

2003年国家精品课程《自动控制原理》主干教材

2008年自动控制系列课程国家优秀教学团队精品教材

2009年《控制系统工程》国家双语教学示范课程双语教材



普通高等院校“十二五”规划教材

自动控制原理

习题详解与考研辅导

主编 陈复扬



国防工业出版社
National Defense Industry Press



.. 014012639

TP13-44

48

普通高等院校“十二五”规划教材

2003 年国家精品课程《自动控制原理》主干教材

2008 年自动控制系列课程国家优秀教学团队精品教材

2009 年《控制系统工程》国家双语教学示范课程双语教材

自动控制原理

习题详解与考研辅导

主编 陈复扬



国防工业出版社

· 北京 ·



北航

C1699573

TP13-44
48

内 容 简 介

本书为《自动控制原理》(第2版)一书的学习辅导用书。书中包括知识点辅导、典型习题及详细解答、考研试题及详细解答、课后练习题及详细解答、2004—2013年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试试题及2007—2013年的考研试题参考答案。本书的习题涵盖了《自动控制原理》的所有知识点，并覆盖南京航空航天大学《自动控制原理》(试题编号820、试题编号920)考研大纲的所有内容。

本书可作为课后学习辅导书、考研参考书；亦可作为自动控制、工业自动化、电气自动化、仪表及测试、机械、动力等专业学习《自动控制原理》课程的辅助教材。

图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理习题详解与考研辅导/陈复扬主编. —北京: 国防工业出版社, 2014. 1

ISBN 978-7-118-09128-1

I. ①自… II. ①陈… III. ①自动控制理论—研究生—入学考试—题解 IV. ①TP13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 250020 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 15 1/4 字数 400 千字

2014 年 1 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 32.00 元

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

国防书店: (010)88540777

发行邮购: (010)88540776

发行传真: (010)88540755

发行业务: (010)88540717

前　　言

本书是与陈复扬主编的《自动控制原理》(第2版)(国防工业出版社,2013)相配套的学习辅导用书。为了配合广大读者学习和掌握自动控制技术,编者对2010年国防工业出版社出版的《自动控制原理》(中文版)进行了全面修订,将自动控制技术的理论部分进行精简修订;将原书中的A习题、B考研题、C课后练习题集中整理修订以本书出版;同时考虑到正在考研的学生苦于搜集考研真题,本书将2004—2013年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试试题及2007—2013年的考研试题参考答案也列入书中,希望能对立志考研的读者有所帮助。

本书体系和符号与《自动控制原理》(第2版)(国防工业出版社,2013)一书相一致。各章结构基本相同,分为知识点辅导、典型习题及详细解答、考研试题及详细解答、课后练习题及详细解答。本书所有习题涵盖《自动控制原理》(第2版)的所有知识点,并覆盖南京航空航天大学《自动控制原理》(试题编号820、试题编号920)考研大纲的所有内容。

本书由陈复扬主编,参加编撰工作的还有姜斌、陆宁云、齐瑞云、丁勇、盛守照、刘剑慰、杨蒲、张绍杰、王新华;在本书编写过程中,得到了蔡玲、路飞飞、王正、张康康、陈志超的支持和帮助;感谢胡寿松教授对编者的多年培养,感谢国防工业出版社责任编辑丁福志先生对本书的大力支持;同时对在本书编写过程中给予帮助的各位人员表示诚挚的谢意。

对于本版中存在的错误和不妥之处,恳请广大读者和网友不吝指正。

编者 E-mail: chenfuyang@nuaa.edu.cn

自动控制原理国家精品课程网址:<http://cae.nuaa.edu.cn/ftp/index.asp>

控制系统工程国家双语教学示范课程网址:<http://gc.nuaa.edu.cn/cse>

陈复扬
中国南京
2013年8月

目 录

第1章 自动控制的一般概念	1
第2章 控制系统的数学模型	2
2.1 知识点辅导	2
2.2 典型习题及详细解答	3
2.3 考研试题及详细解答	7
2.4 课后练习题及详细解答	11
第3章 线性系统的时域分析法	30
3.1 知识点辅导	30
3.2 典型习题及详细解答	30
3.3 考研试题及详细解答	33
3.4 课后练习题及详细解答	37
第4章 线性系统的根轨迹法	53
4.1 知识点辅导	53
4.2 典型习题及详细解答	54
4.3 考研试题及详细解答	60
4.4 课后练习题及详细解答	65
第5章 线性系统的频域分析法	81
5.1 知识点辅导	81
5.2 典型习题及详细解答	81
5.3 考研试题及详细解答	85
5.4 课后练习题及详细解答	89
第6章 线性离散系统的分析	105
6.1 知识点辅导	105
6.2 典型习题及详细解答	105
6.3 考研试题及详细解答	108
6.4 课后练习题及详细解答	110

第7章 非线性控制系统分析	119
7.1 知识点辅导	119
7.2 典型习题及详细解答	119
7.3 考研试题及详细解答	121
7.4 课后练习题及详细解答	123
第8章 线性系统的状态空间分析与综合	132
8.1 知识点辅导	132
8.2 典型习题及详细解答	132
8.3 考研试题及详细解答	136
8.4 课后练习题及详细解答	140
第9章 最优控制理论基础	162
9.1 知识点辅导	162
9.2 典型习题及详细解答	162
9.3 课后练习题及详细解答	171
2004—2013年《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题集锦	178
2007—2013年《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题参考答案	207
参考文献	238

第1章 自动控制的一般概念

本章主要介绍自动控制、被控对象、控制器这三个专业术语以及两大类共三种自动控制的基本方式。三种基本控制方式分别是按给定值操纵、按干扰补偿、按偏差调节,前两种控制方式属于开环控制,第三种控制方式属于闭环控制。

反馈控制系统是由各种结构不同的元部件组成的。从完成“自动控制”这一职能来看,一个系统必然包含被控对象和控制装置两大部分,而控制装置是由具有一定职能的各种基本元件组成的。在不同系统中,结构完全不同的元部件却可以具有相同的职能,因此,将组成系统的元部件按职能分为以下几种:测量元件、给定元件、比较元件、放大元件、执行元件、校正元件。

工程中常从稳、快、准三个方面来评价自动控制系统的总体精度。

1. 稳定性

稳定性是保证控制系统正常工作的先决条件。一个稳定的控制系统,其被控量偏离期望值的初始偏差应随时间的增长逐渐减小并趋于零。线性自动控制系统的稳定性是由系统结构所决定的,与外界因素无关。

2. 快速性

为了很好地完成控制任务,控制系统仅仅满足稳定性要求是不够的,还必须对其过渡过程的形式和快慢提出要求,一般称为动态性能。因此,对控制系统过渡过程的时间(即快速性)和最大振荡幅度(即超调量)一般都有具体要求。

3. 准确性

理想情况下,当过渡过程结束后,被控量达到的稳态值(即平衡状态)应与期望值一致。但实际上,由于系统结构,外作用形式以及摩擦、间隙等非线性因素的影响,被控量的稳态值与期望值之间会有误差存在,称为稳态误差。稳态误差是衡量控制系统控制精度的重要标志,在技术指标中一般都有具体要求。

牢牢掌握稳定性、快速性、准确性这三个基本概念,也是学好以后各章内容的基础。

第2章 控制系统的数学模型

2.1 知识点辅导

研究一个自动控制系统,除了对系统进行定性分析外,还必须进行定量分析,进而探讨改善系统动态和稳态性能的具体方法,如微分方程、传递函数、结构图、信号流图、频率特性及状态空间描述等。本章主要介绍微分方程、传递函数、结构图和信号流图。学习本章时需要注意掌握以下几个主要知识点。

1. 微分方程列写

常用的列写系统或环节的动态微分方程的方法有两种,一种是分析法,即根据各环节所遵循的物理规律(如力学、电磁学、运动学、热学等)来列写;另一种方法是辨识法,即根据实验数据进行整理列写。

2. 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换的定义为 $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$, 记住如脉冲函数、阶跃函数、指数函数等几个常用函数的拉普拉斯变换;重点掌握拉普拉斯变换性质中的线性定理、微分定理、终值定理、位移定理;注意求拉普拉斯反变换的部分分式展开法中极点不同情况时的处理方法;熟练掌握用拉普拉斯变换法求解微分方程的方法和步骤。

3. 传递函数

传递函数的定义为:在零初始条件下,系统输出的拉普拉斯变换与输入的拉普拉斯变换之比。传递函数只与系统本身的结构参数有关,与系统输入、输出的形式无关;传递函数只适用于描述线性定常单输入、单输出系统,只直接反映系统在零初始状态下的动态特性。

4. 结构图

熟练掌握结构图的组成(信号线、方框、比较点、引出点)和特点;主要掌握环节串联、并联、反馈的等效变换规则;弄清楚开环传递函数与闭环传递函数的概念、关系。

5. 信号流图

掌握信号流图的有关术语(源节点、阱节点、混和节点、前向通路、回路、不接触回路);信号流图与结构图本质上一样,只是形式上不同。

6. 梅森公式

牢牢记住表达式及其中每个符号的含义及求法。

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum P_k \Delta_k$$

7. 控制系统的典型传递函数

掌握几种传递函数的求法,可根据给定的系统结构图或信号流图,利用梅森公式求出常用传递函数。各传递函数的特征式是一样的,只需要求一次。

2.2 典型习题及详细解答

2.2-1 设晶闸管三相桥式全控整流电路的输入量为控制角 α , 输出量为空载整流电压 e_d , 它们之间的关系为

$$e_d = E_{d_0} \cos \alpha$$

式中 E_{d_0} 是整流电压的理想空载值, 试推导其线性化方程式。

2.2-1 解答 本题考查电路非线性微分方程的线性化, 具体做法是对非线性微分方程在其平衡点附近用泰勒级数展开并取前面的线性项, 得到等效的线性化方程。

在 $\alpha = \alpha_0$ 处对 e_d 进行泰勒展开, 然后再取其一次项近似可得

$$\begin{aligned} e_d &\approx e_d \Big|_{\alpha=\alpha_0} + \dot{e}_d \Big|_{\alpha=\alpha_0} (\alpha - \alpha_0) \\ &= e_d \Big|_{\alpha=\alpha_0} - E_{d_0} \sin \alpha_0 (\alpha - \alpha_0) \end{aligned}$$

由上式可得全控整流电路的线性化方程为

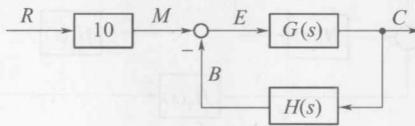
$$\Delta e_d = -E_{d_0} \sin \alpha_0 \Delta \alpha$$

2.2-2 如图所示, 已知 $G(s)$ 和 $H(s)$ 两方框相对应的微分方程分别是

$$6 \frac{dc(t)}{dt} + 10c(t) = 20e(t)$$

$$20 \frac{db(t)}{dt} + 5b(t) = 10c(t)$$

且初始条件均为零, 试求传递函数 $C(s)/R(s)$ 及 $E(s)/R(s)$ 。



2.2-2 题图

2.2-2 解答 本题研究系统微分方程与系统传递函数的转换方法。

对题设所给的微分方程两边同时进行拉普拉斯变换, 由于初始条件均为零, 所以有

$$\begin{cases} 6sC(s) + 10C(s) = 20E(s) \\ 20sB(s) + 5B(s) = 10C(s) \end{cases}$$

由上式可得

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{20}{6s + 10} = \frac{10}{3s + 5}$$

$$H(s) = \frac{B(s)}{C(s)} = \frac{10}{20s + 5} = \frac{2}{4s + 1}$$

由系统的方框图可得

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

将 $G(s)$ 和 $H(s)$ 代入得

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10 \cdot \frac{10}{3s+5}}{1 + \frac{10}{3s+5} \cdot \frac{2}{4s+1}} = \frac{100(4s+1)}{12s^2 + 23s + 25}$$

又

$$E(s) = M(s) - B(s) = 10R(s) - H(s)C(s) = [10 - H(s)\Phi(s)]R(s)$$

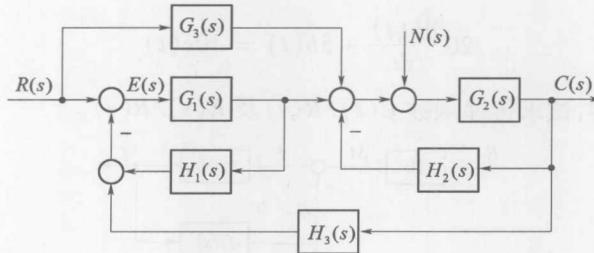
则

$$\begin{aligned}\Phi_e(s) &= \frac{E(s)}{R(s)} = 10 - H(s)\Phi(s) = 10 - \frac{2}{4s+1} \cdot \frac{100(4s+1)}{12s^2 + 23s + 25} \\ &= \frac{10(12s^2 + 23s + 5)}{12s^2 + 23s + 25}\end{aligned}$$

所以传递函数 $C(s)/R(s)$ 和 $E(s)/R(s)$ 分别为

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{100(4s+1)}{12s^2 + 23s + 25} \\ \Phi_e(s) &= \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{10(12s^2 + 23s + 5)}{12s^2 + 23s + 25}\end{aligned}$$

2.2-3 系统结构图如图所示,求传递函数 $C(s)/R(s)$, $E(s)/R(s)$, $C(s)/N(s)$ 和输出 $C(s)$ 。



2.2-3 题图

2.2-3 解答 本题考查梅森增益公式、结构图与信号流图的对应关系、线性系统叠加原理的应用。

由图可知,该系统由三个回路组成,回路增益分别为:

$$L_1 = -G_1(s)H_1(s), L_2 = -G_2(s)H_2(s), L_3 = -G_1(s)G_2(s)H_3(s)$$

其中 L_2 和 L_3 两回路互不接触,故特征式为

$$\Delta = 1 + G_1(s)H_1(s) + G_2(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)H_3(s) + G_1(s)H_1(s)G_2(s)H_2(s)$$

(1) 求 $C(s)/R(s)$

前向通路及余子式 $P_1 = G_1(s)G_2(s)$, $\Delta_1 = 1$; $P_2 = G_3(s)G_2(s)$, $\Delta_2 = 1 + G_1(s)H_1(s)$, 故

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s) + G_3(s)G_2(s)[1 + G_1(s)H_1(s)]}{1 + G_1(s)H_1(s) + G_2(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)H_3(s) + G_1(s)H_1(s)G_2(s)H_2(s)}$$

(2) 求 $E(s)/R(s)$

前向通路及余子式 $P_1 = 1$, $\Delta_1 = 1 + G_2(s)H_2(s)$; $P_2 = -G_3(s)G_2(s)H_3(s)$, $\Delta_2 = 1$, 故

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + G_2(s)H_2(s) - G_3(s)G_2(s)H_3(s)}{1 + G_1(s)H_1(s) + G_2(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)H_3(s) + G_1(s)H_1(s)G_2(s)H_2(s)}$$

(3) 求 $C(s)/N(s)$

前向通路及余子式 $P_1 = G_2(s)$, $\Delta_1 = 1 + G_1(s)H_1(s)$, 故

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s) + G_2(s)G_1(s)H_1(s)}{1 + G_1(s)H_1(s) + G_2(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)H_3(s) + G_1(s)H_1(s)G_2(s)H_2(s)}$$

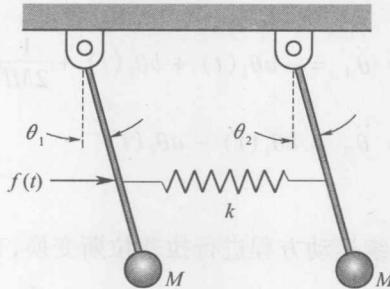
(4) 计算输出 $C(s)$

由(1)和(3)的计算结果, 及线性系统的叠加原理, 可得:

$$C(s) = \frac{[G_1(s)G_2(s) + G_3(s)G_2(s) + G_3(s)G_2(s)G_1(s)H_1(s)]R(s) + [G_2(s) + G_2(s)G_1(s)H_1(s)]N(s)}{1 + G_1(s)H_1(s) + G_2(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)H_3(s) + G_1(s)H_1(s)G_2(s)H_2(s)}$$

2.2-4 下图为双摆系统, 双摆悬挂在无摩擦的旋轴上, 并且用弹簧把它们的中点连在一起。假定: 摆的质量为 M ; 摆杆长度为 l ; 摆杆质量不计; 弹簧置于摆杆的 $L/2$ 处, 其弹性系数为 k ; 摆的角位移很小, $\sin\theta, \cos\theta$ 均可进行线性近似处理; 当 $\theta_1 = \theta_2$ 时, 位于杆中间的弹簧无变形, 且外力输入 $f(t)$ 只作用于左侧的杆。若令 $a = g/l + k/4M$, $b = k/4M$, 要求:

- (1) 列写双摆系统的运动方程;
- (2) 确定传递函数 $\Theta_1(s)/F(s)$;
- (3) 画出双摆系统的结构图和信号流图。



2.2-3 题图

2.2-4 解答 本题为系统数学模型建立的微分方程法、传递函数法、结构图法和信号流图法的综合运用, 其结果可以相互转化与验证。

(1) 运动方程

弹簧所受到的压力为

$$F = k \frac{l}{2} (\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$$

左边摆杆的受力方程为

$$f(t) \frac{l}{2} \cos\theta_1 - F \frac{l}{2} \cos\theta_1 - Mglsin\theta_1 = Ml^2 \frac{d^2\theta_1}{dt^2}$$

即

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \frac{f(t)\cos\theta_1}{2Ml} - \frac{F\cos\theta_1}{2Ml} - \frac{g\sin\theta_1}{l}$$

右边摆杆的受力方程为

$$F \frac{l}{2} \cos\theta_2 - Mgl \sin\theta_2 = Ml^2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2}$$

即

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \frac{F \cos\theta_2}{2Ml} - \frac{g \sin\theta_2}{l}$$

因 θ_1 与 θ_2 很小, 故近似有

$$\sin\theta_1 = \theta_1, \quad \cos\theta_1 = 1$$

$$\sin\theta_2 = \theta_2, \quad \cos\theta_2 = 1$$

将 $F = k \frac{l}{2} (\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$ 代入左右摆杆的受力方程, 并对受力方程作线性化处理, 得到如

下两个方程

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{2Ml} f(t) - \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{4M} \right) \theta_1 + \frac{k}{4M} \theta_2$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{k}{4M} \theta_1 - \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{4M} \right) \theta_2$$

将 $a = g/l + k/4M, b = k/4M$ 代入以上两个方程, 并令 $\omega_1 = \dot{\theta}_1, \omega_2 = \dot{\theta}_2$, 得到双摆系统的运动方程如下

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \ddot{\theta}_1 = -a\theta_1(t) + b\theta_2(t) + \frac{1}{2Ml} f(t)$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \ddot{\theta}_2 = b\theta_1(t) - a\theta_2(t)$$

(2) 传递函数

设全部初始条件为零, 对系统运动方程进行拉普拉斯变换, 有

$$s^2 \Theta_1(s) = -a\Theta_1(s) + b\Theta_2(s) + \frac{1}{2Ml} F(s)$$

$$s^2 \Theta_2(s) = b\Theta_1(s) - a\Theta_2(s)$$

显然

$$\Theta_2(s) = \frac{b}{s^2 + a} \Theta_1(s)$$

故

$$\left(s^2 + a - \frac{b}{s^2 + a} \right) \Theta_1(s) = \frac{1}{2Ml} F(s)$$

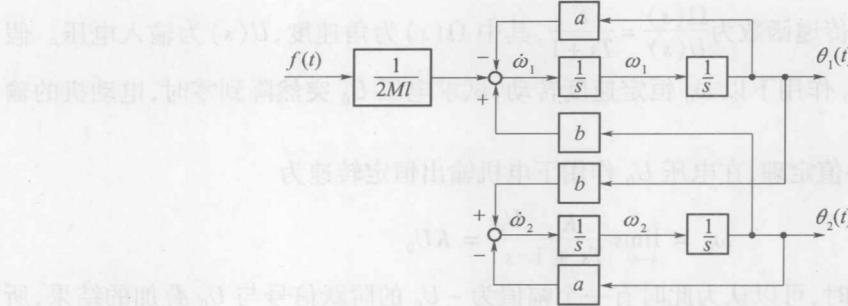
求出

$$\frac{\Theta_1(s)}{F(s)} = \frac{1}{2Ml} \cdot \frac{s^2 + a}{(s^2 + a)^2 - b^2}$$

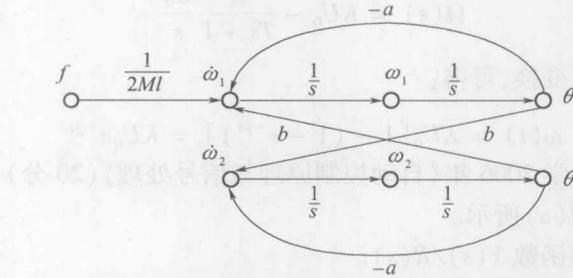
(3) 结构图与信号流图

依据信号的传递关系, 画出系统结构图和信号流图如图(a)及图(b)所示。

(4) 信号流图与传递函数



2.2-4 题 图(a) 双摆系统结构图

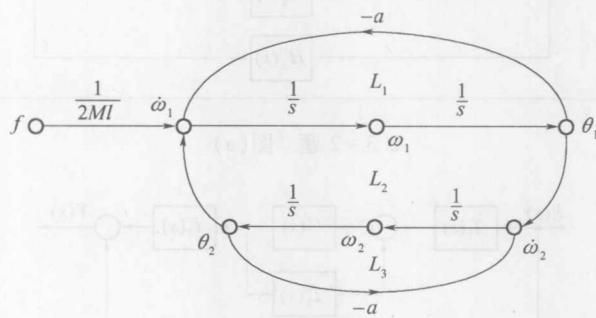


2.2-4 题 图(b) 双摆系统信号流图

为了便于观察,将信号流图改画为图(c)所示。由图知,有

$$L_1 = -\frac{a}{s^2}, \quad L_2 = \frac{b^2}{s^4}, \quad L_3 = -\frac{a}{s^2}$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_3, \quad p_1 = \frac{1}{2Mls^2}, \quad \Delta_1 = 1 - L_3$$



2.2-4 题 图(c) 双摆系统信号流图

应用梅森增益公式,立即求得

$$\frac{\Theta_1(s)}{F(s)} = \frac{p_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{p_1 (1 - L_3)}{1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_3} = \frac{1}{2Ml} \cdot \frac{s^2 + a}{(s^2 + a)^2 - b^2}$$

2.3 考研试题及详细解答

2.3-1 南京航空航天大学 2006 年《自动控制原理》(10 分)

设某伺服电动机的传递函数为 $\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$, 其中 $\Omega(s)$ 为角速度, $U(s)$ 为输入电压。假设电动机在控制电压 U_0 作用下以 ω_0 恒定速度转动, 试求电压 U_0 突然降到零时, 电动机的输出响应 $\omega(t)$ 。

2.3-1 解答 由终值定理, 在电压 U_0 作用下电机输出恒定转速为

$$\omega_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{Ts + 1} \frac{U_0}{s} = KU_0$$

当电压突然降为零时, 可以认为此时有一个幅值为 $-U_0$ 的阶跃信号与 U_0 叠加的结果, 所以电动机的输出为:

$$\Omega(s) = KU_0 - \frac{K}{Ts + 1} \frac{U_0}{s}$$

对上式取拉普拉斯反变换, 可得:

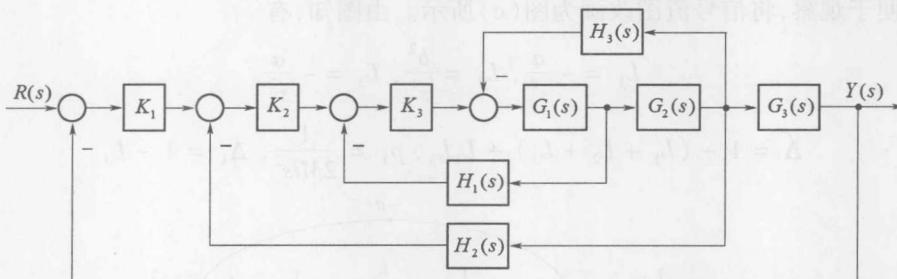
$$\omega(t) = KU_0 [1 - (1 - e^{-\frac{1}{Tt}})] = KU_0 e^{-\frac{1}{Tt}}$$

2.3-2 西安交通大学 2006 年《自动控制原理与信号处理》(20 分)

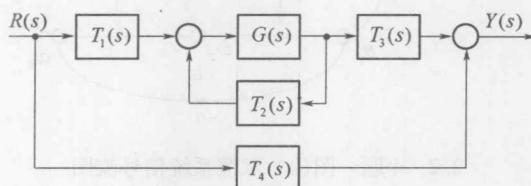
某系统的方块图如图(a)所示。

(1) 确定系统的传递函数 $Y(s)/R(s)$ 。

(2) 如果图(b)所示的方块图来描述图(a)的系统, 试确定当 $G(s) = K_2$ 时, 图(b)中的传递函数 $T_1(s), T_2(s), T_3(s)$ 和 $T_4(s)$ 。



2.3-2 题 图(a)



2.3-2 题 图(b)

2.3-2 解答

(1) 由图(a)知, 该系统由四个回路组成, 回路增益分别为

$$L_1 = -K_1 K_2 K_3 G_1(s) G_2(s) G_3(s), L_2 = -K_2 K_3 G_1(s) G_2(s) H_2(s), \\ L_3 = -K_3 G_1(s) H_1(s), L_4 = -G_1(s) G_2(s) H_3(s)$$

没有互不接触回路, 故特征式为

$$\Delta = 1 + K_1 K_2 K_3 G_1(s) G_2(s) G_3(s) + K_2 K_3 G_1(s) G_2(s) H_2(s) + K_3 G_1(s) H_1(s) + G_1(s) G_2(s) H_3(s)$$

前向通路及余子式为 $P_1 = K_1 K_2 K_3 G_1(s) G_2(s) G_3(s)$, $\Delta_1 = 1$ 。

故传递函数

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_1 K_2 K_3 G_1(s) G_2(s) G_3(s)}{1 + K_1 K_2 K_3 G_1(s) G_2(s) G_3(s) + K_2 K_3 G_1(s) G_2(s) H_2(s) + K_3 G_1(s) H_1(s) + G_1(s) G_2(s) H_3(s)} \quad (1)$$

(2) 由图(b)知, 系统有一个回路, 增益为 $L_1 = K_2 T_2(s)$, 则特征式为 $\Delta = 1 - K_2 T_2(s)$ 。前向通路及余子式为 $P_1 = T_1(s) K_2 T_3(s)$, $\Delta_1 = 1$; $P_2 = T_4(s)$, $\Delta_2 = 1 - K_2 T_2(s)$ 。于是, 有系统传递函数

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{T_1(s) K_2 T_3(s) + T_4(s)[1 - K_2 T_2(s)]}{1 - K_2 T_2(s)} \quad (2)$$

比较式(1)和(2), 根据其对应关系联立方程组, 可取:

$$T_1 = K_1 K_3, T_2 = -\frac{K_1 K_2 K_3 G_1(s) G_2(s) G_3(s) + K_2 K_3 G_1(s) G_2(s) H_2(s) + K_3 G_1(s) H_1(s) + G_1(s) G_2(s) H_3(s)}{K_2}$$

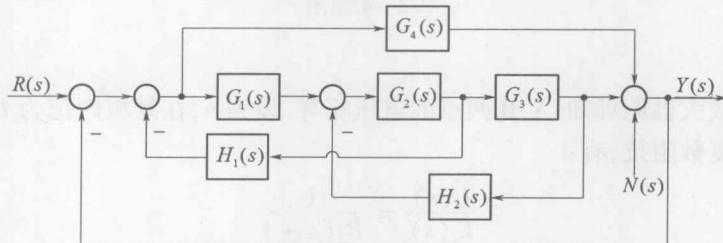
$$T_3 = G_1(s) G_2(s) G_3(s), T_4 = 0.$$

2.3-3 南京航空航天大学 2009 年《自动控制原理》(15 分)

已知系统的结构图如图所示。

(1) 求输入 $R(s)$ 和扰动 $N(s)$ 同时作用下的系统输出 $C(s)$;

(2) 若使系统输出完全不受扰动的影响, 求 $G_1, G_2, G_3, G_4, H_1, H_2$ 应满足的关系。



2.3-3 题图

2.3-3 解答

(1) 由图知, 系统有四个回路, 回路增益分别为:

$$L_1 = -G_1(s) G_2(s) H_1(s), L_2 = -G_2(s) G_3(s) H_2(s), L_3 = -G_1(s) G_2(s) G_3(s), L_4 = -G_4(s).$$

回路 L_2 和 L_4 互不接触, 增益乘积为:

$$L_2 L_4 = G_2(s) G_3(s) H_2(s) G_4(s).$$

故系统特征式为:

$$\Delta = 1 + G_1(s) G_2(s) H_1(s) + G_2(s) G_3(s) H_2(s) + G_1(s) G_2(s) G_3(s) + G_4(s) + G_2(s) G_3(s) H_2(s) G_4(s)$$

输入 $R(s)$ 作用下, 前向通路和余子式为:

$$P_1 = G_1(s) G_2(s) G_3(s), \Delta_1 = 1, P_2 = G_4(s), \Delta_2 = 1 + G_2(s) G_3(s) H_2(s);$$

扰动 $N(s)$ 作用下, 前向通路和余子式为:

$$P_1 = 1, \Delta_1 = 1 + G_1(s) G_2(s) H_1(s) + G_2(s) G_3(s) H_2(s).$$

则输入 $R(s)$ 和扰动 $N(s)$ 同时作用下的系统输出 $Y(s)$ 为:

$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s) + G_4(s)[1 + G_2(s)G_3(s)H_2(s)]}{\Delta}R(s) + \frac{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s)}{\Delta}N(s)$$

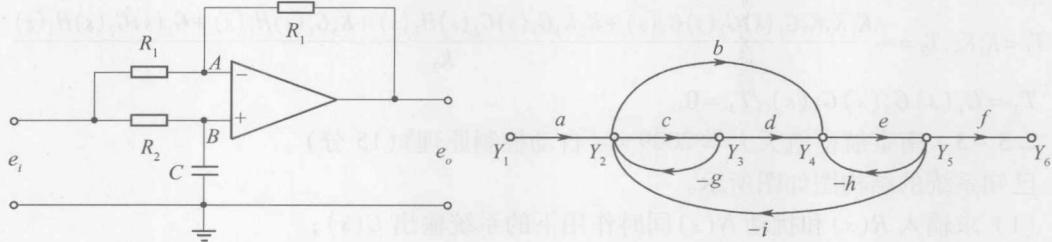
(2) 由扰动 $N(s)$ 作用下的传递函数表达式知,令其分子为零,则系统输出不受扰动影响,故有:

$$1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s) = 0$$

2.3-4 上海交通大学 2004 年《自动控制原理》(20 分)

(1) 试求左图所示运算放大电路的传递函数 $E_o(s)/E_i(s)$

(2) 如果系统的信号流图如右图所示,求传递函数 $Y_6(s)/Y_1(s)$, $Y_3(s)/Y_1(s)$ 和 $Y_5(s)/Y_2(s)$



2.3-4 题图

2.3-4 解答

(1) 由运算放大器原理知,A,B 两点的电压相等,设为 u ,在复域内记为 $U(s)$ 。则根据电阻和电容的等效复数阻抗,有:

$$\frac{U(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{R_2Cs + 1}$$

$$\frac{E_i(s) - U(s)}{R_1} = \frac{U(s) - E_o(s)}{R_1}$$

消去中间变量 $U(s)$,得:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1 - R_2Cs}{R_2Cs + 1}$$

(2) 由图知,系统有四个回路,回路增益分别为:

$$L_1 = -cg, L_2 = -eh, L_3 = -cdei, L_4 = -bei$$

回路 L_1 和 L_2 互不接触,增益乘积为:

$$L_1 L_2 = cgeh$$

故系统特征式为:

$$\Delta = 1 + cg + eh + cdei + bei + cgeh$$

求传递函数 $Y_6(s)/Y_1(s)$,前向通路和余子式为:

$$P_1 = acdef, \Delta_1 = 1; P_2 = abef, \Delta_2 = 1$$

求传递函数 $Y_3(s)/Y_1(s)$, 前向通路和余子式为:

$$P_1 = ac, \Delta_1 = 1 + eh$$

求传递函数 $Y_5(s)/Y_2(s)$, $Y_1(s)$ 到 $Y_2(s)$ 前向通路和余子式为:

$$P_1 = a, \Delta_1 = 1 + eh$$

$Y_1(s)$ 到 $Y_5(s)$ 前向通路和余子式为:

$$P_1 = acde, \Delta_1 = 1; P_2 = abe, \Delta_1 = 1$$

故所求传递函数分别为:

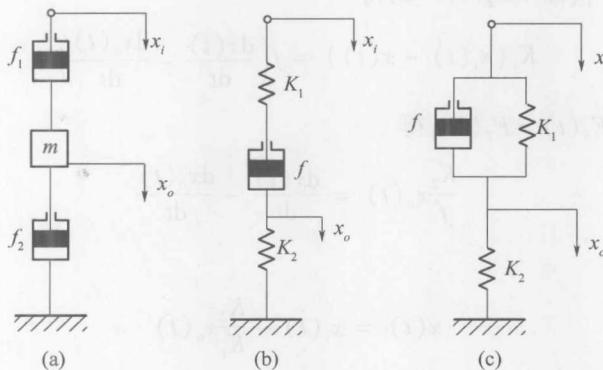
$$\frac{Y_6(s)}{Y_1(s)} = \frac{acdef + abef}{1 + cg + eh + cdei + bei + cgeh}$$

$$\frac{Y_3(s)}{Y_1(s)} = \frac{ac(1 + eh)}{1 + cg + eh + cdei + bei + cgeh}$$

$$\frac{Y_5(s)}{Y_2(s)} = \frac{acde + abe}{a(1 + eh)} = \frac{cde + be}{1 + eh}$$

2.4 课后练习题及详细解答

2.4-1 设机械系统如图所示, 其中 x_i 是输入位移, x_o 是输出位移。试分别写出各系统的微分方程。



2.4-1 题图 机械系统

2.4-1 解答

(1) 设位移垂直向下为正方向, 对阻尼器 f_1 进行分析, 对物体 m 产生向下的阻尼力为

$$F_1(t) = f_1 \frac{dx_i(t)}{dt} - f_1 \frac{dx_o(t)}{dt}$$

对阻尼器 f_2 进行分析, 对物体 m 产生向下阻尼力为

$$F_2(t) = -f_2 \frac{dx_o(t)}{dt}$$

对物体 m 进行分析, 由牛顿运动定律, 得

$$m \frac{d^2x_o(t)}{dt^2} = F_1(t) + F_2(t)$$

即

$$m \frac{d^2x_o(t)}{dt^2} + (f_1 + f_2) \frac{dx_o(t)}{dt} = f_1 \frac{dx_i(t)}{dt}$$

(2) 设位移垂直向下为正方向,设弹簧 K_1 与阻尼器 f 中间点为辅助点 A 点,设弹簧 K_2 与阻尼器 f 中间点为辅助点 B 点,设弹簧 K_1 与阻尼器 f 中间点位移为 $x(t)$ 。

对弹簧 K_1 进行分析,对 A 点产生向下的弹力为

$$F_1(t) = K_1(x_i(t) - x(t))$$

对阻尼器 f 进行分析,对 A 点产生向下的阻尼力为

$$F_2(t) = -f\left(\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx_o(t)}{dt}\right)$$

对 B 点产生向上的阻尼力为

$$F_2(t) = -f\left(\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx_o(t)}{dt}\right)$$

对弹簧 K_2 进行分析,对 B 点产生向下的弹力为

$$F_3(t) = -K_2x_o(t)$$

对 A 点分析,由 $F_1(t) + F_2(t) = 0$, 得

$$K_1(x_i(t) - x(t)) = f\left(\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx_o(t)}{dt}\right)$$

对 B 点分析,由 $F_3(t) = F_2(t)$, 得

$$\frac{K_2}{f}x_o(t) = \frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx_o(t)}{dt}$$

即

$$x(t) = x_i(t) - \frac{K_2}{K_1}x_o(t)$$

所以

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx_i(t)}{dt} - \frac{K_2}{K_1} \frac{dx_o(t)}{dt}$$

代入 $F_3(t) = F_2(t)$, 得

$$f(K_1 + K_2) \frac{dx_o(t)}{dt} + K_1 K_2 x_o(t) = f K_1 \frac{dx_i(t)}{dt}$$

(3) 设位移垂直向下为正方向,设 x_o 引出点为辅助点 A 点。

对阻尼器 f 进行分析,对 A 点产生向下的阻尼力为

$$F_1(t) = f \frac{dx_i(t)}{dt} - f \frac{dx_o(t)}{dt}$$

对弹簧 K_1 进行分析,对 A 点产生向下的弹力为

$$F_2(t) = K_1(x_i(t) - x_o(t))$$

对弹簧 K_2 进行分析, 对 A 点产生向下的弹力为

$$F_3(t) = -K_2x_o(t)$$

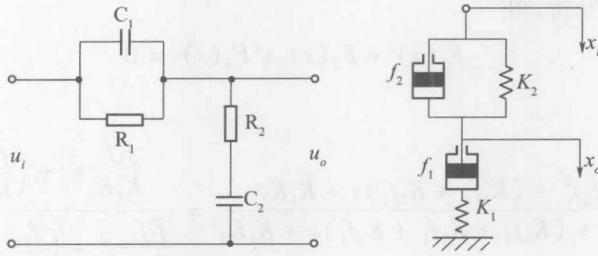
由受力方程, 得

$$F_1(t) + F_2(t) + F_3(t) = 0$$

即

$$f \frac{dx_o(t)}{dt} + (K_1 + K_2)x_o(t) = f \frac{dx_i(t)}{dt} + K_1x_i(t)$$

2.4-2 试证明图示电网络与机械系统有相同的数学模型。



2.4-2 题图 电网络与机械系统

2.4-2 解答 电网络: 设电路中电流为 $I(s)$, 则

$$U_o(s) = \left(R_2 + \frac{1}{C_2 s} \right) I(s)$$

$$U_i(s) = \left(R_2 + \frac{1}{C_2 s} + \frac{R_1 \frac{1}{C_1 s}}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}} \right) I(s) = \left(R_2 + \frac{1}{C_2 s} + \frac{R_1}{1 + R_1 C_1 s} \right) I(s)$$

所以

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2)s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}$$

机械系统: 设位移垂直向下为正方向, 设阻尼器 f_1 与弹簧 K_1 中间点位移为 $x(t)$, 设 x_o 引出点为辅助点 A 点, 设弹簧 K_1 与阻尼器 f_1 中间点为辅助点 B 点。

对阻尼器 f_2 进行分析, 对 A 点产生向下的阻尼力为

$$F_1(s) = f_2 s(X_i(s) - X_o(s))$$

对弹簧 K_2 进行分析, 对 A 点产生向下的弹力为

$$F_2(s) = K_2(X_i(s) - X_o(s))$$

对阻尼器 f_1 进行分析, 对 A 点产生向下的阻尼力为

$$F_3(s) = -f_1 s(X_o(s) - X(s))$$

对 B 点产生向上的阻尼力为

$$F_4(s) = -f_1 s(X_o(s) - X(s))$$

对弹簧 K_1 进行分析, 对 B 点产生向下弹力为

$$F_4(s) = -K_1 X(s)$$

对 B 点进行受力分析, 得

$$F_3(s) = F_4(s)$$

即

$$-f_1 s (X_o(s) - X(s)) = -K_1 X(s)$$

得

$$X(s) = \frac{f_1 s}{K_1 + f_1 s} X_o(s)$$

对 A 点进行受力分析, 得

$$F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) = 0$$

得

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{f_1 f_2 s^2 + (K_1 f_2 + K_2 f_1) s + K_1 K_2}{f_1 f_2 s^2 + (K_1 f_2 + K_2 f_1 + K_1 f_1) s + K_1 K_2} = \frac{\frac{f_1 f_2}{K_1 K_2} s^2 + \left(\frac{f_1}{K_1} + \frac{f_2}{K_2}\right) s + 1}{\frac{f_1 f_2}{K_1 K_2} s^2 + \left(\frac{f_1}{K_1} + \frac{f_2}{K_2} + \frac{f_1}{K_2}\right) s + 1}$$

对比可知题中电网络与机械系统有相同的数学模型。

2.4-3 在液压系统管道中, 设通过阀门的流量 Q 满足流量方程

$$Q = K \sqrt{P}$$

式中: K 为比例系数; P 为阀门前后的压差。若流量 Q 与压差 P 在其平衡点 (Q_0, P_0) 附近作微小变化, 试导出线性化流量方程。

2.4-3 解答 在 (Q_0, P_0) 处对 Q 进行泰勒展开, 然后再取其一次项近似, 得

$$Q \approx Q_0 + \left. \frac{dQ}{dP} \right|_{P=P_0} \Delta P = Q_0 + \frac{1}{2} K P_0^{-\frac{1}{2}} \Delta P$$

由上式可得其线性化流量方程为

$$\Delta Q = \frac{K}{2 \sqrt{P_0}} \Delta P$$

即

$$Q = \frac{K}{2 \sqrt{P_0}} P$$

2.4-4 设弹簧特性由下式描述:

$$F = 12.65 y^{1.1}$$

式中: F 是弹簧力; y 是变形位移。若弹簧在变形位移 0.25 附近作微小变化, 试推导 ΔF 的线性化方程。

2.4-4 解答 在 $y_0 = 0.25$ 处对 F 进行泰勒展开, 然后再取其一次项近似, 得

$$F \approx 12.65 y_0^{1.1} + \left. \frac{dF}{dy} \right|_{y=y_0} \Delta y = 12.65 y_0^{1.1} + 1.1 \times 12.65 y_0^{0.1} \Big|_{y=0.25} \Delta y$$

由上式可得 ΔF 的线性化方程为

$$\Delta F = 1.1 \times 12.65 \times 0.25^{0.1} \Delta y = 12.11 \Delta y$$

即

$$F = 12.11y$$

2.4-5 设初始条件为零, 试用拉普拉斯变换法求解下列微分方程, 并概略绘制 $x(t)$ 曲线, 指出各方程式的模态。

$$(1) 2\dot{x}(t) + x(t) = t$$

$$(2) \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \delta(t)$$

$$(3) \ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 1(t)$$

2.4-5 解答

(1) 进行拉普拉斯变换, 得

$$2sX(s) + X(s) = \frac{1}{s^2}$$

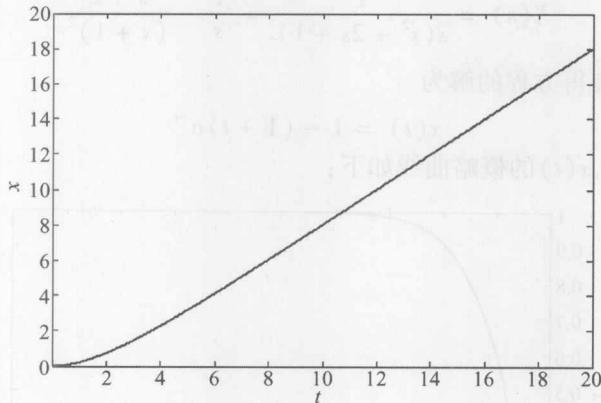
即

$$X(s) = \frac{1}{s^2(2s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{4}{2s+1}$$

查拉普拉斯变换表得方程的解为

$$x(t) = t - 2 + 2e^{-\frac{1}{2}t}$$

模态为 $e^{-\frac{1}{2}t}$, $x(t)$ 的概略曲线如下:



