora il metodo di Newton* (10) *è ancora localmente convergente ma la velocità di convergenza è lineare.*

[5] La dimostrazione è riportata in *Appendice*.

4 Convergenza globale

I teoremi dei precedenti paragrafi assicurano che il metodo di Newton genera una successione di iterati x_k convergenti ad una soluzione x^* dell'equazione (4) se si prende l'iterato iniziale x_0 "sufficientemente vicino" a x^* (**convergenza locale**). La frase "sufficientemente vicino" non è ben definita ed, invero, il metodo di Newton nella pratica genera spesso una successione divergente oppure, se convergente, convergente ad una soluzione della (4) diversa da x^*. (A tal riguardo si prendano in esame le situazioni illustrate in figura 3).
Notiamo che se $|f'(x_k)|$ è molto piccolo, abbiamo che x_{k+1} è molto distante da x_k. Il *passo di Newton* $x_{k+1} - x_k$ è molto grande. Per $k = 0$, x_1 molto distante da x_0 ($|f'(x_0)|$ molto piccolo) può essere un'indicazione che x_0 non è stato preso "sufficientemente" vicino alla soluzione.
Allora è utile disporre di teoremi che assicurano la convergenza della successione degli iterati generati da (10) qualunque sia la scelta dell'iterato iniziale x_0 in un intervallo $[a, b]$ (**convergenza globale**). Un teorema di questo tipo è quello che andiamo ad enunciare. La dimostrazione del teorema è riportata in *Appendice*.

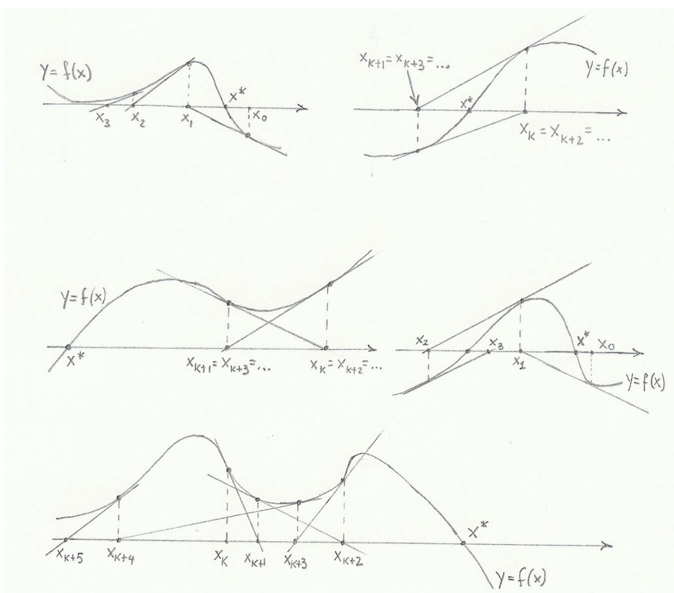

Fig. 3: Metodo di Newton in differenti casi.

Teorema sulla convergenza globale *Siano $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ continue in un intervallo chiuso $[a, b]$ dell'asse reale. Inoltre, siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

1. $f(a) < 0$, $f(b) > 0$
2. $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$
3. $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$
4. $|f(b)| \leq (b - a)|f'(b)|$

allora, il metodo di Newton (10) genera una successione di iterati x_k che converge all'unica soluzione x^* dell'equazione $f(x) = 0$ appartenente all'intervallo $[a, b]$ per ogni scelta dell'iterato iniziale x_0 in $[a, b]$.

Si osserva che la condizione *2* impone che la funzione $f(x)$ sia sempre crescente o decrescente. La condizione *3* impone che la funzione $f(x)$ sia **concava**.

Per definizione,

> *una funzione φ definita su un intervallo I dell'asse reale ($I \subseteq \mathbb{R}$) a valori reali si dice concava se*
>
> $$\varphi(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)f(y) \qquad \forall x, y \in I, \qquad \forall \alpha \in [0,1]$$
>
> *Se la disuguaglianza vale in senso stretto allora φ si dice strettamente concava.*

Se la relazione vale con il segno di $\leq$ allora la funzione φ si dice *convessa* (o *strettamente convessa* se la relazione vale con il segno $<$). Se la relazione vale con il segno di uguaglianza allora φ è *lineare* (una retta), $\varphi(x) = mx + q$.

La condizione *4* impone che il punto di intersezione della tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto $(b, f(b))$ con l'asse delle ascisse sia interno all'intervallo $[a, b]$. Infatti la retta tangente alla curva in $(b, f(b))$ interseca l'ascissa nel punto $(x, 0)$ ed ha equazione $f(b) - 0 = f'(b)(b - x)$ cioè $f(b) = f'(b)(b-x)$; sostituendo questa espressione nella *4* abbiamo $|f'(b)(b-x)| \leq (b-a)|f'(b)|$ ovvero $|b-x| \leq (b-a)|$ (vedi figura 4). La condizione *1*, per il *teorema degli zeri di una funzione continua* assicura l'esistenza di un punto $x^* \in (a, b)$ per cui $f(x^*) = 0$, e per la condizione *2*, questo punto è unico.

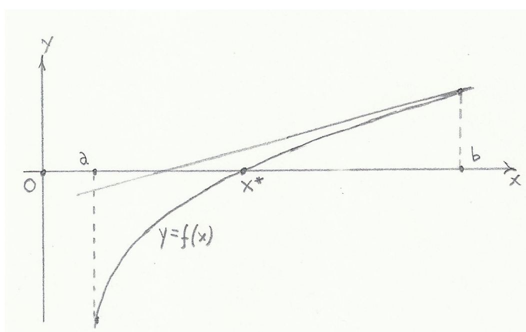

Fig. 4: Convergenza globale per il metodo di Newton.

Il teorema resta valido anche quando le condizioni *1*, *3*, *4* sono sostituite da uno dei seguenti gruppi di condizioni

1. $f(a) < 0$, $f(b) > 0$

3. $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

4. $|f(a)| \leq (b-a)|f'(a)|$

1. $f(a) > 0$, $f(b) < 0$

3. $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

4. $|f(b)| \leq (b-a)|f'(b)|$

1. $f(a) > 0,\ f(b) < 0$

3. $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

4. $|f(a)| \leq (b-a)|f'(a)|$

Un'applicazione del risultato di convergenza globale del metodo di Newton è il calcolo di una radice quadrata di un numero positivo. Sia r tale numero, dobbiamo calcolare $x^* = \sqrt{r}$. Avremo allora che x^* è la soluzione dell'equazione non lineare,

$$x^2 = r \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 - r = 0$$

con $x > 0$. La funzione $f(x) = x^2 - r$ soddisfa le ipotesi del *teorema di convergenza globale* per il secondo gruppo di condizioni. Infatti il grafico della funzione $f(x)$ è l'arco di parabola (si considera solo $x > 0$) e consideriamo a positivo, ad esempio un numero "molto vicino" a 0, cosicché $f(a) < 0$ e b qualsiasi, ad esempio un numero "molto grande", cosicché $f(b) > 0$. Si vede immediatamente che le ipotesi *1*, *2* e *3* sono rispettate. Per l'ipotesi *4* abbiamo

$$b \geq \frac{|f(a)|}{|f'(a)|} + a \tag{12}$$

Pertanto, scelto un valore $a > 0$ basta utilizzare un valore b che soddisfa la (12). Si noti che per b che tende a infinito, la disuguaglianza (12) continua a valere. Pertanto, scelto arbitrariamente un iterato iniziale x_0, il metodo di Newton applicato all'equazione $x^2 - r = 0$ genera una successione di iterati convergente.

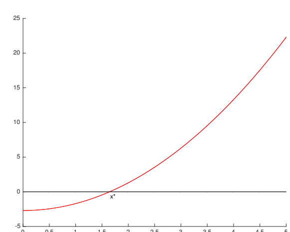

Fig. 5: Grafico di $f(x) = x^2 - r$ con $x^* = \sqrt{r}$.

Scriviamo ora il metodo di Newton riferito al calcolo della radice quadrata di r. Il metodo (10) si scrive

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - r}{2x_k} \qquad \Longrightarrow \qquad x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{r}{x_k}\right)$$

La formula del metodo di Newton scritta sopra era conosciuta dagli antichi come **metodo babilonese**. L'idea alla base del metodo babilonese era geometrica. Si interpreta il numero r come l'area di un rettangolo; sia x_k un qualsiasi valore che viene attribuito a uno dei due lati del rettangolo, di conseguenza l'altro lato avrà lunghezza x_k/r. Facendo la media aritmetica dei due lati si ottiene una misura intermedia x_{k+1} che, a sua volta è interpretato come un lato di un nuovo rettangolo sempre di area r. Questo rettangolo avrà due lati di lunghezza x_{k+1} e r/x_{k+1}. Si itera poi il procedimento ottenendo un nuovo lato ancora. Allora, per k che tende a infinito, il lato x_k e il lato r/x_k, tenderanno ad avere la stessa lunghezza che sarà $\sqrt{r}$. L'idea del metodo babilonese consiste, dunque, nel determinare l'approssimazione di un quadrato utilizzando rettangoli con la stessa area. Si noti che, nel metodo babilonese, la lunghezza del primo lato x_0 è scelta arbitrariamente.