(2) 进行拉普拉斯变换, 得

$$s^2X(s) + sX(s) + X(s) = 1$$

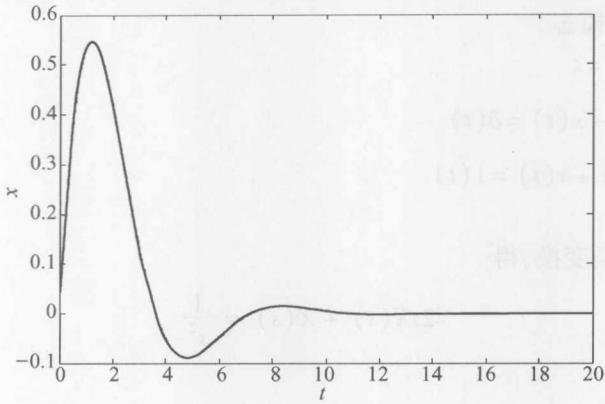
即

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

查拉普拉斯变换表得方程的解为

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

模态为 $e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$, $x(t)$ 概略曲线如下:



(3) 进行拉普拉斯变换, 得

$$s^2 X(s) + 2sX(s) + X(s) = \frac{1}{s}$$

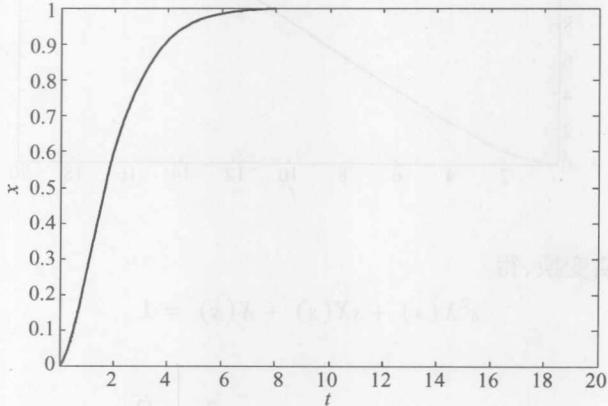
即

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2}$$

查拉普拉斯变换表得方程的解为

$$x(t) = 1 - (1+t)e^{-t}$$

模态为 e^{-t} 和 te^{-t} , $x(t)$ 的概略曲线如下:



2.4-6 设系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

且初始条件 $c(0) = -1, \dot{c}(0) = 0$ 。试求单位阶跃输入 $r(t) = 1(t)$ 时, 系统的输出响应 $c(t)$ 。

2.4-6 解答 由系统特征方程

$$D(s) = s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2) = 0$$

得系统特征根 $s_1 = -1, s_2 = -2$, 即系统状态响应为

$$c_x(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$$

由 $c(0) = -1$, 得

$$c_x(0) = A_1 + A_2 = -1$$

又 $\dot{c}_x(t) = -A_1 e^{-t} - 2A_2 e^{-2t}$, 由 $\dot{c}(0) = 0$, 得

$$\dot{c}_x(0) = -A_1 - 2A_2 = 0$$

解得

$$A_1 = -2, A_2 = 1$$

所以

$$c_x(t) = -2e^{-t} + e^{-2t}$$

由 $r(t) = 1(t)$, 得

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

得输入引起的响应为

$$C_f(s) = \frac{C(s)}{R(s)} R(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

即

$$c_f(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}$$

系统输出响应为

$$c(t) = c_x(t) + c_f(t) = -2e^{-t} + e^{-2t} + 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} = 1 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$$

2.4-7 求图示有源网络的传递函数 $U_o(s)/U_i(s)$ 。

2.4-7 解答

(a) 由放大器特性, 得

$$\frac{U_i(s)}{\frac{R_0}{C_0 s} / \left(R_0 + \frac{1}{C_0 s} \right)} = -\frac{U_o(s)}{R_1}$$

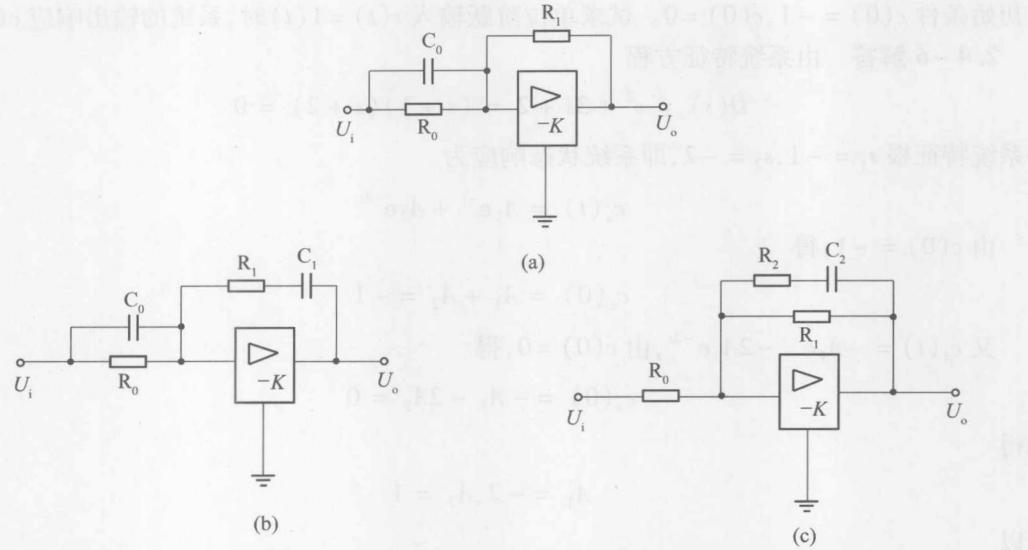
即

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_1}{R_0} \left(R_0 C_0 s + 1 \right)$$

(b) 由放大器特性, 得

$$\frac{U_i(s)}{\frac{1}{C_0 s} / \left(R_0 + \frac{1}{C_0 s} \right)} = -\frac{U_o(s)}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}$$

即



2.4-7 题图 有源网络

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_0 R_1 C_0 C_1 s^2 + (R_0 C_0 + R_1 C_1)s + 1}{R_0 C_1 s}$$

(c) 由放大器特性, 得

$$\frac{U_i(s)}{R_0} = -\frac{U_o(s)}{\left(R_2 + \frac{1}{C_2 s}\right) R_1 / \left[\left(R_2 + \frac{1}{C_2 s}\right) + R_1\right]}$$

即

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_1}{R_0} \times \frac{R_2 C_2 s + 1}{(R_1 + R_2) C_2 s + 1}$$

2.4-8 某系统由下列微分方程组描述

$$\begin{aligned} x_1(t) &= k_1 r(t) - x_2(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) + x_1(t) \\ x_3(t) &= x_2(t) + k_2 r(t) - c(t) \\ x_4(t) &= k_3 x_3(t) - c(t) \\ \dot{c}(t) &= x_4(t) \end{aligned}$$

式中: k_1, k_2, k_3 均为常量; $r(t)$ 为输入; $c(t)$ 为输出。画出系统的结构图, 并求传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

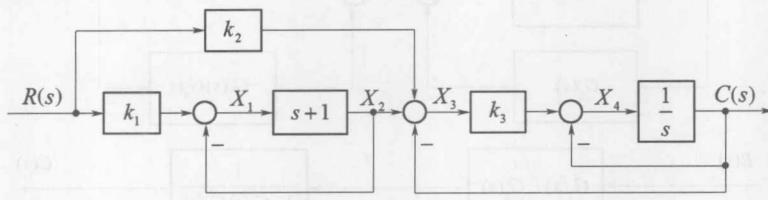
2.4-8 解答 由微分方程组, 得

$$\begin{aligned} X_1(s) &= k_1 R(s) - X_2(s) \\ X_2(s) &= (s+1) X_1(s) \\ X_3(s) &= X_2(s) + k_2 R(s) - C(s) \\ X_4(s) &= k_3 X_3(s) - C(s) \\ C(s) &= \frac{1}{s} X_4(s) \end{aligned}$$

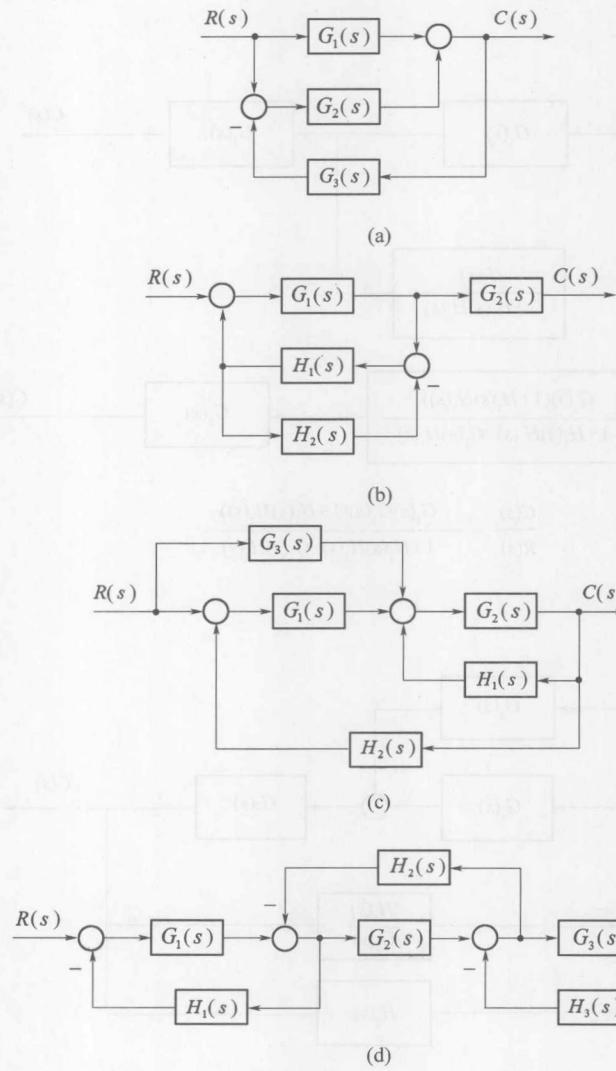
解以上方程组,得

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(k_1 k_3 + k_2 k_3)s + k_1 k_3 + 2k_2 k_3}{s^2 + (k_3 + 3)s + 2k_3 + 2}$$

系统结构图如下:



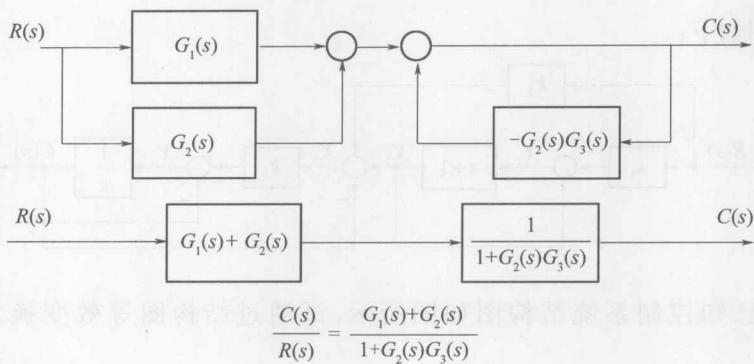
2.4-9 已知控制系统结构图如图所示,试通过结构图等效变换求系统传递函数 $C(s)/R(s)$ 。



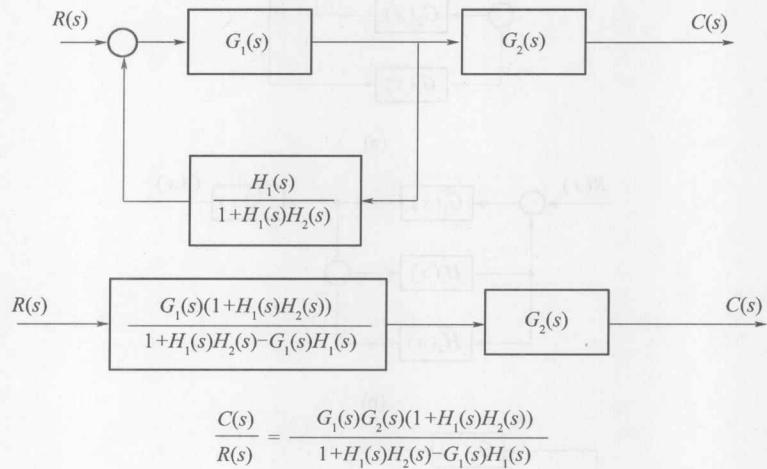
2.4-9 题图

2.4-9 解答

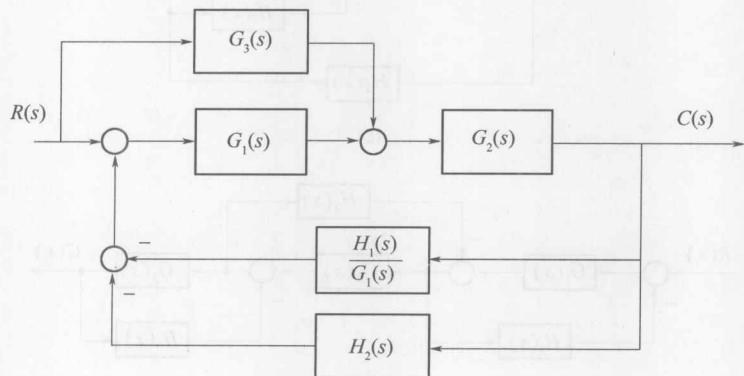
(a)

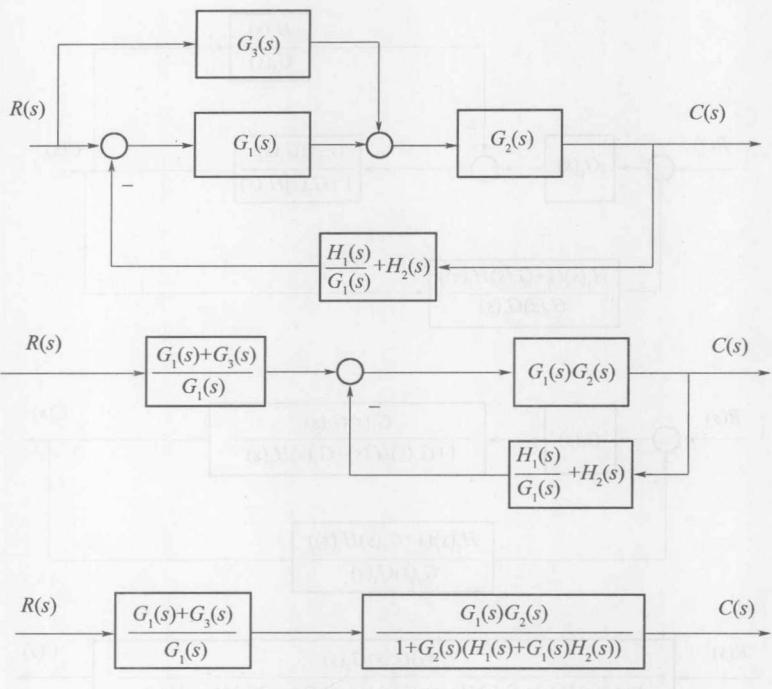


(b)



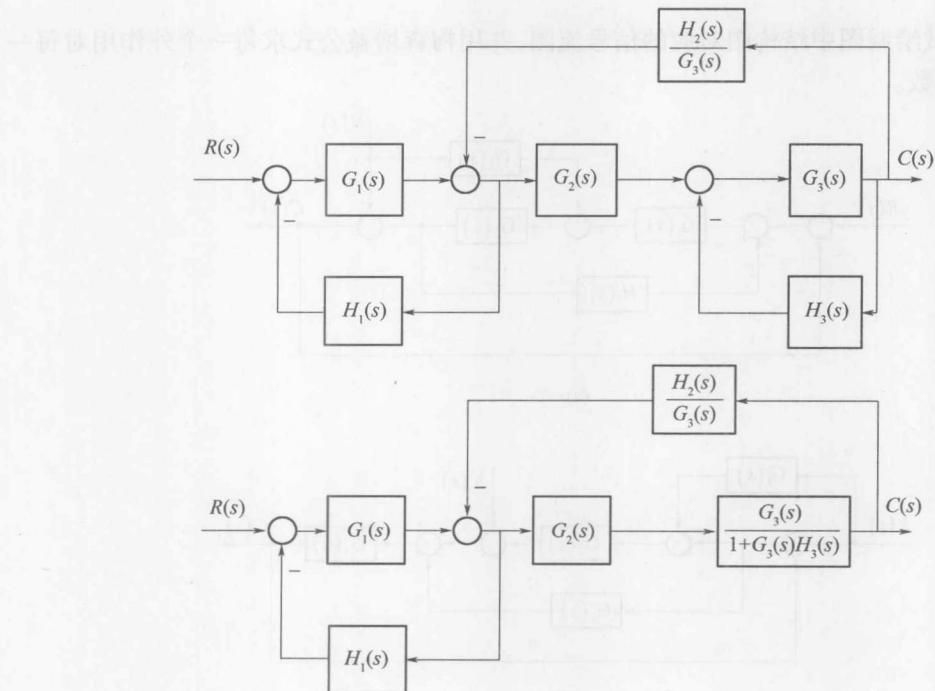
(c)



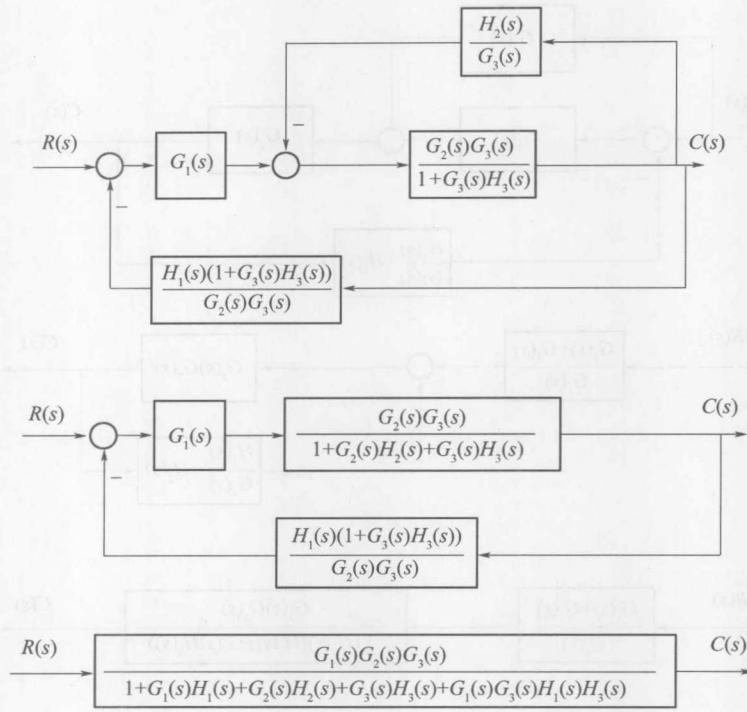


$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_2(s)(G_1(s) + G_3(s))}{1 + G_2(s)(H_1(s) + G_1(s)H_2(s))}$$

(d)

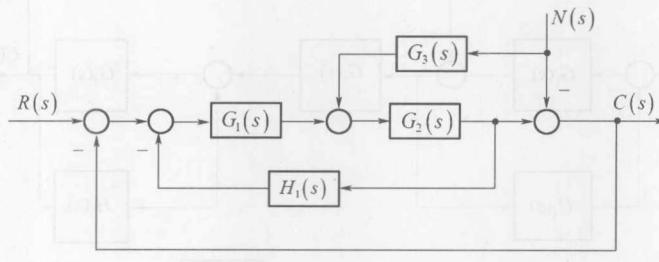


(d)

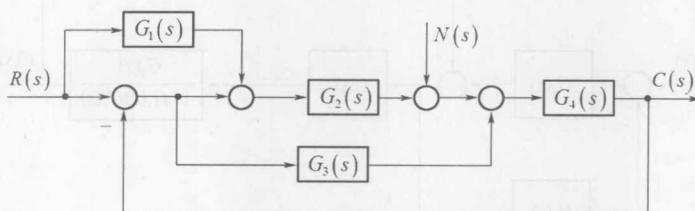


$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1+G_1(s)H_1(s)+G_2(s)H_2(s)+G_3(s)H_3(s)+G_1(s)G_3(s)H_1(s)H_3(s)}$$

2.4-10 试绘制图中结构图对应的信号流图，并用梅森增益公式求每一个外作用对每一个输出的传递函数。



(a)

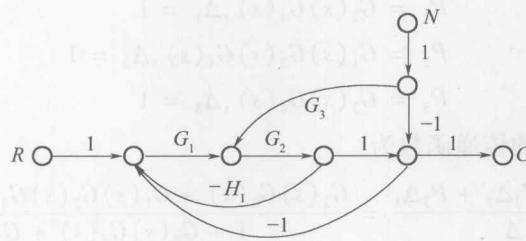


(b)

2.4-10 题图

2.4-10 解答

(a)



本系统有 2 个回路, 其回路增益分别为

$$L_1 = -G_1(s)G_2(s)H_1(s), L_2 = -G_1(s)G_2(s)$$

特征式为

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) = 1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s) + G_1(s)G_2(s)$$

$\frac{C(s)}{R(s)}$: 有 1 条前向通路, 其增益与余子式为

$$P_1 = G_1(s)G_2(s), \Delta_1 = 1$$

用梅森公式得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s) + G_1(s)G_2(s)}$$

$\frac{C(s)}{N(s)}$: 有 2 条前向通路, 其增益与余子式分别为

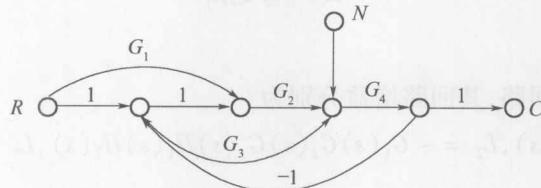
$$P_1 = -1, \Delta_1 = 1 - L_1 = 1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)$$

$$P_2 = G_2(s)G_3(s), \Delta_2 = 1$$

用梅森公式得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{-1 - G_1(s)G_2(s)H_1(s) + G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s) + G_1(s)G_2(s)}$$

(b)



本系统有 2 个回路, 其回路增益分别为

$$L_1 = -G_2(s)G_4(s), L_2 = -G_3(s)G_4(s)$$

特征式为

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) = 1 + G_2(s)G_4(s) + G_3(s)G_4(s)$$

$\frac{C(s)}{R(s)}$: 有 3 条前向通路, 其增益与余子式分别为

$$P_1 = G_2(s)G_4(s), \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_1(s)G_2(s)G_4(s), \Delta_2 = 1$$

$$P_3 = G_3(s)G_4(s), \Delta_3 = 1$$

用梅森公式得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3}{\Delta} = \frac{G_2(s)G_4(s) + G_1(s)G_2(s)G_4(s) + G_3(s)G_4(s)}{1 + G_2(s)G_4(s) + G_3(s)G_4(s)}$$

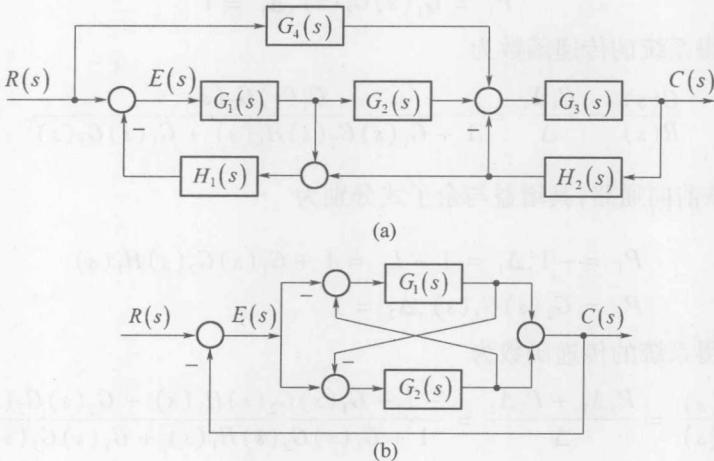
$\frac{C(s)}{N(s)}$: 有 1 条前向通路, 其增益与余子式为

$$P_1 = G_4(s), \Delta_1 = 1$$

用梅森公式得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_4(s)}{1 + G_2(s)G_4(s) + G_3(s)G_4(s)}$$

2.4-11 试用梅森增益公式求图所示系统的传递函数 $C(s)/R(s)$ 和 $E(s)/R(s)$ 。



2.4-11 题图

2.4-11 解答

(a) 本系统有 3 个回路, 其回路增益分别为

$$L_1 = -G_1(s)H_1(s), L_2 = -G_1(s)G_2(s)G_3(s)H_1(s)H_2(s), L_3 = -G_3(s)H_2(s)$$

特征式为

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1L_3 = 1 + G_1(s)H_1(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)H_1(s)H_2(s) + G_3(s)H_2(s) + G_1(s)G_3(s)H_1(s)H_2(s)$$

$\frac{C(s)}{R(s)}$: 有 2 条前向通路, 其增益与余子式分别为

$$P_1 = G_1(s)G_2(s)G_3(s), \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_3(s)G_4(s), \Delta_2 = 1 - L_1 = 1 + G_1(s)H_1(s)$$

用梅森公式得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s) + G_3(s)G_4(s)(1 + G_1(s)H_1(s))}{1 + G_1(s)H_1(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)H_1(s)H_2(s) + G_3(s)H_2(s) + G_1(s)G_3(s)H_1(s)H_2(s)}$$

$\frac{E(s)}{R(s)}$: 有 2 条前向通路, 其增益与余子式分别为

$$P_1 = 1, \Delta_1 = 1 - L_3 = 1 + G_3(s)H_2(s)$$

$$P_2 = -G_3(s)G_4(s)H_1(s)H_2(s), \Delta_2 = 1$$

用梅森公式得系统的传递函数为

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{1 + G_3(s)H_2(s) - G_3(s)G_4(s)H_1(s)H_2(s)}{1 + G_1(s)H_1(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)H_1(s)H_2(s) + G_3(s)H_2(s) + G_1(s)G_3(s)H_1(s)H_2(s)}$$

(b) 本系统有 5 个回路, 其回路增益分别为

$$L_1 = G_1(s), L_2 = -G_2(s), L_3 = L_4 = L_5 = -G_1(s)G_2(s)$$

特征式为

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) = 1 - G_1(s) + G_2(s) + 3G_1(s)G_2(s)$$

$\frac{C(s)}{R(s)}$: 有 4 条前向通路, 其增益与余子式分别为

$$P_1 = -G_1(s), \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_2(s), \Delta_2 = 1$$

$$P_3 = G_1(s)G_2(s), \Delta_3 = 1$$

$$P_4 = G_1(s)G_2(s), \Delta_4 = 1$$

用梅森公式得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3 + P_4\Delta_4}{\Delta} = \frac{-G_1(s) + G_2(s) + 2G_1(s)G_2(s)}{1 - G_1(s) + G_2(s) + 3G_1(s)G_2(s)}$$

$\frac{E(s)}{R(s)}$: 有 1 条前向通路, 其增益与余子式为

$$P_1 = 1, \Delta_1 = 1 - L_3 = 1 + G_1(s)G_2(s)$$

用梅森公式得系统的传递函数为

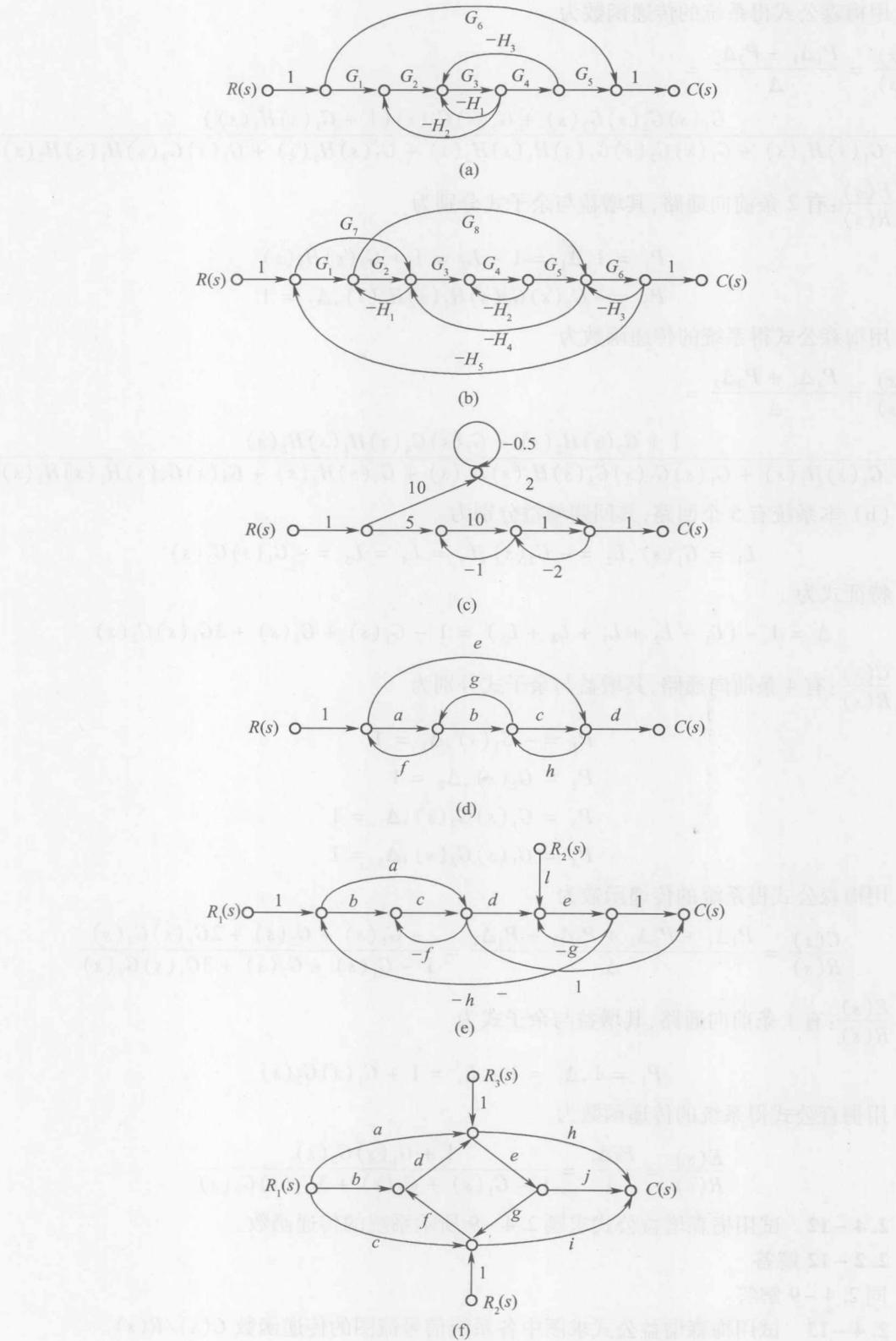
$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{1 + G_1(s)G_2(s)}{1 - G_1(s) + G_2(s) + 3G_1(s)G_2(s)}$$

2.4-12 试用梅森增益公式求题 2.4-9 所示系统的传递函数。

2.2-12 解答

同 2.4-9 解答。

2.4-13 试用梅森增益公式求图中各系统信号流图的传递函数 $C(s)/R(s)$ 。



2.4-13 题图

2.4-13 解答

(a) 本系统有 3 个回路, 其回路增益分别为

$$L_1 = -G_3H_1, L_2 = -G_2G_3H_2, L_3 = -G_3G_4H_3$$

特征式为

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) = 1 + G_3H_1 + G_2G_3H_2 + G_3G_4H_3$$

有 2 条前向通路, 其增益与余子式分别为

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5, \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_6, \Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) = 1 + G_3H_1 + G_2G_3H_2 + G_3G_4H_3$$

用梅森公式得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3G_4G_5}{1 + G_3H_1 + G_2G_3H_2 + G_3G_4H_3} + G_6$$

(b) 本系统有 9 个回路, 其回路增益分别为

$$L_1 = -G_2H_1, L_2 = -G_4H_2, L_3 = -G_6H_3, L_4 = -G_3G_4G_5H_4, L_5 = -G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_5,$$

$$L_6 = -G_3G_4G_5G_6G_7H_5, L_7 = -G_1G_6G_8H_5, L_8 = G_6G_7G_8H_1H_5, L_9 = G_8H_1H_4$$

特征式为

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8 + L_9) + L_2(L_1 + L_3 + L_7 + L_8 + L_9) + L_1L_3 - L_1L_2L_3 = \\ &1 + G_2H_1 + G_4H_2 + G_6H_3 + G_3G_4G_5H_4 + G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_5 + G_3G_4G_5G_6G_7H_5 + G_1G_6G_8H_5 - \\ &G_6G_7G_8H_1H_5 - G_8H_1H_4 + G_4H_2(G_2H_1 + G_6H_3 + G_1G_6G_8H_5 - G_6G_7G_8H_1H_5 - G_8H_1H_4) + \\ &G_2G_6H_1H_3 + G_2G_4G_6H_1H_2H_3 \end{aligned}$$

有 4 条前向通路, 其增益与余子式分别为

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5G_6, \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_3G_4G_5G_6G_7, \Delta_2 = 1$$

$$P_3 = G_1G_6G_8, \Delta_3 = 1 - L_2 = 1 + G_4H_2$$

$$P_4 = -G_6G_7G_8H_1, \Delta_4 = 1 - L_2 = 1 + G_4H_2$$

用梅森公式得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3 + P_4\Delta_4}{\Delta} = \frac{G_3G_4G_5G_6(G_1G_2 + G_7) + G_6G_8(G_1 - G_7H_1)(1 + G_4H_2)}{\Delta}$$

(c) 本系统有 3 个回路, 其回路增益分别为

$$L_1 = -0.5, L_2 = -1 \times 10 = -10, L_3 = -2 \times 1 = -2$$

特征式为

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1L_2 + L_1L_3 = 1 + 12.5 + 5 + 1 = 19.5$$

有 2 条前向通路, 其增益与余子式分别为

$$P_1 = 5 \times 10 \times 1 = 50, \Delta_1 = 1 - L_1 = 1.5$$

$$P_2 = 10 \times 2 = 20, \Delta_2 = 1 - L_2 = 1 + 10 = 11$$

用梅森公式得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{50 \times 1.5 + 20 \times 11}{19.5} = 15.128$$

(d) 本系统有 4 个回路, 其回路增益分别为

$$L_1 = af, L_2 = bg, L_3 = ch, L_4 = efg$$

特征式为

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_3 = 1 - af - bg - ch - efg + acfh$$

有 2 条前向通路, 其增益与余子式分别为

$$P_1 = abcd, \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = de, \Delta_2 = 1 - L_2 = 1 - bg$$

用梅森公式得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{abcd + de(1 - bg)}{1 - af - bg - ch - efg + acfh}$$

(e) 本系统有 4 个回路, 其回路增益分别为

$$L_1 = -cf, L_2 = -eg, L_3 = -bcdeh, L_4 = -adeh$$

特征式为

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2 = 1 + cf + eg + bcdeh + adeh + cefg$$

$\frac{C(s)}{R_1(s)}$: 有 4 条前向通路, 其增益与余子式分别为

$$P_1 = bcde, \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = ade, \Delta_2 = 1$$

$$P_3 = a, \Delta_3 = 1 - L_2 = 1 + eg$$

$$P_4 = bc, \Delta_4 = 1 - L_2 = 1 + eg$$

用梅森公式得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R_1(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3 + P_4 \Delta_4}{\Delta} = \frac{bcde + ade + (a + bc)(1 + eg)}{1 + cf + eg + bcdeh + adeh + cefg}$$

$\frac{C(s)}{R_2(s)}$: 有 3 条前向通路, 其增益与余子式分别为

$$P_1 = el, \Delta_1 = 1 - L_1 = 1 + cf$$

$$P_2 = -aehl, \Delta_2 = 1$$

$$P_3 = -bcehl, \Delta_3 = 1$$

用梅森公式得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R_2(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3}{\Delta} = \frac{el(1 + cf - ah - bch)}{1 + cf + eg + bcdeh + adeh + cefg}$$

(f) 本系统有 1 个回路, 其回路增益为

$$L_1 = defg$$

特征式为

$$\Delta = 1 - L_1 = 1 - defg$$

$\frac{C(s)}{R_1(s)}$: 有 9 条前向通路, 其增益与余子式分别为

$$\begin{aligned}
P_1 &= ah, \Delta_1 = 1 \\
P_2 &= aej, \Delta_2 = 1 \\
P_3 &= bdej, \Delta_3 = 1 \\
P_4 &= bdh, \Delta_4 = 1 \\
P_5 &= ci, \Delta_5 = 1 \\
P_6 &= aegi, \Delta_6 = 1 \\
P_7 &= bdegi, \Delta_7 = 1 \\
P_8 &= cdefj, \Delta_8 = 1 \\
P_9 &= cdjh, \Delta_9 = 1
\end{aligned}$$

用梅森公式得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R_1(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3 + P_4\Delta_4 + P_5\Delta_5 + P_6\Delta_6 + P_7\Delta_7 + P_8\Delta_8 + P_9\Delta_9}{\Delta} = \frac{ah + aej + bdej + bdh + ci + aegi + bdegi + cdefj + cdjh}{1 - defg}$$

$\frac{C(s)}{R_2(s)}$: 有 3 条前向通路, 其增益与余子式分别为

$$P_1 = i, \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = defj, \Delta_2 = 1$$

$$P_3 = dfh, \Delta_3 = 1$$

用梅森公式得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R_2(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3}{\Delta} = \frac{i + defj + dfh}{1 - defg}$$

$\frac{C(s)}{R_3(s)}$: 有 3 条前向通路, 其增益与余子式分别为

$$P_1 = h, \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = ej, \Delta_2 = 1$$

$$P_3 = egi, \Delta_3 = 1$$

用梅森公式得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R_3(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3}{\Delta} = \frac{h + ej + egi}{1 - defg}$$

第3章 线性系统的时域分析法

3.1 知识点辅导

在学习线性系统三大分析方法之一的时域分析法时,应重点掌握时间响应的基本概念;一阶系统的时间响应、性能指标和参数的求取;二阶系统的时间响应、欠阻尼状态下性能指标的计算;极点、零点位置变化的规律对系统动态性能影响;代数稳定性判据;输入信号和扰动作用下稳态误差。本章特别注意以下几个难点的学习和理解。

1. 系统稳定性判别

首先明确系统的特征方程一定是闭环系统分母多项式等于零,然后据此列写劳斯表,其难点在于出现全零行的情况,此时一定要用全零行上面一行构成辅助方程,并对其求导作为全零行元素,完成劳斯表。如果出现该特殊情况,则系统一定不稳定(等幅振荡或发散)。

2. 一阶、二阶系统的时间响应

首先要牢记一阶、二阶系统开环和闭环传递函数的标准形式,在解题过程中首先将题目中给出的传递函数化为标准形式,然后与标准形式对比,求出系统参数,然后根据性能指标公式进行解题。

3. 稳态误差计算

首先要明确稳态误差 e_{ss} 是指系统的误差达到稳态时的值,是对系统稳态控制精度的度量,是系统的稳态指标。利用终值定理求稳态误差时,需特别注意终值定理的使用条件;若系统输入为正弦信号时,则不能使用终值定理,必须采用第5章介绍的频域分析法来求解此时的稳态误差。

3.2 典型习题及详细解答

3.2-1 已知系统特征方程为 $3s^4 + 10s^3 + 5s^2 + s + 2 = 0$,试用劳斯判据判断该系统的稳定性。

3.2-1 解答

(1) 列写劳斯表如下:

s^4	3	5	2
s^3	10	1	
s^2	4.7	2	
s^1	-3.26		
s^0	2		

由劳斯表可知,其第一列元素符号改变了两次,因此该系统在 s 右半平面有两个根,系统不稳定。

3.2-2 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(0.5s + 1)}{s(s + 1)(0.5s^2 + s + 1)}$$

试确定系统稳定时的 K 值范围。

3.2-2 解答 系统特征方程为

$$s(s + 1)(0.5s^2 + s + 1) + K(0.5s + 1) = 0$$

将其展开得

$$0.5s^4 + 1.5s^3 + 2s^2 + (1 + 0.5K)s + K = 0$$

列写劳斯表如下

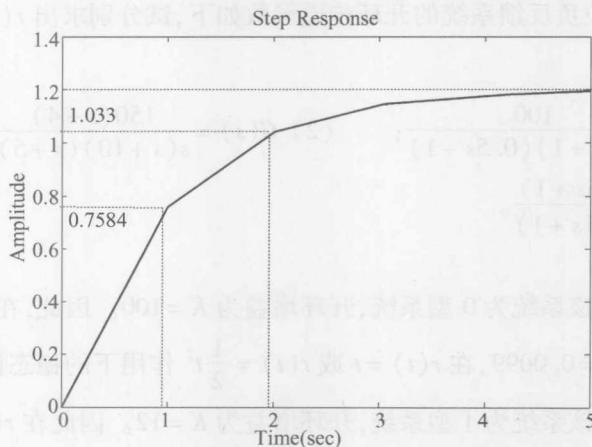
	0.5	2	K
s^4	1.5	$1 + 0.5K$	
s^3	$\frac{2.5 - 0.25K}{1.5}$	K	
s^2			
s^1	$\frac{2.5 - 1.25K - 0.125K^2}{2.5 - 0.25K}$		
s^0			K

令劳斯表的第一列元素均大于零，则有

$$\left. \begin{array}{l} 2.5 - 0.25K > 0 \\ 2.5 - 1.25K - 0.125K^2 > 0 \\ K > 0 \end{array} \right\}$$

因此使得系统稳定的 K 值范围为 $(0, 1.7082)$ 。

3.2-3 已知单位负反馈一阶系统的单位阶跃响应如图所示，试求闭环传递函数 $\Phi(s)$ 及调节时间 t_s 。



3.2-3 题图 一阶系统单位阶跃响应曲线

3.2-3 解答 设系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

在单位阶跃作用下的输出为

$$c(t) = L^{-1}(\Phi(s)R(s)) = L^{-1}\left(\frac{K}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s}\right) = K(1 - e^{-\nu T})$$

由图可知

$$c(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} K(1 - e^{-\nu T}) = K = 1.2$$

由于 $c(T) = 1.2(1 - e^{-1/T}) = 0.7584$, 则 $T = 1(s)$, 从而可得 $\Phi(s) = \frac{1.2}{s+1}$, $t_s = 3T = 3(s)$ 。

3.2-4 已知二阶系统的单位阶跃响应为

$$h(t) = 10 - 12.5e^{-1.2t} \sin(1.6t + 53.1)$$

试求系统的超调量 $\sigma\%$ 、峰值时间 t_p 和调节时间 t_s 。

3.2-4 解答 已知二阶系统的单位阶跃响应的标准形式如下

$$h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \beta)$$

对比可得

$$\zeta = \cos\beta = \cos 53.1^\circ = 0.6, \zeta\omega_n = 1.2, \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n = 1.6$$

则可知

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = e^{-\pi 0.6/\sqrt{1-0.6^2}} = 9.5\%$$

$$t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} = \frac{\pi}{1.6} = 1.96(s)$$

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = \frac{3.5}{1.2} = 2.92(s)$$

3.2-5 已知单位负反馈系统的开环传递函数如下, 试分别求出 $r(t) = 1(t)$ 、 t 、 $\frac{1}{2}t^2$ 时系统的稳态误差 e_{ss} 。

$$(1) G(s) = \frac{100}{(0.1s+1)(0.5s+1)}; \quad (2) G(s) = \frac{150(s+4)}{s(s+10)(s+5)};$$

$$(3) G(s) = \frac{8(0.5s+1)}{s^2(0.1s+1)}$$

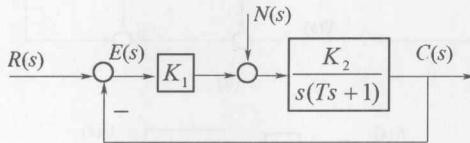
3.2-5 解答

(1) 由题意可知, 该系统为 0 型系统, 开环增益为 $K=100$ 。因此, 在 $r(t)=1(t)$ 作用下的稳态误差为 $e_{ss} = \frac{R}{1+K} = 0.0099$, 在 $r(t)=t$ 或 $r(t)=\frac{1}{2}t^2$ 作用下的稳态误差为 ∞ 。

(2) 由题意可知, 该系统为 I 型系统, 开环增益为 $K=12$ 。因此在 $r(t)=1(t)$ 作用下的稳态误差为 0, 在 $r(t)=t$ 作用下的稳态误差为 $e_{ss} = \frac{R}{K} = 0.0833$, 在 $r(t)=\frac{1}{2}t^2$ 作用下的稳态误差为 ∞ 。

(3) 由题意可知,该系统为Ⅱ型系统,开环增益为 $K=8$ 。因此在 $r(t)=1(t)$ 或 $r(t)=t$ 作用下的稳态误差为 0,在 $r(t)=\frac{1}{2}t^2$ 作用下的稳态误差为 $e_{ss}=\frac{A}{K}=0.25$ 。

3.2-6 对于图示系统,试求 $r(t)=t, n(t)=1(t)$ 时系统的稳态误差。



3.2-6 题图

3.2-6 解答 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_1 K_2}{s(Ts + 1)}$$

为 I 型二阶系统,系统是稳定的。

在 $r(t)=t$ 作用下的稳态误差为

$$e_{rss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K_1 K_2}$$

在扰动信号作用下的误差表达式为

$$E_n(s) = -\frac{\frac{K_2}{s(Ts + 1)}}{1 + K_1 \frac{K_2}{s(Ts + 1)}} \cdot N(s) = -\frac{K_2}{s(Ts + 1) + K_1 K_2} \cdot N(s)$$

当 $n(t)=1(t)$ 时,稳态误差为: $e_{nss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E_n(s) = -\frac{1}{K_1}$

系统总的稳态误差为 $e_{ss} = e_{rss} + e_{nss} = \frac{1}{K_1 K_2} - \frac{1}{K_1}$ 。

3.3 考研试题及详细解答

3.3-1 南京航空航天大学 2010 年《自动控制原理》(15 分)

已知系统结构图如图(a)所示,

- (1) 若将结构图等效为图(b)形式,试求出等效的 $G_{open}(s)$;
- (2) 试求使系统所有闭环特征根都位于 $s = -1$ 垂线之左 K 值范围。

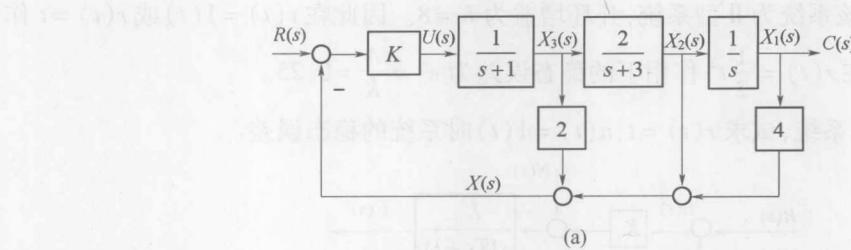
3.3-1 解答

(1) 由题意可知 $G_{open}(s)$ 即为从 $U(s)$ 到 $X(s)$ 的传递函数,其有三条前向通路: $p_1 = \frac{1}{s+1}$,

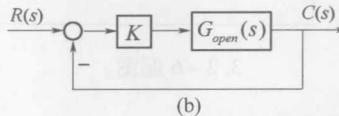
$$2, \Delta_1 = 1; p_2 = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{2}{s+3}, \Delta_2 = 1; p_3 = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{2}{s+3} \cdot \frac{1}{s} \cdot 4, \Delta_3 = 1.$$

没有回路因此 $\Delta = 1$ 。由梅森公式可得

$$G_{open}(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^3 p_i \Delta_i = \frac{2(s^2 + 4s + 4)}{s(s+1)(s+3)}$$



(a)



(b)

3.3-1 题图

(2) 由(1)可得系统的特征方程为

$$\begin{aligned} D(s) &= s(s+1)(s+3) + 2K(s^2 + 4s + 4) \\ &= s^3 + (4+2K)s^2 + (3+8K)s + 8K = 0 \end{aligned}$$

令 $s = s_1 - 1$ 代入特征方程式可得

$$s_1^3 + (2K+1)s_1^2 + (4K-2)s_1 + 2K = 0$$

由劳斯判据可知

$$\left\{ \begin{array}{l} 2K > 0 \\ 4K - 2 > 0 \\ (2K+1)(4K-2) - 2K > 0 \end{array} \right.$$

所以使系统所有闭环特征根都位于 $s = -1$ 垂线之左 K 值范围为 $(0.64, \infty)$ 。

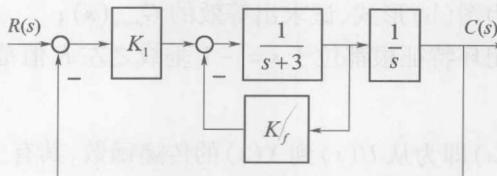
3.3-2 上海交通大学 2006 年《自动控制理论》(15 分)

控制系统框图如图所示,试求

(1) 当 $K_1 = 25, K_f = 0$ 时,系统的阻尼系数 ζ 、无阻尼自然振荡频率 ω_n 以及系统对单位斜坡输入的稳态误差 e_{ss} ;

(2) 当 $K_1 = 25, K_f = 4$ 时重复(1)的要求;

(3) 要使系统的阻尼系数 $\zeta = 0.7$,单位斜坡输入信号作用下系统的稳态误差 $e_{ss} = 0.1$,试确定 K_1 和 K_f 的数值,并计算在此参数情况下,系统单位阶跃响应的超调量、上升时间和调整时间。



3.3-2 题图

3.3-2 解答

(1) 由题意可得该系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{25}{s^2 + 3s + 25}$$

所以有 $\omega_n^2 = 25, 2\zeta\omega_n = 3$, 从而可得 $\omega_n = 5, \zeta = 0.3$ 。

由于系统的开环增益 $K = \frac{\omega_n}{2\zeta} = \frac{25}{3}$, 为 I 型系统, 因此在斜坡输入作用下的稳态误差为 $e_{ss} = \frac{1}{K} = \frac{3}{25}$ 。

(2) 由题意可得该系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{25}{s^2 + 7s + 25}$$

所以有 $\omega_n^2 = 25, 2\zeta\omega_n = 7$, 从而可得 $\omega_n = 5, \zeta = 0.7$ 。

由于系统的开环增益 $K = \frac{\omega_n}{2\zeta} = \frac{25}{7}$, 为 I 型系统, 因此在斜坡输入作用下的稳态误差为 $e_{ss} = \frac{1}{K} = \frac{7}{25}$ 。

(3) 由题意可得该系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{K_1}{s^2 + (3 + K_f)s + K_1}$$

由于已知 $e_{ss} = \frac{3 + K_f}{K_1} = 0.1, 2\zeta\sqrt{K_1} = 3 + K_f, \zeta = 0.7$, 所以可求得 $K_1 = 196, K_f = 16.6$ 。从而可得 $\omega_n = 14, \zeta = 0.7$ 。

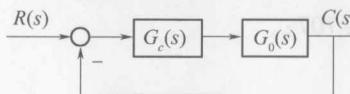
系统单位阶跃响应的超调量为 $\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 4.6\%$; 上升时间为 $t_r = \frac{\pi - \arccos\zeta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.235(s)$; 调整时间为 $t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = 0.36(s)$ 。

3.3-3 南京航空航天大学 2003 年《自动控制原理》(15 分)

某系统结构如图所示, 其中

$$G_0(s) = \frac{K}{s(\frac{1}{3}s + 1)(\frac{1}{5}s + 1)} \quad (K > 0)$$

试设计校正环节 $G_c(s)$, 使该系统在输入 $r(t) = t$ 作用下的稳态误差为零。



3.3-3 题图

3.3-3 解答 若要求在输入 $r(t) = t$ 作用下的稳态误差为零, 则系统必为 II 型系统, 即 $G_c(s)$ 必须是 I 型系统。

若设 $G_c(s) = \frac{K_c}{s}$, 则系统的闭环特征方程为

$$D(s) = 1 + G_c(s)G_0(s)$$

$$= \frac{1}{15}s^4 + \frac{8}{15}s^3 + s^2 + KK_c = 0$$

该特征方程有缺项,因此系统不稳定,不符合题意要求。

设 $G_c(s) = \frac{\tau_c s + 1}{s}$, 则系统的闭环特征方程为

$$\begin{aligned} D(s) &= 1 + G_c(s)G_0(s) \\ &= \frac{1}{15}s^4 + \frac{8}{15}s^3 + s^2 + K\tau_c s + K = 0 \end{aligned}$$

列写劳斯表可得

s^4	$\frac{1}{15}$	1	K
s^3	$\frac{8}{15}$	$K\tau_c$	
s^2	$\frac{8 - K\tau_c}{8}$	K	
s^1	$K\tau_c - \frac{64K}{15(8 - K\tau_c)}$		
	K		

要使系统稳定,则需满足以下条件即可。

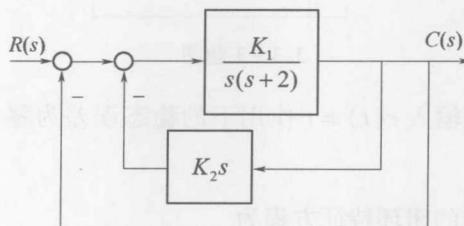
$$\left\{ \begin{array}{l} 8 - K\tau_c > 0 \\ K\tau_c - \frac{64K}{15(8 - K\tau_c)} > 0 \\ K > 0 \end{array} \right.$$

由以上分析可知, $G_c(s) = \frac{\tau_c s + 1}{s}$, 并满足 $\left\{ \begin{array}{l} K\tau_c < 8 \\ -K\tau_c^2 + 8\tau_c - \frac{64}{15} > 0 \\ K > 0 \end{array} \right.$ 即可满足题意要求。

3.3-4 东北大学 2002 年《自动控制原理》(15 分)

设一反馈系统如图所示,试选择 K_1, K_2 以使系统同时满足下列性能指标要求:

- (1) 当单位斜坡输入时,系统的稳态误差 $e_{ss} \leq 0.35$;
- (2) 闭环极点的阻尼比 $\zeta \leq 0.707$;
- (3) 调整时间 $t_s \leq 3$ 秒。



3.3-4 题图

3.3-4 解答 由题意求系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_1}{s^2 + (2 + K_1 K_2)s}$$

由此可得该系统的开环增益 $K = \frac{K_1}{2 + K_1 K_2}$, $\omega_n^2 = K_1$, $2\zeta\omega_n = 2 + K_1 K_2$ 。

又已知如下条件:

(1) 在单位斜坡输入时的稳态误差为 $e_{ss} = \frac{1}{K} = \frac{2 + K_1 K_2}{K_1} \leq 0.35$;

(2) 闭环极点的阻尼比 $\zeta = \frac{2 + K_1 K_2}{2\sqrt{K_1}} \leq 0.707$;

(3) 调整时间 $t_s = \frac{3.5}{2 + K_1 K_2} \leq 3$;

综上可得: $K_1 \geq 6.67$, $\frac{1}{3K_1} \leq K_2 \leq 0.35K_1 - 2$ 。

3.3-5 北京航空航天大学 2002 年《自动控制原理》(15 分)

已知单位负反馈系统的开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)(s + 1)}$$

其中 $K > 0$, $T > 0$ 。试确定使闭环系统稳定时, 参数 K , T 应满足的关系; 并计算在输入 $r(t) = t \times 1(t)$ 作用下系统的稳态误差。

3.3-5 解答 由题意求得闭环传递函数的特征方程为

$$\begin{aligned} D(s) &= s(Ts + 1)(s + 1) + K \\ &= Ts^3 + (1 + T)s^2 + s + K = 0 \end{aligned}$$

由劳斯判据可知, 要使闭环系统稳定则应满足

$$1 + T - KT > 0$$

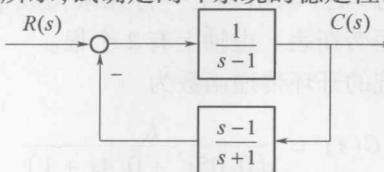
即

$$T < 1, K < \frac{1+T}{T}$$

由于该系统为 I 型系统, 因此 $r(t) = t \times 1(t)$ 作用下系统的稳态误差为 $e_{ss} = \frac{1}{K}$ 。

3.4 课后练习题及详细解答

3.4-1 设系统结构如图所示, 试确定闭环系统的稳定性。



3.4-1 题图

3.4-1 解答 系统的闭环传递函数为

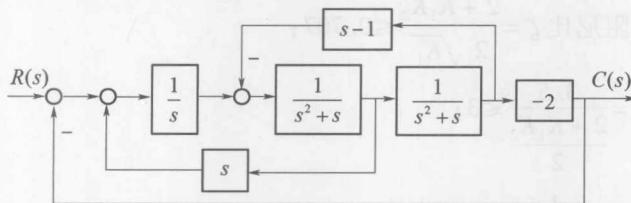
$$\Phi(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}$$

根据线性系统稳定的必要条件,系统特征方程不缺项且每一项系数均为正数。该系统特征方程的最后一项为负,不满足条件,所以系统不稳定。

3.4-2 某反馈控制系统的方框图如图所示,试求:

(1) 闭环传递函数。

(2) 判别系统稳定性,并求不在左半 s 平面的特征根数。



3.4-2 题图

3.4-2 解答 闭环传递函数

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+s} \cdot \frac{1}{s^2+s} \cdot (-2)}{1 + \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+s} \frac{1}{s^2+s} \cdot (-2) + \frac{1}{s^2+s} \cdot \frac{1}{s^2+s} \cdot (s-1) - \frac{1}{s} \cdot s \cdot \frac{1}{s^2+s}} = \\ &= \frac{-2}{s^5 + 2s^4 - s - 2} \end{aligned}$$

系统的特征方程为

$$D(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2$$

劳斯表如下:

s^5	1	0	-1
s^4	2	0	-2
s^3	8(0)	0(0)	
s^2	$\varepsilon(0)$	-2	
s^1	$\frac{16}{\varepsilon}$		
s^0	-2		

由劳斯表可知,其第一列元素符号改变了一次,因此该系统在 s 的右半平面有一个根,系统不稳定。由于在 s^3 这一行元素均为 0,由其上一行元素构成辅助方程 $2s^4 - 2 = 0$,将其求导后的系数作为该行系数继续列写劳斯表。虚轴上有 2 个根。

3.4-3 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.05s^2 + 0.4s + 1)}$$

(1) 系统稳定时,试确定 K 的取值范围。

(2) 若要求闭环极点在 $s = -1$ 左边, 试确定 K 的取值范围。

3.4-3 解答

(1) 系统的特征方程为

$$D(s) = 0.05s^3 + 0.4s^2 + s + K = 0$$

列写劳斯表如下:

s^3	0.05	1
s^2	0.4	K
s^1	$1 - \frac{0.05K}{0.4}$	
s^0		K

根据劳斯表可知

$$\begin{cases} K > 0 \\ 1 - \frac{0.05K}{0.4} > 0 \end{cases}$$

可得 K 的取值范围为 $(0, 8)$ 。

(2) 令 $s = s_1 - 1$, 代入特征方程式, 得

$$D(s_1) = 0.05(s_1 - 1)^3 + 0.4(s_1 - 1)^2 + s_1 - 1 + K = 0$$

即

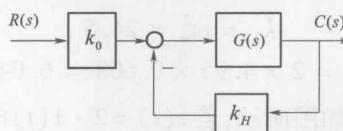
$$D(s_1) = 0.05s_1^3 + 0.25s_1^2 + 0.35s_1 + K - 0.65 = 0$$

s^3	0.05	0.35
s^2	0.25	$K - 0.65$
s^1	$0.35 - \frac{K - 0.65}{5}$	
s^0		$K - 0.65$

$$\begin{cases} 0.35 - \frac{K - 0.65}{5} > 0 \\ K - 0.65 > 0 \end{cases}$$

则 K 的取值范围为 $(0.65, 2.4)$ 。

3.4-4 已知一阶环节的传递函数为 $G(s) = \frac{10}{0.2s + 1}$, 若采用负反馈的方法将调整时间 t_s 减小为原来的 0.1 倍, 并且保证总的放大系数不变, 试选择 k_H 和 k_0 的值。



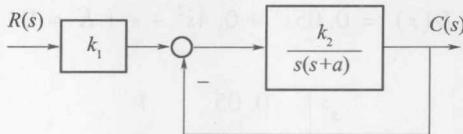
3.4-4 题图

3.4-4 解答 闭环传递函数为

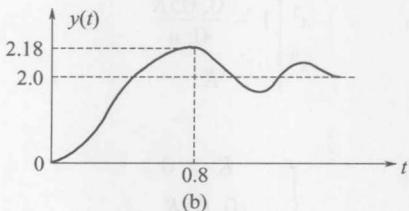
$$\Phi(s) = \frac{k_0 G(s)}{1 + G(s)k_H} = \frac{k_0 \frac{10}{0.2s + 1}}{1 + \frac{10k_H}{0.2s + 1}} = \frac{10k_0}{0.2s + 1 + 10k_H} = \frac{\frac{10k_0}{1 + 10k_H}}{\frac{0.2s}{1 + 10k_H} + 1}$$

根据题意, $1 + 10k_H = 10$, $\frac{10k_0}{1 + 10k_H} = 10$, 则 $k_0 = 10$, $k_H = 0.9$ 。

3.4-5 图(a)为系统结构图, 图(b)为某典型单位阶跃响应。试确定 k_1 , k_2 , a 的值。



(a)



3.4-5 题图

(a) 系统结构图; (b) 阶跃响应曲线。

3.4-5 解答 闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{k_1 \frac{k_2}{s(s+a)}}{1 + \frac{k_2}{s(s+a)}} = \frac{k_1 k_2}{s^2 + as + k_2}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \cdot \frac{k_1 k_2}{s^2 + as + k_2} \cdot \frac{1}{s} = k_1 = 2$$

根据超调量和峰值时间的公式, 得

$$e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = \frac{2.18 - 2}{2} \times 100\%$$

$$t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n} = 0.8$$

从而求得

$$\zeta = 0.608$$

$$\omega_n = 4.95$$

$$k_2 = \omega_n^2 = 24.5$$

$$a = 2 \times 4.95 \times 0.608 = 6.04$$

3.4-6 已知系统的结构图如图所示, 若 $r(t) = 2 \cdot 1(t)$ 时, 试求:

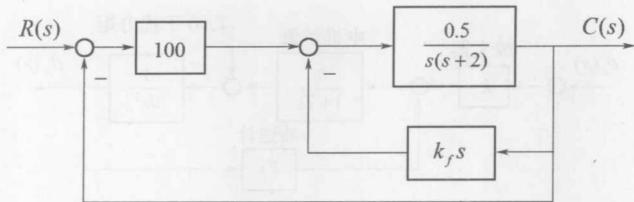
(1) $k_f = 0$ 时, 系统的超调量 $\sigma\%$ 和调节时间 t_s 。

(2) 当 k_f 不等于零时, 若要使 $\sigma\% = 20\%$, 试求 k_f 应为多大? 并求出此时的调整时间 t_s 的值。

(3) 比较上述两种情况, 说明内反馈 $k_f s$ 的作用。

3.4-6 解答

(1) 闭环传递函数为



3.4-6 题图

$$\Phi(s) = \frac{0.5 \times 100}{s(s+2)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{0.5 \times 100}{s(s+2)}} = \frac{50}{s^2 + 2s + 50}$$

因此

$$\omega_n = 5\sqrt{2}$$

$$\zeta = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

超调量为

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 63.8\%$$

调节时间为

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = \frac{3.5}{1.0} = 3.5(s)$$

(2) 闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{0.5 \times 100}{s(s+2)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{0.5 \times 100}{s(s+2)} + \frac{0.5k_f s}{s(s+2)}} = \frac{50}{s^2 + (2 + 0.5k_f)s + 50}$$

由于 $\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 20\%$, 得

$$\zeta = 0.456$$

所以

$$2 + 0.5k_f = 2\zeta\omega_n$$

故

$$k_f = 8.9$$

$$t_s = 1.085(s)$$

(3) 略

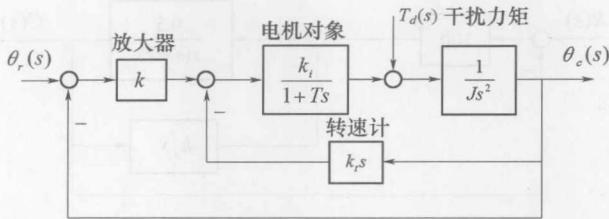
3.4-7 电机控制系统如图所示。系统参数为 $T=0.1, J=0.01, k_i=10$ 。

(1) 设干扰力矩 $T_d=0$, 输入 $\theta_r(t)=t$, 试问 k 和 k_t 之值对稳态误差有何影响。

(2) 设输入 $\theta_r(t)=t$, 试问当干扰力矩 T_d 为单位阶跃函数时, k 和 k_t 之值对稳态误差的影响。

3.4-7 解答

(1) 闭环传递函数为



3.4-7 题图

$$\Phi_r(s) = \frac{k \cdot \frac{k_i}{1+Ts} \cdot \frac{1}{Js^2}}{1 + \frac{k_i k_t s}{(1+Ts) Js^2} + \frac{k k_i}{(1+Ts) Js^2}} = \frac{k k_i}{(1+Ts) Js^2 + k_i k_t s + k k_i}$$

由题意,得

$$\Phi_r(s) = \frac{10k}{0.001s^3 + 0.01s^2 + 10k_t s + 10k}$$

则输入作用下的误差传递函数为

$$E_r(s) = [1 - \Phi_r(s)] R(s) = \frac{0.001s^3 + 0.01s^2 + 10k_t s}{0.001s^3 + 0.01s^2 + 10k_t s + 10k} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} E_r(s) = \frac{k_t}{k}$$

(2) 闭环传递函数为

$$\Phi_n(s) = \frac{\frac{1}{Js^2}}{1 + \frac{k_i k_t s}{(1+Ts) Js^2} + \frac{k k_i}{(1+Ts) Js^2}} = \frac{1 + Ts}{(1+Ts) Js^2 + k_i k_t s + k k_i}$$

由题意,得

$$\Phi_n(s) = \frac{1 + 0.1s}{0.001s^3 + 0.01s^2 + 10k_t s + 10k}$$

则干扰作用下的误差传递函数为

$$E_n(s) = 0 - \Phi_n(s) N(s) = -\frac{1 + 0.1s}{0.001s^3 + 0.01s^2 + 10k_t s + 10k} \cdot \frac{1}{s}$$

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} E_n(s) = -\frac{1}{10k}$$

3.4-8 某单位反馈随动系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{20000}{s(s+5)(s+500)}$, 试计算闭环系统的动态性能指标 $\sigma\%$ 和 t_s 值。

3.4-8 解答 开环传递函数为

$$G(s) = \frac{20000}{s(s+5)(s+500)} = \frac{8}{s(\frac{s}{5}+1)(\frac{s}{500}+1)} \approx \frac{8}{s(\frac{s}{5}+1)}$$

闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{40}{s^2 + 5s + 40}$$

则

$$\omega_n = 2\sqrt{10}$$

$$\zeta = \frac{5}{2 \times 2\sqrt{10}} = 0.395$$

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 25.9\%$$

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = \frac{3.5}{2.5} = 1.4(s)$$

3.4-9 已知某单位负反馈系统闭环传递函数分别为 $\Phi_a(s) = \frac{s+1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 7}$,

$\Phi_b(s) = \frac{10}{5s^2 + 2s + 10}$, 试求系统的稳态位置误差系数、稳态速度误差系数和稳态加速度误差系

数, 并求 $r(t) = 10 + 5t$ 作用下的稳态误差。

3.4-9 解答 根据题意, 已知

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

故

$$G_a(s) = \frac{s+1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 6}$$

$$G_b(s) = \frac{5}{s(2.5s+1)}$$

位置误差系数为

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} G_a(s) = \frac{1}{6}$$

$$k_b = \lim_{s \rightarrow 0} G_b(s) = \infty$$

速度误差系数为

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s G_a(s) = 0$$

$$k_b = \lim_{s \rightarrow 0} s G_b(s) = 5$$

加速度误差系数为

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_a(s) = 0$$

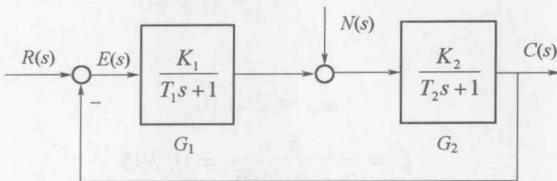
$$k_b = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_b(s) = 0$$

系统的稳态误差为

$$e_{ssa} = \frac{10}{\frac{1}{6}} + \frac{5}{0} = \infty$$

$$e_{ssb} = \frac{10}{\infty} + \frac{5}{5} = 1$$

3.4-10 如图所示系统。试求：



3.4-10 题图

- (1) 当 $r(t) = 0, n(t) = 1(t)$ 时, 系统的静态误差 e_{ss} ;
- (2) $r(t) = 1(t), n(t) = 1(t)$ 时, 系统的静态误差 e_{ss} ;
- (3) 若要减少 e_{ss} , 则应如何调整 K_1, K_2 ;
- (4) 如分别在扰动点之前或之后加入积分环节, 会有何影响?

3.4-10 解答

(1) 干扰作用下的传递函数为

$$\begin{aligned}\Phi_n(s) &= \frac{\frac{K_2}{T_2s + 1}}{1 + \frac{K_1}{T_1s + 1} \cdot \frac{K_2}{T_2s + 1}} = \frac{K_2 T_1 s + K_2}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1 + K_1 K_2} \\ E_n(s) &= 0 - \Phi_n(s)N(s) = -\frac{K_2 T_1 s + K_2}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1 + K_1 K_2} \cdot \frac{1}{s} \\ e_{ssn} &= \lim_{s \rightarrow 0} E_n(s) = -\frac{K_2}{1 + K_1 K_2}\end{aligned}$$

(2) 输入作用下的传递函数为

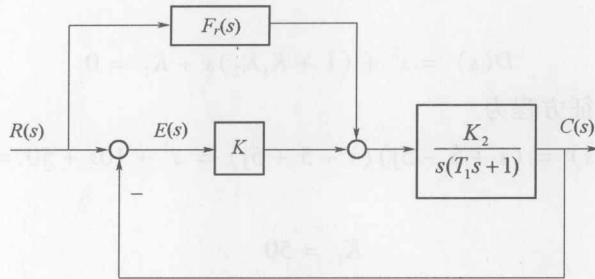
$$\begin{aligned}\Phi_r(s) &= \frac{\frac{K_1 K_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}}{1 + \frac{K_1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{K_2}{T_2 s + 1}} = \frac{K_1 K_2}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1 + K_1 K_2} \\ E_r(s) &= R(s) - \Phi_r(s)R(s) = \frac{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1 + K_1 K_2} \cdot \frac{1}{s} \\ e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} [E_r(s) + E_n(s)] = \frac{1 - K_2}{K_1 K_2 + 1}\end{aligned}$$

(3)(4)略

3.4-11 复合系统的方框图如图所示, 前馈环节的传递函数 $F_r(s) = \frac{as^2 + bs}{T_2 s + 1}$ 。当输入 $r(t)$ 为单位加速度信号时, 为使系统的静态误差为零, 试确定前馈环节的参数 a 和 b 。

3.4-11 解答

$$\Phi_r(s) = \frac{\frac{KK_2}{s(T_1 s + 1)} + \frac{F_r K_2}{s(T_1 s + 1)}}{1 + \frac{KK_{21}}{s(T_1 s + 1)}} = \frac{KK_2 + F_r K_2}{T_1 s^2 + s + KK_2}$$



3.4-11 题图

$$E_r(s) = R(s) - \Phi_r(s)R(s) = \frac{T_1 s^2 + s - F_r K_2}{T_1 s^2 + s + K K_2} \cdot \frac{1}{s^3}$$

由于

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} E_r(s) = 0$$

所以

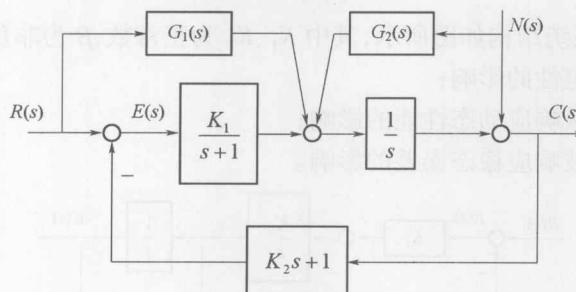
$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) - K_2 s(a s + b)}{s^2(T_1 s^2 + s + K_1 K_2)(T_2 s + 1)}$$

采用洛必达法则, 得

$$\begin{aligned} a &= \frac{T_1 + T_2}{K_2} \\ b &= \frac{1}{K_2} \end{aligned}$$

3.4-12 已知系统结构如图所示。

- (1) 要使系统闭环极点配置在 $-5 \pm 5j$ 处, 求相应的 K_1, K_2 值;
- (2) 设计 $G_1(s)$, 使之在 $r(t)$ 单独作用下无稳态误差;
- (3) 设计 $G_2(s)$, 使之在 $n(t)$ 单独作用下无稳态误差。



3.4-12 题图

3.4-12 解答

(1) 闭环传递函数为

$$\Phi_r(s) = \frac{G_1(s) \cdot \frac{1}{s} + \frac{K_1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{K_1}{s+1} \cdot \frac{1}{s} \cdot (K_2 s + 1)} = \frac{(s+1)G_1 + K_1}{s^2 + (1 + K_1 K_2)s + K_1}$$

系统特征方程为

$$D(s) = s^2 + (1 + K_1 K_2)s + K_1 = 0$$

根据题意, 系统特征方程为

$$D(s) = (s + 5 - 5j)(s + 5 + 5j) = s^2 + 10s + 50 = 0$$

可得

$$K_1 = 50$$

$$K_2 = 0.18$$

(2) 误差传递函数为

$$\begin{aligned} E_r(s) &= \frac{1}{K_2 s + 1} R(s) - \Phi_r(s) R(s) \\ &= \frac{s^2 + (1 + K_1 K_2)s + K_1 - G_1(s+1)(K_2 s + 1) - K_1(K_2 s + 1)}{(K_2 s + 1)[s^2 + (1 + K_1 K_2)s + K_1]} \end{aligned}$$

于在 $r(t)$ 作用下无稳态误差, 所以

$$s^2 + (1 + K_1 K_2)s + K_1 = G_1(s+1)(K_2 s + 1) + K_1(K_2 s + 1)$$

得

$$G_1(s) = \frac{s}{K_2 s + 1}$$

(3) 与第(2)问方法相同。

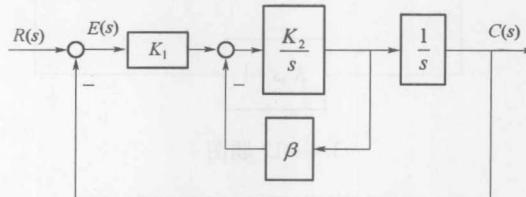
$$\Phi_n(s) = \frac{G_1(s) \cdot (-\frac{1}{s}) + 1}{1 + \frac{K_1}{s+1} \cdot \frac{1}{s} \cdot (K_2 s + 1)} = \frac{s(s+1) - G_2(s+1)}{s^2 + (1 + K_1 K_2)s + K_1}$$

使其恒等于 0, 则

$$G_2(s) = s$$

3.4-13 设控制系统结构如图所示, 其中 K_1, K_2 为正常数, β 为非负常数。试分析:

- (1) β 值对系统稳定性的影响;
- (2) β 值对系统阶跃响应动态性能的影响;
- (3) β 值对系统斜坡响应稳态误差的影响。



3.4-13 题图

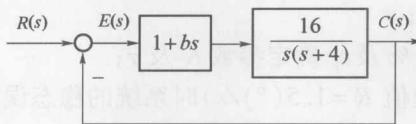
3.4-13 解答 略

3.4-14 已知控制系统结构图如图所示。

- (1) 当不存在速度反馈 ($b=0$) 时, 试确定单位阶跃输入时系统的阻尼系数, 自然频率, 最

大超调量,以及由单位斜坡输入所引起的稳态误差;

(2) 确定系统阻尼比等于 0.8 时的速度反馈常数 b 的值,并确定在单位阶跃输入时系统的最大超调量和单位斜坡输入所引起的稳态误差。



3.4-14 题图

3.4-14 解答

(1) 当 $b=0$ 时,开环传递函数为

$$G(s) = \frac{16}{s(s+4)}$$

为 I 型系统。其闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{16}{s^2 + 4s + 16}$$

故

$$\omega_n = 4$$

$$\zeta = \frac{4}{2 \times 4} = 0.5$$

超调量为

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 16.3\%$$

由单位斜坡输入所引起的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{R}{K} = \frac{1}{4} = 0.25$$

(2) 根据题意 $\zeta=0.8$,可得超调量为

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 1.52\%$$

开环传递函数为

$$G(s) = \frac{16(1+bs)}{s(s+4)}$$

闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{16(1+bs)}{s^2 + (16b+4)s + 16}$$

由上可得

$$2\zeta\omega_n = 16b + 4$$

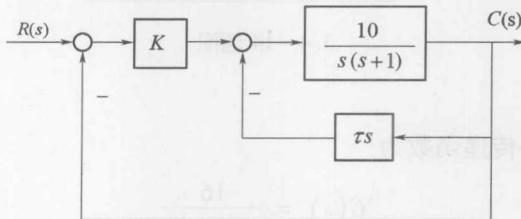
$$b = \frac{2\zeta\omega_n - 4}{16} = \frac{2 \times 0.8 \times 4 - 4}{16} = 0.15$$

由单位斜坡输入所引起的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{R}{K} = \frac{1}{4} = 0.25$$

3.4-15 已知系统结构图如图所示,单位阶跃响应的 $\sigma\% = 16.3\%$, 峰值时间 $t_p = 1s$ 。试求:

- (1) 开环传递函数 $G(s)$;
- (2) 闭环传递函数 $\Phi(s)$;
- (3) 根据已知性能指标 $\sigma\%$ 及 t_p 确定参数 K 及 τ ;
- (4) 计算等速输入(恒速值 $R = 1.5(^{\circ})/s$)时系统的稳态误差。



3.4-15 题图

3.4-15 解答

(1) 开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10K}{s(s+1+10\tau)}$$

(2) 闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{10K}{s^2 + (1+10\tau)s + 10K}$$

(3) 由题意可知

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 16.3\%$$

可以求得

$$\zeta = 0.5$$

又知 $t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} = 1(s)$, 得

$$\omega_n = 3.628$$

根据第(2)问求得的传递函数可知

$$\begin{aligned} 10K &= \omega_n^2 \\ 1 + 10\tau &= 2\zeta\omega_n \end{aligned}$$

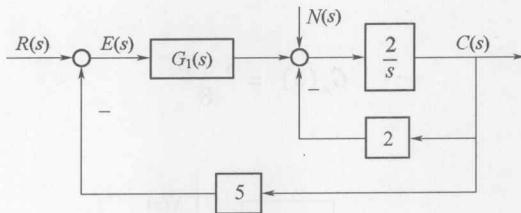
故

$$\begin{aligned} K &= \frac{\omega_n^2}{10} = 1.316 \\ \tau &= 0.2628 \end{aligned}$$

(4) 斜坡输入时的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{R}{K} = \frac{1.5}{1.316} = 1.14$$

3.4-16 某控制系统结构如图所示, $G_1(s)$ 的单位阶跃响应为 $\frac{8}{5}(1 - e^{-5t})$ 。



3.4-16 题图

- (1) 若 $r(t) = 20 \times 1(t)$, 求系统稳态输出 $c(\infty)$;
- (2) $r(t) = 20 \times 1(t)$, 求系统超调量 $\sigma\%$ 、调节时间 t_s 和稳态误差 e_{ss} ;
- (3) 若 $n(t)$ 为可测量的阶跃扰动信号, 为消除扰动对稳态输出的影响, 试设计顺馈补偿装置 $G_n(s)$, 并画出相应的系统结构图。

3.4-16 解答

- (1) 根据 $G_1(s)$ 的单位阶跃响应我们可以求出其表达式为

$$G_1(s) \frac{1}{s} = L\left(\frac{8}{5}(1 - e^{-5t})\right) = \frac{8}{s(s+5)}$$

则 $G_1(s) = \frac{8}{s+5}$ 。

系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{16}{s^2 + 9s + 100}$$

所以

$$c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s)R(s) = \frac{16}{s^2 + 9s + 100} \cdot \frac{20}{s} = 3.2$$

- (2) 根据闭环传递函数可知

$$\omega_n = 10$$

$$\zeta = \frac{9}{2 \times 10} = 0.45$$

系统超调量为

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 20.53\%$$

调节时间为

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = \frac{3.5}{4.5} = 0.78(s)$$

稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{5} \cdot \frac{20}{s} - \Phi(s) \frac{20}{s} \right] = 0.8$$

- (3) 设计顺馈补偿 $G_n(s)$ 。

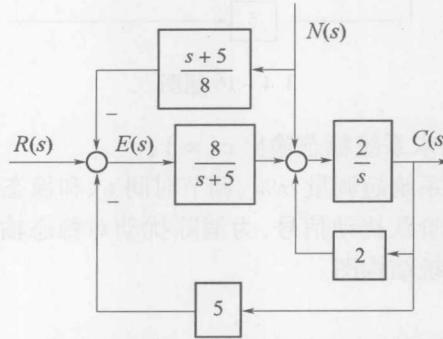
已知传递函数为

$$\Phi_n(s) = \frac{2(s+5) - 16G_n(s)}{s^2 + 9s + 100} = 0$$

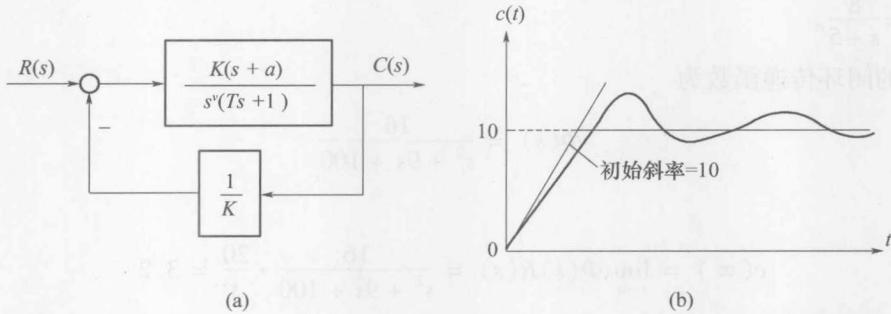
故

$$G_n(s) = \frac{s+5}{8}$$

结构图如下：



3.4-17 系统结构图如图(a)所示,其单位阶跃响应为 $c(t)$,如图(b)所示,系统的稳态位置误差 $e_{ss} = 0$ 。试确定 K, v 和 T 值。



3.4-17 题图

(a) 系统结构图; (b) 单位阶跃响应。

3.4-17 解答 开环传递函数为

$$G(s) = \frac{s+a}{s^v(Ts+1)}$$

闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{K(s+a)}{s^v(Ts+1) + s + a}$$

由于单位阶跃响应稳态误差为 0, 所以系统为 I 型系统或者 II 型系统, 即 $v=1$ 或 2 。

再根据 $c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(s+a)}{s^v(Ts+1) + s + a} \cdot \frac{1}{s} = K = 10$ 。

若 $v=1$, 则 $\dot{c}(t)$ 的拉普拉斯变换为 $sC(s) = \frac{10(s+a)}{s(Ts+1) + s + a}$ 。

则

$$c(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sC(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{10(s+a)}{s(Ts+1) + s + a} = \frac{10}{T} = 10$$

所以,得

$$T = 1$$

若 $v=2$, 则 $\dot{c}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10(s+a)}{s^2(Ts+1)+s+a} = 0$, 不符合题意。

3.4-18 已知某单位负反馈系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{1}{Ts}$, 试分别确定系统在 $r(t) = \frac{1}{2}t^2$, $r(t) = \sin\omega t$ 作用下的稳态误差。

3.4-18 解答 系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

所以在输入 $r(t) = \frac{1}{2}t^2$ 时, 其稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{Ts+1}\right) \frac{1}{s^3} = \infty$$

在输入 $r(t) = \sin(\omega t)$ 时, 其稳态误差为

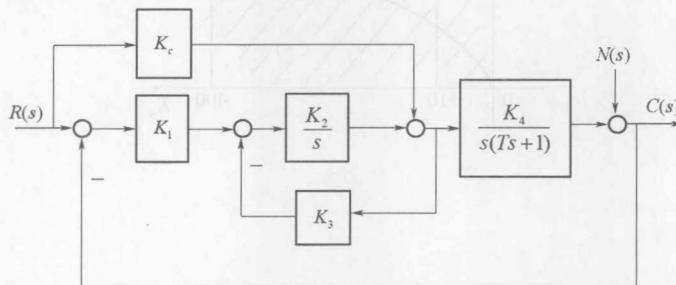
$$e(t) = L^{-1} \left(\frac{Ts}{Ts+1} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有

$$e_{ss} = \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} \cos\omega t + \frac{T^2\omega^2}{T^2\omega^2 + 1} \sin\omega t$$

3.4-19 设复合控制系统结构如图所示。

- (1) 计算当 $n(t) = t$ 时系统的稳态误差;
- (2) 设计 K_c , 使系统在 $r(t) = t$ 作用下无稳态误差。



3.4-19 题图

3.4-19 解答

- (1) 干扰作用下的闭环传递函数为

$$\Phi_n(s) = \frac{s^2(Ts+1) + s(Ts+1)K_2K_3}{s^2(Ts+1) + K_2K_3(Ts+1)s + K_1K_2K_4}$$

$$e_{ssn} = -\lim_{s \rightarrow 0} \Phi_n(s) \frac{1}{s^2} = -\frac{K_3}{K_1K_4}$$

(2) 输入作用下的闭环传递函数为

$$\Phi_r(s) = \frac{K_c K_4 s + K_1 K_2 K_4}{s^2(Ts + 1) + K_2 K_3(Ts + 1)s + K_1 K_2 K_4}$$

则输入为 $r(t) = t$ 时, 稳态误差为

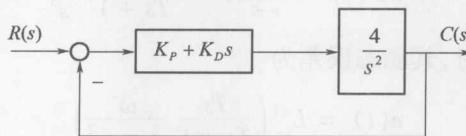
$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} E_r(s) = 0$$

所以

$$K_c = \frac{K_2 K_3}{K_4}$$

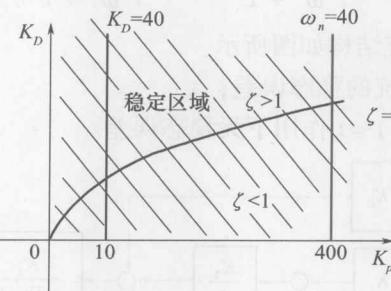
3.4-20 控制系统如图所示。试在 $K_p - K_D$ 平面上画出:

- (1) 稳定区域和不稳定区域;
- (2) 临界阻尼比轨迹以及欠阻尼区域和过阻尼区域;
- (3) 加速度误差系数 K_a 为 40 的轨迹;
- (4) 自然振荡角频率 ω_n 为 40rad/s 的轨迹。



3.4-20 题图

3.4-20 解答



4.1 知识点辅导

学习本章时,重点掌握根轨迹的定义、根轨迹方程、相角条件、幅值条件;牢记根轨迹的绘制法则;不同参数变量的根轨迹绘制;利用根轨迹对闭环系统稳定性及控制性能进行分析;利用根轨迹进行系统校正设计。本章特别注意以下几个难点的学习和理解。

1. 正反馈系统的根轨迹

在一些复杂系统中,包含了正反馈内回路,有时为了分析内回路的特性,则有必要绘制相应的根轨迹,其相角条件为 $0 + 2k\pi$,称为零度根轨迹。因此在绘制零度根轨迹时,需要注意三个法则(实轴上根轨迹、根轨迹渐近线与实轴正方向的夹角、根轨迹起始角和终止角)不同于常规负反馈系统根轨迹的地方;在用 MATLAB 函数 rlocus 作正反馈系统的根轨迹图时,需注意相应修改。