5 Scrittura dell'algoritmo

Quando si realizza il metodo di Newton su un calcolatore occorre fornire un criterio che permetta di arrestare la costruzione degli iterati x_k. Il criterio che generalmente viene adottato fa riferimento al concetto di "buona approssimazione" o di "approssimazione accettabile" della soluzione x^* dell'equazione (4) se contemporaneamente si verificano i due criteri

$$|f(x_{k+1})| \leq \tau_1 \qquad |x_{k+1} - x_k| \leq \tau_2 \tag{13}$$

oppure i criteri relativi

$$|f(x_{k+1})| \leq \tau_1 \, |f(x_0)| \qquad |x_{k+1} - x_k| \leq \tau_2 \, |x_{k+1}| \tag{14}$$

dove τ_1 e τ_2 sono tolleranze prefissate omunque maggiori della precisione di macchina *eps*.

La scelta delle tolleranze è una questione molto delicata, come è messo in evidenza in figura 6. Il grafico a sinistra di figura 6 illustra che x_k può considerarsi una approssimazione accettabile di x^* pur non essendo $|f(x_k)|$ un numero "piccolo".

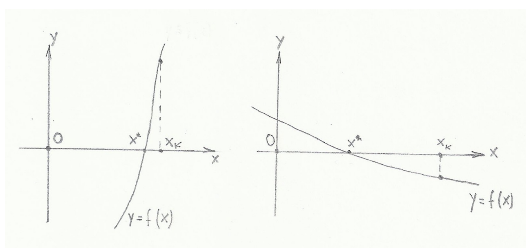

Fig. 6: Funzioni $f(x)$ con differente pendenza.

Mentre, il grafico a destra di figura 6 illustra che, pur essendo $|f(x_k)|$ un numero molto "piccolo", l'iterato x_k non può considerarsi una approssimazione accettabile di x^*.
Pertanto, assegnato l'iterato iniziale x_0 e una tolleranza prefissata τ, mediante la formula (10) si procede alla costruzione degli iterati mediante la valutazione della funzione f e della funzione f', derivata di f, finché non si arriva ad un iterato x_{k+1} che soddisfa un criterio per l'arresto dell'algoritmo che tenga conto sia della decrescita di $|f(x_{k+1})|$ che della riduzione di $|x_{k+1} - x_k|$ come i criteri (13) e (14). Ricordiamo che la diminuzione della differenza in valore assoluto tra due iterati successivi equivale alla diminuzione dell'errore. L'iterato che soddisfa il criterio di arresto è l'approssimazione della soluzione x^*.
Talvolta si può prendere come iterato iniziale x_0 una approssimazione poco accurata della soluzione x^* ottenuta con il metodo di bisezione.
Dunque, il metodo di Newton si scrive come segue:

Dato l'*iterato iniziale* x_0 e la *tolleranza* τ

per $k = 0, 1, 2, ...$

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

se $|x_{k+1} - x_k| \leq \tau$ e $|f(x_{k+1})| \leq \tau$ stop

In una implementazione del metodo, osserviamo che ad ogni iterazione sono coinvolti soltanto due valori x_k e x_{k+1} della successione; dunque, si possono usare due variabili che denotiamo con x_C (*valore corrente*) e con x_N (*valore nuovo*) per memorizzare rispettivamente x_k e x_{k+1}.
All'iterazione k nella "variabile corrente" x_C è contenuto il valore x_k; si calcola la "variabile nuova" x_N (che conterrà dunque x_{k+1}) valutando le funzioni f e f' in x_C; si controlla il criterio di arresto e, se questo criterio è verificato allora l'algortimo si arresta e in x_N c'è l'approssimazione della soluzione x^* e $k+1$ è il numero di iterazioni richiesto per soddisfare tale criterio; se invece il criterio non è verificato allora si "passa" all'iterazione successiva ma prima si assegna alla variabile x_C il valore di x_N che diventa il valore corrente dell'iterazione successiva. Inizialmente, alla variabile x_C è assegnato il valore x_0.
Possiamo allora riscrivere il metodo di Newton in modo algoritmico con la seguente *pseudo-codifica*:

Dato l'*iterato iniziale* x_0 e la *tolleranza* τ

$x_C \leftarrow x_0$

per $k = 1, 2, ...$

$x_N \leftarrow x_C - \frac{f(x_C)}{f'(x_C)}$

se $|x_N - x_C| \leq \tau$ e $|f(x_N)| \leq \tau$ stop

$x_C \leftarrow x_N$

Risultato: x_N, k

6 Metodo di Newton per il calcolo degli estremi liberi di una funzione

Il metodo di Newton può essere usato per il calcolo degli estremi liberi, ovvero dei minimi e dei massimi di una funzione di una variabile reale a valori reali, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si richiamano le definizioni di minimo e massimo e le condizioni di esistenza di un minimo e di un massimo (*condizioni di ottimalità*).

- Un punto $x^* \in \mathbb{R}$ si dice essere un punto di **minimo locale** (o di minimo relativo) di una funzione f se esiste $\rho > 0$ tale che

  $$f(x^*) \leq f(x) \qquad \forall x \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$$

  Se $f(x^*) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, allora x^* si dice punto di **minimo globale** (o di minimo assoluto).

  Se la disuguaglianza vale in senso stretto, allora x si dice essere un punto di minimo in senso stretto oppure un punto di *minimo proprio*.

- Un punto $x^* \in \mathbb{R}$ si dice essere un punto di **massimo locale** (o di massimo relativo) di una funzione f se esiste $\rho > 0$ tale che

  $$f(x^*) \geq f(x) \qquad \forall x \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$$

  Se $f(x^*) \geq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, allora x^* si dice punto di **massimo globale** (o di massimo assoluto)

  Se la disuguaglianza vale in senso stretto, allora x si dice essere un punto di massimo in senso stretto oppure un punto di *massimo proprio*.

- Notiamo che calcolare il massimo (locale o assoluto) di una funzione f su $\mathbb{R}$, ovvero risolvere il problema

  $$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

  equivale al calcolo del minimo della funzione f cambiata di segno, ovvero a risolvere il problema

  $$\min_{x \in \mathbb{R}} (-f(x))$$

  Pertanto, si parlerà di *minimizzazione di una funzione* o del calcolo del minimo di una funzione, tenendo presente che se il problema è il calcolo del massimo di una funzione f questo viene riformulato come il calcolo del minimo della funzione $-f$.

  Alcune considerazione sul punto di minimo.

  - Un punto di minimo globale è anche un punto di minimo locale.
  - Se la funzione f è lineare, $f(x) = mx + q$, allora non esiste il minimo (locale o globale) oppure ci sono infiniti minimi locali che sono anche globali ($f(x) = q$).
  - La funzione $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ammette infiniti minimi locali che sono anche globali, mentre la funzione $f(x) = x\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ammette infiniti minimi locali e nessun minimo globale (vedi figura 7).

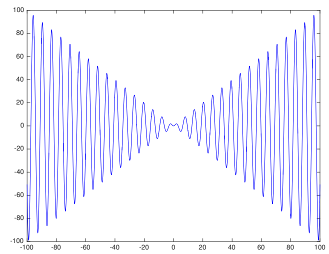

Fig. 7: Grafico della funzione $f(x) = x\,sin(x)$ tra -100 e 100.

- **Condizione necessaria del primo ordine.** Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con derivata prima continua, se x^* è punto di minimo locale, allora
$$f'(x^*) = 0$$
Poiché il minimo di f equivale al massimo di $-f$, la condizione necessaria del primo ordine affinché x^* sia un punto di massimo locale di f è ancora $f'(x^*) = 0$.

  Se un punto x^* soddisfa la condizione $f'(x^*) = 0$, tale punto si dice essere **punto di stazionarietà**. Tale punto, ovviamente può essere un punto di minimo, di massimo o un punto di flesso orizzontale.

- **Condizione necessaria del secondo ordine.** Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con derivate prima e seconda continue, se x^* è un punto di minimo locale, allora
$$\begin{array}{rcl} f'(x^*) & = & 0 \\ f''(x^*) & \geq & 0 \end{array}$$

- **Condizione sufficiente del secondo ordine.** Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con derivate prima e seconda continue e sia $x^* \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x^*) = 0$ e $f''(x^*) > 0$ allora x^* è un punto di minimo locale.