2. 非最小相位系统的根轨迹

如果系统至少有一个零点或极点位于 s 右半平面,则系统称为非最小相位系统,绘制非最小相位系统的根轨迹需注意其相角条件的变化。

3. 闭环零点、极点分布对系统性能的影响

(1) 稳定性 要求闭环系统稳定,其根轨迹必须全部位于 s 左半平面。如果系统存在三条或三条以上的渐近线,则必有一个开环增益值,使系统处于临界稳定状态。

(2) 运动形态 系统的基本运动形态由闭环极点的位置决定。当有一闭环零点和闭环极点重合时,二者构成一对偶极子。根据留数的计算可知,对应于偶极子的那个极点的运动形态分量将消失。当闭环极点全部位于负实轴时,响应呈单调上升状态。当闭环极点出现复数时,响应呈衰减振荡形式。

(3) 平稳性 阻尼角 β 越大,阻尼比 ζ 小,系统的振荡频率越高,振荡越剧烈。要使系统的暂态响应平稳,同时又有比较好的快速性,系统的阻尼比不能太大,也不能太小,理论上讲 $\beta = 45^\circ$,阻尼比 $\zeta = 0.707$ 时,系统的总体性能最好。

(4) 快速性 要使系统具有较好的快速性,除闭环主导极点以外,其余闭环极点应该远离虚轴,使其暂态响应分量衰减加快,系统调节时间减小,从而提高系统的响应速度。

4. 增加开环零、极点对闭环系统性能的影响

(1) 增加开环零点对根轨迹的影响 增加开环零点,改变渐近线的条数和渐近线的倾角;增加开环零点,相当于增加微分作用,使根轨迹向左移动或弯曲,从而提高了系统的相对稳定性。系统阻尼增加,过渡过程时间缩短;增加的开环零点越接近坐标原点,微分作用越强,系统的相对稳定性越好。

(2) 增加开环极点对根轨迹的影响 增加开环极点,改变渐近线的条数和渐近线的倾角;增加开环极点,相当于增加积分作用,使根轨迹向右移动或弯曲,从而降低了系统的相对稳定性。系统阻尼减小,过渡过程时间加长;增加的开环极点越接近坐标原点,积分作用越强,系统

的相对稳定性越差。

(3) 增加开环偶极子的作用 增加一对开环偶极子,可以改善系统的稳态性能。

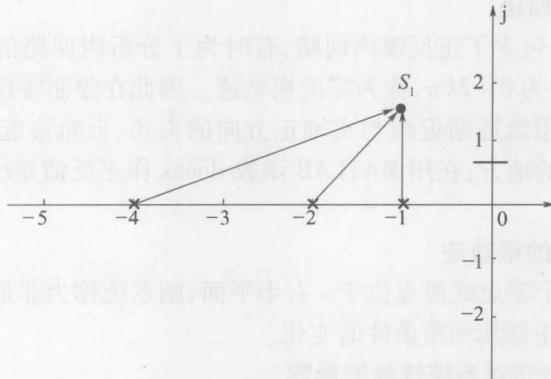
4.2 典型习题及详细解答

4.2-1 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

试证明 $s_1 = -1 + j\sqrt{3}$ 在根轨迹上,并求出相应的根轨迹增益 K^* 和开环增益 K 。

4.2-1 解答 若点 s_1 在根轨迹上,则点 s_1 应满足相角条件 $\angle G(s)H(s) = \pm(2k+1)\pi$, 如图所示。



4.2-1 图解

对于 $s_1 = -1 + j\sqrt{3}$, 由相角条件

$$\begin{aligned} \angle G(s_1)H(s_1) &= 0 - \angle(-1 + j\sqrt{3} + 1) - \angle(-1 + j\sqrt{3} + 2) - \angle(-1 + j\sqrt{3} + 4) \\ &= 0 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\pi \end{aligned}$$

满足相角条件,因此 $s_1 = -1 + j\sqrt{3}$ 在根轨迹上。

将 s_1 代入幅值条件:

$$|G(s_1)H(s_1)| = \frac{K^*}{|-1 + j\sqrt{3} + 1| \cdot |-1 + j\sqrt{3} + 2| \cdot |-1 + j\sqrt{3} + 4|} = 1$$

$$\text{解出: } K^* = 12, K = \frac{K^*}{8} = \frac{3}{2}$$

4.2-2 已知单位反馈系统的开环传递函数,试概略绘出系统根轨迹。

$$G(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

4.2-2 解答

首先将传递函数变换成零极点标准型

$$G(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)(0.5s+1)} = \frac{10K}{s(s+5)(s+2)}$$

则三个开环极点: $p_1 = 0, p_2 = -2, p_3 = -5$

① 实轴上的根轨迹: $(-\infty, -5], [-2, 0]$

$$\text{② 漐近线: } \begin{cases} \sigma_a = \frac{0-2-5}{3} = -\frac{7}{3} \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3}, \pi \end{cases}$$

③ 分离点:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+5} + \frac{1}{d+2} = 0$$

解之得: $d_1 = -0.88, d_2 = -3.7863$ (舍去)。

④ 与虚轴的交点:

特征方程为

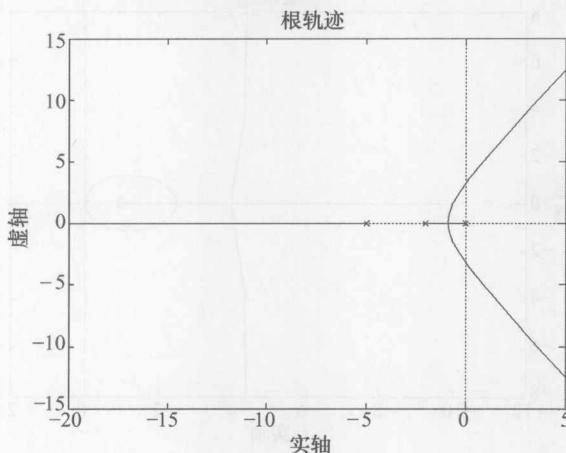
$$D(s) = s^3 + 7s^2 + 10s + 10K = 0$$

令

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega)] = -7\omega^2 + 10K = 0 \\ \operatorname{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 10\omega = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} \omega = \sqrt{10} \\ K = 7 \end{cases}$$

与虚轴的交点 $(0, \pm \sqrt{10}j)$ 。根轨迹如图所示。



4.2-2 图解

4.2-3 设系统的闭环特征方程

$$s^2(s+a) + K(s+1) = 0 \quad (a > 0)$$

(1) 当 $a=10$ 时, 作系统根轨迹, 并求出系统阶跃响应分别为单调、阻尼振荡时(有复极点) K 的取值范围。

(2) 若使根轨迹只具有一个非零分离点, 此时 a 的取值? 并做出根轨迹。

(3) 当 $a=5$ 时, 是否具有非零分离点, 并做出根轨迹。

4.2-3 解答

$$D(s) = s^2(s+a) + K(s+1) = 0 \quad (a > 0)$$

$$(1) \quad a=10, D(s) = s^2(s+10) + K(s+1) = 0,$$

等效开环传递函数

$$G^*(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+10)}$$

$n=3$ 有 3 条根轨迹, 有 $n-m=2$ 条趋向无穷远处。

① 实轴上根轨迹: $[-10, -1]$

$$\text{② 滤近线: } \begin{cases} \sigma_a = \frac{-10+1}{2} = -\frac{9}{2} \\ \varphi_a = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

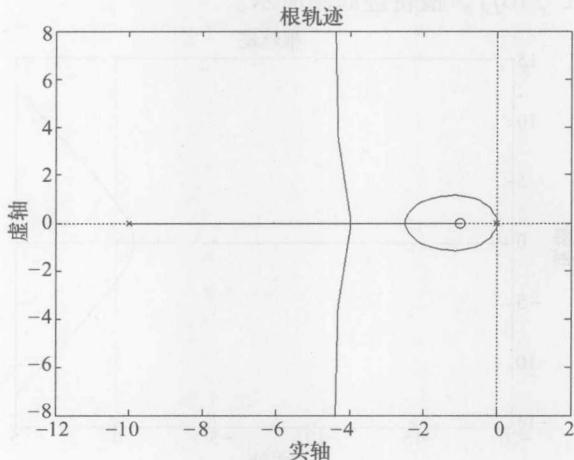
③ 分离点:

$$\frac{2}{d} + \frac{1}{d+10} = \frac{1}{d+1}$$

解得: $d_1 = -2.5, d_2 = -4$,

$$K_{d_1} = \frac{|d_1|^2 |d_1 + 10|}{|d_1 + 1|} = 31.25, K_{d_2} = \frac{|d_2|^2 |d_2 + 10|}{|d_2 + 1|} = 32$$

当 $31.25 \leq K \leq 32$ 时系统阶跃响应为单调。当 $0 < K < 31.25$ 及 $K > 32$ 时系统阶跃响应为阻尼振荡。



4.2-3 图解(a)

$$(2) \quad D(s) = s^2(s+a) + K(s+1) = 0, G^*(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+a)}$$

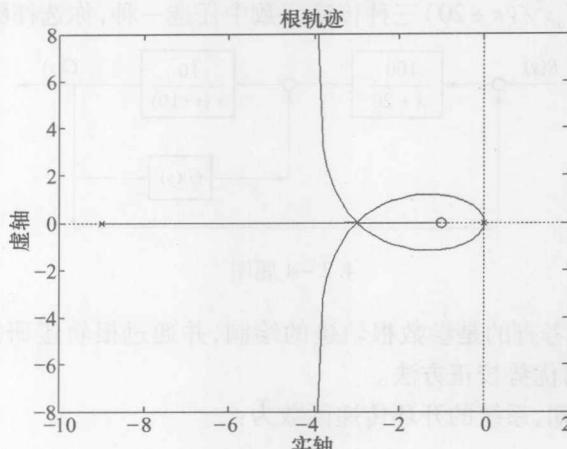
分离点:

$$\frac{2}{d} + \frac{1}{d+a} = \frac{1}{d+1}$$

$$2d^2 + (a+3)d + 2a = 0$$

$$d = \frac{-(a+3) \pm \sqrt{(a+3)^2 - 16a}}{4}$$

要使系统只有一个非零分离点, 则 $(a+3)^2 - 16a = 0$ 即 $a=9, a=1$ (舍去)



4.2-3 图解(b)

(3) $a=5$

$$D(s) = s^2(s+5) + K(s+1) = 0$$

作等效开环传递函数

$$G^*(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+5)}$$

$n=3$ 有 3 条根轨迹其中 2 条趋向无穷远处

实轴上: $[-5, -1]$

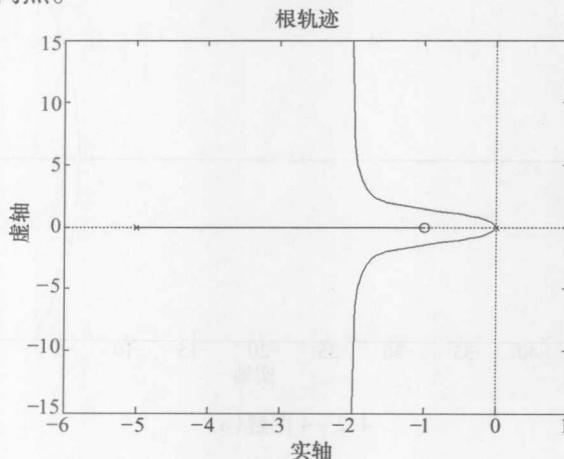
渐近线:

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-5+1}{2} = -2 \\ \varphi_a = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

分离点:

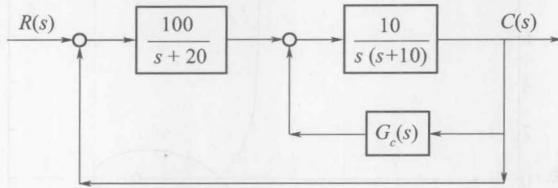
$$d^2 + 4d + 5 = 0$$

无解, 故无非零分离点。



4.2-3 图解(c)

4.2-4 设控制系统如下图所示,其中 $G_c(s)$ 是为了改善性能而加入的校正装置。若 $G_c(s)$ 可从 $K_t s$, $K_a s^2$ 和 $K_a s^2/(s+20)$ 三种传递函数中任选一种,你选择哪一种?为什么?



4.2-4 题图

4.2-4 解答 本题考查的是参数根轨迹的绘制,并通过根轨迹研究系统的性能,通过不同性能之间的比较,得出优势校正方法。

由系统的结构图可知,系统的开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{100}{s+20} \cdot \frac{\frac{10}{s(s+10)}}{1 + \frac{10G_c(s)}{s(s+10)}} = \frac{1000}{(s+20)(s^2 + 10s + 10G_c(s))}$$

则系统的闭环特征方程为:

$$\begin{aligned} D(s) &= (s+20)(s^2 + 10s + 10G_c(s)) + 1000 \\ &= s^3 + 30s^2 + 200s + 1000 + 10G_c(s)(s+20) = 0 \end{aligned}$$

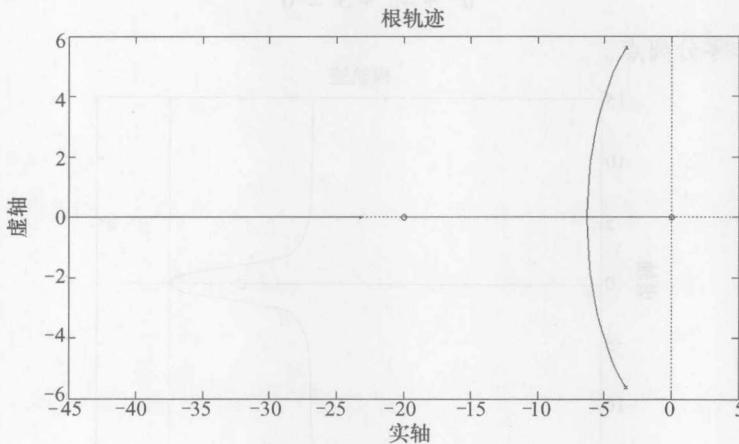
系统的等效开环传递函数为:

$$G_1(s) = \frac{10G_c(s)(s+20)}{s^3 + 30s^2 + 200s + 1000}$$

(1) 当 $G_c(s) = K_t s$ 时

$$G_1(s) = \frac{10K_t s(s+20)}{(s+23.25)(s+3.375+j5.63)(s+3.375-j5.63)}$$

绘制根轨迹如图所示:



4.2-4 图解(a)

其会合点方程为

$$d^4 + 40d^3 + 400d^2 - 2000d - 20041.5 = 0$$

利用试探法可求得

$$d = -6.3$$

在会合点处,用模值条件可以求出

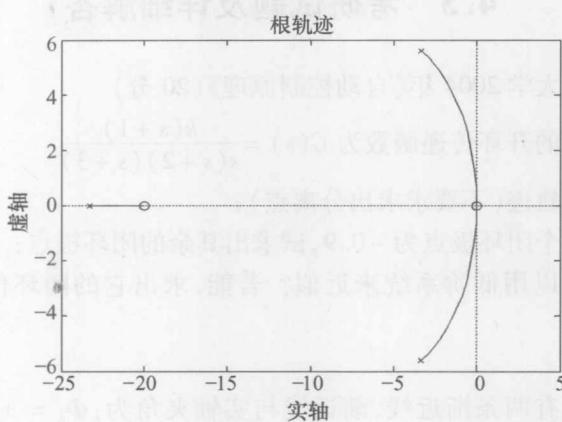
$$K_t = 0.79$$

在这种情况下,可以在 $0 < K_t < 0.79$ 的范围内,通过改变 K_t 的值使系统的主导极点具有 $\zeta = 0.707$ 的最佳阻尼比。

(2) 当 $G_c(s) = K_a s^2$ 时,有

$$G_1(s) = \frac{10K_a s^2 (s + 20)}{(s + 23.25)(s + 3.375 + j5.63)(s + 3.375 - j5.63)}$$

绘制根轨迹如图所示:



4.2-4 图解(b)

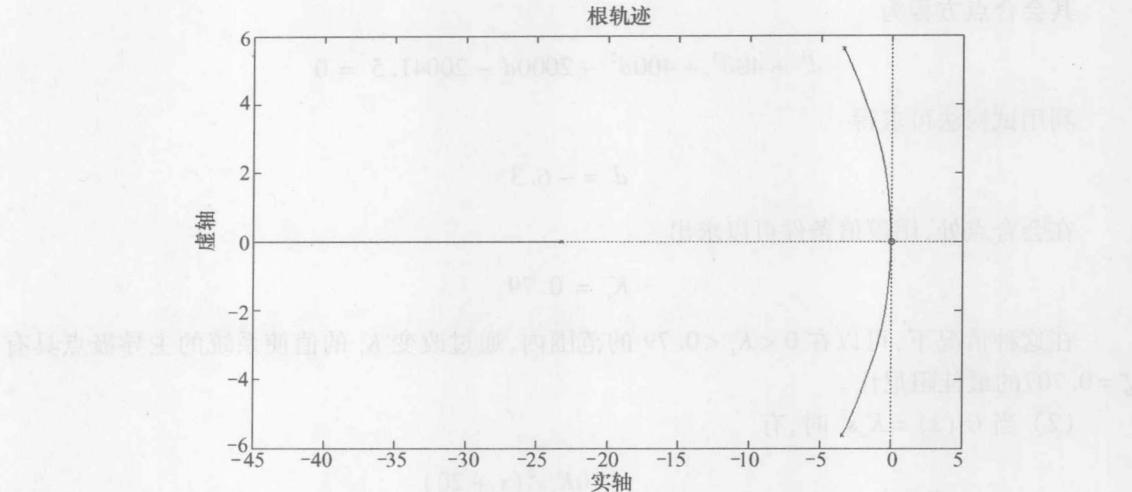
这种情况下,由于 K_a 的值越大,系统闭环极点越靠近虚轴,从而使稳定性越差,所以不能通过改变 K_a 的值来使得系统的性能达到最佳。

(3) 当 $G_c(s) = \frac{K_a s^2}{s + 20}$ 时,有

$$G_1(s) = \frac{10K_a s^2}{(s + 23.25)(s + 3.375 + j5.63)(s + 3.375 - j5.63)}$$

绘制根轨迹如图所示:

这种情况下,也不能通过改变 K_a 的值来使系统的性能达到最佳。通过以上分析,最终选择第一种情况,即 $G_c(s) = K_t s$ 。



4.2-4 图解(c)

4.3 考研试题及详细解答

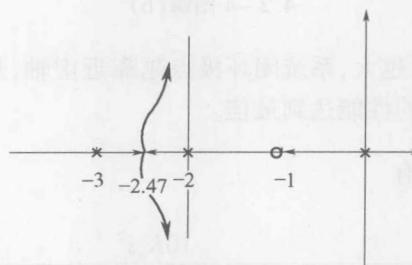
4.3-1 中国科技大学 2004 年《自动控制原理》(20 分)

设单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{k(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$

- (1) 绘制系统的根轨迹(不要求求出分离点)；
- (2) 已知系统的一个闭环极点为 -0.9, 试求出其余的闭环极点；
- (3) 该系统是否可以用低阶系统来近似？若能，求出它的闭环传递函数，若不能，给出理由。

4.3-1 解答

- (1) 系统的根轨迹有两条渐近线，渐近线与实轴夹角为： $\Phi_a = \pm 90^\circ$ ，与实轴的交点为： $\sigma_a = -2$ 。根轨迹如下图所示。



4.3-1 图解

- (2) 已知： $-\lambda_1 = -0.9 \Rightarrow k = 20.79$, 设其他两个闭环极点为 $-\lambda_2, -\lambda_3$, 则：

$$-\lambda_{2,3} = -2.05 \pm j4.35$$

- (3) $-\lambda_1 = -0.9$ 和 $-z = -1$ 构成一对闭环偶极点，故系统可降阶为二阶系统。其闭环传递函数为：

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{20.79(s+1)}{(s+0.9)(s+2.05+j4.35)(s+2.05-j4.35)} \\ &\approx \frac{23.1}{s^2 + 4.01s + 23.5}\end{aligned}$$

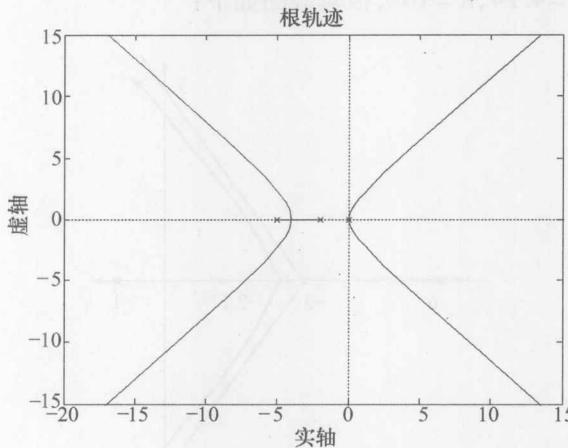
4.3-2 中国科技大学 2003 年《自动控制原理》(20 分)

设负反馈系统中, 前向通道的传递函数为 $G(s) = \frac{k}{s^2(s+2)(s+5)}$, 反馈通道的传递函数为 $H(s) = 1$ 。

- (1) 绘制系统的根轨迹图, 并判断闭环系统的稳定性;
- (2) 改变反馈通道的传递函数, 使 $H(s) = 2s + 1$, 绘制系统的根轨迹图, 判断闭环系统的稳定性, 简述 $H(s)$ 的这一变化对系统稳定性的影响。

4.3-2 解答

- (1) 系统根轨迹有四条渐近线, 渐近线与实轴夹角分别为 $\Phi_a = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$, 渐近线与实轴的交点为 $\sigma_a = -1.75$, 根轨迹与虚轴无交点, 绘出根轨迹如下图所示:



4.3-2 图解

从根轨迹可知, 无论 $k > 0$ 如何变化, 始终有两条根轨迹位于右半平面, 因此闭环系统不稳定。

$$(2) G(s)H(s) = \frac{k(2s+1)}{s^2(s+2)(s+5)} = \frac{k_1(s+0.5)}{s^2(s+2)(s+5)} \quad (k_1 = 2k)$$

渐近线有三条, 渐近线与实轴的夹角分别为: $\Phi_a = \pm 60^\circ, 180^\circ$; 渐近线与实轴的交点为: $\sigma_a = -2.17$, 与虚轴的交点为: $\begin{cases} \omega = \pm 2.55 \\ k_1 = 45.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \pm 2.55 \\ k = 22.75 \end{cases}$

绘制根轨迹如下图所示:

由根轨迹图可知, 当 $0 < k < 22.75$ 时, 四条根轨迹都位于左半平面, 闭环系统稳定。因此加入 $H(s) = 2s + 1$, 改善了系统的稳定性。

4.3-3 上海交通大学 2002 年《自动控制原理》(20 分)

已知单位负反馈控制系统的开环传递函数为: $G(s) = \frac{K}{s(s+6)(s+3)}$

- (1) 绘制系统的根轨迹图($0 < K < \infty$)；
(2) 求系统临界稳定时的 K 值与系统的闭环极点。

4.3-3 解答

- (1) 绘制系统的根轨迹图

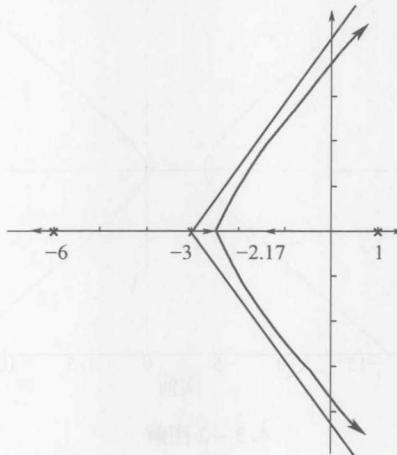
- ① 系统有 3 个开环极点，分别是 $p_1 = 0, p_2 = -3, p_3 = -6$ ，没有开环零点。
- ② 有 3 条根轨迹分支，分别起始于极点 $p_1 = 0, p_2 = -3, p_3 = -6$ ，终止于无穷点。
- ③ 实轴上 $(-\infty, -6]$ 和 $[-3, 0]$ 区段为根轨迹。
- ④ 根轨迹有 3 条渐近线，与实轴的夹角为 $\pm 60^\circ, 180^\circ$ ，渐近线与实轴交点为 $\sigma_a = -3$ 。
- ⑤ 求系统的分离点：

系统的特征方程为： $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+3} + \frac{1}{d+6} = 0$

解得： $d_1 = -2.17, d_2 = -4.72$ (舍去)

⑥ 求与虚轴的交点：将 $s = j\omega$ 代入系统闭环特征方程，令其实部、虚部都为零，可得

$$\begin{cases} 18\omega - \omega^2 = 0 \\ K - 9\omega^2 = 0 \end{cases}, \text{解得: } \omega = 4.24, K = 162, \text{根轨迹图如下:}$$



4.3-3 图解

- (2) 系统临界稳定即为根轨迹与虚轴的交点处，由上面的分析可得临界稳定时 $K = 162$ ，临界稳定的三个闭环极点为 $s = \pm j\omega = \pm j4.24, -9$ 。

4.3-4 西北工业大学 2005 年《自动控制原理》(20 分)

已知单位反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{K_0}{s(s+3)^2}$

- (1) 绘制当 $K_0 = 0 \rightarrow \infty$ 变化时系统根轨迹图(求出渐近线，分离点与虚轴交点)；
- (2) 确定开环增益 K 的取值范围，使系统满足以下条件：

$\left\{ \begin{array}{l} \text{全部闭环极点均在 } s \text{ 平面上 } s = -0.5 \text{ 左侧的区域中} \\ \text{阻尼比 } \xi \geq 0.707 \end{array} \right.$

- (3) 确定在单位斜坡输入下系统稳态误差的最小值。

4.3-4 解答

$$(1) G(s) = \frac{K_0}{s(s+3)^2}, K = \frac{K_0}{9}, H = 1.$$

$$\text{渐近线: } \begin{cases} \sigma_a = -2 \\ \varphi_a = \pm 60^\circ, 180^\circ \end{cases}$$

分离点:

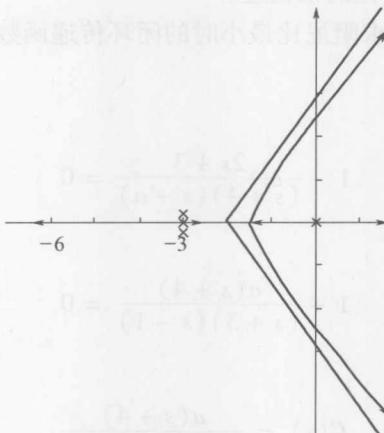
$$\frac{1}{d} + \frac{2}{d+3} = 0 \text{ 求出 } d = -1$$

与虚轴的交点:

$$D(s) = s^3 + 6s^2 + 9s + K_0 = 0,$$

$$\begin{cases} \operatorname{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 9\omega = 0 \\ \operatorname{Re}[D(j\omega)] = -6\omega^2 + K_0 = 0 \end{cases} \text{求得: } \begin{cases} \omega = 3 \\ K_0 = 54 \end{cases}, K = \frac{54}{9} = 6.$$

根轨迹如下图:



4.3-4 图解

(2) 先考虑闭环极点全部位于实轴的情况,令 $\lambda_1 = -0.5$,得到

$$K_{0\lambda_1} = |-0.5| \cdot |-0.5 + 0.3|^2 = 3.125$$

再考虑闭环极点包含两个复数极点的情况,阻尼比 $\xi = 0.707$ 与虚轴的夹角为

$$\arcsin(0.707) = 45^\circ$$

因此,可设等阻尼线 $\xi = 0.707$ 与根轨迹相交处的闭环极点 $\lambda_{1,2} = -\sigma \pm j\sigma$,由根之和 $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6)$ 得 $\lambda_3 = -6 + 2\sigma$ 。则

$$\begin{aligned} D(s) &= s^3 + 6s^2 + 9s + K_0 \\ &= (s + \sigma + j\sigma)(s + \sigma - j\sigma)(s + 6 - 2\sigma) \\ &= s^3 + 6s^2 + (12\sigma - 2\sigma^2)s + 2\sigma(6 - 2\sigma) \end{aligned}$$

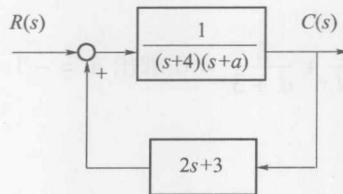
$$\text{比较系数 } \begin{cases} 9 = 12\sigma - 2\sigma^2 \\ K_0 = 2\sigma(6 - 2\sigma) \end{cases}, \text{解得 } \begin{cases} \sigma = 0.87868 \\ K_0 = 6.5513 \end{cases}$$

综合上述分析结果,得出 $3.125 < K_0 < 6.5513$ 时满足题目要求,从而的得出 $K = \frac{K_0}{9}$ 的取值范围为 $0.3472 < K < 0.728$ 。

$$(3) e_{ss} = \frac{1}{K} = \frac{9}{K_0}, \text{ 临界稳定时 } K_0 = 54, e_{ss} = \frac{9}{54} = \frac{1}{6} = 0.1667.$$

4.3-5 南京航空航天大学 2009 年《自动控制原理》(15 分)

某正反馈系统的结构图如图所示



4.3-5 题图

- (1) 绘制参数 a 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化的根轨迹。
- (2) 当系统稳定的情况下,求阻尼比最小时的闭环传递函数。

4.3-5 解答

(1) 特征方程为

$$1 - \frac{2s + 3}{(s + 4)(s + a)} = 0$$

化成标准型得

$$1 + \frac{a(s + 4)}{(s + 3)(s - 1)} = 0$$

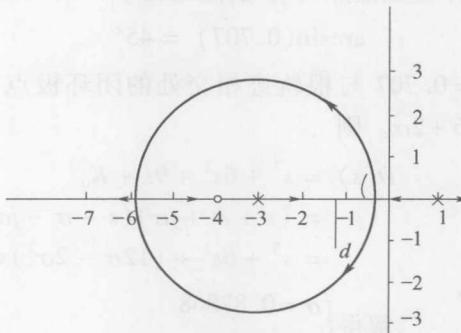
等效开环传递函数为

$$G(s) = \frac{a(s + 4)}{(s + 3)(s - 1)}$$

分离点:

$$\frac{1}{d+3} + \frac{1}{d-1} = \frac{1}{d+4} \text{ 求得 } d = -4 \pm \sqrt{5},$$

复平面的根轨迹如图:



4.3-5 图解

- (2) 阻尼角 $\beta = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{4} = 34^\circ$, 设 $\alpha = 90^\circ - \beta = 56^\circ$, 阻尼比最小的极点为 $s = j\sqrt{5} \sin\alpha +$

$(\sqrt{5} \cos \alpha - 4) = j1.85 - 2.75$, 极点代入特征方程解得 $a = 3.5$, 则闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^2 + 5.5s + 11}$$

4.3-6 北京航空航天大学 2002 年《自动控制原理》(20 分)

单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K(0.25s + 1)}{(s^2 + 1)(0.2s + 1)}$, 试作 K 由零变化到正无穷时, 闭环系统的根轨迹图。

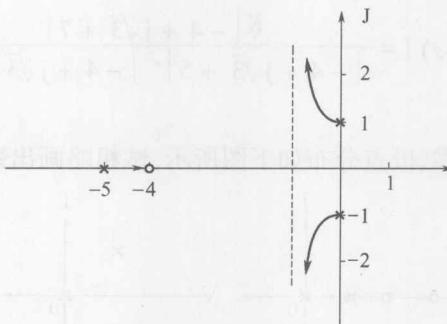
4.3-6 解答 系统的开环传递函数可写成如下形式:

$$G(s) = \frac{K(0.25s + 1)}{(s^2 + 1)(0.2s + 1)} = \frac{K^*(s + 4)}{(s^2 + 1)(s + 5)}$$

其中 $K^* = 1.25K$ 。

- 1) 系统有 3 个开环极点 $p_{1,2} = \pm j, p_3 = -5$, 一个开环零点 $z_1 = -4$ 。
- 2) 根轨迹对称于实轴, 有 3 条根轨迹分支, 分别起始于极点 $p_{1,2} = \pm j, p_3 = -5$, 其中一条终止于开环零点 $z_1 = -4$, 其余两条终止于无穷远处。
- 3) 实轴上的根轨迹为 $[-5, -4]$ 。
- 4) 根轨迹渐近线与实轴倾角为 $\Phi_a = \pm 90^\circ$, 与实轴的交点为 $\sigma_a = -0.5$ 。
- 5) 与虚轴的交点: 将 $s = j\omega$ 代入系统的特征方程, 令其实部和虚部为零, 可得除了两个开环极点外, 根轨迹与虚轴无交点。

根轨迹如下图:



4.3-6 图解

4.4 课后练习题及详细解答

4.4-1 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+4)}$$

问: $s_1 = -1 + j\sqrt{3}$ 是否是在其根轨迹上, 并证明。

4.4-1 解答 $s_1 = -1 + j\sqrt{3}$ 不在其根轨迹上。

证明: 若 s_1 在根轨迹上, 则点 s_1 应满足相角条件 $\angle G(s)H(s) = \pm(2k+1)\pi$ 。

对于 $s_1 = -1 + j\sqrt{3}$, 由相角条件, 有

$$\angle G(s)H(s) = \angle(-1 + j\sqrt{3} + 1) - \angle(-1 + j\sqrt{3} + 0) - \angle(-1 + j\sqrt{3} + 2) -$$

$$\angle(-1 + j\sqrt{3} + 4) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$$

不满足相角条件,因此 $s_1 = -1 + j\sqrt{3}$ 不在根轨迹上。

4.4-2 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s+1}$$

用解析法画出 K 从 0 到 ∞ 时系统的根轨迹图。

4.4-2 解答 略

4.4-3 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+7)}{(s+5)(s+1)}$$

试证明: $s_1 = -4 + j\sqrt{3}$ 在其根轨迹上,并求出 $s_1 = -4 + j\sqrt{3}$ 相对应的 K 值。

4.4-3 解答 证明:若点 s_1 在根轨迹,则点 s_1 应满足相角条件 $\angle G(s)H(s) = \pm(2k + 1)\pi$ 。

$$\angle G(s)H(s) = \angle(-4 + j\sqrt{3} + 7) - \angle(-4 + j\sqrt{3} + 5) - \angle(-4 + j\sqrt{3} + 1)$$

$$\angle G(s)H(s) = 30^\circ - 60^\circ - 150^\circ = -180^\circ$$

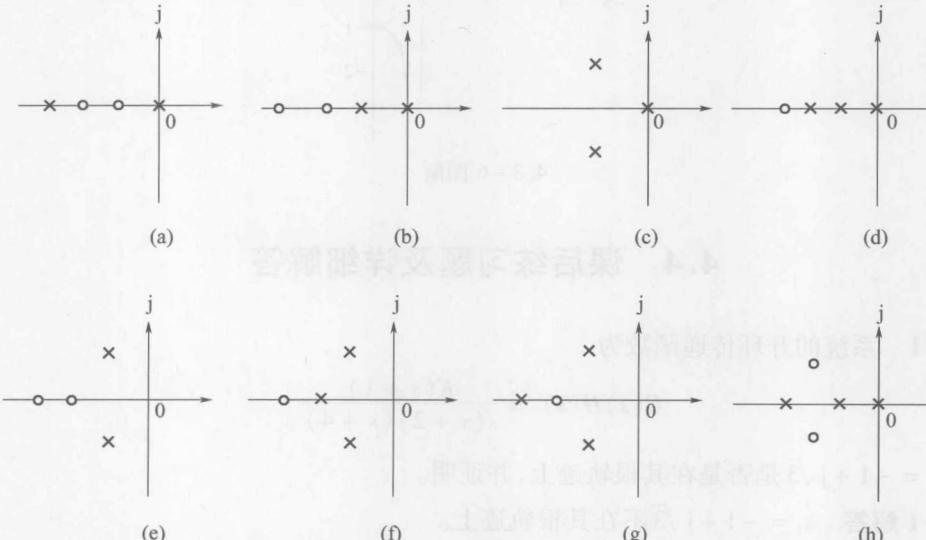
满足相角条件,因此 $s_1 = -4 + j\sqrt{3}$ 在根轨迹上。

将 s_1 代入幅值条件,得

$$|\angle G(s)H(s)| = \frac{|K| - 4 + j\sqrt{3} + 7|}{|-4 + j\sqrt{3} + 5| \cdot |-4 + j\sqrt{3} + 1|} = 1$$

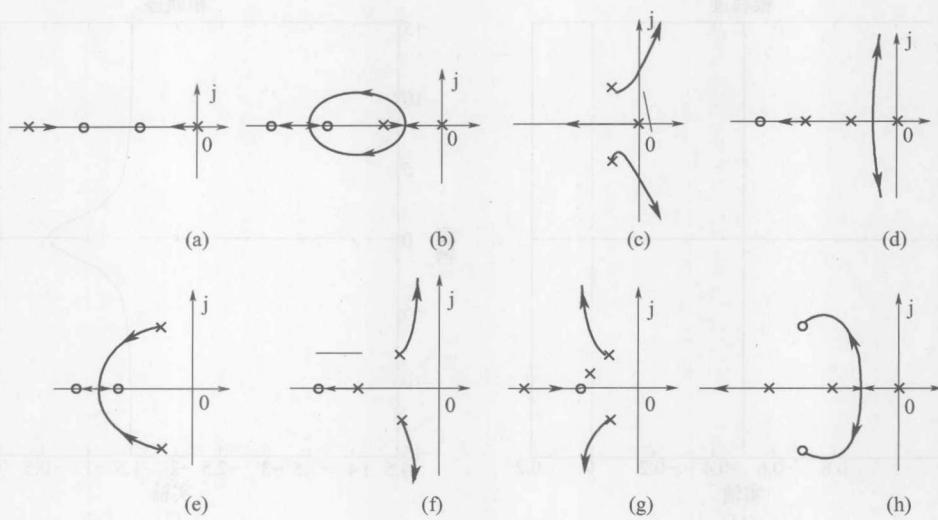
所以 $K=2$ 。

4.4-4 设系统的开环零、极点分布如下图所示,试粗略画出系统的根轨迹图。



4.4-4 题图

4.4-4 解答



4.4-4 图解

4.4-5 单位负反馈系统 $G(s)$ 如下, 按步骤计算参数, 并画出其根轨迹图。

$$(1) G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

$$(2) G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+4)}$$

4.4-5 解答

(1) 开环极点数 $n=2, p_1=0, p_2=-1$; 没有开环零点 $m=0$ 。

下面按照绘制根轨迹法则依次求出有关参数:

① 实轴上 $[-1, 0]$ 区间为根轨迹。

② 由于 $n=2, m=2, n-m=2$, 故有 2 条根轨迹分支, 并都趋向无穷远处。

③ 求分离点坐标 d : 没有零点, 故 $\sum_{i=1}^2 \frac{1}{d-p_i} = 0$, 于是 $d=0.5$ 。分离角为 $\theta_l = \pm \frac{180^\circ}{2} = \pm 90^\circ$ 。

④ 与虚轴无交点。

(2) 开环极点数 $n=3, p_1=0, p_2=-1, p_3=-4$; 开环有限零点数 $m=1, z=-2$, 其开环零、极点分布如图所示。

下面按照法则依次求出绘制根轨迹的有关参数:

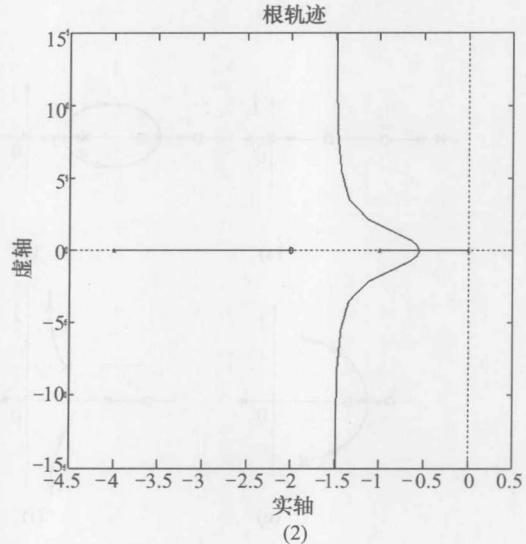
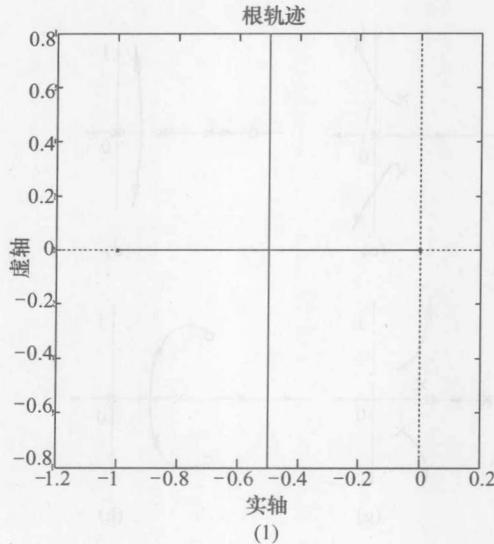
① 实轴上 $[-4, -2]$ 和 $[-1, 0]$ 区间为根轨迹。

② 由于 $n=3, m=1, n-m=2$, 故有 2 条根轨迹分支, 并都趋向无穷远处, 其中

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm 90^\circ, \sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{0 - 1 - 4 + 2}{2} = -\frac{3}{2}$$

③ 求分离点坐标 d : 有 $\sum_{i=1}^3 \frac{1}{d-p_i} = \frac{1}{d-z}$, 于是 $d=-0.55$ 。分离角为 $\theta_l = \pm \frac{180^\circ}{2} = \pm 90^\circ$ 。

④ 与虚轴无交点。

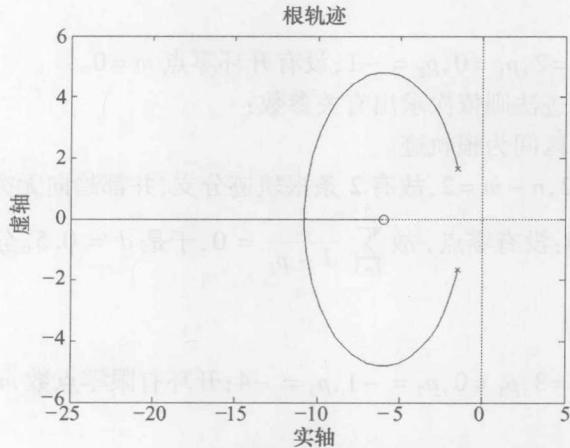


4.4-5 图解

4.4-6 粗略地画出控制系统的根轨迹图。

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 3s + 5} H(s) = s$$

4.4-6 解答



4.4-6 图解

4.4-7 已知单位反馈系统的开环传递函数,试绘制参数 b 从零变化到无穷大时的根轨迹,并写出 $b=2$ 时的系统闭环传递函数。

$$G(s) = \frac{20}{(s+4)(s+b)}$$

4.4-7 解答 系统的闭环特征方程为 $s^2 + 4s + (s+4)b + 20 = 0$

即

$$1 + \frac{b(s+4)}{s^2 + 4s + 20} = 0$$

令 $G_1(s) = \frac{b(s+4)}{s^2 + 4s + 20}$ 为系统的等效开环传递函数, 根据 $G_1(s)$ 的零极点分布作 b 从零编

导无穷大时的根轨迹。

$$n = 2, m = 1, p_1 = -2 + j4, p_2 = -2 - j4, z = -4$$

(1) $n = 2, m = 1$, 故有 2 条根轨迹分支, 其中一条指向零点, 另一条趋向于无穷远。

(2) 漐近线与实轴正方向的夹角 $\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = 180^\circ$ 。

(3) 求分离点坐标:

$$\frac{1}{d-p_1} - \frac{1}{d-p_2} = \frac{1}{d-z_1}$$

解得 $d = -8.47, d = 0.47$ (舍去)。

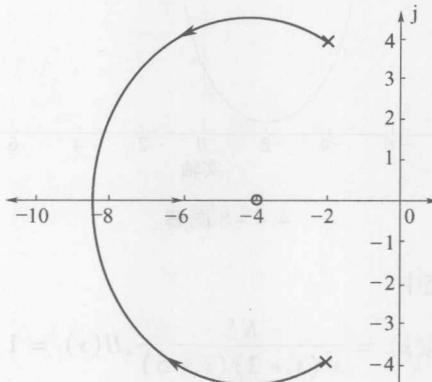
(4) 根据仅由两个极点和一个有限零点组成的开环系统根轨迹的复数部分为以零点为圆心的一部分这一法则可画出根轨迹。

当 $b=2$ 时, 有

$$G(s) = \frac{20}{(s+4)(s+2)}$$

所以

$$\phi(s) = \frac{20}{s^2 + 6s + 28}$$



4.4-7 图解

4.4-8 单位正反馈的传递函数如下:

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{(s+4)(s+6)}$$

画出该系统的根轨迹图。

4.3-8 解答 $n = 2, p_1 = -4, p_2 = -6, m = 1, z_1 = -2$ 。

(1) 由于 $n = 2, m = 1$ 故有两条根轨迹分支, 其中一条终止于有限零点, 另一条终止于无穷远。

(2) 源近线与实轴正方向的夹角为

$$\varphi_a = \frac{2k\pi}{n-m} = 0^\circ, k=0$$

(3) 实轴上根轨迹区间为 $[-6, -4], [-2, +\infty)$ 。

(4) 求分离点: 由 $\frac{1}{d+4} + \frac{1}{d+6} = \frac{1}{d+2}$ 解得 $d = -4.8, d = 0.8$ (舍掉)。

(5) 求根轨迹与虚轴交点: 由开环传递函数求出系统特征方程, 即

$$s^2 + (10+k)s + 2k + 24 = 0$$

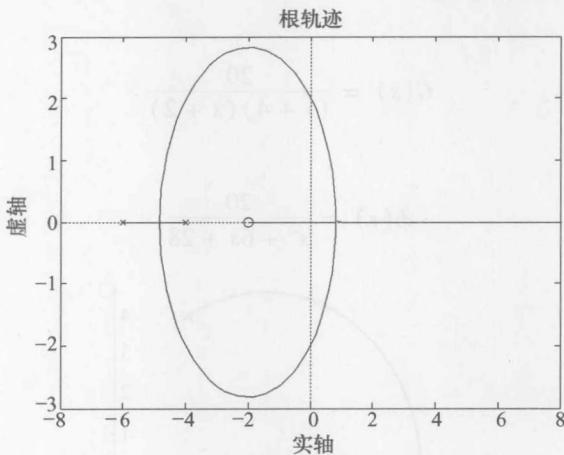
令上式中的 $s = j\omega$, 得

$$(j\omega)^2 + (10+k)j\omega + 2k + 24 = 0$$

其实部和虚部两个方程为

$$\begin{cases} k + 10 = 0 \\ -\omega^2 + 2k + 24 = 0 \end{cases}$$

联立求解, 即得 $k = -10, \omega = \pm 2$ 。



4.4-8 图解

4.4-9 设反馈控制系统中

$$G(s) = \frac{K^*}{s^2(s+2)(s+5)}, H(s) = 1$$

要求:

(1) 概略绘出系统根轨迹图, 并判断闭环系统的稳定性;

(2) 如果改变反馈通道传递函数, 使 $H(s) = 1 + 2s$, 试判断 $H(s)$ 改变后的系统稳定性, 研究由于 $H(s)$ 改变所产生的效应。

4.4-9 解答

(1)

① 开环极点数 $n=4, p_1=p_2=0, p_3=-2, p_4=-5$, 无开环零点 $m=0$ 。

② 实轴上 $[-5, -2]$ 区间为根轨迹。

③ 由于 $n=4, m=0, n-m=4$, 故有 4 条根轨迹分支, 均趋向无穷远处。

④ 4 条根轨迹的渐进线为

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{4} = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{0+0+(-2)+(-5)-0}{4} = -\frac{7}{4}$$

⑤ 求分离点

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+5} = 0$$

得

$$d_1 = -4, d_2 = -\frac{5}{4} (\text{舍})$$

求分离角：

$$\theta_l = \pm \frac{180^\circ}{2} = \pm 90^\circ$$

⑥ 求根轨迹与虚轴的交点，系统的特征方程为

$$s^4 + 7s^3 + 10s^2 + K^* = 0$$

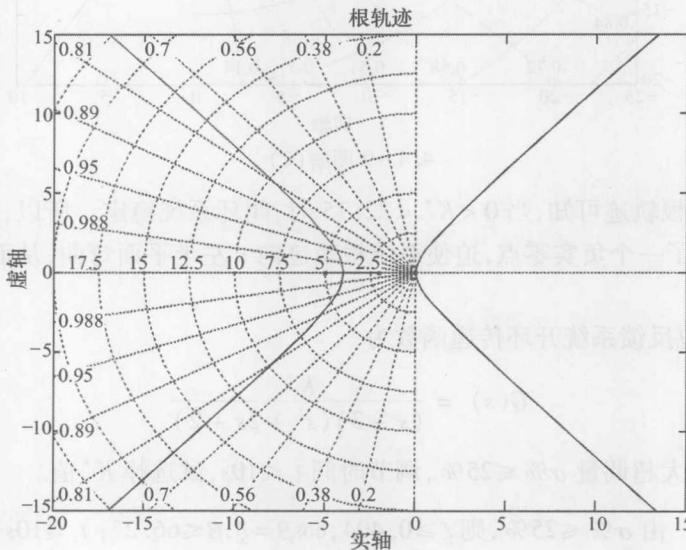
令 $s = j\omega$, 求得 $\omega = 0$ 。

⑦ 起始角：

$$2\theta_{p_1} = (2k+1)\pi - \angle 0 + 2 - \angle 0 + 5 \\ \theta_{p_1} = 90^\circ$$

当 K^* 从 $0 \rightarrow \infty$ 增大时，系统有根始终在右平面，故系统始终不稳定。

根轨迹图如下：



4.4-9 图解(1)

由根轨迹图可知，当 K^* 从零变化到无穷大时，系统始终有根在 s 右半平面，所以系统恒不

稳定。

$$(2) G(s)H(s) = \frac{K^*(1+2s)}{s^2(s+2)(s+5)}$$

特征方程为

$$D(s) = s^4 + 7s^3 + 10s^2 + 2K^*s + K^* = 0$$

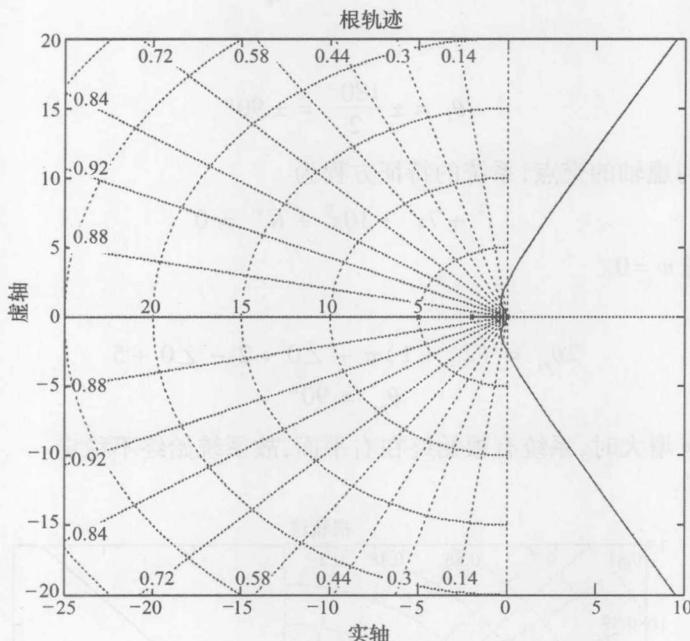
令 $s = j\omega$, 得

$$-\omega^2(10 - \omega^2) + K^* = 0; -7\omega^3 + 2K^*\omega = 0$$

即 $\omega = \pm 2.25, K = 22.75$

所以当 $0 < K \leq 22.75$ 时, 4 条根轨迹都在 s 左半平面, 闭环系统稳定; 当 $K > 22.75$ 时, 系统不稳定。

根轨迹图如下:



4.4-9 图解(2)

由系统的闭环根轨迹可知, 当 $0 < K^* < 22.75$ 时, 闭环系统稳定。所以, 由于 $H(s)$ 改变为 $1+2s$, 使系统增加了一个负实零点, 迫使系统根轨迹向 s 左半平面弯曲, 从而改善了系统的稳定性。

4.4-10 单位反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

要求闭环系统的最大超调量 $\sigma\% \leq 25\%$, 调节时间 $t_s \leq 10s$, 试选择 K^* 值。

4.4-10 解答 由 $\sigma\% \leq 25\%$, 则 $\zeta \geq 0.404, \cos\beta = \zeta, \beta \leq 66.2^\circ; t_s \leq 10s, \frac{4}{\sigma} \leq 10, \sigma \geq 0.4$ 。

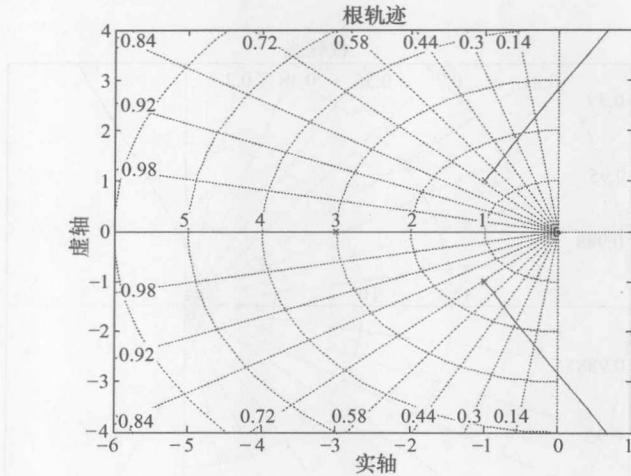
设 $\beta = 66.2^\circ$ 上的根为 $-\sigma \pm 2.27\sigma j$, 则

$$(s + \sigma - 2.27\sigma j)(s + \sigma + 2.27\sigma j)(s - s_3) = s^3 + 5s^2 + 8s + 6 + K^*$$

由根之和、根之积,得

$$\sigma = 0.69, \sigma = -5.34 (\text{舍}), \sigma = 0.69 > 0.4$$

$K^* = 4.8$, 所以 K^* 取值范围对应为 $0 < K^* \leq 4.8$ 。



4.4-10 图解

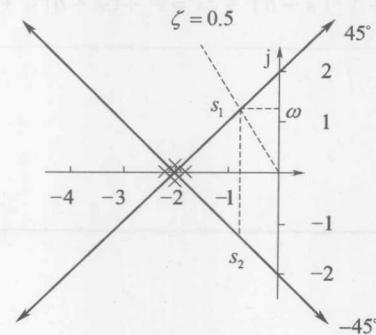
4.4-11 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{(0.5s + 1)^4}$$

- (1) 根据系统的根轨迹,分析系统的稳定性;
- (2) 估计超调量 $\sigma\% = 16.3\%$ 时的 K 值。

4.4-11 解答

(1)



4.4-11 图解

由图可知 $0 < K < 4$ 时系统稳定; $K \geq 4$ 时系统不稳定。

(2) 当 $\sigma\% = 16.3\%$ 时有 $K = 0.646$ 。

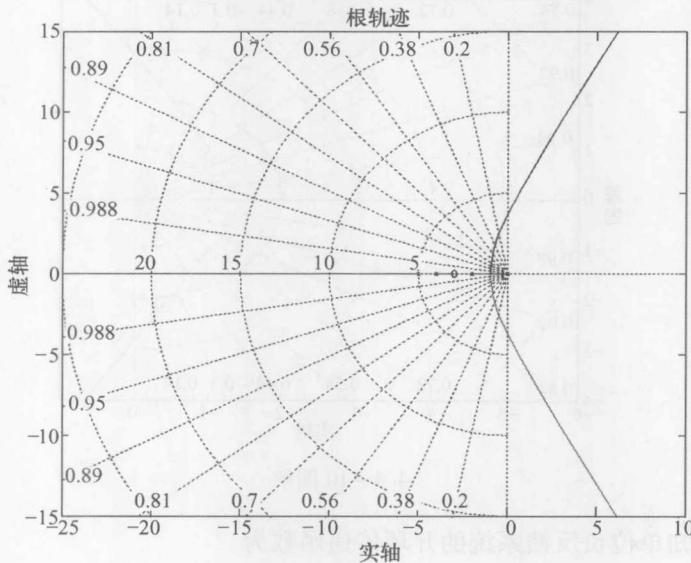
4.4-12 单位负反馈系统的传递函数如下:

$$G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+5)(s^2+6s+8)}$$

用 MATLAB 软件画出该系统的根轨迹,给出程序。

4.4-12 解答

```
G = tf([1 3],[1 11 38 40 0]);
rlocus(G);
grid on;
```



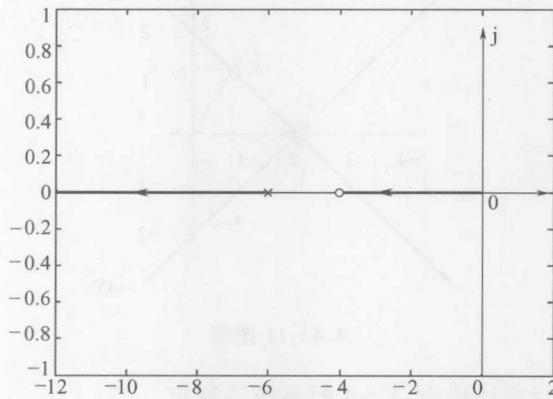
4.4-12 图解

4.4-13 已知单位反馈系统的开环传递函数如下:

$$G(s) = \frac{2s}{(s+4)(s+b)}$$

试绘制参数 b 从零变化到无穷大的根轨迹,并写出 $s = -2$ 这一点对应的闭环传递函数。

4.4-13 解答 $D(s) = (s+4)(s+b) + 2s = s^2 + 6s + b(4+s) = 0$



4.4-13 图解

所以等效开环传递函数为

$$G^*(s) = \frac{b(s+4)}{s(s+6)}$$

$$n=2, p_1=0, p_2=-6, m=1, z_1=-4$$

实轴上 $[-4, 0], [-\infty, -6]$ 为根轨迹。

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = (2k+1)\pi = \pi$$

当 $s = -2$ 时, $b = 4$ 。

所以

$$\phi(s) = \frac{2s}{s^2 + 10s + 16} = \frac{2s}{(s+2)(s+8)}$$

4.4-14 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.02s+1)(0.01s+1)}$$

要求:

- (1) 绘制系统的根轨迹;
- (2) 确定系统临界稳定时开环增益 K 的值;
- (3) 确定系统临界阻尼比时开环增益 K 的值。

4.4-14 解答

$$(1) G(s) = \frac{K}{s(0.02s+1)(0.01s+1)} = \frac{5000K}{s(s+50)(s+100)} = \frac{K^*}{s(s+50)(s+100)}$$

其中 $K^* = 5000K$ 。

$n=3, p_1=0, p_2=-50, p_3=-100; m=0$, 根轨迹有 3 条分支, 均趋于无穷远处。

渐近线为

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ, k=0, 1, 2$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = -50$$

实轴上的根轨迹区间为 $(-\infty, -100), (-50, 0)$ 。

分离点:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} &= \frac{1}{d} + \frac{1}{d+50} + \frac{1}{d+100} = 0 \\ d &= -21.1, d = -78.9 \text{ (舍)} \end{aligned}$$

分离角:

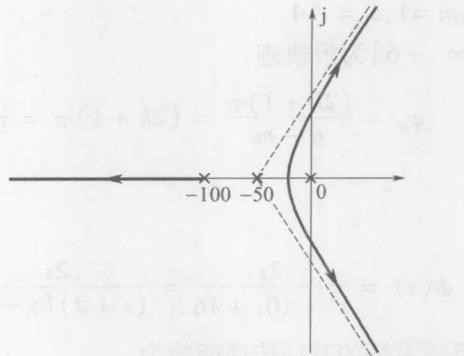
$$\theta_l = \pm \frac{180^\circ}{2} = \pm 90^\circ$$

求根轨迹与虚轴的交点。令 $s = j\omega$, 代入特征方程, 得

$$\begin{aligned} j\omega(j\omega+50)(j\omega+100) + K^* &= 0 \\ (5000 - \omega^2)\omega + K^* - 150\omega^2 &= 0 \end{aligned}$$

解得

$$\omega = \pm \sqrt{5000} = \pm 70.7; K^* = 750000, K = 150$$



4.4-14 图解

(2) 系统临界稳定即根轨迹与虚轴的交点:由(1)得 $K^* = 750000, K = 150$ 。

(3) 系统临界稳定时,由(1)得分离点 $d = -21.1$, 则 $d(d + 50)(d + 100) + K^* = 0, K^* =$

$$48112.5, K = \frac{K^*}{5000} = 9.62$$

4.4-15 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s^2 + 8s + 20)}$$

要求绘制根轨迹并确定系统阶跃响应无超调时开环增益 K 的取值范围。

4.4-15 解答 $n = 3, p_1 = 0, p_2 = -4 + 2j, p_3 = -4 - 2j; m = 0$ 。

(1) $n = 3, n - m = 3$, 则有 3 条根轨迹分支且都终止于无穷远处。

(2) 漐近线为

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \pm 60^\circ, \pm 180^\circ, \sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^3 p_i}{n-m} = -\frac{8}{3}$$

(3) 实轴上的根轨迹区间为 $(-\infty, 0]$ 。

(4) 起始角:

$$\theta_{p_2} = (2k+1)\pi - \angle p_2 - p_1 - \angle p_2 - p_3 = (2k+1)\pi - 153.4^\circ - 90^\circ = -63.4^\circ$$

由对称性知 $\theta_{p_3} = 63.4^\circ$ 。

(5) 分离点:

$$\frac{1}{d-p_1} + \frac{1}{d-p_2} + \frac{1}{d-p_3} = 0$$

解得 $d_1 = -\frac{10}{3}, d_2 = -2$; 会合角 $\lambda_l = \pm \frac{360^\circ}{l} = \pm 180^\circ$, 分离角 $\theta_l = \pm \frac{180^\circ}{l} = \pm 90^\circ$ 。

(6) 与虚轴交点 $(0, \pm \omega)$, 则有

$$j\omega[(j\omega)^2 + 8j\omega + 20] + K^* = 0$$

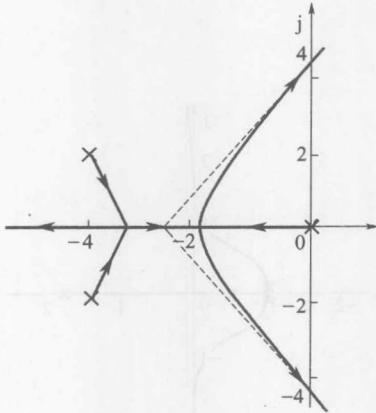
解得 $\omega = \pm 4.5, K^* = 160$ 。

无超调时即无复数根时,由根轨迹图知无复根的区间应为分离点 d_1 和 d_2 所对应的 K^* 的区间:

当 $d_1 = -\frac{10}{3}$ 时, 则 $d_1(d_1^2 + 8d_1 + 20) + K^* = 0$, 得 $K^* = 14.8$, 所以 $K = \frac{K^*}{20} = 0.74$;

当 $d_2 = -2$ 时, 则 $d_2(d_2^2 + 8d_2 + 20) + K^* = 0$, 得 $K^* = 16$, 所以 $K = \frac{K^*}{20} = 0.8$ 。

所以, 无超调时开环增益 K 的取值范围为 $0.74 \leq K \leq 0.8$ 。



4.4-15 图解

4.4-16 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(2s+1)}{(s+1)^2(\frac{4}{7}s-1)}$$

试绘制系统根轨迹, 并确定使系统稳定的 K 值范围。

4.4-16 解答

$$G(s) = \frac{k(2s+1)}{(s+1)^2(\frac{4}{7}s-1)} = \frac{k^*(s+0.5)}{(s+1)^2(s-\frac{7}{4})}, G(s) = \frac{k(2s+1)}{(s+1)^2(\frac{4}{7}s-1)}$$

则 $K = \frac{2}{7}K^*$, 绘制 K^* 从零到无穷的根轨迹。

$$n=3, p_1=p_2=-1, p_3=\frac{7}{4}; m=1, z=-0.5.$$

(1) $n=3, n-m=2$, 有 3 条根轨迹分支, 其中一条终止于有限零点, 另外 2 条终止于无穷远处。

(2) 渐近线为

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm 90^\circ, \sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{1}{12}$$

(3) 实轴上的根轨迹区间为 $[-0.5, 1.75]$ 。

(4) 与虚轴交点 $(0, \pm\omega)$, 则有

$$(j\omega + 1)^2(j\omega - \frac{7}{4}) + K^*(j\omega + 0.5) = 0$$

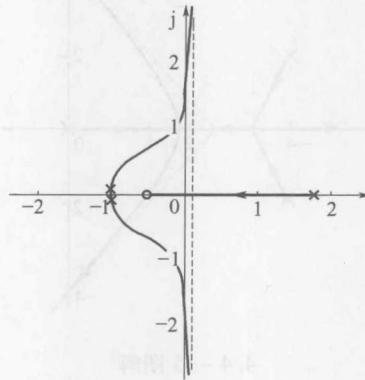
解得 $\omega = \pm\sqrt{2}$, $K^* = 4.5$ 。

系统稳定需满足根轨迹的各条分支均在左半 s 平面。特征方程为

$$(s + 1)^2(s - 1.75) + K^*(s + 0.5) = 0$$

将 $s = 0$ 代入, 得 $K^* = 3.5$ 。

故系统稳定时 $1 < K < \frac{9}{7}$ 。



4.4-16 图解

4.4-17 设单位反系统的开环传递函数为

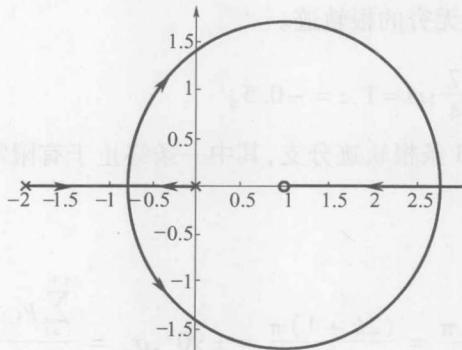
$$G(s) = \frac{K^*(1-s)}{s(s+2)}$$

试绘制其根轨迹, 并求出使系统产生重实根和纯虚根的 K^* 值。

4.4-17 解答 $G(s) = -\frac{K^*(s-1)}{s(s+2)}$, 令 $G_1(s) = -G(s) = \frac{K^*(s-1)}{s(s+2)}$

则画出开环传递函数为 $G_1(s)$ 的单位正反馈根轨迹即可。

$n = 2, p_1 = 0, p_2 = -2; m = 1, z = 1$ 。



4.4-17 图解

(1) 有 2 条分支, 一条终止于有限零点, 另一条终止于无穷远处。

(2) 渐近线为

$$\varphi_a = \frac{2k\pi}{n-m} = 0^\circ$$

(3) 实轴上的根轨迹区间为 $(-2, 0)$ 和 $[1, +\infty)$ 。

(4) 分离点：

$$\frac{1}{d-0} + \frac{1}{d+2} = \frac{1}{d-1}$$

解得 $d_1 = -0.7, d_2 = 2.7$ 。

(5) 与虚轴交点：

$$j\omega(j\omega + 2) - K^*(j\omega - 1) = 0$$

解得 $K^* = 2, \omega = \pm\sqrt{2}$ 。

产生重实根时, $d_1 = -0.7, d_2 = 2.7$ 。将 d_1, d_2 分别代入特征根方程 $s(s+2) - K^*(s-1) = 0$, 得 $K_1^* = 0.54, K_2^* = 7.46$ 。

4.4-18 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+1)}{(s-1)^2(s+18)}$$

试概略绘出相应的根轨迹, 并求出所有根为负实根时的开环增益 K 的取值范围及系统稳定时 K 的值。

4.4-18 解答 $n=3, p_1=p_2=1, p_3=-18; m=1, z=-1$ 。

(1) 有 3 条根轨迹分支, 其中一条终止于有限零点, 另两条终止于无穷远处。

(2) 漐近线为

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm 90^\circ, \sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = -\frac{15}{2}$$

(3) 实轴上的根轨迹区间为 $(-18, -1]$ 。

(4) 分离点：

$$\frac{2}{d-1} + \frac{1}{d+18} = \frac{1}{d+1}$$

解得 $d_1 = -6.3, d_2 = -4.2$ 。

(5) 与虚轴交点：

$$(j\omega - 1)^2(j\omega + 18) + K^*(j\omega + 1) = 0$$

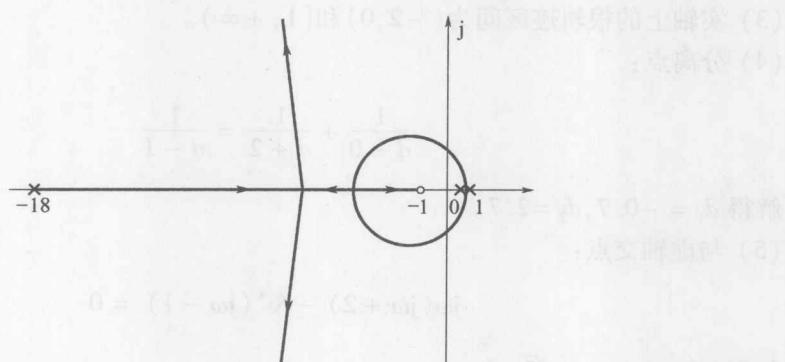
即

$$(K^* - \omega^2 - 35)j\omega + K^* - 16\omega^2 + 18 = 0$$

得 $K^* = 38.5, \omega = \pm 1.9$ 。

所有根为负实根, 则应该为两分离点之间的一段实轴所对应的 K 。将 $d_1 = -6.3$ 和 $d_2 = -4.2$ 分别代入特征方程 $(s-1)^2(s+18) + K^*(s+1) = 0$, 求得 $K_1^* = 117.64, K_2^* = 116.61$, 则 $K_1 = \frac{K_1^*}{18} = 6.54, K_2 = \frac{K_2^*}{18} = 6.48$, 则 K 值范围为 $6.48 < K < 6.54$ 。

系统稳定时,所有根均在 s 左半平面,则 $K^* > 38.5$, 即 $K > \frac{38.5}{18} = 2.139$ 。



4.4-18 图解

$$\frac{(1+s)^2 s}{(81+s)^2 (1+s)} = \frac{s(1+s)}{(81+s)^2}$$

由上式可知只用虚增益 ω_1 可以使根轨迹发散于右半平面,而用实增益 ω_2 则可以使根轨迹收敛于左半平面。故有 $\omega_1 > 0$, $\omega_2 < 0$ 。

$$\frac{1}{1+b} = \frac{1}{81+b} + \frac{s}{1+b} = \infty \Rightarrow b = -81 \Rightarrow \frac{1}{1+(-81)} = \frac{1}{80} \Rightarrow \frac{1}{1+(-81)} \text{ 为固有值随增益而变化} \quad (4)$$

$$\frac{1}{1+b} = \frac{1}{81+b} + \frac{s}{1+b}$$

$$D = (1+\omega_1)^2 s + (81+\omega_1)^2 (1+\omega_1)$$

$$D = 81 + \omega_1 s + 2\omega_1 (81 + \omega_1) + \omega_1^2 (81 + \omega_1)^2$$

由 $D(1) = 0$, 得 $\omega_1 = -81$, 故 $\omega_1 > 0$ 时, 系统不稳定, 而 $\omega_1 < 0$ 时, 系统稳定。

$$\omega_1 > 0 > \lambda > 38.5 \text{ 为虚增益入模, } 38.5 = \frac{\omega_1}{81} = \lambda, \text{ 得 } \lambda = \frac{\omega_1}{81} = \lambda$$

第5章 线性系统的频域分析法

5.1 知识点辅导

线性系统三大分析方法中的频域分析法内容多,实际应用广,主要内容包括频率特性的基本概念和几何表示、用频率特性工具分析系统稳定性等性能、用伯德图设计串联校正环节以提升系统的性能等。本章重点掌握和理解以下几个知识点。

1. 闭环线性系统频率响应定义

包括从系统原理图或传递函数建立系统的频率特性,参考习题5.4-1、5.4-6;闭环系统频率特性与时域响应的关系,能够根据系统频率特性,求出闭环系统的稳态输出(或稳态误差),参考习题5.4-2,或则相反的思路,能够由信号的输入/输出(求误差),推算系统的参数,参考习题5.4-3、5.4-5。特别注意区分开环频率特性和闭环系统频率特性的联系与差别,参考习题5.4-5。

2. 频率特性的几何表示法

包括各典型环节的定义及其幅相曲线和伯德图,特别是振荡环节的频率特性;控制系统开环频率特性的绘制,包括幅相曲线的绘制,参考习题5.4-8、5.4-9;伯德图的绘制,参考习题5.4-10,或则相反思路,能根据对数幅相特性曲线确定最小相位系统的传递函数,参考习题5.4-11、5.4-12。特别注意非最小相位典型环节的频率特性和几何表示。

3. 频率域稳定判据

包括奈奎斯特(Nyquist)稳定判据的应用,参考习题5.4-13;对数频率稳定判据的应用,参考习题5.4-14。特别注意有延迟环节的稳定性判断,参考习题5.4-17、5.4-18。

4. 稳定裕度

包括相角裕度和幅值裕度的求解及运用,参考习题5.4-19。特别注意根据稳定裕度条件,推算系统的参数,参考习题5.4-20。

5. 基于频率响应法的串联校正分析法

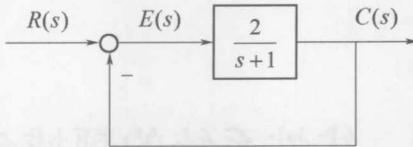
包括串联超前校正装置的设计,参考习题5.4-23、5.4-24;串联滞后校正装置的设计,参考习题5.4-25。

5.2 典型习题及详细解答

5.2-1 已知某系统结构图如图所示,试根据频率特性物理意义,求当信号输入为 $r(t) = 2\sin(t + 30^\circ) + \cos(2t - 45^\circ)$ 时,系统的稳态输出 c_{ss} 和稳态误差 e_{ss} 。

5.2-1 解答

闭环传递函数 $\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{2}{s + 3}$;频率特性 $\Phi(j\omega) = \frac{2}{j\omega + 3}$;



5.2-1 题图

$$|\Phi(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{\omega^2 + 9}}; \angle \Phi(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{3};$$

误差传递函数 $\Phi_E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{s+1}{s+3}$; 误差频率特性 $\Phi_E(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega + 3}$;

$$|\Phi_E(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\sqrt{\omega^2 + 9}}; \angle \Phi_E(j\omega) = \arctan \frac{\omega}{1} - \arctan \frac{\omega}{3};$$

当 $r_1(t) = 2\sin(t + 30^\circ)$ 时,

$$c_{1ss}(t) = \frac{4}{\sqrt{10}} \sin(t + 30^\circ - \arctan \frac{1}{3})$$

$$e_{1ss}(t) = \frac{2}{\sqrt{5}} \sin(t + 30^\circ + \arctan 1 - \arctan \frac{1}{3})$$

当 $r_2(t) = \cos(2t - 45^\circ)$ 时,

$$c_{2ss}(t) = \frac{2}{\sqrt{13}} \cos(2t - 45^\circ - \arctan \frac{2}{3})$$

$$e_{2ss}(t) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} \cos(2t - 45^\circ + \arctan 2 - \arctan \frac{2}{3})$$

因此在输入作用下,

$$c_{ss} = c_{1ss} + c_{2ss} = \frac{4}{\sqrt{10}} \sin(t + 30^\circ - \arctan \frac{1}{3}) + \frac{2}{\sqrt{13}} \cos(2t - 45^\circ - \arctan \frac{2}{3})$$

$$e_{ss} = e_{1ss} + e_{2ss}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \sin(t + 30^\circ + \arctan 1 - \arctan \frac{1}{3}) + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} \cos(2t - 45^\circ + \arctan 2 - \arctan \frac{2}{3})$$

5.2-2 最小相位系统对数幅频渐近特性如图所示,请确定系统的传递函数。

5.2-2 解答 由图知在低频段渐近线斜率为0,因为最小交接频率前的低频段 $L(\omega) = -\nu 20 \lg \omega$,故 $\nu = 0$ 。渐近特性为分段线性函数,在各交接频率处,渐近特性斜率发生变化。

在 $\omega = 0.1$ 处斜率变化 20dB/dec ,属一阶微分环节。

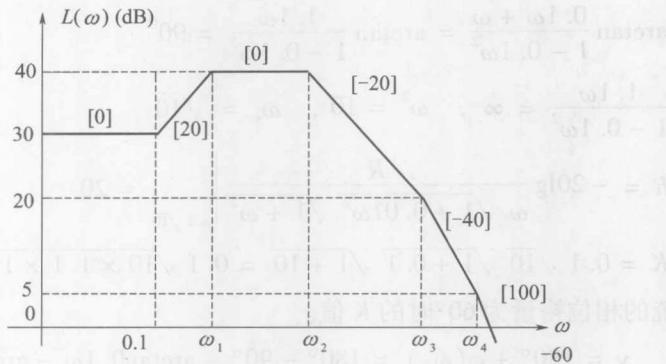
在 $\omega = \omega_1$ 处斜率变化 -20dB/dec ,属惯性环节。

在 $\omega = \omega_2$ 处斜率变化 -20dB/dec ,属惯性环节。

在 $\omega = \omega_3$ 处斜率变化 -20dB/dec ,属惯性环节。

在 $\omega = \omega_4$ 处斜率变化 -20dB/dec ,属惯性环节。

因此,系统的传递函数具有下述形式



5.2-2 题图

$$G(s) = \frac{K \left(\frac{s}{0.1} + 1 \right)}{\left(\frac{s}{\omega_1} + 1 \right) \left(\frac{s}{\omega_2} + 1 \right) \left(\frac{s}{\omega_3} + 1 \right) \left(\frac{s}{\omega_4} + 1 \right)}$$

式中, $K, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ 待定。

由 $20\lg K = 30$ 得 $K = 10^{1.5} \approx 31.62$ 。

因渐近线直线段, 若设某段的斜率为 k , $(\omega_A, L(\omega_A)), (\omega_B, L(\omega_B))$ 为该线段上的两点, 则由直线方程:

$$k = \frac{L(\omega_A) - L(\omega_B)}{\lg \omega_A - \lg \omega_B}$$

确定 ω_1 : $20 = \frac{40 - 30}{\lg \omega_1 - \lg 0.1} = \frac{10}{\lg \omega_1 + 1}$, 所以 $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0.316$

确定 ω_4 : $-60 = \frac{-5 + 0}{\lg 100 - \lg \omega_4} = \frac{-5}{2 - \lg \omega_4}$, 所以 $\omega_4 = 10^{\frac{23}{12}} \approx 82.54$

确定 ω_3 : $-40 = \frac{5 - 20}{\lg \omega_4 - \lg \omega_3}$, 所以 $\omega_3 = 10^{\frac{37}{24}} \approx 34.81$

确定 ω_2 : $-20 = \frac{20 - 40}{\lg \omega_3 - \lg \omega_2}$, 所以 $\omega_2 = 10^{\frac{13}{24}} \approx 3.481$

于是, 所求的传递函数为

$$G(s) = \frac{31.62 \left(\frac{s}{0.1} + 1 \right)}{\left(\frac{s}{0.316} + 1 \right) \left(\frac{s}{3.481} + 1 \right) \left(\frac{s}{34.81} + 1 \right) \left(\frac{s}{82.54} + 1 \right)}$$

5.2-3 单位反馈控制系统的开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + 0.1s)(1 + s)}$$

(1) 求系统的幅值裕量为 20dB 时的 K 值。

(2) 求系统的相位裕量为 60° 时的 K 值。

5.2-3 解答

(1) $\varphi = -90^\circ - \arctan 0.1\omega - \arctan \omega = -180^\circ \Rightarrow \arctan 0.1\omega + \arctan \omega = 90^\circ$

$$\arctan \frac{0.1\omega + \omega}{1 - 0.1\omega^2} = \arctan \frac{1.1\omega}{1 - 0.1\omega^2} = 90^\circ$$

$$\frac{1.1\omega}{1 - 0.1\omega^2} = \infty, \quad \omega^2 = 10, \quad \omega_x = \sqrt{10}$$

$$h = -20 \lg \left| \frac{K}{\omega \sqrt{1 + 0.01\omega^2} \sqrt{1 + \omega^2}} \right|_{\omega=\sqrt{10}} = 20$$

$$K = 0.1 \sqrt{10} \sqrt{1 + 0.1} \sqrt{1 + 10} = 0.1 \sqrt{10 \times 1.1 \times 11} = 1.1$$

(2) 求系统的相位裕量为 60° 时的 K 值。

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.1\omega - \arctan \omega$$

$$= 90^\circ - \arctan \frac{1.1\omega}{1 - 0.1\omega^2} = 60^\circ$$

$$\arctan \frac{1.1\omega}{1 - 0.1\omega^2} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{1.1\omega}{1 - 0.1\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \omega^2 + 11\sqrt{3}\omega - 10 = 0$$

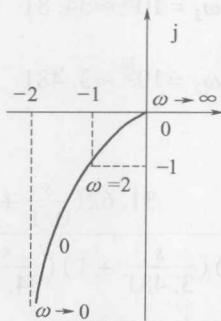
$$\omega_c = \frac{-11\sqrt{3} \pm \sqrt{403}}{2} = \begin{cases} 0.511150508314 \\ -19.5637093916 \text{ (略)} \end{cases}$$

由

$$A(\omega_c) = \left| \frac{K}{\omega \sqrt{1 + 0.01\omega^2} \sqrt{1 + \omega^2}} \right|_{\omega=\omega_c} = 1$$

$$\text{得 } K = \omega \sqrt{1 + 0.01\omega^2} \sqrt{1 + \omega^2} \Big|_{\omega=\omega_c} = 0.57.$$

5.2-4 一系统的开环传递函数为 $GH_1(s)e^{-\tau s}$, 该二阶环节 $GH_1(j\omega)$ 轨线如图所示, 试求使闭环系统稳定的 τ 的取值范围。



5.2-4 题图

5.2-4 解答 根据 $GH_1(j\omega)$ 幅相曲线可知, 其初始为平行负虚轴的无穷远处, 所以为 I 型系统。又因为单调变化, 以 -180° 终止于原点, 且是二阶环节, 所以含有一惯性环节, 无零点, 即

$$GH_1(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

$$GH_1(j\omega) = \frac{K}{j\omega(Tj\omega + 1)} = \frac{-KT\omega - jK}{\omega(1 + T^2\omega^2)}$$

$$\text{幅频和相频特性 } A(\omega) = \frac{K}{\omega\sqrt{1+T^2\omega^2}}, \varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan T\omega$$

由幅相曲线可知, $\omega = 2$ 时, $A(2) = \sqrt{2}$, $\varphi(2) = -145^\circ$,
 $\varphi(2) = -90^\circ - \arctan 2T = -145^\circ$, 得 $T = 0.5$ 。

$$A(2) = \frac{K}{2\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} \text{ 得 } K = 4.$$

加上延迟环节后, 求截止频率

$$\text{由 } A(\omega) = \frac{4}{\omega\sqrt{1+0.25\omega^2}} = 1 \text{ 得 } \omega = 2.5.$$

令该点的相角 $\varphi(2.5) = -90^\circ - \arctan 0.5 \times 2.5 - 2.5\tau \times 57.3 > -180^\circ$, 解得 $\tau < 0.27$ 时, 保证闭环系统稳定。

5.3 考研试题及详细解答

5.3-1 上海交通大学 2004 年《自动控制原理》(15 分)

某系统的对数频率特性实验数据如下表所示, 试确定系统的传递函数。

ω rad/s	0.1	0.2	0.4	1	2	4	10	20	30
$20\lg G $ dB	34	28	21	13	5	-5	-20	-31	-34
$\angle G$ deg	-93	-97	-105	-123	-145	-180	-225	-285	-345

5.3-1 解答 由 $\omega = 0.1 \sim 0.2$, 二倍频程 $\Delta L(\omega) = -6$ dB, $\omega = 0.1 \sim 1$, $\Delta L(\omega) \approx -20$ dB, 所以低频段有一个积分环节。

$\omega = 10 \sim 20$, 二倍频程 $\Delta L(\omega) = -12$ dB, $\omega = 2 \sim 20$, $\Delta L(\omega) = -36$ dB ≈ -40 dB 所以有一个惯性环节。

又当 $\omega = 30$ 时, $\angle G(j\omega) = -345^\circ < 180^\circ$, 必须有延迟环节。

所以开环传递函数为

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{s(Ts + 1)}$$

频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{Ke^{-j\omega\tau}}{j\omega(T\omega + 1)}$$

对数渐近频率特性为

$$L(\omega) = \begin{cases} 20\lg\frac{K}{\omega} & \omega < \frac{1}{T} \\ 20\lg\frac{K}{T\omega^2} & \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$

由当 $\omega = 0.1$ 时 $20\lg\frac{K}{\omega} = 34$, 得 $K = 5$.