  Poiché il minimo di f equivale al massimo di $-f$, notiamo che la condizione sulla derivata prima ($f'(x^*) = 0$) è la stessa per x^* punto di minimo o di massimo di f mentre la condizione sulla derivata seconda diventa $f''(x^*) \leq 0$ (condizione necessaria) e $f''(x^*) < 0$ (condizione sufficiente) per x^* punto di massimo.

Il metodo di Newton può essere applicato per calcolare un punto di stazionarietà di una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si utilizza la condizione necessaria del primo ordine. Si calcola una soluzione dell'equazione $f'(x) = 0$ e successivamente si valuta la derivata seconda di f nella soluzione calcolata. Se questa è maggiore di zero allora la soluzione calcolata è un punto di minimo locale di f, se invece è minore di zero allora la soluzione calcolata è un punto di massimo locale di f.
L'equazione del metodo di Newton per il calcolo di un punto di stazionarietà di f è allora
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$
La convergenza locale del metodo è garantita dai risultati dei paragrafi 2 e 3 considerando $f'(x)$ invece che $f(x)$ e, conseguentemente, $f''(x)$ e $f'''(x)$ al posto, rispettivamente, di $f'(x)$ e $f''(x)$. Possiamo usare (13) oppure (14) come criterio di arresto con $f'(x)$ invece di $f(x)$.

7 Appendice: dimostrazioni dei teoremi

Dimostriamo il risultato sulla velocità di convergenza lineare del metodo di Newton in presenza di una soluzione con molteplicità maggiore di 1 e il teorema sulla convergenza globale del metodo di Newton. Riportiamo anche l'enunciato dei teoremi.

Teorema sulla velocità di convergenza lineare. *Siano date le seguenti ipotesi:*

1) $f(x) = 0$ *ammette soluzione* x^**;*

2) $f(x)$*,* $f'(x)$ *e* $f''(x)$ *sono continue in un intervallo contenente la soluzione* x^**;*

3) $f'(x^*) = 0$*.*

allora esiste $\rho > 0$ *tale che per ogni iterato iniziale* $x_0 \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$*, gli iterati* x_k *generati dal metodo di Newton* (10) *appartengono a* $[x^* - \rho, x^* + \rho]$ *e convergono a* x^* *unica soluzione in* $[x^* - \rho, x^* + \rho]$ *con velocià di convergenza lineare e costante asintotica di errore* $c = g'(x^*) = 1/2$*.*

Dimostrazione. Sia $f(x)$ una funzione continua assieme alle sue derivate prima e seconda; sia x^* tale che $f(x^*) = 0$ e $f'(x^*) = 0$, allora si può scrivere $f(x) = (x - x^*)^2 h(x)$ con $h(x)$ funzione continua assieme alle sue derivate prima e seconda e $h(x^*) \neq 0$.
Sostituendo questa espressione di $f(x)$ e delle sue derivate $f'(x)$ e $f''(x)$ in quella di $g'(x)$, $g'(x) = f(x)f''(x)/f'(x)^2$, dopo calcoli (dividiamo il numeratore e il denominatore per $(x-x^*)^2 4h(x)^2$) si ottiene

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2} + (x - x^*)\frac{h'(x)}{h(x)} + (x - x^*)^2 \frac{h''(x)}{4\,h(x)}}{\left(1 + (x - x^*)\frac{h'(x)}{2\,h(x)}\right)^2}$$

La funzione $g'(x)$ è continua e $g'(x^*) = 1/2$. Esiste allora un numero $\rho > 0$ per cui $g'(x) \neq 0$ e $|g'(x)| < 1$ per $x \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$. Dal *teorema di convergenza locale* del metodo delle approssimazioni successive abbiamo che il metodo di Newton (10) genera, a partire da ogni iterato iniziale $x_0 \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$, una successione di iterati x_k convergente alla soluzione x^*.
Per esaminare la velocità di convergenza, applicando il teorema di Lagrange si ha

$$x_{k+1} - x^* = g(x_k) - g(x^*) = g'(\xi_k)(x_k - x^*) \tag{15}$$

dove ξ_k è un punto intermedio tra x_k e x^*, da cui

$$\frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = g'(\xi_k)$$

Poiché

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^* \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} \xi_k = x^*$$

Inoltre, poiché la funzione $g'(x)$ è continua vale che

$$\lim_{k\to\infty} g'(\xi_k) = g'(x^*)$$

Quindi dalla (15)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = g'(x^*)$$

♯

Questo risultato si generalizza per zeri x^* di molteplicità p con l'ipotesi che la funzione f sia continua assieme alle sue derivate fino all'ordine p. In tal caso $f(x) = (x - x^*)^p h(x)$ e si ottiene $g'(x^*) = 1 - 1/p$.