当 $\omega = 30$ 时, 由 $20\lg \frac{5}{T\omega^2} = -34$ 解得 $T = 0.28$

故

$$G(s) = \frac{5e^{-rs}}{s(0.28s + 1)}$$

所以

$$\angle G(j\omega) = -\omega\tau \times 57.3 - 90^\circ - \arctan(T\omega)$$

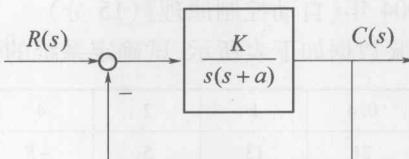
当 $\omega = 30$ 时, $\angle G(j\omega) = -345^\circ$ 得 $\tau = 0.1$, 故

$$G(s) = \frac{5e^{-0.1s}}{s(0.28s + 1)}$$

5.3-2 南京航空航天大学 2000 年《自动控制原理》(15 分)

系统如图所示, $K > 0$, 输入 $r(t) = A\cos 3t$ 时, 从示波器中观测到输入, 输出的幅值相等, 相位差 90° 。

- (1) 确定参数 a, K ;
- (2) 若输入 $r(t) = 3\cos \omega t$, 确定 ω 为何值时, 稳态输出 $c(t)$ 的幅值最大, 并求出此最大幅值。



5.3-2 题图

5.3-2 解答 系统闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{K}{s^2 + as + K}$$

频率特性

$$\Phi(j\omega) = \frac{K}{K - \omega^2 + aj\omega}$$

由已知条件得幅频特性 $A(3) = \frac{K}{\sqrt{(K-9)^2 + 9a^2}} = 1$;

相频 $\varphi(3) = -\arctg \frac{3a}{K-9} = -90^\circ$;

上两式解得 $K = 9, a = 3$, 所以, $\omega_n = \sqrt{K} = 3, \zeta = \frac{3}{2 \times 3} = \frac{1}{2}$;

谐振频率 $\omega_r = 3\sqrt{1 - 2 \times 0.5^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, 谐振峰值 $M_r = \frac{1}{2 \times 0.5 \sqrt{1 - 0.5^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$;

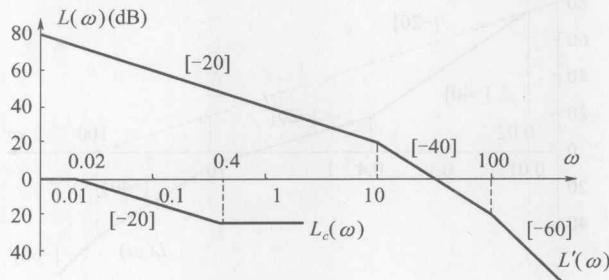
所以输出最大幅值 $A = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 3 = 2\sqrt{3}$ 。

5.3-3 南京航空航天大学 1998 年《自动控制原理》(20 分)

如图所示, 最小相位系统开环对数幅频渐近特性为 $L'(\omega)$, 串联校正装置对数幅频特性渐

近曲线为 $L_c(\omega)$ 。

- (1) 求未校正系统开环传递函数 $G_0(s)$ 及串联校正装置 $G_c(s)$;
- (2) 在图中画出校正后系统的开环对数幅频渐近特性 $L''(\omega)$, 并求出校正后系统的相位裕度 γ'' ;
- (3) 简要说明这种校正装置的特点。



5.3-3 题图

5.3-3 解答

(1) 根据对数幅频渐近特性各段的斜率和转折频率, 可得开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K}{s^\nu \left(\frac{s}{10} + 1\right) \left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

因为低频段是 -20dB/dec , 所以有一积分环节, 即 $\nu = 1$, 由图知 $\omega = 0.01$ 时, 其幅值为 80dB , 即 $20 \lg \left. \frac{K}{\omega} \right|_{\omega=0.01} = 80$, 解得 $K = 100$, 故未校正系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{100}{s \left(\frac{s}{10} + 1\right) \left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

校正装置的开环传递函数形式为

$$G_c(s) = \frac{K_c \left(\frac{s}{0.4} + 1\right)}{s^\nu \left(\frac{s}{0.02} + 1\right)}$$

因为低频段是 0dB/dec , 所以 $\nu = 0$, 由于低频段 0dB , 即 $20 \lg K_c = 0$, 得 $K_c = 1$, 所以校正装置的开环传递函数为

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{0.4} + 1}{\frac{s}{0.02} + 1}$$

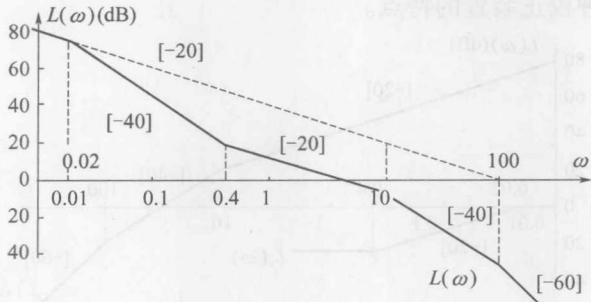
(2) 校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_0(s) G_c(s) = \frac{100 \left(\frac{s}{0.4} + 1\right)}{s \left(\frac{s}{10} + 1\right) \left(\frac{s}{100} + 1\right) \left(\frac{s}{0.02} + 1\right)}$$

转折频率依次为 $0.02, 0.4, 10, 100$ 。

低频段当 $\omega = 100$ 时, 过 0 分贝线, 即延长线过 $(100, 0)$ 点。

由低频到高频绘制渐近特性曲线, 遇转折频率处, 改变渐近线的斜率。得到对数幅频特性曲线如图所示:



5.3-3 图解

由图可知, 对数幅频曲线在 $\omega = 10$ 之前过 0 分贝线, 所以由截止频率所在的对数幅频渐

$$\text{近特性线段方程, 得 } L_a(\omega_c'') = 20 \lg \frac{\frac{100}{\omega_c''}}{\frac{0.4}{0.02}} = 0, \text{ 解得 } \omega_c'' = 5.$$

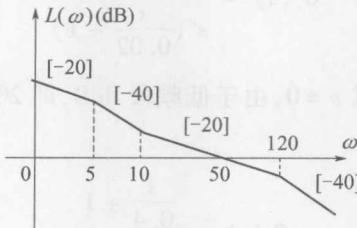
相角裕度:

$$\gamma'' = 180^\circ - 90^\circ + \arctan \frac{5}{0.4} - \arctan \frac{5}{0.02} - \arctan \frac{5}{10} - \arctan \frac{5}{100} = 56.23^\circ$$

(3) 根据幅频曲线可知, 采用的是串联滞后校正装置。以截止频率减小, 快速性降低为代价, 使得系统相角裕度增加。

5.3-4 北京航空航天大学 1999 年《自动控制原理》(18 分)

已知单位负反馈系统的开环传递函数 $G(s)$ 无右半平面的零点和极点, 且 $G(s)$ 的对数渐近幅频特性曲线如图所示。试写出 $G(s)$ 的表达式, 并近似作出相频特性曲线, 用对数频率稳定判据判断闭环系统的稳定性。



5.3-4 题图

5.3-4 解答 根据对数幅频渐近特性各段的斜率和转折频率, 可得开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K \left(\frac{s}{10} + 1 \right)}{s^2 \left(\frac{s}{5} + 1 \right) \left(\frac{s}{120} + 1 \right)}$$

因为低频段是 $-20dB/dec$, 所以有一积分环节, 即 $\nu=1$ 。又由图知 $\omega_c=50$, 其所在的对数幅频渐近特性线段方程为

$$L_a(\omega) = 20\lg \frac{K \frac{\omega}{10}}{\omega \frac{\omega}{5}}$$

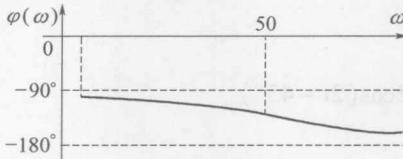
由 $L_a(\omega_c)=0$, 解得 $K=100$ 。

所以, 开环传递函数为

$$G(s) = \frac{100(\frac{s}{10} + 1)}{s(\frac{s}{5} + 1)(\frac{s}{120} + 1)}$$

绘制对数相频特性曲线: $\varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{10} - 90^\circ - \arctan \frac{\omega}{5} - \arctan \frac{\omega}{120}$, 起点 $\varphi(0) = -90^\circ$; 终点 $\varphi(\infty) = -180^\circ$; 转折频率处 $\varphi(5) = -110.9^\circ$, $\varphi(10) = -113.2^\circ$, $\varphi(120) = -137.4^\circ$; 截止频率处 $\varphi(50) = -118.2^\circ$ 。且由于有积分环节, 在相频曲线 $\varphi(\omega)$ 的低频段处, 向上补 90° 虚线。

相频曲线图如图所示:

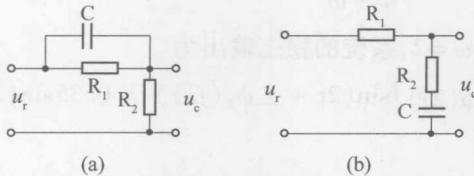


5.3-4 图解

由相频曲线 $\varphi(\omega)$ 形式可知, 无穿越点, 所以 $N=0$ 。又由开环传递函数表达式知 $P=0$ 。所以 $Z=P-2N=0$ 。系统稳定。

5.4 课后练习题及详细解答

5.4-1 试求下图(a)、(b)网络的频率特性。



5.4-1 题图

5.4-1 解答

$$(a) u_c = u_r \cdot \frac{R_2}{\frac{R_1}{j\omega C} + R_2}$$

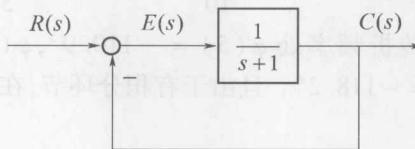
得 $\frac{u_c}{u_r} = \frac{R_1 R_2 j\omega c + R_2}{R_1 + R_1 R_2 j\omega c + R_2}$

$$(b) \quad u_c = \frac{R_2 + \frac{1}{j\omega c}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega c}} \cdot u_r$$

得

$$\frac{u_c}{u_r} = \frac{R_2 j\omega c + 1}{R_1 j\omega c + R_2 j\omega c + 1}$$

5.4-2 某系统结构图如图所示, 试根据频率特性的物理意义, 求下列输入信号作用时, 系统的稳态输出 $c_{ss}(t)$ 和稳态误差 $e_{ss}(t)$ 。



5.4-2 题图

- (1) $r(t) = \sin 2t$ 。
- (2) $r(t) = \sin(t + 30^\circ) - 2\cos(2t - 45^\circ)$ 。

5.4-2 解答

$$\phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{s + 2}; \phi(j\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}$$

$$|\phi(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^2}}; \angle \phi(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{2}$$

$$\phi_E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{s + 1}{s + 2}; \phi_E(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{1 + j\omega}$$

$$|\phi_E(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + \omega^2}}{\sqrt{4 + \omega^2}}; \angle \phi_E(j\omega) = \arctan \omega - \arctan \frac{\omega}{2}$$

(1) 当 $r(t) = \sin 2t$ 时, $\omega = 2$; 系统的稳态输出为

$$c_{ss} = R_0 |\phi(2j)| \sin(2t + \angle \phi_E(j2)) = 0.35 \sin(2t - 45^\circ)$$

系统的稳态误差为

$$ess = R_0 |\phi_E(j2)| \sin(2t + \angle \phi_E(j2)) = 0.79 \sin(2t + 18.43^\circ)$$

(2) 当 $r(t) = \sin(t + 30^\circ) - 2\cos(2t - 45^\circ)$ 时, 有

$$r_1(t) = \sin(t + 30^\circ)$$

$$c_{1ss} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(t + 30^\circ - \arctan \frac{1}{2})$$

$$e_{1ss} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \sin(t + 30^\circ + \arctan \frac{1}{3})$$

$$r_2(t) = -2\cos(2t - 45^\circ)$$

$$c_{2ss} = \frac{-\sqrt{2}}{2}\cos(2t - 45^\circ - \arctan 1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2t - 90^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t$$

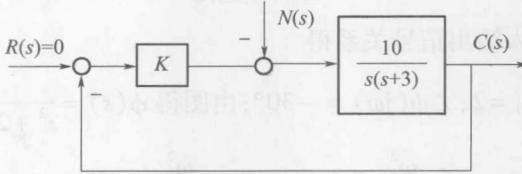
$$e_{2ss} = -\frac{\sqrt{10}}{2}\cos(2t - 45^\circ + \arctan \frac{1}{3})$$

因此,有

$$c_{ss} = c_{1ss} + c_{2ss} = 0.45\sin(t + 30^\circ - 26.57^\circ) + 0.71\sin 2t$$

$$e_{ss} = e_{1ss} + e_{2ss} = 0.63\sin(t + 48.4^\circ) - 1.58\cos(2t - 26.6^\circ)$$

5.4-3 控制系统如图所示,干扰信号 $n(t) = 0.1\sin 20t$,要求系统的稳态误差不大于 0.001 时,试确定 K 值的可调范围。



5.4-3 题图

$$\text{5.4-3 解答 } \phi_n(s) = \frac{\frac{10}{s(s+3)}}{1 + \frac{10K}{s(s+3)}} = \frac{10}{s^2 + 3s + 10K}$$

$$|\phi(j\omega)| = \left| \frac{10}{-\omega^2 + 10K + 3j\omega} \right| = \frac{10}{\sqrt{9\omega^2 + (10K - \omega^2)^2}}$$

将 $\omega = 20$ 代入上式,得

$$\frac{10}{\sqrt{9\omega^2 + (10K - \omega^2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{3600 + (10K - 400)^2}} \leq 0.01$$

解得 $K > 139.8$ 。

5.4-4 已知系统开环传递函数 $G(s) = \frac{K(-T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)}$ ($K, T_1, T_2 > 0$),当 $\omega = 1$ 时, $\angle G(j\omega) = -180^\circ$, $|G(j\omega)| = 0.5$;当输入为单位速度信号时,系统的稳态误差为 1。试写出系统开环频率特性表达式 $G(j\omega)$ 。

5.4-4 解答 当输入信号为单位速度信号时,系统的稳态误差为 1,可以得到 $K = 1$ 。则

$$G(j\omega) = \frac{-T_2 j\omega + 1}{T_1(j\omega)^2 + j\omega} = \frac{-T_2 j\omega + 1}{-T_2 \omega^2 + j\omega}$$

$$\begin{cases} -\arctan T_2 - 90^\circ - \arctan T_1 = -180^\circ \\ \arctan T_2 + \arctan T_1 = 90^\circ \\ \arctan \frac{T_1 + T_2}{1 - T_1 T_2} = 90^\circ; \sqrt{\frac{T_2^2 + 1}{1 + T_1^2}} = 0.5 \end{cases}$$

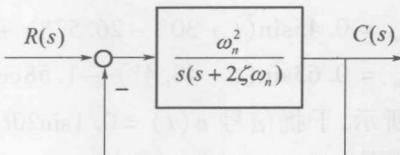
由上面的两式,得

$$T_1 = 2, T_2 = 0.5$$

则

$$G(j\omega) = \frac{-0.5j\omega + 1}{-2\omega^2 + j\omega}$$

5.4-5 已知控制系统结构如图所示。当输入 $r(t) = 2\sin t$ 时, 系统的稳态输出 $c_s(t) = 4\sin(t - 30^\circ)$ 。试确定系统的参数 ξ, ω_n 。



5.4-5 题图

5.4-5 解答 由输入输出信号关系得

$$|\phi(j\omega)| = 2; \angle\phi(j\omega) = -30^\circ; \text{由图得 } \phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}; \omega = 1, \text{ 得}$$

$$\phi(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - 1 + 2\xi\omega_n j}$$

$$|\phi(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - 1)^2 + 4\xi^2\omega_n^2}} = 2$$

$$\angle\phi(j\omega) = -\arctan \frac{2\xi\omega_n}{\omega_n^2 - 1} = -30^\circ; \frac{2\xi\omega_n}{\omega_n^2 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

解得 $\xi = 0.17, \omega_n = 1.33$ 。

5.4-6 已知系统开环传递函数 $G(s)H(s) = \frac{10}{s(2s+1)(s^2+0.5s+1)}$, 试分别计算 $\omega = 0.5$ 和 $\omega = 2$ 时开环频率特性的幅值 $A(\omega)$ 和相角 $\varphi(\omega)$ 。

$$5.4-6 \text{ 解答 } G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10}{j\omega(2j\omega+1)(1-\omega^2+0.5j\omega)}; \omega = 0.5$$

$$A(\omega) = \frac{10}{0.5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{0.25^2 + 0.75^2}} = 17.8885$$

$$\phi(\omega) = -90^\circ - \arctan 1 - \arctan \frac{0.25}{0.75} = -153.4349^\circ$$

$$\omega = 2; A(\omega) = \frac{10}{2 \sqrt{1 + 4^2 + 1 + (-3)^2}} = 0.3835$$

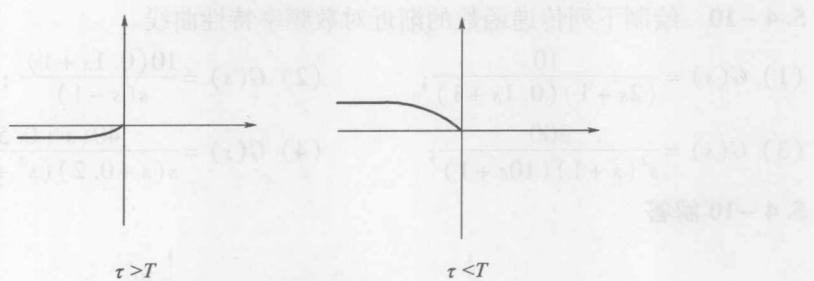
$$\phi(\omega) = -90^\circ - \arctan 4 - (\pi - \arctan \frac{1}{3}) = -327.5288^\circ$$

5.4-7 已知系统开环传递函数 $G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)}$ ($K, T, \tau > 0$), 试分析并绘制 $\tau > T$ 和 $T > \tau$ 情况下的概略开环幅相曲线。

5.4-7 解答

当 $\tau > T$ 时, $\arctan \tau\omega - \arctan T\omega - 180^\circ > -180^\circ$;

当 $\tau < T$ 时, $\arctan \tau\omega - \arctan T\omega - 180^\circ < -180^\circ$ 。

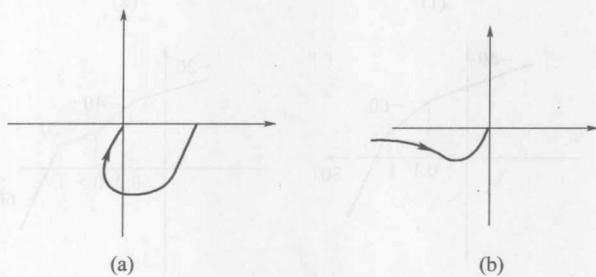


5.4-7 图解

5.4-8 试绘制下列传递函数的幅相曲线。

$$(1) G(s) = \frac{s + 10}{(10s + 1)(s + 1)}; \quad (2) G(s) = \frac{10(1 + s)}{s^2}.$$

5.4-8 解答

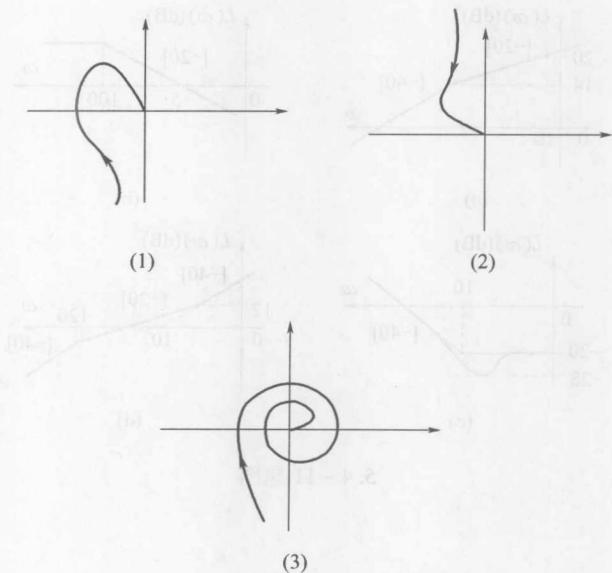


5.4-8 图解

5.4-9 概略绘制下列传递函数的幅相曲线($k > 0$)。

$$(1) G(s) = \frac{k}{s(s + 4)(s + 10)}; \quad (2) G(s) = \frac{k}{s(Ts - 1)}; \quad (3) G(s) = \frac{k}{s} e^{-\tau s}.$$

5.4-9 解答



5.4-9 图解

5.4-10 绘制下列传递函数的渐近对数频率特性曲线。

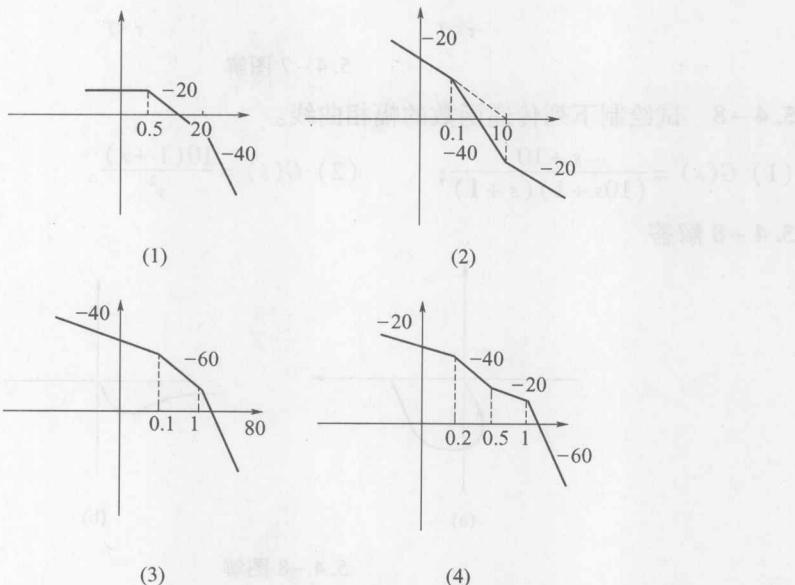
$$(1) G(s) = \frac{10}{(2s+1)(0.1s+1)};$$

$$(2) G(s) = \frac{10(0.1s+1)}{s(s-1)};$$

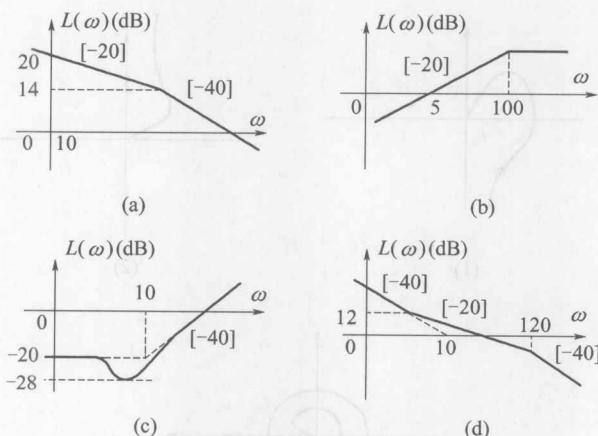
$$(3) G(s) = \frac{200}{s^2(s+1)(10s+1)};$$

$$(4) G(s) = \frac{40(s+0.5)}{s(s+0.2)(s^2+s+1)}.$$

5.4-10 解答



5.4-11 四个最小相角系统传递函数的近似对数幅频特性曲线如下图所示,试写出对应的传递函数 $G(s)$ 。



5.4-11 题图

5.4-11 解答

$$(a) G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

由图得 $\omega = 10$, $L(\omega) = 20$, $20\lg K - 20\lg \omega = 20$, 得 $K = 100$ 。则 $20\lg 100 - 20\lg \omega_1 = 14$, 得

$$\omega_1 = 20, T = \frac{1}{\omega} = 0.05, \text{故 } G(s) = \frac{100}{s(0.05s + 1)}.$$

$$(b) G(s) = \frac{s \cdot K}{Ts + 1}$$

$$|G(j\omega)| = 1; \left| \frac{Kj\omega}{Tj\omega + 1} \right| = 1; \frac{K\omega}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} = 1$$

由 $\omega = 5, T = 0.01$, 得 $K = 0.2$ 。

$$\text{所以 } G(s) = \frac{0.2s}{0.01s + 1}.$$

$$(c) G(s) = K \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2 \times \xi \times \frac{s}{\omega_n} + 1 \right)$$

$$\text{由图得 } \omega_n = 10, 20\lg M_r = 20\lg \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} = -20 - (-28) = 8, \text{得 } \xi = 0.2.$$

由 $20\lg K = -20$, 得 $K = 0.1$ 。

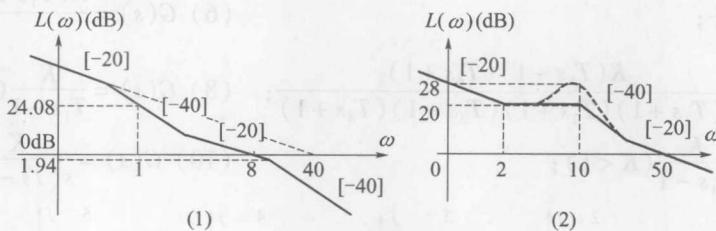
$$\text{所以 } G(s) = 0.1 \left(\frac{s^2}{10^2} + 2 \times 0.2 \times \frac{s}{10} + 1 \right).$$

$$(d) G(s) = \frac{K(T_1 s + 1)}{s^2 (T_2 s + 1)}$$

$$\text{由图得 } K = 100, T_2 = \frac{1}{120}; 20\lg K - 20\lg \omega = 12; \omega = 5, T_1 = 0.2.$$

$$\text{则 } G(s) = \frac{100 \left(\frac{s}{120} + 1 \right)}{s^2 \left(\frac{s}{5} + 1 \right)}.$$

5.4-12 两个最小相角系统传递函数的近似对数幅频特性曲线如图所示, 试写出对应的传递函数 $G(s)$ 。



5.4-12 题图

5.4-12 解答

$$(1) G(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

由图知 $K = 40$ 。

当 $\omega = 1$ 时, 有

$$20\lg \left| \frac{K}{j\omega \cdot T_1 j\omega} \right| = 24.08; T_1 = 2.5$$

当 $\omega = 8$ 时, 有

$$20\lg \left| \frac{40 \cdot T_2 j\omega}{j\omega \cdot T_1 j\omega} \right| = 0; T_2 = 0.5$$

$$20\lg \left| \frac{40 \cdot 0.5 j\omega_3}{j\omega_3 \cdot 2.5 j\omega_3 \cdot T_3 j\omega_3} \right| = -1.94, T_3 = \frac{1}{\omega_3}, \omega_3 = 10, T_3 = 0.1$$

得 $G(s) = \frac{40(0.5s+1)}{s(2.5s+1)(0.1s+1)}$

$$(2) G(s) = \frac{K(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)}{s(\frac{s^2}{\omega_2^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_2} + 1)}$$

由 $\omega = 2$ 得 $T_1 = \frac{1}{2}$; 由 $\omega_2 = 10$, $20\lg K - 20\lg \omega = 20$, 得 $K = 20$ 。

由 $20\lg \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}} = 8$, 得 $\xi = 0.2$ 。

$$\left| \frac{20 \times 0.5 \cdot j\omega \cdot T_3 j\omega}{j\omega \cdot \frac{\omega^2}{100}} \right| = 1, \omega = 50, T_3 = 20$$

$$\text{得 } G(s) = \frac{20(\frac{s}{2} + 1)(\frac{s}{20} + 1)}{s(\frac{s^2}{100} + 2 * 0.2 * \frac{s}{10} + 1)}$$

5.4-13 已知单位反馈系统的开环传递函数及其幅相曲线如下, 试根据奈氏判据判断闭环系统的稳定性。

$$(1) G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

$$(2) G(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$(3) G(s) = \frac{K}{s^2(Ts + 1)}$$

$$(4) G(s) = \frac{K(T_1 s + 1)}{s^2(T_2 s + 1)} (T_1 > T_2)$$

$$(5) G(s) = \frac{K}{s^3}$$

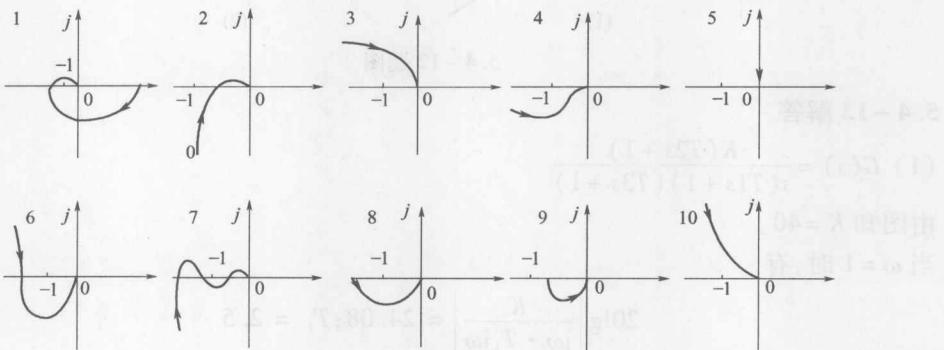
$$(6) G(s) = \frac{K(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s^3}$$

$$(7) G(s) = \frac{K(T_5 s + 1)(T_6 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}$$

$$(8) G(s) = \frac{K}{T_1 s - 1} (K > 1)$$

$$(9) G(s) = \frac{K}{T_1 s - 1} (K < 1)$$

$$(10) G(s) = \frac{K}{s(Ts - 1)}$$



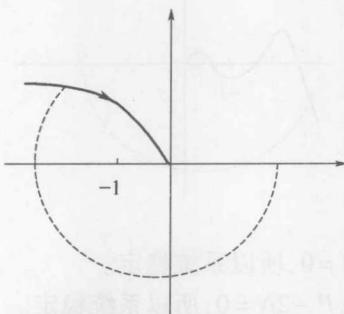
5.4-13 题图

5.4-13 解答

(1) $N_- = 1, N_+ = 0, P = 0, P - 2N = 2$, 所以该系统不稳定。

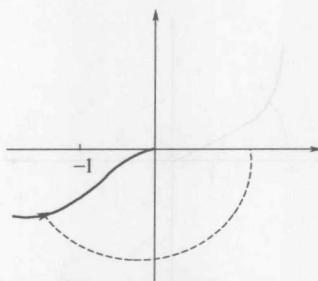
(2) $N_- = 0, N_+ = 0, P = 0, P - 2N = 0$, 所以该系统稳定。

(3) 奈奎斯特图如下:



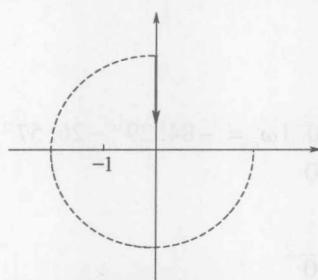
$N_- = 1, N_+ = 0, P = 0, P - 2N = 2$, 所以系统不稳定。

(4) 奈奎斯特图如下:



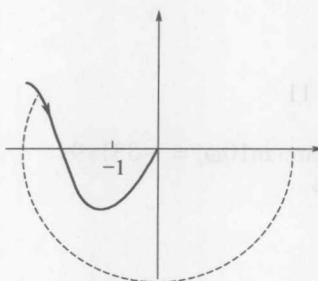
$N_- = 0, N_+ = 0, P = 0, P - 2N = 0$, 所以系统稳定。

(5) 奈奎斯特图如下:



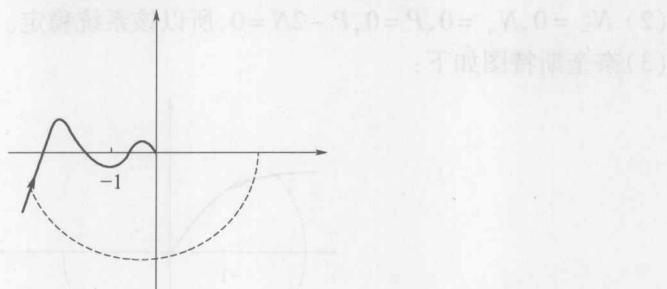
$N_- = 1, N_+ = 0, P = 0, P - 2N = 2$, 所以系统不稳定。

(6) 奈奎斯特图如下:



$N_- = 1, N_+ = 1, P = 0, P - 2N = 0$, 所以系统稳定。

(7) 奈奎斯特图如下：

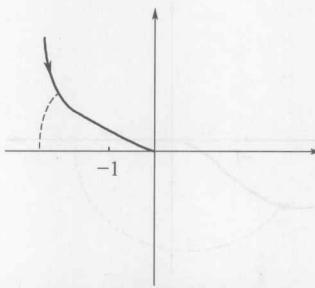


$N_- = 1, N_+ = 1, P = 0, P - 2N = 0$, 所以系统稳定。

(8) $N_- = 0, N_+ = 0.5, P = 1, P - 2N = 0$, 所以系统稳定。

(9) $N_- = 0, N_+ = 0, P = 1, P - 2N = 1$, 所以系统不稳定。

(10) 奈奎斯特图如下：



$N_- = 0.5, N_+ = 0, P = 1, P - 2N = 2$, 所以系统不稳定。

5.4-14 试用对数稳定判据判断题 5.4-10 四个系统的稳定性。

5.4-14 解答

$$(1) \left| \frac{10}{2j\omega_c + 1} \right| = 1 \Rightarrow \omega_c = 5$$

$$\phi(j\omega_c) = -\arctan 2\omega_c - \arctan 0.1\omega_c = -84.29^\circ - 26.57^\circ = -110.86^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ + \phi(j\omega_c) = 69.14^\circ > 0$$

系统稳定。

$$(2) \left| \frac{10}{j\omega_c + j\omega_c} \right| = 1 \Rightarrow \omega_c = \sqrt{10}$$

$$\phi(j\omega_c) = \arctan 0.1\omega_c - 90^\circ + (-\pi - \arctan \omega_c) = -180^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ + \phi(j\omega_c) = 0$$

系统临界稳定。

$$(3) \left| \frac{200}{\omega_c^2 + 10\omega_c + \omega_c} \right| \Rightarrow \omega_c = 2.11$$

$$\phi(j\omega_c) = -180^\circ - \arctan \omega_c - \arctan 10\omega_c = -331.9^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ + \phi(j\omega_c) = -151.93^\circ$$

系统不稳定。

$$(4) G(s) = \frac{100(2s+1)}{s(5s+1)(s^2+s+1)}$$

$$\text{令 } \left| \frac{200 + 2j\omega_c}{j\omega_c \cdot 5j\omega_c \cdot \omega_c^2} \right| = 1, \text{ 则}$$

$$\phi(j\omega_c) = \arctan 2\omega_c - 90^\circ - \arctan 5\omega_c = -257.24^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ + \phi(j\omega_c) = -77.24^\circ$$

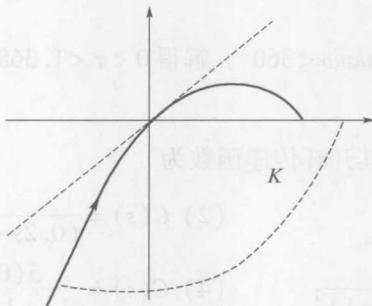
系统不稳定。

5.4-15 单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K(s^2 + 1)}{s(s + 5)}$ 用奈奎斯特判据确定使闭环系统稳定的条件。

5.4-15 解答 $\varphi(j\omega) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega}{5} + \arctan[1 - \omega^2]$

$$\omega \rightarrow 0, \varphi = -90^\circ, A \rightarrow \infty; \omega \rightarrow 1_-, \varphi = -101.3^\circ, A \rightarrow 0$$

$$\omega \rightarrow 1_+, \varphi = -281.3^\circ, A \rightarrow 0; \omega \rightarrow \infty, \varphi = -360^\circ, A \rightarrow K$$



5.4-15 图解

$K > 0, P - 2N = 0$ 时系统稳定。

5.4-16 已知某系统中 $G(s) = \frac{10}{s(s-1)}$, $H(s) = 1 + K_h s$ 试用频域分析法确定闭环系统临界稳定时的 K_h 。

5.4-16 解答 $G(s)H(s) = \frac{10(1 + K_h s)}{s(s-1)}$

令 $\left| \frac{10 \sqrt{1 + K_h^2 \omega_c^2}}{\omega_c \sqrt{1 + \omega_c^2}} \right| = 1, K^2 \omega_c^2 = \frac{\omega_c^2 (1 + \omega_c^2)}{100} - 1$ ①

由临界稳定, 得

$$\arctan \frac{K\omega_c + \omega_c}{1 - K\omega_c^2} = 90^\circ, K\omega_c^2 = 1 \quad ②$$

联立①、②两式得 $K = 0.1$ 。

5.4-17 若单位反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{Ke^{-0.8s}}{s+1}$ 试确定使系统稳定 K 的临界值。

5.4-17 解答 令 $|G(j\omega_c)| = 1, \left| \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_c^2}} \right| = 1$

得 $\omega_c = \sqrt{K^2 - 1}$,

$$\phi(j\omega_c) = -57.3^\circ \cdot 0.8 \cdot \omega_c - \arctan \omega_c$$

$$\gamma = 180^\circ + \phi(j\omega_c) = 0 \Rightarrow \omega_c = 2.45$$

得 $K = 2.65$ 。

5.4-18 设单位反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{5s^2 e^{-\tau s}}{(s+1)^4}$ 试确定闭环系统稳定的延迟时间 τ 的范围。

5.4-18 解答 令 $|G(j\omega)| = \frac{5\omega^2}{(1+\omega^2)^2} = 1$

$$\text{得 } \omega_1 = 0.618, \omega_2 = 1.618.$$

$$\angle G(j\omega) = 180^\circ - \tau\omega - 4\arctan\omega$$

稳定时 $\angle G(j\omega_1) < 180^\circ$, 且 $\angle G(j\omega_2) > -180^\circ$ 。将 ω_1, ω_2 代入上述不等式, 得 $\tau\omega_1 \cdot \frac{180}{\pi} + 4\arctan\omega_1 > 0$, 且 $\tau\omega \cdot \frac{180}{\pi} + 4\arctan\omega < 360^\circ$ 。解得 $0 < \tau < 1.3686$, 此时, $G(j\omega)$ 不包围 $(-1, j0)$ 点, 所以系统稳定。

5.4-19 已知反馈系统, 其开环传递函数为

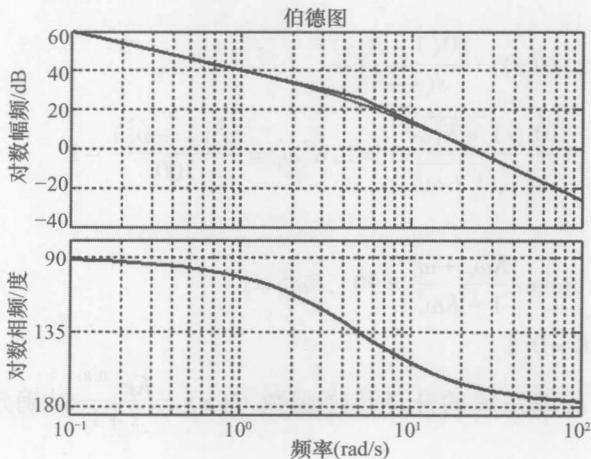
$$(1) G(s) = \frac{100}{s(0.2s+1)}; \quad (2) G(s) = \frac{50}{(0.2s+1)(s+2)(s+0.5)};$$
$$(3) G(s) = \frac{10}{s(0.1s+1)(s-1)}; \quad (4) G(s) = \frac{5(0.5s-1)}{s(s+1)(0.1s-1)}.$$

试用奈氏判据或对数稳定判据判断闭环系统的稳定性, 并确定系统的相角裕度和幅值裕度。

5.4-19 解答

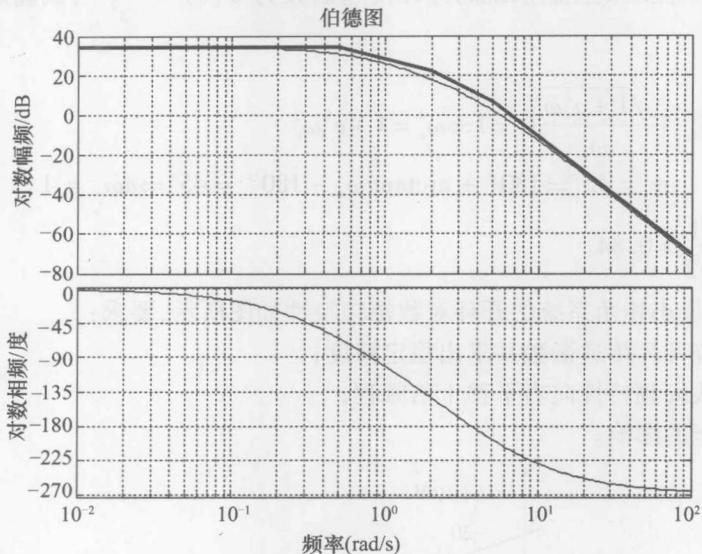
$$(1) \omega_c = \sqrt{5 \times 100} = 22.36, \omega_x = \infty$$

相角裕度 $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \cot 0.2\omega_c = 12.6^\circ$, 幅值裕度 $h = \infty$, 系统稳定。



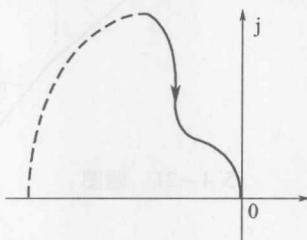
5.4-19 图解(1)

(2) 相角裕度为 -24° , 增益裕度为 -8dB , 系统不稳定。



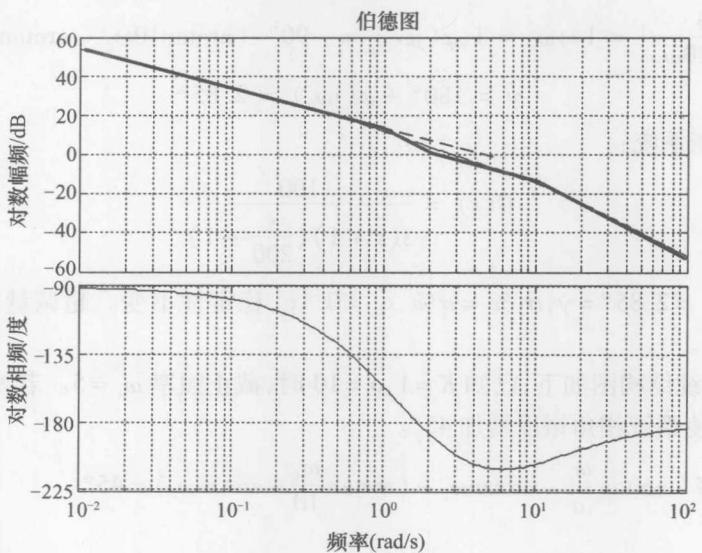
5.4-19 图解(2)

(3) 系统不稳定, 非最小相位系统不适用幅值和相位裕度。



5.4-19 图解(3)

(4) 系统不稳定, 非最小相位系统不适用幅值和相位裕度。



5.4-19 图解(4)

5.4-20 设单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{as+1}{s^2}$, 试确定相角裕度为 45° 时的 α 值。

5.4-20 解答 $|\frac{\sqrt{1+a^2\omega_c^2}}{\omega_c^2}| = 1 \Rightarrow \omega_c^4 = 1 + a^2\omega_c^2$
 $\gamma = 45^\circ \Rightarrow 180^\circ + \arctan a\omega_c - 180^\circ = 45^\circ \Rightarrow a\omega_c = 1$

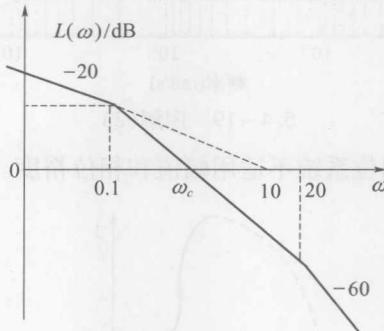
解得 $\omega_c^2 = \sqrt{2}$, $a = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.84$ 。

5.4-21 某最小相角系统的开环对数幅频特性如图所示,要求:

(1) 写出系统开环传递函数并求出稳定裕度;

(2) 将其对数幅频特性向右平移十倍频程;

试讨论对系统性能的影响。



5.4-21 题图

5.4-21 解答

(1) $G(s) = \frac{10}{s(10s+1)(0.05s+1)}$

$$|\frac{10}{\omega_c \cdot 10\omega_c}| = 1 \Rightarrow \omega_c = 1, \varphi(j\omega_c) = -90^\circ - \arctan 10\omega_c - \arctan 0.05\omega_c$$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(j\omega_c) = 2.85^\circ$$

(2) 平移后新系统:

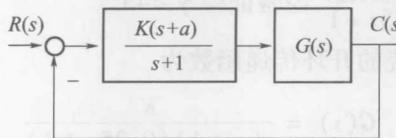
$$G(s) = \frac{100}{s(s+1)(\frac{s}{200}+1)}$$

$\omega_{cl} = 10\omega_c = 10$, $\gamma_1 = 2.85^\circ = \gamma$, $\sigma_1\% = \sigma\%$, $t_{sl} = 0.1t_s$, 稳定性不变。超调量不变, 调节时间缩短, 动态响应加快。

5.4-22 系统结构图如下, 已知 $K=1$, $a=10$ 时, 截止频率 $\omega_c=5$ 。若要求 ω_c 不变, 如何改变 K 和 a 才能使系统相角裕度增加 45° 。

5.4-22 解答 $\arctan \frac{\omega_c}{a} - \arctan \omega_c - (\arctan \frac{\omega_c}{10} - \arctan \omega_c) = 45^\circ$

得 $a = \frac{5}{3}$



5.4-22 题图

$$\sqrt{\frac{250}{9}} \cdot K = \sqrt{125} \Rightarrow K = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

5.4-23 设有单位反馈的火炮指挥仪伺服系统,其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.2s + 1)(0.5s + 1)}$$

若要求系统最大输出速度为 2(r/min), 输出位置的容许误差小于 2°, 试求:

(1) 确定满足上述指标的最小 K 值, 计算该 K 值下系统的相角裕度和幅值裕度;

(2) 在前向通路中串接超前校正网络 $G_c(s) = \frac{0.4s + 1}{0.08s + 1}$, 计算校正后系统的相角裕度和幅值裕度, 说明超前校正对系统动态性能的影响。

5.4-23 解答

$$(1) 2(\text{r/min}) = 12/\text{s}, e_{ss} \leq 2 \Rightarrow \frac{12}{K} \leq 2 \Rightarrow K \geq 6$$

$$G(s) \approx \frac{6}{s \times 0.5s} \Rightarrow \omega_c \approx \sqrt{12} \approx 3.46, \gamma = -3.8^\circ, h = -1 \text{dB}$$

系统不稳定。

(2) 校正后, $\gamma'' = 22.5^\circ, h'' = 7.5 \text{ dB}$, 说明超前校正可以增加相角裕度, 从而减小超调量, 提高系统稳定性, 同时增大了截止频率, 缩短调节时间, 提高了系统的快速性。

5.4-24 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)}$$

试设计一串联超前校正装置, 使系统满足如下指标:

(1) 在单位斜坡输入下的稳态误差 $e_{ss} < \frac{1}{15}$;

(2) 截止频率 $\omega_c \geq 7.5 (\text{rad/s})$;

(3) 相角裕度 $\gamma \geq 45^\circ$ 。

$$5.4-24 \text{ 解答 } e_{ss} \leq \frac{1}{15} \Rightarrow K \geq 15$$

取 $K = 15, \omega_c = 7.5$ 。

$$20 \lg \left| \frac{15}{7.5 \cdot \sqrt{1 + 7.5^2}} \right| = -11.56 \Rightarrow 10 \lg a = 11.56, a = 14.32$$

$$T = \frac{1}{7.5\sqrt{a}} = 0.035$$

超前校正为 $14.32G_c(s) = \frac{0.5s+1}{0.035s+1}$, 经验证得 $\gamma \geq 45^\circ$ 。

5.4-25 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.25s+1)}$$

要求校正后系统的静态速度误差系数 $K_v \geq 5$ (rad/s), 相角裕度 $\gamma \geq 45^\circ$, 试设计串联迟后校正装置。

5.4-25 解答 由 $K \geq 5$ 取 $K = 5$ 。

由 $\gamma \geq 45^\circ$ 得 $180^\circ - 90^\circ - \arctan\omega_c - \arctan 0.25\omega_c - 6^\circ \geq 45^\circ$, 得 $\omega_c = 0.6$ 。

由 $20\lg b = -L(\omega_c)$, $\frac{1}{bT} = 10\omega_c$ 得 $b = 0.12$, $T = 138.89$, $G_c(s) = \frac{16.67s+1}{138.89s+1}$ 。

由 $\frac{1}{bT} = 10\omega_c$ 得 $\omega_c = 0.12$, $T = 138.89$, $G_c(s) = \frac{16.67s+1}{138.89s+1}$ 。

由 $\frac{1}{bT} = 10\omega_c$ 得 $\omega_c = 0.12$, $T = 138.89$, $G_c(s) = \frac{16.67s+1}{138.89s+1}$ 。

由 $\frac{1}{bT} = 10\omega_c$ 得 $\omega_c = 0.12$, $T = 138.89$, $G_c(s) = \frac{16.67s+1}{138.89s+1}$ 。

由 $\frac{1}{bT} = 10\omega_c$ 得 $\omega_c = 0.12$, $T = 138.89$, $G_c(s) = \frac{16.67s+1}{138.89s+1}$ 。

由 $\frac{1}{bT} = 10\omega_c$ 得 $\omega_c = 0.12$, $T = 138.89$, $G_c(s) = \frac{16.67s+1}{138.89s+1}$ 。

由 $\frac{1}{bT} = 10\omega_c$ 得 $\omega_c = 0.12$, $T = 138.89$, $G_c(s) = \frac{16.67s+1}{138.89s+1}$ 。

由 $\frac{1}{bT} = 10\omega_c$ 得 $\omega_c = 0.12$, $T = 138.89$, $G_c(s) = \frac{16.67s+1}{138.89s+1}$ 。

由 $\frac{1}{bT} = 10\omega_c$ 得 $\omega_c = 0.12$, $T = 138.89$, $G_c(s) = \frac{16.67s+1}{138.89s+1}$ 。

由 $\frac{1}{bT} = 10\omega_c$ 得 $\omega_c = 0.12$, $T = 138.89$, $G_c(s) = \frac{16.67s+1}{138.89s+1}$ 。

由 $\frac{1}{bT} = 10\omega_c$ 得 $\omega_c = 0.12$, $T = 138.89$, $G_c(s) = \frac{16.67s+1}{138.89s+1}$ 。

由 $\frac{1}{bT} = 10\omega_c$ 得 $\omega_c = 0.12$, $T = 138.89$, $G_c(s) = \frac{16.67s+1}{138.89s+1}$ 。

由 $\frac{1}{bT} = 10\omega_c$ 得 $\omega_c = 0.12$, $T = 138.89$, $G_c(s) = \frac{16.67s+1}{138.89s+1}$ 。

由 $\frac{1}{bT} = 10\omega_c$ 得 $\omega_c = 0.12$, $T = 138.89$, $G_c(s) = \frac{16.67s+1}{138.89s+1}$ 。

由 $\frac{1}{bT} = 10\omega_c$ 得 $\omega_c = 0.12$, $T = 138.89$, $G_c(s) = \frac{16.67s+1}{138.89s+1}$ 。

由 $\frac{1}{bT} = 10\omega_c$ 得 $\omega_c = 0.12$, $T = 138.89$, $G_c(s) = \frac{16.67s+1}{138.89s+1}$ 。

第6章 线性离散系统的分析

6.1 知识点辅导

线性离散系统主要掌握离散系统的数学建模、稳定性判断与稳态误差计算。特别注意理解以下几个知识点：

1. 香农采样定理

为了保证信号的恢复，其采样频率必须大于等于原连续信号所含最高频率的2倍。

2. Z 变换

建模时主要掌握Z变换理论及差分方程的建立及求解。熟练Z变换的若干定理对求解线性差分方程的作用。

3. 脉冲传递函数

离散系统的传递函数称为脉冲传递函数，特别注意闭环脉冲传递函数的意义及求法，进而用来判断闭环系统稳定性。

4. 离散系统稳定性

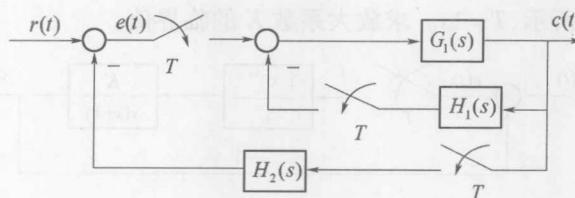
主要掌握利用Z平面到W平面的双线性变换方法对离散系统进行稳定性判别。必须注意离散控制系统的稳定性除与系统的固有结构和参数有关外，还与系统的采样周期有关，这是与连续控制系统稳定性分析的不同点。

5. 稳态误差计算

同连续系统一样，必须注意首先判断稳定性，才能计算稳态误差。

6.2 典型习题及详细解答

6.2-1 求图示系统的闭环脉冲传递函数 $\frac{C(z)}{R(z)}$ 。



6.2-1 题图

6.2-1 解答 由图知

$$C(s) = G_1(s)E^*(s) - G_1(s)X^*(s)$$
$$E(s) = R(s) - H_2(s)C(s)$$

$$X(s) = G_1(s)H_1(s)E^*(s) - G_1(s)H_1(s)X^*(s)$$

取 z 变换并整理可得

$$C(z) = G_1(z)E(z) - G_1(z)X(z)$$

$$E(z) = R(z) - H_2(z)C(z)$$

$$X(z) = \frac{G_1 H_1(z)}{1 + G_1 H_1(z)} E(z)$$

于是

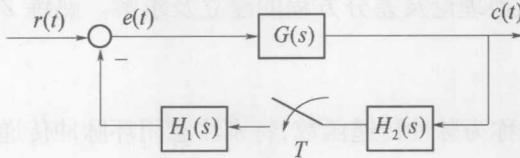
$$C(z) = G_1(z) \frac{1}{1 + G_1 H_1(z)} E(z)$$

$$(1 + G_1 H_1(z)) C(z) = G_1(z)R(z) - G_1(z)H_2(z)C(z)$$

$$(1 + G_1 H_1(z) + G_1(z)H_2(z)) C(z) = G_1(z)R(z)$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)}{1 + G_1 H_1(z) + G_1(z)H_2(z)}$$

6.2-2 求图示系统输出信号的 z 变换。



6.2-2 题图

6.2-2 解答 由图知

$$C(s) = G(s)R(s) - H_1(s)G(s)N^*(s)$$

$$N(s) = G(s)H_2(s)R(s) - H_2(s)G(s)H_1(s)N^*(s)$$

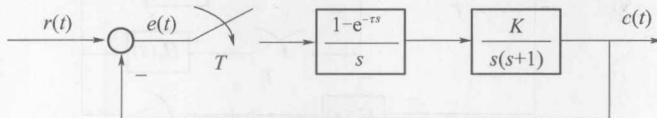
对上式取 z 变换后可得

$$N(z) = \frac{RGH_2(z)}{1 + GH_1 H_2(z)}$$

将 $C(s) = G(s)R(s) - H_1(s)G(s)N^*(s)$ 取 z 变换并代入上式得

$$C(z) = RG(z) - \frac{GH_1(z)RGH_2(z)}{1 + GH_1 H_2(z)}$$

6.2-3 系统如图所示, $T=1s$ 。求放大系数 K 的临界值。



6.2-3 题图

6.2-3 解答 由图知

$$G(z) = Z\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{K}{s(s+1)}\right] = K \frac{(e^{-T} + T - 1)z + (1 - e^{-T} - Te^{-T})}{(z - 1)(z - e^{-T})}$$

将 $T=1$ 代入, 得

$$G(z) = \frac{K(0.368z + 0.264)}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

特征方程 $1 + G(z) = 0$, 则

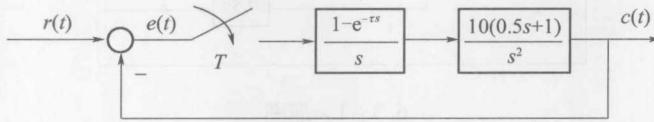
$$z^2 + (0.368K - 1.368)z + (0.264K + 0.368) = 0$$

令 $z = \frac{w+1}{w-1}$, 则

$$0.632Kw^2 + (1.264 - 0.528K)w + 2.763 - 0.104K = 0, \text{ 则}$$

$$\begin{cases} 0.632K > 0 \\ 1.264 - 0.528K > 0 \Rightarrow 0 < K < 2.39 \\ 2.763 - 0.104K > 0 \end{cases}$$

6.2-4 在图示系统中, $T=0.2s$, $r(t) = 1(t) + t + t^2$ 。判定系统的稳定性并求稳态误差。



6.2-4 题图

6.2-4 解答 由图知

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{10(0.5s + 1)}{s^2} = (1 - e^{-Ts}) \left(\frac{10}{s^3} + \frac{5}{s^2} \right)$$

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{10}{s^3} + \frac{5}{s^2} \right] = (1 - z^{-1}) \left[\frac{5T^2 z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{5Tz}{(z-1)^2} \right]$$

将 $T=0.2s$ 代入可得

$$G(z) = \frac{1.2z - 0.8}{(z-1)^2}$$

闭环特征方程为

$$1 + G(z) = 0 \Rightarrow z^2 - 0.8z + 0.2 = 0$$

$$z = 0.4 \pm 0.2j, |z| < 1$$

系统稳定。

$$\text{II型系统 } K_a = 1.2z - 0.8|_{z=1} = 0.4, e_s(\infty) = 2 \times \frac{T^2}{K_a} = 0.2.$$

下面采用终值定理求解:

$$E(z) = \frac{1}{1 + G(z)} R(z) = \frac{(z-1)^2}{z^2 - 0.8z + 0.2} R(z)$$

$$r(t) = 1(t) + t + t^2$$

$$R(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$E(z) = \frac{z}{z^2 - 0.8z + 0.2} \left[z - 1 + T + \frac{T^2(z+1)}{z-1} \right]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_s(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{zT^2(z + 1)}{z^2 - 0.8z + 0.2} = 0.2$$

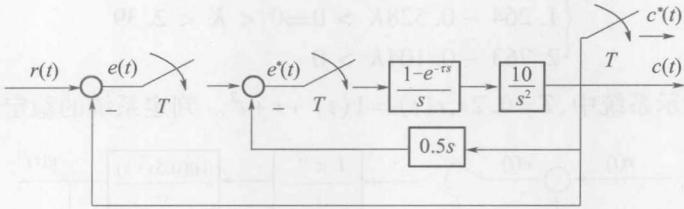
6.3 考研试题及详细解答

6.3-1 西北工业大学 2006 年《自动控制原理》(20 分)

离散系统结构图如图所示,采样周期 $T = 0.2s$ 。

(1) 判断系统的稳定性;

(2) 当 $r(t) = t$ 时,求系统的稳态误差 $e^*(\infty)$ 。



6.3-1 题图

6.3-1 解答 由图知

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{C^*(z)}{E^*(z)} = \frac{Z\left[\frac{10(1-e^{-Ts})}{s^3}\right]}{1+Z\left[\frac{5s(1-e^{-Ts})}{s^3}\right]} = \frac{10(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^3}\right]}{1+5(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2}\right]} \\ &= \frac{5T^2(z+1)}{(z-1)(z-1+5T)} \xrightarrow{T=0.2} \frac{0.2(z+1)}{z(z-1)} \\ \Phi_e(z) &= \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1+G(z)} = \frac{1}{1+\frac{0.2(z+1)}{z(z-1)}} = \frac{z(z-1)}{z^2-0.8z+0.2} \end{aligned}$$

(1) 判断稳定性

$$D(z) = z^2 - 0.8z + 0.2$$

$$\begin{aligned} D(1) &= 1 - 0.8 + 0.2 = 0.4 > 0 \\ D(-1) &= 1 + 0.8 + 0.2 = 2 > 0 \\ |0.2| &< |1| \end{aligned} \quad \text{闭环系统稳定。}$$

(2)

$$e^*(\infty) = \frac{TA}{K_v}$$

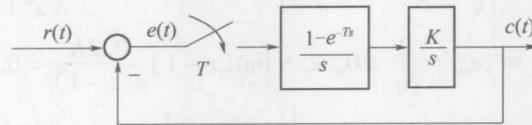
$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.2(z+1)}{z} = 0.4$$

所以

$$e^*(\infty) = \frac{0.2 \times 1}{0.4} = 0.5$$

6.3-2 西安电子科技大学 2006 年《自动控制原理》(20 分)

采样系统如图所示,其中 T 为采样周期。



6.3-2 题图

要求:

(1)计算系统开环及闭环脉冲传递函数。

(2)确定闭环系统稳定的 K 值范围。

(3)讨论采样周期 T 对系统稳定性的影响。

(4)设采样周期 $T=1s$, $r(t)=1(t)$ 时,若要求其稳态误差 $e_{ss}^*\leq 0.1$,该系统能否稳定工作?

若不能,如何改变采样周期 T 之值,使其在稳定前提下满足 e_{ss}^* 的要求?

6.3-2 解答

(1)开环脉冲传递函数为

$$G(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{K}{s}\right] = K(1-z^{-1}) \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{KT}{z-1}$$

闭环脉冲传递函数为

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{KT}{z-1+KT}$$

(2)由 $z-1+KT=0 \Rightarrow z=1-KT$, $|z|=|1-KT|<1 \Rightarrow 0<KT<2$

即系统闭环稳定时 $0 < K < \frac{2}{T}$ 。

(3)由(2)可知,采样周期 T 越大,系统的稳定域越小。

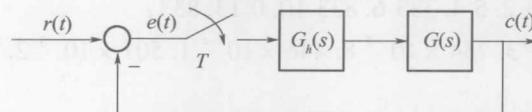
$$(4) K_v = \lim_{z \rightarrow \infty} (z-1) G(z) = KT, e_{ss} = \frac{T}{K_v} = \frac{1}{K} \leq 0.1 \Rightarrow K \geq 10$$

此时不满足稳定的条件 $0 < K < \frac{2}{T}$,系统不能稳定工作,要使系统稳定而且达到误差要求,

则 $\frac{2}{T} \geq 10 \Rightarrow T \leq 0.2$ 。

6.3-3 华中科技大学 2007 年《自动控制原理》(15 分)

线性定常离散系统如图所示,已知采样周期 $T=0.2s$,参考输入为 $r(t)=2 \cdot 1(t)+t$, $G_h(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$, $G(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{s}$ 。要使系统的稳态误差小于 0.25,试确定 K 的取值范围。



6.3-3 题图

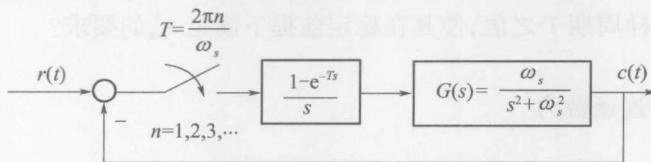
$$6.3-3 \text{ 解答} \quad \text{由题意, } Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{Ke^{-Ts}}{s}\right] = Kz^{-1}(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2}\right] = \frac{KT}{z(z-1)} = \frac{0.2K}{z(z-1)}$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1 + G(z)] = \infty, e_{ssp} = \frac{2}{K_p} = 0, K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.2K}{z(z-1)} = 0.2K, e_{ssv} = \frac{T}{K_v} = \frac{1}{K} \text{ 于是当}$$

输入为 $r(t) = 2 + 1(t) + t$ 时, $e_{ss} = e_{ssp} + e_{ssv} = \frac{1}{K}$, 由题意 $\frac{1}{K} < 0.25$, 得 $K > 4$ 。还要考虑系统的稳定性, 系统的特征方程为 $D(z) = z(z-1) + 0.2K = z^2 - z + 0.2K = 0$, 进行双线性变换, 令 $z = \frac{w+1}{w-1}$, 代入整理可以得到 $0.2Kw^2 + (2 - 0.4K)w + 2 + 0.2K = 0$ 。系统稳定时, $2 - 0.4K > 0$, $K < 5$, 故 $4 < K < 5$ 。

6.3-4 东南大学 2008 年《自动控制原理》(15 分)

某采样系统的框图如图所示, 试说明在采样时刻上, 系统的输出值为零。



6.3-4 题图

6.3-4 解答

$$\begin{aligned} G(z) &= Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{\omega_s}{s^2 + \omega_s^2}\right] = (1-z^{-1}) = Z\left[\frac{\omega_s}{s(s^2 + \omega_s^2)}\right] \\ &= \frac{1-z^{-1}}{\omega_s} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z(z-\cos\omega_s T)}{z^2 - 2z\cos\omega_s T + 1} \right] \end{aligned}$$

又 $T = \frac{2\pi n}{\omega_s}$, 代入得到 $G(z) = 0$, 于是闭环脉冲传递函数为 $\Phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = 0$, 即采样时刻上, 系统的输出值为零。

6.4 课后练习题及详细解答

6.4-1 已知采样器的采样周期 $T = 1s$, 求对下列连续信号采样后得到的脉冲序列 $x^*(t)$ 的前 8 个值。

$$(1) x(t) = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2; (2) x(t) = 1 - \cos 0.785t; (3) x(t) = 1 - e^{-0.5t}.$$

6.4-1 解答

- (1) 1.0 0.833 1.333 2.5 4.333 6.833 10.0 13.833;
- (2) $0.0 9.385 \times 10^{-5} 3.754 \times 10^{-4} 8.446 \times 10^{-4} 1.501 \times 10^{-3} 2.345 \times 10^{-3} 3.377 \times 10^{-3} 4.595 \times 10^{-3}$;
- (3) 0.0 0.393 0.632 0.777 0.865 0.918 0.950 0.970。

6.4-2 已知采样器的采样频率 $\omega_s = 3\text{rad/s}$, 求对下列连续信号采样后得到的脉冲序列的前 8 个值。说明是否满足采样定理, 如果不满足采样定理会有什么现象。

$$x_1(t) = \sin t, x_2(t) = \sin 4t, x_3(t) = \sin t + \sin 3t.$$

6.4-2 解答

$\omega_1 = 1$ rad/s, 前 8 个采样值为: 0.0 0.866 -0.866 0.0 0.866 -0.866 0.0 0.866;

$\omega_2 = 4$ rad/s, 前 8 个采样值为: 0.0 0.866 -0.866 0.0 0.866 -0.866 0.0 0.866;

$\omega_3 = 1$ rad/s, 前 8 个采样值为: 0.0 0.866 -0.866 0.0 0.866 -0.866 0.0 0.866。

采样频率 $\omega_s = 3$ rad/s, 由香农采样定理得 X_1, X_3 满足采样定理, X_2 不满足, 采样信号会产生失真, 不能完全还原为原信号。

6.4-3 求下列函数的 Z 变换。

$$(1) E(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)}; \quad (2) E(s) = \frac{k}{s(s+a)};$$

$$(3) E(s) = \frac{s+1}{s^2}; \quad (4) E(s) = \frac{1-e^{-s}}{s^2(s+1)}, T=1\text{s};$$

$$(5) e(t) = te^{-2t}; \quad (6) e(t) = t^3.$$

6.4-3 解答

$$(1) E(z) = Z\left[\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right] = Z\left[\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right)\right] = \frac{1}{b-a}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{z}{z-e^{-bT}}\right);$$

$$(2) E(z) = Z\left[\frac{k}{s(s+a)}\right] = \frac{k}{a}Z\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right] = \frac{k}{a}\frac{z(1-e^{-aT})}{z^2 - (1+e^{-aT})z + e^{-aT}};$$

$$(3) E(z) = Z\left[\frac{s+1}{s^2}\right] = Z\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right] = \frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{z^2 + (T-1)z}{(z-1)^2};$$

$$(4) E(z) = Z\left[\frac{1-e^{-s}}{s^2(s+1)}\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] = \frac{e^{-1}z+1-2e^{-1}}{(z-1)(z-e^{-1})};$$

$$(5) E(z) = Z[te^{-2t}] = \frac{Tze^{-2t}}{(z-e^{-2t})^2} = \frac{Te^{-2t}z^{-1}}{(1-e^{-2t}z^{-1})^2};$$

$$(6) E(z) = Z[t^3] = \frac{T^3z^{-2}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}.$$

6.4-4 求下列函数的 Z 反变换。

$$(1) X(z) = \frac{z}{z-0.4};$$

$$(2) X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)};$$

$$(3) X(z) = \frac{z}{(z-e^{-T})(z-e^{-2T})};$$

$$(4) X(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)};$$

$$(5) X(z) = \frac{1}{z-1}.$$

6.4-4 解答

$$(1) Z^{-1}[X(z)] = Z^{-1}\left[\frac{z}{z-0.4}\right] = 0.4^{t/T} = 0.4^k, k=0,1,2,\dots;$$

$$(2) Z^{-1}[X(z)] = Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right] = Z^{-1}\left[\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}\right] = 2^{t/T} - 1^{t/T} = 2^k - 1^k, k=0,1,$$

$$2, \dots;$$

$$(3) Z^{-1}[X(z)] = Z^{-1}\left[\frac{1}{e^{-T}-e^{-2T}}\left(\frac{z}{z-e^{-T}} - \frac{z}{z-e^{-2T}}\right)\right] = \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{e^{-T}-e^{-2T}};$$

$$(4) Z^{-1}[X(z)] = Z^{-1}\left[\frac{-z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2}\right] = -k-1+2^k;$$

$$(5) R_1 = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{z-1} \cdot z^{n-1} = 1^{n-1}, x(k) = 1(kT-T), k=0,1,2,\dots, \text{即 } x(k) = 0, k=0;$$

$x(k) = 1, k=1,2,3,\dots$

6.4-5 求下列函数所对应脉冲序列的初值和终值。

$$(1) X(z) = \frac{z}{z-e^{-T}};$$

$$(2) X(z) = \frac{z^2}{(z-0.8)(z-0.1)};$$

$$(3) X(z) = \frac{0.2385z^{-1} + 0.2089z^{-2}}{1 - 1.0529z^{-1} + 0.4733z^{-2}};$$

$$(4) X(z) = \frac{10z^{-1}}{(1-z^{-1})^2};$$

6.4-5 解答

$$(1) x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z-e^{-T}} = 1, x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{z-e^{-T}} = 0;$$

$$(2) x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-\frac{0.8}{z})(1-\frac{0.1}{z})} = 1, x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z^2}{(z-0.8)(z-0.1)} = 0;$$

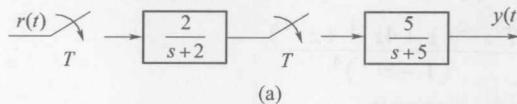
$$(3) x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{0.2385z^{-1} + 0.2089z^{-2}}{1 - 1.0529z^{-1} + 0.4733z^{-2}} = 0,$$

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.2385z^{-1} + 0.2089z^{-2}}{1 - 1.0529z^{-1} + 0.4733z^{-2}} = 0;$$

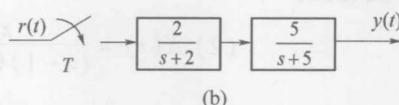
$$(4) x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{10z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = 0,$$

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{10z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{10z}{z-1} = \infty.$$

6.4-6 求图示系统的开环脉冲传递函数。



(a)



(b)

6.4-6 题图

6.4-6 解答

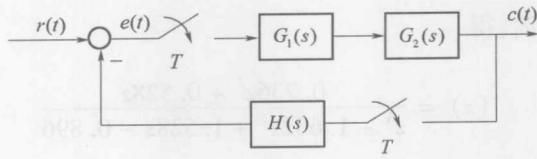
$$(a) G(z) = G_1(z)G_2(z) = Z\left[\frac{2}{s+2}\right] \cdot Z\left[\frac{5}{s+5}\right] = \frac{10z^2}{(z-e^{-2T})(z-e^{-5T})};$$

$$(b) G(z) = G_1G_2(z) = Z\left[\frac{2}{s+2} \cdot \frac{5}{s+5}\right] = Z\left[\frac{10}{3}\left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+5}\right)\right] = \frac{10z(e^{-2T} - e^{-5T})}{3(z-e^{-2T})(z-e^{-5T})}.$$

6.4-7 求图示系统的闭环脉冲传递函数。

6.4-7 解答

$$\begin{cases} C(s) = E^*(s)G_1G_2(s) \\ E(s) = R(s) - C^*(S)H(s) \end{cases}$$



6.4-7 题图

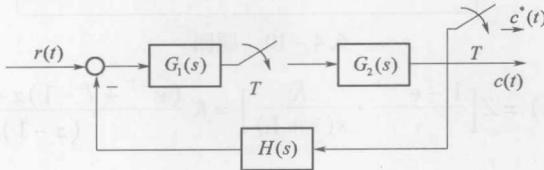
对左式取 Z 变换, 得

$$\begin{cases} C(z) = E(z)G_1G_2(z) \\ E(z) = R(z) - C(z)H(z) \end{cases}$$

整理, 得

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1G_2(z)}{1 + H(z)G_1G_2(z)}$$

6.4-8 求图示系统的输出的 z 变换 $C(z)$ 。



6.4-8 题图

6.4-8 解答 $N(s) = [R(s) - H(s)N^*(s)G_2(s)] \cdot G_1(s)$

对上式取 Z 变换, 得

$$N(z) = RG_1(z) - HG_1G_2(z)N(z)$$

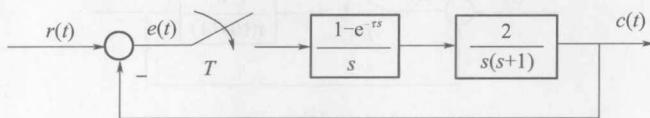
得

$$N(z) = \frac{RG_1(z)}{1 + HG_1G_2(z)}$$

$C(s) = N^*(s) \cdot G_2(s)$, 对左式取 Z 变换, 得

$$C(z) = N(z)G_2(z) = \frac{RG_1(z)G_2(z)}{1 + HG_1G_2(z)}$$

6.4-9 图示系统的采样周期 $T=1s$, 求单位阶跃响应的前 8 个数值。



6.4-9 题图

6.4-9 解答 $G(z) = Z\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{2}{s(s+1)}\right] = \frac{0.736z + 0.528}{z^2 - 1.368z + 0.368}$

$$C(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} \cdot R(z)$$

将 $R(z) = \frac{z}{z-1}$ 带入并化简, 得

$$(z) = \frac{0.736z^2 + 0.528z}{z^3 - 1.632z^2 + 1.528z - 0.896}$$

用长除法, 得

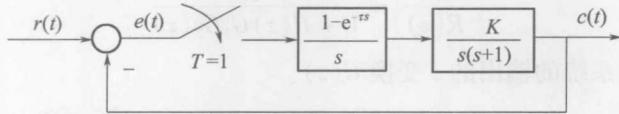
$$C(z) = 0.736z^{-1} + 1.729z^{-2} + 1.697z^{-3} + 0.787z^{-4} + 0.240z^{-5} + 0.710z^{-6} + 1.497z^{-7} + \dots$$

故前 8 个数值为: 0.736 1.729 1.697 0.787 0.240 0.710 1.497。

6.4-10 系统如图所示, 采样周期 $T=1s$ 。

(1) 当 $K=8$ 时闭环系统是否稳定?

(2) 求系统稳定时 K 的临界值。



6.4-10 题图

$$\text{6.4-10 解答 } G(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{K}{s(s+1)}\right] = K \frac{(e^{-T} + T - 1)z + (1 - e^{-T} - Te^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})}$$

将 $T=1$ 代入, 得

$$G(z) = \frac{K(0.368z + 0.264)}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

特征方程 $1 + G(z) = 0$, 则

$$z^2 + (0.368K - 1.368)z + (0.264K + 0.368) = 0$$

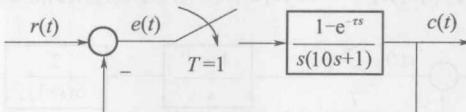
令 $z = \frac{w+1}{w-1}$, 则

$$0.632Kw^2 + (1.264 - 0.528K)w + 2.736 - 0.104K = 0$$

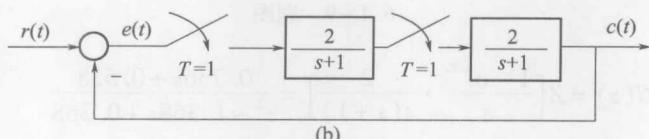
$$\begin{aligned} 0.632K &> 0 \\ 1.264 - 0.528K &> 0 \\ 2.736 - 0.104K &> 0 \end{aligned} \Rightarrow 0 < K < 2.39$$

故 $K=8$ 时, 系统不稳定, 稳定的临界值 $K=2.39$ 。

6.4-11 判断图示系统的稳定性。



(a)



(b)

6.4-11 题图

6.4-11 解答

(a) $T=1$

$$G(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s(10s+1)}\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0.1}\right] = 1 - \frac{z-1}{z-e^{-0.1}}$$

闭环特征方程为 $1+G(z)=0$, 则

$$2z - 2e^{-0.1} - z + 1 = 0 \Rightarrow z = 0.810 < 1$$

故原系统稳定。

(b) $T=1$

$$G(z) = Z\left[\frac{2}{s+1}\right]Z\left[\frac{2}{s+1}\right] = \frac{4z^2}{(z-e^{-1})^2}$$

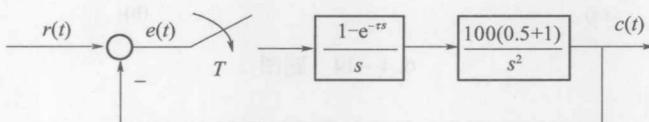
闭环特征方程为 $1+G(z)=0$, 则

$$5e^2 z^2 - 2ez + 1 = 0$$

$$z = \frac{1}{5e} \pm \frac{2}{5e}i \Rightarrow |z| < 1$$

故原系统稳定。

6.4-12 系统如图所示, 采样周期 $T=0.2s$ 。输入信号 $r(t) = 1+t+\frac{1}{2}t^2$ 。求系统稳态误差终值。



6.4-12 题图

6.4-12 解答 由题意, 得

$$G(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{100(0.5s+1)}{s^2} = (1-e^{-Ts}) \left(\frac{100}{s^3} + \frac{50}{s^2}\right)$$

$$G(z) = (1-z^{-1})Z\left[\frac{100}{s^3} + \frac{50}{s^2}\right] = (1-z^{-1})\left[\frac{50T^2z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{50Tz}{(z-1)^2}\right]$$

将 $T=0.2s$ 代入, 得

$$G(z) = \frac{12z-8}{(z-1)^2}$$

闭环特征方程为 $1+G(z)=0$, 则

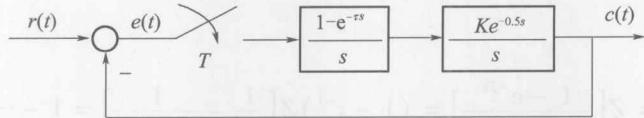
$$z^2 + 10z - 7 = 0 \Rightarrow |z| > 1$$

故原系统不稳定。

6.4-13 系统如图所示, 采样周期 $T=0.25s$ 。当 $r(t)=2+t$ 时, 欲使稳态误差小于 0.1, 求 K 值。

6.4-13 解答 由题意, 得

$$T=0.25s$$



6.4-13 题图

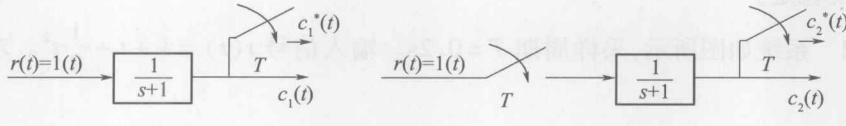
$$G(z) = Z\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{Ke^{-0.5s}}{s}\right] = Kz^{-\frac{1}{2}}(1 - z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2}\right] = \frac{0.25Kz^{-\frac{1}{2}}}{z - 1}$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1 + G(z)] = \infty, e_{ssp} = \frac{2}{K_p} = 0$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{0.25Kz^{-\frac{1}{2}}}{z - 1} = 0.25K, e_{ssv} = \frac{T}{K_v} = \frac{1}{K}$$

当输入为 $r(t) = 2 \cdot 1(t) + t$ 时, $e_{ss} = e_{ssp} + e_{ssv} = \frac{1}{K} < 0.1 \Rightarrow K > 10$ 。

6.4-14 系统如图所示,采样周期 $T = 1s$ 。求单位阶跃响应的 z 变换式,并求初值和终值。



6.4-14 题图

6.4-14 解答

$$(a) C_1(s) = R(s) \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s(s+1)}$$

对左式取 Z 变换,得

$$C_1(z) = Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = Z\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] = \frac{z(1 - e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})}$$

$$C_1(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} C_1(z) = 0$$

$$C_1(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) C_1(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z(1 - e^{-1})}{z - e^{-1}} = 1$$

$$(b) C_2(s) = R^*(s) \frac{1}{s+1}$$

对左式取 Z 变换,得

$$C_2(z) = R(z) Z\left[\frac{1}{s+1}\right] = \frac{z^2}{(z-e^{-1})(z-1)}$$

$$C_2(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} C_2(z) = 1$$

$$C_2(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) C_2(z) = 1.582$$

6.4-15 模拟控制器的传递函数为 $D(s) = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$, 采用双线性变换法和差

分变换法将其化为 z 传递函数。

6.4-15 解答

$$(1) D(z) = \frac{\frac{2\tau_1 + T}{2T_1 + T} - \frac{2\tau_1 - T}{2T_1 + T} z^{-1}}{1 + \frac{2T_1 - T}{2T_1 + T} z^{-1}} \cdot \frac{\frac{2\tau_2 + T}{2T_2 + T} - \frac{2\tau_2 - T}{2T_2 + T} z^{-1}}{1 + \frac{2T_2 - T}{2T_2 + T} z^{-1}};$$

$$(2) D(z) = \frac{\frac{\tau_1 + T}{T_1 + T} - \frac{\tau_1}{T_1 + T} z^{-1}}{1 + \frac{T_1}{T_1 + T} z^{-1}} \cdot \frac{\frac{\tau_2 + T}{T_2 + T} - \frac{\tau_2}{T_2 + T} z^{-1}}{1 + \frac{T_2}{T_2 + T} z^{-1}}.$$

6.4-16 数字控制器的 z 传递函数为

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{0.383(1 - 0.368z^{-1})(1 - 0.587z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.592z^{-1})}$$

写出相应的差分方程,求出单位脉冲响应序列。

6.4-16 解答 化简,得

$$D(z) = \frac{0.383(1 - 0.955z^{-1} + 0.216z^{-2})}{1 - 0.408z^{-1} - 0.592z^{-2}}$$

用长除法,得

$$D(z) = 0.383 - 0.209z^{-1} + 0.224z^{-2} - 0.033z^{-3} + \dots$$

$$u^*(t) = 0.383\delta(t) - 0.209\delta(t-T) + 0.224\delta(t-2T) - 0.033\delta(t-3T) + \dots$$

6.4-17 离散系统的特征方程如下,判断系统的稳定性。

$$(1) 45z^3 - 11z^2 + 119z - 36 = 0; \quad (2) (z+1)(z+0.5)(z+3) = 0;$$

$$(3) 1 + \frac{0.01785(z+0.8760)}{(z-1)(z-0.6703)} = 0.$$

6.4-17 解答

(1) 将 $z = \frac{w+1}{w-1}$ 代入 $D(z) = 0$ 中,整理,得

$$D(w) = 117w^3 + 113w^2 - 81w + 211 = 0$$

列劳斯表为

w^3	117	-81
w^2	113	211
w^1	-299.5	0
w^0	211	

由劳斯判据知,系统不稳定。

(2) 令 $D(z) = 0$,则

$$Z_1 = -1, Z_2 = -0.5, Z_3 = -3$$

$$|Z_1| < 1, |Z_2| < 1, |Z_3| > 1$$

故原系统不稳定。

(3) 令 $D(z) = 0$, 则

$$D(z) = z^2 - 1.65245z + 0.68594 = 0$$
$$Z = 0.8262 \pm 0.0574i, |Z| < 1$$

故原系统稳定。

$$\frac{1}{(z-0.8262)(z+0.8262)} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta}$$
$$A = \frac{1}{2\alpha}, B = \frac{1}{2\beta}$$

$$\frac{(1+0.8262)(1-0.8262)}{(z-0.8262)(z+0.8262)} = \frac{(z+\alpha)(z-\beta)}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

由上式得 $\alpha = -0.8262$, $\beta = 0.8262$, 故 $A = 0.5011$, $B = -0.5011$

$$\frac{(z+0.8262)(z-0.8262)}{(z-0.8262)(z+0.8262)} = \frac{1}{z}$$

$$y(t) = 0.5011e^{-0.8262t} + -0.5011e^{0.8262t} + 0.5011t + -0.5011t$$

$$y(0) = (0.5011)(-0.8262) + (-0.5011)(0.8262) + 0 = 0$$

$$y'(0) = 0.5011(-0.8262) + 0.5011(0.8262) + 0.5011 = 0.5011$$

答 题 31-5.3

$$y(t) = 0.5011t + \frac{1}{2}e^{-0.8262t} + \frac{1}{2}e^{0.8262t}$$

$$y(0) = 0.5011t + 0.5011e^{-0.8262t} + 0.5011e^{0.8262t}$$

答 题 31-5.4

$$18 = 1.21e^{-0.01t} + 1.21$$

$$1.21 = 1.21e^{-0.01t}$$

$$0 = 1.21e^{-0.01t} - 1.21$$

$$1.21 = 1.21e^{-0.01t}$$

答 题 31-5.5 由 $y(0) = 0$, 得 $t = 1.21$

$$t = -\ln(1.21) = -\ln 1.21 = -0.182$$

$$1 < |\Delta|, 1 > |\Delta|, 1 > |\Delta|$$

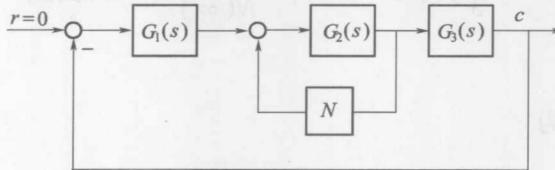
第7章 非线性控制系统分析

7.1 知识点辅导

本章重点是了解非线性系统的特点,理解描述函数的基本概念,掌握常见非线性特性的描述函数求取,熟练运用描述函数法分析非线性系统;难点为非线性系统结构的简化、描述函数法判断非线性系统的稳定性、产生自激振荡的条件及自振参数的求取。

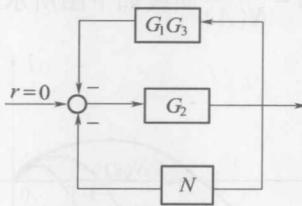
7.2 典型习题及详细解答

7.2-1 试将图示非线性系统简化成一个非线性环节和一个等效线性部分相串联的典型结构,并写出等效线性部分的传递函数 $G(s)$ 。



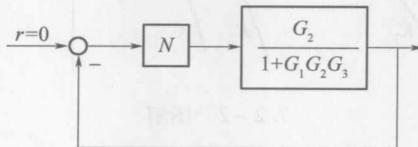
7.2-1 题图

7.2-1 解答 对于图示系统,先将 G_1, G_3 串联后作为 G_2 的反馈通道,可简化成下图结构。



7.2-1 图解 1

G_1G_3 方框与 G_2 方框为反馈连接,合并得到下图所示结构。



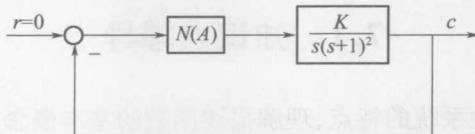
7.2-1 图解 2

则等效线性部分的传递函数 $G(s) = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 G_3}$

7.2-2 已知某非线性系统结构如图所示, 非线性环节描述函数为 $N(A) = \frac{A+6}{A+2} (A > 0)$,

试用描述函数法确定:

- (1) 使该非线性系统稳定、不稳定以及产生周期运动时, 线性部分的 K 值范围。
- (2) 判断周期运动的稳定性, 并计算稳定周期运动的振幅 A 和频率 ω 。



7.2-2 题图 非线性系统

7.2-2 解答

- (1) 非线性环节负倒描述函数为

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{A+2}{A+6} = -1 + \frac{4}{A+6}$$

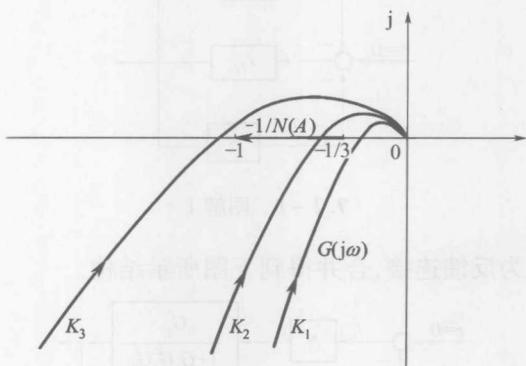
当 $A=0$ 时, $-\frac{1}{N(0)} = -\frac{1}{3}$, 当 $A \rightarrow \infty$ 时, $-\frac{1}{N(\infty)} = -1$, 因此 $-\frac{1}{N(A)}$ 位于负实轴上的 $-\frac{1}{3} \sim -1$ 区段。

线性部分频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)^2}$$

令 $\angle G(j\omega_x) = -90^\circ - 2\arctan\omega_x = -180^\circ$, 得 $\omega_x = 1$, 且 $G(j\omega_x) = -\frac{K}{2}$ 。

在复平面上作出 $G(j\omega)$ 曲线和 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线如下图所示。



7.2-2 图解

当 $0 < \frac{K}{2} < \frac{1}{3}$, 即 $0 < K < \frac{2}{3}$ 时, 系统稳定;

当 $\frac{1}{3} < \frac{K}{2} < 1$, 即 $\frac{2}{3} < K < 2$ 时, 系统产生周期运动;

当 $\frac{K}{2} > 1$, 即 $K > 2$ 时, 系统不稳定。

(2) 当 $-1/N(A)$ 和 $G(j\omega)$ 相交时, 该周期运动是稳定的, 即产生自振。

令

$$N(A)G(j\omega)|_{\omega_x=1} = -1$$

即

$$\frac{A+6}{A+2} \cdot \frac{-K}{2} = \frac{-(A+6)K}{2(A+2)} = -1$$

解得

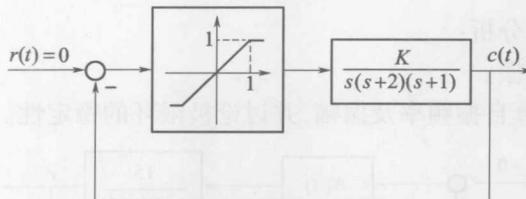
$$A = \frac{6K-4}{2-K}$$

即系统存在自振的振幅 $A = \frac{6K-4}{2-K}$, 频率 $\omega = 1$ 。

7.3 考研试题及详细解答

7.3-1 南京航空航天大学 2006 年《自动控制原理》(16 分)

已知某非线性系统结构如图所示, 试用描述函数法分析 $K(K > 0)$ 值对系统稳定性的影响。



7.3-1 题图 非线性系统结构图

7.3-1 解答 该饱和特性的描述函数为

$$N(A) = \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \frac{1}{A} + \frac{1}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2} \right]$$

负倒描述函数

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi}{2 \left[\arcsin \frac{1}{A} + \frac{1}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2} \right]}$$

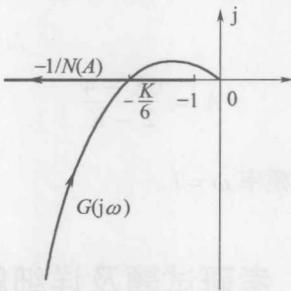
当 $A = 1$ 时, $-\frac{1}{N(A)} = -1$, 当 $A \rightarrow +\infty$ 时, $-\frac{1}{N(\infty)} \rightarrow -\infty$, 因此 $-\frac{1}{N(A)}$ 位于负实轴上的 $-1 \sim -\infty$ 区段。

线性部分频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

令 $\text{Im}G(j\omega)=0$, 得 $G(j\omega)$ 与负实轴交点的频率为 $\omega_x=\sqrt{2}$, 且 $G(j\omega_x)=-\frac{K}{6}$ 。

在复平面上绘制 $G(j\omega)$ 曲线以及 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线如下图所示。由图可见, 当 $0 < \frac{K}{6} < 1$ 时, 即 $0 < K < 6$ 系统稳定; 当 $\frac{K}{6} > 1$ 时, 即 $K > 6$ 系统产生自振。自振频率 $\omega=\sqrt{2}$, 振幅 A 由 $|N(A)G(j\omega)|_{\omega_x=\sqrt{2}}=1$ 求得。

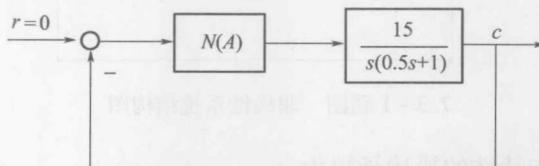


7.3-1 图解

7.3-2 浙江大学 2008 年《自动控制原理》(20 分)

某单位负反馈非线性系统如图所示, 非线性环节的描述函数为 $N(A) = \frac{1}{A} e^{-\frac{j\pi}{3}}$, 线性部分的传递函数如图所示。试分析:

- (1) 系统是否存在自振。
- (2) 若产生自振, 计算自振频率及振幅, 并讨论极限环的稳定性。



7.3-2 题图 非线性系统结构图

7.3-2 解答 非线性环节负倒描述函数为

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{A}{e^{-\frac{j\pi}{3}}} = Ae^{-\frac{2\pi}{3}}$$

线性部分频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{15}{j\omega(j0.5\omega+1)}$$

且

$$|G(j\omega)| = \frac{15}{\omega\sqrt{1+(0.5\omega)^2}}, \angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan 0.5\omega$$

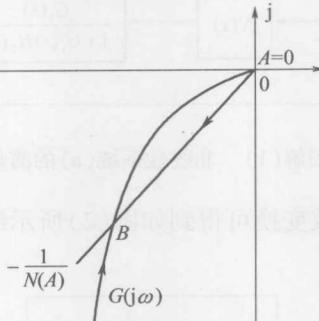
在复平面上绘制 $G(j\omega)$ 曲线以及 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线如下图所示, 相交于 B 点, 有

$$\frac{15}{\omega \sqrt{1 + (0.5\omega)^2}} = A, -90^\circ - \arctan 0.5\omega = -120^\circ$$

解得

$$\omega = 1.155, A = 11.246$$

即系统存在自振的频率为 1.155, 振幅为 11.246。



7.3-2 图解

7.4 课后练习题及详细解答

7.4-1 已知三个非线性系统的非线性环节一样, 线性部分分别为

$$(1) G(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)};$$

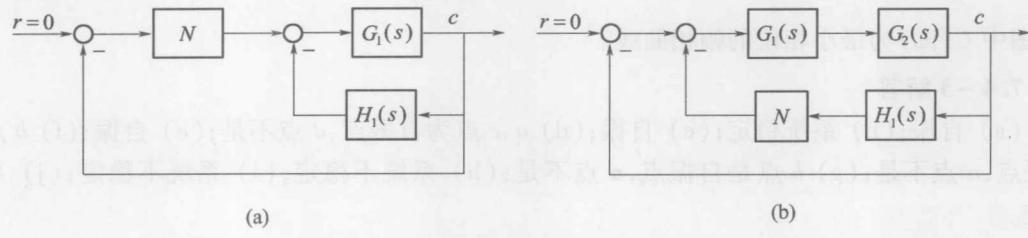
$$(2) G(s) = \frac{2}{s(s+1)};$$

$$(3) G(s) = \frac{2(1.5s+1)}{s(s+1)(0.1s+1)}.$$

试问: 用描述函数法分析时, 哪个系统分析的准确度高?