Teorema sulla convergenza globale. *Siano $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ continue in un intervallo chiuso $[a,b]$ dell'asse reale. Inoltre, siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

1. $f(a) < 0,\ f(b) > 0$
2. $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$
3. $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a,b]$
4. $|f(b)| \leq (b-a)|f'(b)|$

allora, il metodo di Newton (10) *genera una successione di iterati x_k che converge all'unica soluzione x^* dell'equazione $f(x) = 0$ appartenente all'intervallo $[a,b]$ per ogni scelta dell'iterato iniziale x_0 in $[a,b]$.*

Dimostrazione. La figura 4 fornisce un esempio di funzione che soddisfa tutte le suddette condizioni.
Sia x^* l'unica soluzione di $f(x) = 0$ in $[a,b]$.
Supponiamo che l'iterato x_0 appartenga all'intervallo $[a,x^*]$.
Essendo $f(x)$ negativa e crescente in $[a,x^*)$, si ha

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \geq x_0$$

Usando il teorema di Lagrange, si ottiene

$$-f(x_0) = f(x^*) - f(x_0) = (x^* - x_0)f'(\xi) \qquad \text{con} \quad \xi \in (x_0, x^*)$$

Per le condizioni *2* e *3* la funzione $f'(x)$ è decrescente, quindi $f'(\xi) \leq f'(x_0)$ e

$$-f(x_0) \leq (x^* - x_0)f'(x_0)$$

Perciò,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \leq x_0 + (x^* - x_0) = x^*$$

Così abbiamo provato che, se $x_0 \in [a,x^*]$, il nuovo iterato x_1 appartiene all'intervallo $[x_0,x^*]$.
Applichiamo il *principio di induzione matematica* per dimostrare che, se x_{k-1} appartiene all'intervallo $[x_{k-2},x^*]$ allora il nuovo iterato x_k appartiene all'intervallo $[x_{k-1},x^*]$. Usando il teorema di Lagrange, si ottiene

$$-f(x_{k-1}) = f(x^*) - f(x_{k-1}) = (x^* - x_{k-1})f'(\eta) \qquad \text{con} \quad \eta \in (x_{k-1}, x^*)$$

Per le condizioni *2* e *3*, la funzione $f'(x)$ è decrescente, quindi $f'(\eta) \leq f'(x_{k-1})$ e

$$-f(x_{k-1}) \leq (x^* - x_{k-1})f'(x_{k-1})$$

Perciò,

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \leq x_{k-1} + (x^* - x_{k-1}) = x^*$$

Inoltre, essendo $f(x)$ negativa e crescente in $[a,x^*)$, si ha

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \geq x_{k-1}$$

Pertanto, resta provato che $x_{k-1} \leq x_k \leq x^*$.
Partendo da $x_0 \in [a,x^*]$, il metodo di Newton ha generato una successione di iterati x_0, x_1, x_2, ... crescente e limitata superiormente da x^*. È noto[6] che esiste un limite y di questa successione e che $y \leq x^*$. Dalla relazione

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} x_k - \frac{\lim_{k\to\infty} f(x_k)}{\lim_{k\to\infty} f'(x_k)}$$

[6] Sia $\{a_n\}$ una successione per cui sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(i) $a_n \leq a_{n+1}$ (*successione crescente*);

(ii) esiste un numero M tale che $a_n \leq M$ per ogni n (*successione limitata*).

Allora esiste un numero $L \leq M$ per cui $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e $a_n \leq L$ per ogni n.

ed essendo le funzioni $f(x)$ e $f'(x)$ continue in $[a, b]$, si ottiene

$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} x_k - \frac{f(\lim_{k\to\infty} x_k)}{f'(\lim_{k\to\infty} x_k)}$$

ovvero

$$y = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \qquad \text{con} \quad f'(y) \neq 0$$

Quindi $f(y) = 0$. Il punto y è una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$. Poiché questa equazione ammette un'unica soluzione x^*, deve essere $y = x^*$.

Supponiamo ora, che l'iterato iniziale x_0 appartenga all'intervallo $[x^*, b]$. Usando il teorema di Lagrange, si ottiene

$$f(x_0) = f(x_0) - f(x^*) = (x_0 - x^*)f'(\xi) \qquad \text{con} \quad \xi \in (x^*, x_0)$$

Per le condizioni *2* e *3*, la funzione $f'(x)$ è decrescente, quindi $f'(\xi) \geq f'(x_0)$ e

$$f(x_0) \geq (x_0 - x^*)f'(x_0)$$

Perciò,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \leq x_0 - (x_0 - x^*) = x^*$$

Usando ancora il teorema di Lagrange

$$f(b) - f(x_0) = (b - x_0)f'(\eta) \qquad \text{con} \quad \eta \in (x_0, b)$$

Poiché la funzione $f'(x)$ è decrescente, questa relazione può essere scritta nella forma

$$f(x_0) = f(b) - (b - x_0)f'(\eta) \leq f(b) - (b - x_0)f'(b)$$

Allora

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \geq x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(b)} \geq x_0 - \frac{f(b)}{f'(b)} + (b - x_0)$$

Tenendo conto della condizione *4*, ovvero $f(b) \leq (b - a)f'(b)$, si ottiene:

$$x_1 \geq x_0 - (b - a) + (b - x_0) = a$$

Pertanto, se $x_0 \in (x^*, b]$, si ha

$$a \leq x_1 \leq x^*$$

Per quanto dimostrato nella prima parte del teorema (quando si è supposto $x_0 \in [a, x^*]$), anche questa nuova successione di iterati è convergente a x^*.

♯

8 Domande ed esercizi

1. Descrivere il metodo di bisezione per il calcolo di una soluzione di un'equazione non lineare.

   Considerare anche il calcolo del numero di iterazioni necessarie per ottenere un'approssimazione della soluzione con una tolleranza prefissata.

   Inoltre, scrivere i primi tre iterati x_0, x_1 e x_2 del metodo di bisezione relativamente al problema $f(x) = 0$ con $f(x) = x^3 - x - 1$ e $x \in [1, 2]$.

2. Scrivere il metodo di bisezione in forma algoritmica.

3. Osserviamo che il metodo di bisezione, per il calcolo del punto c_k non utilizza i valori della funzione $f(x)$ in a_k e b_k, ma soltanto il segno di tali valori. Un metodo che calcola il punto intermedio c_k "pesato" con i valori di $f(x)$ negli estremi a_k e b_k è il **metodo della falsa posizione** di Fibonacci[7] o *regula falsi*. Il punto intermedio c_k è calcolato con la formula

$$c_k = \frac{f(b_k)a_k - f(a_k)b_k}{f(b_k) - f(a_k)}$$

   oppure, per evitare il calcolo di eventuali differenze di due numeri "quasi" uguali,

$$c_k = b_k - \frac{f(b_k)}{\frac{f(b_k)-f(a_k)}{b_k-a_k}}$$

   Notiamo che nel piano Cartesiano xy, il numero c_k è uguale all'ascissa del punto in cui la retta passante per i due punti $(a_k, f(a_k))$ e $(b_k, f(b_k))$ interseca l'asse delle ascisse (vedi figura 8).

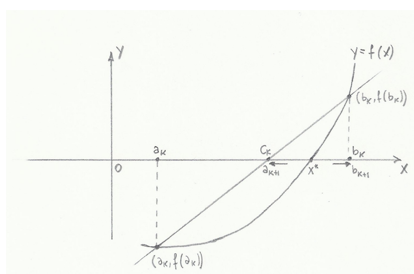

Fig. 8: Metodo della falsa posizione.

   Si scriva il metodo della falsa posizione in forma algoritmica usando il seguente criterio di arresto

$$|f(c_k)| \leq \tau$$

   dove τ è una tolleranza prefissata.

4. Mostrare l'equivalenza tra un problema di punto fisso e il calcolo di uno zero di una funzione.

5. Dedurre il metodo di Newton dalla formula del metodo delle approssimazione successive specificando anche perché il metodo di Newton converge e come (localmente o globalmente) e quali sono le ipotesi sulla funzione f per la convergenza.

6. Definire l'ordine di convergenza di una successione convergente.

7. Scrivere le ipotesi affinché il metodo di Newton converga con velocità di convergenza quadratica e quelle nel caso di zeri con molteplicità maggiore di 1.

[7] Leonardo Pisano detto il Fibonacci (Pisa, 1175-1235) matematico italiano.

8. Fornire un'interpretazione geometrica del metodo di Newton.
9. Scrivere un teorema di convergenza globale del metodo di Newton.
10. Scrivere il metodo di Newton per il calcolo della radice quadrata di un numero e motivare perché si può iniziare da un iterato x_0 qualsiasi.
11. Che cosa è il metodo babilonese e a cosa equivale?
12. Scrivere e motivare il criterio di arresto del metodo di Newton generalmente adottato.
13. Scrivere il metodo di Newton in forma algoritmica.
14. Il metodo di Newton (10) può essere scritto come un **metodo di linearizzazione**. Questi metodi hanno la forma generale
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{a_k}$$
e se $a_k = f'(x_k)$ abbiamo il metodo di Newton. In generale si sceglie a_k come una "buona approssimazione" di $f'(x_k)$.

    Fra i metodi di linearizzazione, la scelta $a_k = a$, costante per ogni iterazione k definisce il il **metodo delle corde parallele**.

    Dal punto di vista geometrico, il metodo delle corde parallele determina l'iterato x_k come punto di intersezione tra l'asse delle ascisse e la retta passante per il punto $(x_k, f(x_k))$ ed avente coefficiente angolare prefissato uguale ad a (si veda figura 9).

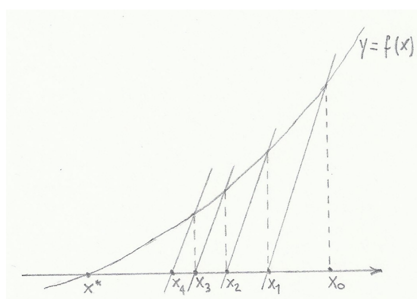

Fig. 9: Metodo delle corde parallele.

    Un metodo delle corde parallele è il **metodo di Newton semplificato** che pone $a = f'(x_0)$. Questo metodo è utilizzato quando è "costoso" il calcolo della derivata di f ad ogni iterazione.

    Il metodo di Newton semplificato ha una convergenza locale e pertanto si deve scegliere x_0 "sufficientemente vicino" ad una soluzione x^*. Il criterio di arresto utilizzato per il metodo di Newton semplificato è lo stesso di quello del metodo di Newton.

    Scrivere il metodo di Newton semplificato in forma algoritmica.

15. Una variante del metodo di Newton è il **metodo delle secanti** in cui si sostituisce in (10) la derivata $f'(x_k)$ con il termine[8]
$$\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k}$$

[8] Se consideriamo la formula di Taylor per $f(x_k - h)$ abbiamo $f(x_k - h) = f(x_k) - hf'(x_k) + h^2 f''(\xi_k)$ con $\xi_k \in (x_k - h, x_k)$. Ponendo $x_{k-1} = x_k - h$, ed esplicitando $f'(x_k)$ si ottiene
$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k} - \frac{h^2}{2} f''(\xi_k)$$

Il metodo delle secanti ha allora espressione

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\left(\frac{x_{k-1} - x_k}{f(x_{k-1}) - f(x_k)}\right)$$

Se si considerano le cose dal punto di vista geometrico, il metodo delle secanti calcola il nuovo iterato x_{k+1} come il punto di intersezione tra l'asse delle ascisse e la retta passante per i punti $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$ (si veda figura 10)).

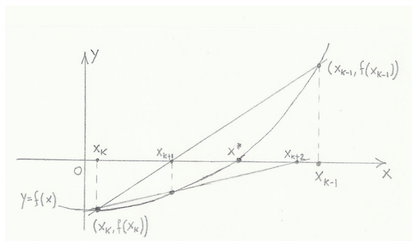

Fig. 10: Metodo delle secanti.

Osserviamo inoltre che per "innescare" il metodo delle secanti si devono avere due iterati "iniziali", x_0 e x_1; dato il punto x_0, l'iterato x_1 può essere calcolato, ad esempio, con il metodo di Newton.

Scrivere il metodo delle secanti in forma algoritmica utilizzando lo stesso criterio di arresto del metodo di Newton.

Suggerimento: la k-esima iterazione del metodo delle secanti coinvolge tre iterati x_{k+1}, x_k e x_{k-1}. Si utilizzino tre variabili x_N (*valore nuovo*) per x_{k+1}, x_C (*valore corrente*) per x_k e x_V (*valore vecchio*) per x_{k-1}.

16. Si scriva il metodo di Newton per il calcolo di un minimo locale di una funzione f di una variabile reale a valori reali e fornire le ipotesi su f per la convergenza del metodo di Newton specificando se la convergenza è locale o globale. Inoltre, come facciamo a sapere se il valore ottenuto con il metodo di Newton è un'approssimazione di un minimo locale, di un massimo locale o di un punto di stazionarietà?