7.4-1 解答 线性部分低通滤波特性越好, 描述函数法分析结果的准确程度越高。由于系统(2)对数幅频特性曲线高频段衰减较快, 低通滤波特性较好, 所以用描述函数法分析结果的准确程度较高。

7.4-2 将图示非线性系统简化成环节串联的典型结构图形式, 并写出等效线性部分的传递函数 $G(s)$ 。



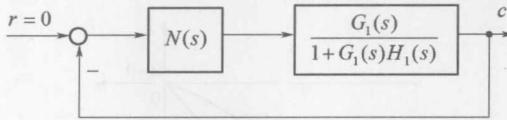
7.4-2 题图

7.4-2 解答

(1) 系统结构图(a)经过等效变换可简化为图(1)所示结构。

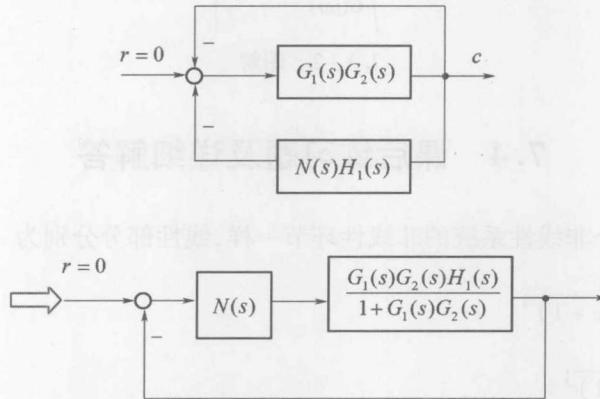
则线性部分的传递函数为

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)H_1(s)}$$



7.4-2 图解(1) 非线性系统(a)的简化结构图

(2) 系统结构图(b)经过等效变换可得到如图(2)所示结构。



7.4-2 图解(2) 非线性系统(b)的简化结构图

线性部分的传递函数为

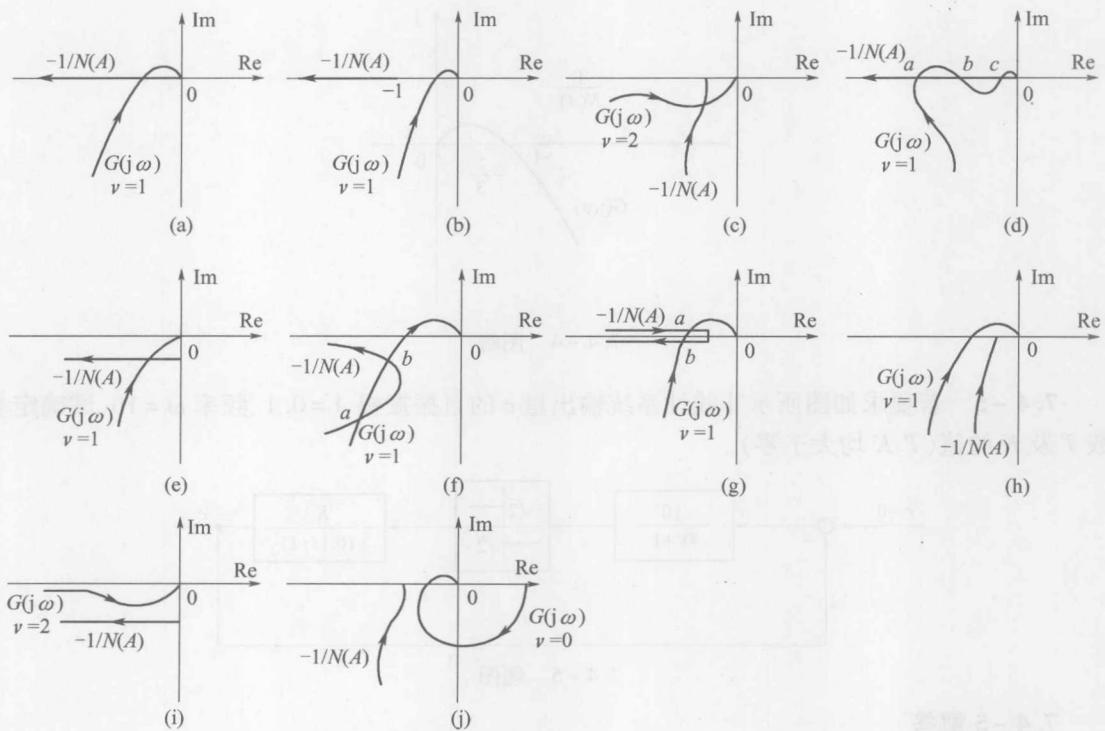
$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}H_1(s)$$

7.4-3 判断图中各非线性系统是否稳定, $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线与 $G(j\omega)$ 曲线的交点是否为自振点, 图中 $G(j\omega)$ 为最小相位的幅相曲线。

7.4-3 解答

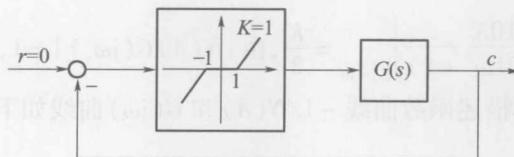
(a) 自振; (b) 系统稳定; (c) 自振; (d) a、c 点为自振点, d 点不是; (e) 自振; (f) b 点是自振点, a 点不是; (g) b 点是自振点, a 点不是; (h) 系统不稳定; (i) 系统不稳定; (j) 系统稳定。

7.4-4 已知某非线性系统如图所示, 其中 $G(s) = \frac{20}{s(s+2)(s+3)}$, 要求:



7.4-3 题图

- (1) 试用描述函数法分析系统是否存在自激振荡；
- (2) 若 K 可变，试求系统临界稳定时的 K 值。



7.4-4 题图

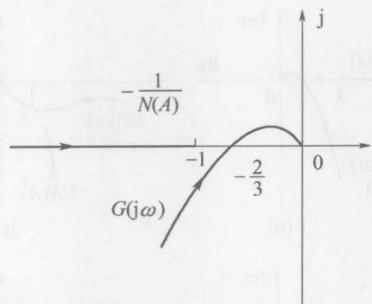
7.4-4 解答

(1) 由题意可知

$$N(A) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{A} - \frac{1}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{A} \right)^2} \right]$$

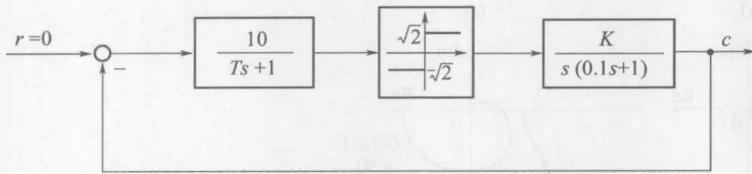
当 $A = 1$ 时, $-1/N(A) \rightarrow -\infty$, 当 $A \rightarrow \infty$, $-1/N(A) \rightarrow -1$, 故负倒描述函数曲线为实轴上 $(-\infty, -1)$ 。由 $\text{Im}[G(j\omega)]|_{\omega=\omega_x} = 0$, 得 $\omega_x = \sqrt{6}$, $|G(j\omega_x)| = \frac{2}{3}$ 。在复平面上画出负倒描述函数曲线 $-1/N(A)$ 和 $G(j\omega)$ 曲线如下图所示, 系统不存在自振。

(2) 临界稳定时, $\frac{1}{K} = \frac{2}{3}$, 得 $K = 1.5$ 。



7.4-4 图解

7.4-5 若要求如图所示非线性系统输出量 c 的自振振幅 $A = 0.1$ 、频率 $\omega = 10$, 试确定参数 T 及 K 的值 (T, K 均大于零)。



7.4-5 题图

7.4-5 解答

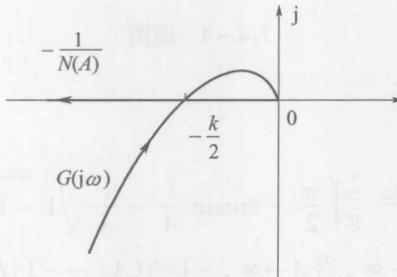
由题意可知

$$N(A) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi A}, \quad -\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi}{4\sqrt{2}}A, \quad G(s) = \frac{10K}{s(0.1s+1)(Ts+1)}$$

令 $\angle G(j\omega_x) = -\frac{\pi}{2} - \arctan 0.1\omega_x - \arctan T\omega_x = -\pi$, 得 $T\omega_x^2 = 10$ 。由 $\omega_x = 10$, 得 $T = 0.1$ 。

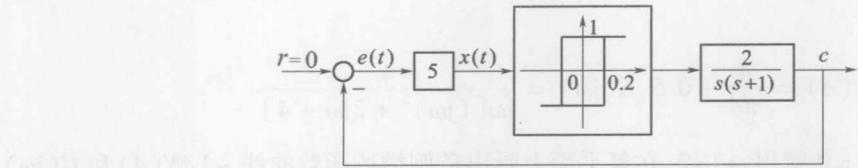
$$|G(j\omega)|_{\omega=10} = \left. \frac{10K}{\omega(0.01\omega^2 + 1)} \right|_{\omega_x=10} = \frac{K}{2}, \text{ 由 } |N(A)G(j\omega_x)| = 1, \text{ 且 } A = 0.1, \text{ 得 } K = 0.11.$$

在复平面上画出负倒描述函数曲线 $-1/N(A)$ 和 $G(j\omega)$ 曲线如下图所示。



7.4-5 图解

7.4-6 已知某非线性系统如图所示, 试用描述函数法分析周期运动的稳定性, 并确定系统输出信号振荡的振幅和频率。



7.4-6 题图

7.4-6 解答

由题意可知

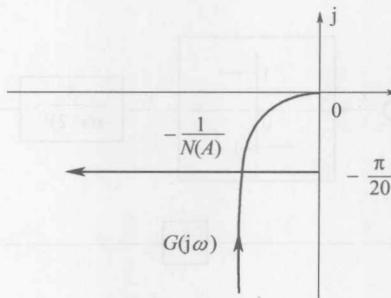
$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega + 1)} = -\frac{10}{\omega(\omega^2 + 1)} - j\frac{10}{\omega(\omega^2 + 1)}$$

$$N(A) = \frac{4}{\pi A} \sqrt{1 - (\frac{0.2}{A})^2} - j\frac{0.8}{\pi A^2}$$

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{0.2}{A})^2} - j\frac{0.2}{A}} = -\frac{\pi A}{4} \sqrt{1 - (\frac{0.2}{A})^2} - j\frac{\pi}{20}$$

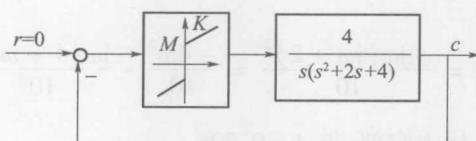
由 $\text{Im}[G(j\omega)]|_{\omega_x} = -\frac{\pi}{20}$ 解得 $\omega_x = 3.91$ 。在复平面上画出负倒描述函数曲线 $-1/N(A)$ 和 $G(j\omega)$ 曲线如下图所示。

由 $|N(A)G(j\omega_x)| = 1$ 解得 $A = 0.806$ 。由题图知, 当 $r(t) = 0$ 时, $c(t) = -e(t) = -\frac{1}{5}x(t)$, 所以 $c(t)$ 的振幅为 $\frac{0.806}{5} = 0.161$, 自振频率为 3.91。



7.4-6 图解

7.4-7 已知某非线性系统如图所示, 非线性元件的描述函数 $N(A) = \frac{4M}{\pi A} + K$, 其中 $M = 1$, $K = 0.5$ 。试分析系统周期运动的稳定性, 并求出稳定周期运动的振幅 A 和频率 ω 以及输出 $c(t)$ 的表达式。



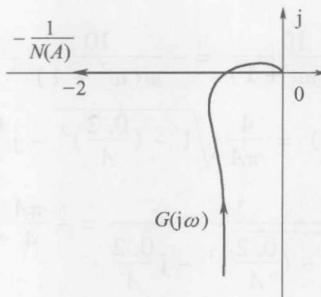
7.4-7 题图

7.4-7 解答

由题意,知

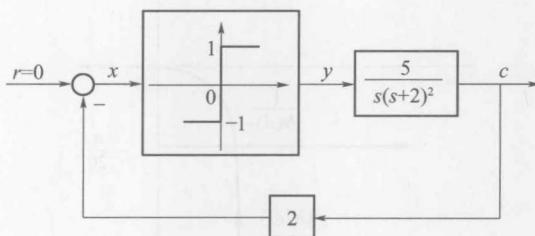
$$N(A) = \frac{4}{\pi A} + 0.5, G(j\omega) = \frac{4}{j\omega[(j\omega)^2 + 2j\omega + 4]}$$

由 $\text{Im}[G(j\omega_x)]|_{\omega_x=0}=0$ 解得 $\omega_x=2$, 在复平面上画出负倒描述函数曲线 $-1/N(A)$ 和 $G(j\omega)$ 曲线如图所示。在交点处系统产生自振, 由 $|N(A)G(j\omega_x)|=1$, 得 $A=0.85$, $c(t)=-0.85\sin 2t$ 。



7.4-7 图解

7.4-8 试用描述函数法说明如图所示系统必然存在自振, 并确定输出信号 c 的自振振幅和频率, 分别画出信号 x, c, y 的稳态波形。



7.4-8 题图

$$7.4-8 \text{ 解答 } N(A) = \frac{4}{\pi A}, -\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4}, G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+2)^2}$$

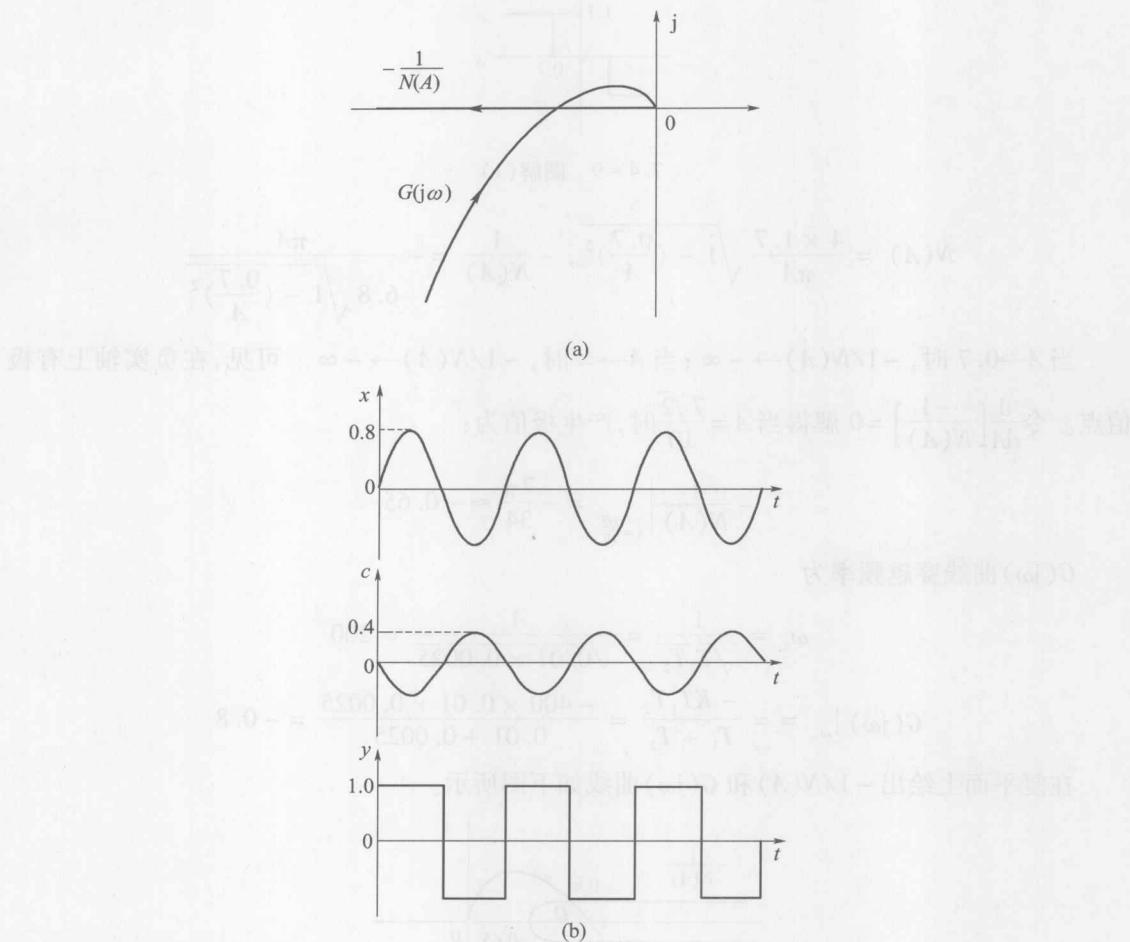
在复平面上绘出 $-1/N(A)$ 和 $G(j\omega)$ 曲线如图(a)所示, 可见在交点产生自振。由自振条件 $N(A) = -\frac{1}{G(j\omega)}$ 可得

$$\frac{4}{\pi A} = \frac{-j\omega(j\omega+2)^2}{10} = \frac{-4\omega^2}{10} - \frac{j\omega(4-\omega^2)}{10}$$

令虚部为零解出 $\omega=2$, 代入实部, 得 $A=0.796$ 。

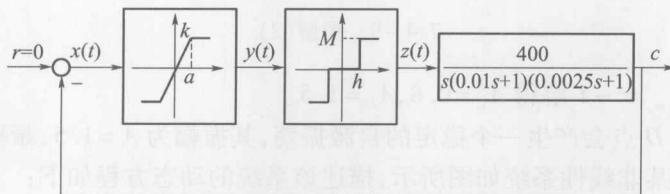
输出信号的自振幅值为 $A_c=A/2=0.398$ 。

画出 x, c, y 点的信号波形如图(b)所示。



7.4-8 图解

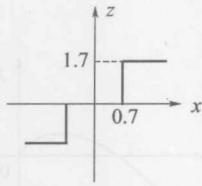
7.4-9 已知非线性系统结构图如图所示, 其中饱和特性参数 $a = 1, k = 2$, 带死区的继电特性参数为 $M = 1.7, h = 1.4$ 。试用描述函数法分析系统是否存在自振。若存在, 求出自振振幅和频率。



7.4-9 题图

7.4-9 解答

两个非线性环节串联, 根据所给参数作出等效的非线性环节如下图所示:



7.4-9 图解(1)

$$N(A) = \frac{4 \times 1.7}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{0.7}{A}\right)^2}, \quad -\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{6.8 \sqrt{1 - \left(\frac{0.7}{A}\right)^2}}$$

当 $A \rightarrow 0.7$ 时, $-1/N(A) \rightarrow -\infty$; 当 $A \rightarrow \infty$ 时, $-1/N(A) \rightarrow -\infty$ 。可见, 在负实轴上有极值点。令 $\frac{d}{dA} \left[\frac{-1}{N(A)} \right] = 0$ 解得当 $A = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ 时, 产生极值为:

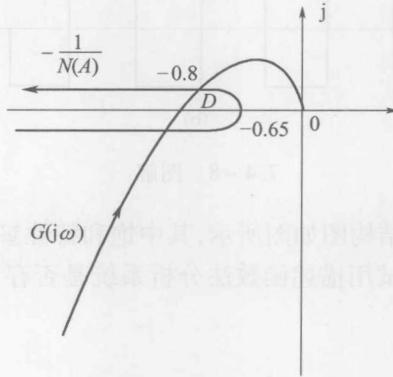
$$-\frac{1}{N(A)} \Big|_{A=\frac{7\sqrt{2}}{10}} = -\frac{7\pi}{34} \approx -0.65$$

$G(j\omega)$ 曲线穿越频率为

$$\omega_x = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{\sqrt{0.01 \times 0.0025}} = 200$$

$$G(j\omega) \Big|_{\omega_x} = \frac{-K T_1 T_2}{T_1 + T_2} = \frac{-400 \times 0.01 \times 0.0025}{0.01 + 0.0025} = -0.8$$

在复平面上绘出 $-1/N(A)$ 和 $G(j\omega)$ 曲线如下图所示。



7.4-9 图解(2)

由 $G(j\omega) N(A) \Big|_{\omega_x} = -1$ 解得 $A_1 = 0.8, A_2 = 1.5$ 。

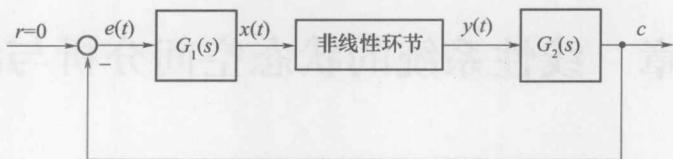
经分析, 系统在 D 点会产生一个稳定的自激振荡, 其振幅为 $A = 1.5$, 频率为 $\omega = 200$ 。

7.4-10 已知某非线性系统如图所示, 描述该系统的动态方程如下:

$$e(t) = r(t) - c(t); \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = e(t); y(t) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases};$$

$$\frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 4 \frac{dc(t)}{dt} = ky(t) \quad (k > 0)$$

- (1) 试求 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$, 画出非线性环节的输入输出特性关系曲线;
(2) 用描述函数法分析系统的稳定性, 若存在自振求出自振振幅和频率。



7.4-10 题图

7.4-10 解答

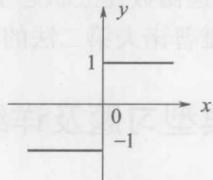
(1) 由系统动态方程, 得

$$\begin{aligned}sX(s) + X(s) &= E(s) \\ s^2C(s) + 4sC(s) &= kY(s)\end{aligned}$$

所以

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{s+1}, G_2(s) = \frac{C(s)}{Y(s)} = \frac{k}{s(s+4)}$$

非线性环节的输入输出特性曲线如图(1)所示。

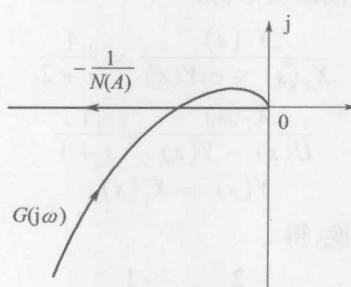


7.4-10 图解(1)

$$(2) N(A) = \frac{4}{\pi A}, G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+4)}$$

令 $\angle G(j\omega_x) = -\frac{\pi}{2} - \arctan \omega_x - \arctan 0$. $25\omega_x = -\pi$, 得 $\omega_x = 2$ 。在复平面上绘出 $-1/N(A)$ 和 $G(j\omega)$ 曲线如图(2)所示, 可见系统在交点存在自振。

由自振条件 $N(A)G(j\omega)|_{\omega_x} = -1$, 解得 $A = \frac{k}{5\pi}$, 频率为 $\omega = 2$ 。



7.4-10 图解(2)

第8章 线性系统的状态空间分析与综合

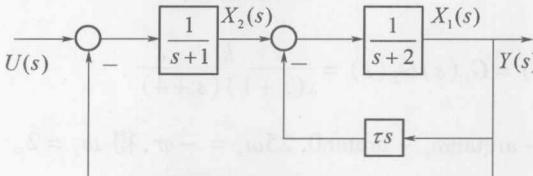
8.1 知识点辅导

本章内容较多,重点掌握以下知识点:控制系统的状态空间表达式及其建立;状态矢量的线性变换;从状态空间表达式求传递函数阵;线性定常齐次状态方程的解;状态转移矩阵求法;线性定常非齐次方程的解;线性定常连续系统的能控性和能观性的定义及其判别方法;能控性与能观性对偶关系;系统的能控标准型和能观标准型;线性系统的结构分解;传递函数中零极点对消与状态能控性和能观性之间的关系;由能控性阵判别系统能控性;由能观性阵判别系统能观性;李雅普诺夫关于稳定性定义;李雅普诺夫第二法及其在线性系统和非线性系统中的应用;线性反馈控制系统的基本结构;极点配置问题;用状态观测器实现状态反馈;状态观测器数学模型的建立。

同时注意理解以下几个难点:由传递函数建立状态空间表达式;应用哈密顿定理求状态转移矩阵;稳定性与李雅普诺夫方法;李雅普诺夫第二法的物理意义及其稳定性判据;分离原理。

8.2 典型习题及详细解答

8.2-1 求如图所示系统的状态空间表达式。



8.2-1 题图

8.2-1 解答 由图中信号之间的关系,得

$$\begin{aligned}\frac{X_1(s)}{X_2(s) - \tau s Y(s)} &= \frac{1}{s + 2} \\ \frac{X_2(s)}{U(s) - Y(s)} &= \frac{1}{s + 1} \\ Y(s) &= X_1(s)\end{aligned}$$

整理上式并取拉普拉斯反变换,得

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{-2}{1 + \tau} x_1 + \frac{1}{1 + \tau} x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

写出矢量矩阵形式,有

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1+\tau & 1+\tau \\ -1 & -1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y &= [1 \quad 0]x\end{aligned}$$

8.2-2 已知系统状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}u \\ y &= [0 \quad 3]x\end{aligned}$$

计算当 $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u(t) = 1$ 时状态方程的解 $x(t)$, $y(t)$ 。

8.2-2 解答 由 $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$, 得

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - 2e^{-t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - 2e^{-t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-\tau} - e^{-2\tau} & 2e^{-2\tau} - 2e^{-\tau} \\ e^{-\tau} - e^{-2\tau} & 2e^{-2\tau} - e^{-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \times 1 d\tau \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4e^{-t} + e^{-2t} + 3 \\ -2e^{-t} + e^{-2t} + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4e^{-t} + 2e^{-2t} + 3 \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} + 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$y(t) = Cx(t) = [0 \quad 3] \begin{bmatrix} -4e^{-t} + 2e^{-2t} + 3 \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} + 1 \end{bmatrix} = -6e^{-t} + 6e^{-2t} + 3$$

8.2-3 已知系统状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ y &= [1 \quad 2]x\end{aligned}$$

将方程转化为对角标准型,并计算系统的传递函数。

8.2-3 解答 由 $|\lambda I - A| = 0$, 可得系统的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$, 求特征根对应的特征矢量:

$$(\lambda_1 I - A)p_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}p_1 = 0 \Rightarrow p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_2 I - A)p_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

构造非奇异线性变换矩阵 P

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对系统进行变换 $\bar{x} = P\bar{x}$, 可得对角标准型方程各系数矩阵为

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CP = [1 \quad 0]$$

因此, 原系统对角标准型为

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0] \bar{x}\end{aligned}$$

系统的传递函数矩阵为

$$\begin{aligned}G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s+2 & \\ & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+2}\end{aligned}$$

8.2-4 已知系统的状态表达式为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ y &= [1 \quad 1 \quad 1] x\end{aligned}$$

判断系统的能控性, 并进行能控性结构分解。

8.2-4 解答 系统为约当标准型, 由对角标准型判据, 判断得系统不能控, 因此系统可进行能控性结构分解。

系统的能控型矩阵为

$$Q_c = [B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{取 } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } P = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

对系统进行变换 $x = P^{-1}\bar{x}$, 可得变换后各系数矩阵为

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 12 & 6 & 3 \\ -1 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = PB = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CP^{-1} = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = [2 \ -1 \ 1]$$

则

$$\dot{x}_c = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} x_c + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{x}_c = 2x_c$$

$$y = [2 \ -1] x_c + x_c$$

8.2-5 已知系统的状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (a \text{ 为实数})$$

试用李雅普诺夫第二方法判断系统的稳定性。

8.2-5 解答 易知系统的平衡点为原点。由已知条件得,不考虑 u 对系统的影响,则

$$\dot{x}_1 = -ax_1 - x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

选取李雅普诺夫函数为 $V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0, \forall x \neq 0$

则

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1(-ax_1 - x_2) + 2x_2x_1 \\ &= -2ax_1^2 \end{aligned}$$

只有当 $x_1 \equiv 0, x_2$ 任意时, $\dot{V}(x) \equiv 0$ 。检验当 $x_1 \equiv 0$ 时, $\dot{x}_1 = -ax_1 - x_2 \equiv 0 \Rightarrow x_2 \equiv 0$, 因此只有原点才为系统的解。因此, $\dot{V}(x) \not\equiv 0$ 。

因此,系统的稳定性如下:

$$\begin{cases} a > 0, \dot{V} < 0, \text{ 系统渐进稳定} \\ a = 0, \dot{V} = 0, \text{ 系统一致稳定} \\ a < 0, \dot{V} > 0, \text{ 系统不稳定} \end{cases}$$

8.2-6 已知系统的动态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 1] x$$

(1) 判断系统是否能采用状态反馈进行任意极点配置,若有可能,设计状态反馈,使系统

的两个闭环极点为 $-4 \pm j6$;

(2) 判断系统状态是否采用状态观测器给出估计值,若有可能,设计两个极点均位于 -10 处的状态观测器。

8.2-6 解答

(1) 计算系统能控性矩阵

$$Q_C = [B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, 因为 $\text{rank } Q_C = 2$, 因此系统完全可控, 从而系统可设计状态反馈控制器进行任意极点配置。

设控制器参数阵为 $K = [k_1 \ k_2]$, 则

$$\begin{aligned} A - BK &= \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \\ f(\lambda) &= \lambda^2 + (6 + k_1)\lambda + 6k_1 + k_2 \\ f^*(\lambda) &= \lambda^2 + 8\lambda + 52 \end{aligned}$$

对比上述方程系统, 可得如下等式:

$$\begin{aligned} 6 + k_1 &= 8 \\ 6k_1 + k_2 &= 52 \end{aligned}$$

求解得: $K = [k_1 \ k_2] = [2 \ 40]$

(2) 计算系统能观性矩阵

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix},$$

因为 $\text{rank } Q_o = 2$, 因此系统完全可观, 从而可设计状态观测控制器估计系统状态量。

设观测器参数阵为 $H = [h_1 \ h_2]^T$, 则

$$A - HC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -h_1 \\ 1 & -6 - h_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^2 + (6 + h_2)\lambda + h_1 \\ f^*(\lambda) &= (\lambda + 10)^2 = \lambda^2 + 20\lambda + 100 \end{aligned}$$

对比上述方程系统, 可得如下等式:

$$\begin{aligned} 6 + h_2 &= 20 \\ h_1 &= 100 \end{aligned}$$

可求得 $H = \begin{bmatrix} 100 \\ 14 \end{bmatrix}$

8.3 考研试题及详细解答

8.3-1 浙江大学 2002 年《自动控制原理》(15 分)

对于如下的状态空间表达式,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0]x$$

已知系统的特征值分别为 $\lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 2$, 试确定参数 a, b , 并将其化为约当规范型。

8.3-1 解答 因为 A 为友矩阵, 因此

$$\det(sI - A) = s^3 - bs - a$$

欲使系统的特征值为 $-1, -1, 2$, 有

$$s^3 - bs - a = (s + 1)^2(s - 2) = s^3 - 3s - 2h$$

对比以上两式系数, 可得 $a = 2, b = 3$

因此, 原系统模型的系数矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0]$$

又因为对于系统的重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$,

$$\text{rank}(\lambda_1 I - A) = \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

因此, 重根对应的约当块为 $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

因为 A 为友矩阵, 所以化 A 为约当矩阵的线性变换阵可取为范德蒙阵的另一形式, 即

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & -2 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{因此, } \bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \bar{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} \end{bmatrix}, \bar{C} = CP = [1 \ 0 \ 1]$$

8.3-2 哈尔滨工业大学 2003 年《自动控制原理》(15 分)

设线性系统的状态转移矩阵为

$$\phi_1(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \text{ 和 } \phi_2(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

试问

(1) 两式中哪一个可能成为系统的状态转移矩阵? 为什么?

(2) 根据选定的状态转移矩阵, 确定系统矩阵 A 。

8.3-2 解答

(1) 由已知条件得

$\phi_1(t)|_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为单位矩阵, 而 $\phi_2(t)|_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 不是单位矩阵。

根据状态转移矩阵性质: $\phi(0) = I$

据此可知, $\phi_1(t)$ 可能为系统的状态转移矩阵。

(2) 根据状态转移矩阵性质可得

$$A = \dot{\phi}(t)|_{(t=0)} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 4e^{-2t} & e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix}|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

8.3-3 北京航空航天大学 2004 年《自动控制原理》(15 分)

已知系统的状态方程如下

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u, y = [1 \ 1]x$$

在输入 $u(t) = e^{\lambda t}$ 的作用下, 如何选取 λ 和初始状态 $x(0)$ 可使系统 $y(t)$ 的输出恒为零。

8.3-3 解答 由 A 可以计算状态转移矩阵为

$$\phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

设 $x(0) = [x_{10} \ x_{20}]^T$, 则系统状态方程的解为

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}x(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda\tau} d\tau = \begin{bmatrix} (x_{10} - \frac{1}{1+\lambda})e^{-t} + \frac{1}{1+\lambda}e^{\lambda t} \\ (x_{20} - \frac{1}{2+\lambda})e^{-2t} + \frac{1}{2+\lambda}e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

则系统输出为

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$= (\frac{1}{1+\lambda} + \frac{1}{2+\lambda})e^{\lambda t} + (x_{10} - \frac{1}{1+\lambda})e^{-t} + (x_{20} - \frac{1}{2+\lambda})e^{-2t}$$

欲使系统输出恒为零, 应有

$$\begin{cases} \frac{1}{1+\lambda} + \frac{1}{2+\lambda} = 0 \\ x_{10} - \frac{1}{1+\lambda} = 0 \\ x_{20} - \frac{1}{2+\lambda} = 0 \end{cases}$$

$$\text{解之得} \begin{cases} \lambda = -1.5 \\ x_{10} = -2 \\ x_{20} = 2 \end{cases}$$

8.3-4 北京航空航天大学 2004 年《自动控制原理》(15 分)

系统动态方程如下

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u, y = [0 \ a \ 1]x$$

其中 a 是实常量参数, 问:

- (1) 判断系统是否渐进稳定? 为什么?
- (2) 参数 a 取何值时系统 BIBO 稳定? 为什么?

8.3-4 解答

$$(1) \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$$

因为有特征值在右半平面, 因此系统不是渐进稳定的。

(2) 系统传递函数为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{(s+1)(s+a)}{(s+1)^2(s-1)}$$

当 $a = -1$ 时, $G(s) = \frac{1}{s+1}$, 此时系统 BIBO 稳定。

8.3-5 东南大学 2004 年《自动控制原理》(18 分)

已知系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & & & & & & \\ & -3 & & & & & & \\ & & -4 & 1 & & & & \\ & & & -4 & & & & \\ & & & & -1 & 1 & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & -5 & 1 \\ & & & & & & & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 6 \\ 0 & 0 \\ 9 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} x$$

试求系统的传递函数矩阵。

8.3-5 解答 由约当对角型判据可知: x_4, x_6, x_8 不可控; x_3, x_5, x_6 不可观, 因此可控且可观测的子系统由 x_1, x_2, x_7 构成, 系统参数矩阵为

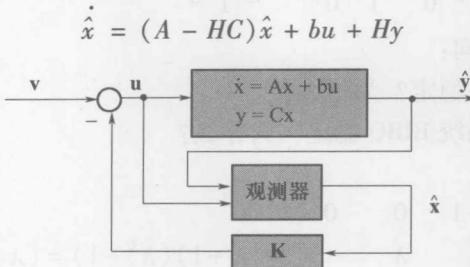
$$A_{co} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, B_{co} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}, C_{co} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

故系统的传递函数矩阵为

$$G(s) = C_{co}(sI - A_{co})^{-1}B_{co} = \begin{bmatrix} \frac{27}{s+5} & \frac{1}{s+3} + \frac{6}{s+5} \\ \frac{1}{s+3} + \frac{63}{s+5} & \frac{1}{(s+3)^2} + \frac{14}{s+5} \end{bmatrix}$$

8.3-6 北京航空航天大学 2003 年《自动控制原理》(15 分)

图示系统由观测器和状态反馈组合而成的闭环系统, 其中观测器的方程为



8.3-6 题图

试建立闭环系统的动态方程式, 并求出闭环系统的传递函数 $Y(s)/U(s)$ 。

8.3-6 解答 由已知条件得

$$\begin{cases} u = v - K\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = Ax + bu \\ y = Cx \\ \dot{x} = (A - HC)\hat{x} + bu + Hy \end{cases}$$

则

$$\dot{x} = Ax + bv - bK\hat{x}$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - HC)\hat{x} + b(v - K\hat{x}) + HCx = (A - HC - bK)\hat{x} + bv + HCx$$

故闭环系统的动态方程为

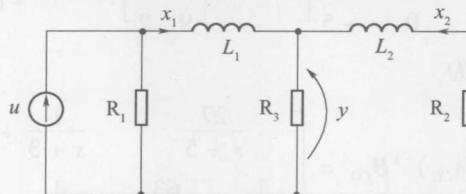
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -bK \\ HC & A - HC - bK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} v \quad y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

由于观测器不改变系统的输入输出关系, 故闭环系统的传递函数与只含状态反馈的系统传递函数相同:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C[sI - (A - bK)]^{-1}b$$

8.4 课后练习题及详细解答

8.4-1 试求图示的电网络中, 以电感 L_1, L_2 上的支电流 x_1, x_2 作为状态变量的状态空间表达式。这里 u 是恒流源的电流值, 输出 y 是 R_3 上的支路电压。



8.4-1 题图

8.4-1 解答

由已知条件, 得

$$\begin{cases} R_1(u - x_1) = L_1 \dot{x}_1 + R_3(x_1 + x_2) \\ R_3(x_1 + x_2) + L_2 \dot{x}_2 + R_2 x_2 = 0 \\ y = R_3(x_1 + x_2) \end{cases}$$

整理, 得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R_1 + R_3}{L_1}x_1 - \frac{R_3}{L_1}x_2 + \frac{R_1}{L_1}u \\ \dot{x}_2 = -\frac{R_3}{L_2}x_1 - \frac{R_2 + R_3}{L_2}x_2 \end{cases}$$

状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{R_1 + R_3}{L_1} & -\frac{R_3}{L_1} \\ -\frac{R_3}{L_2} & -\frac{R_2 + R_3}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{R_1}{L_1} \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (R_3 \quad R_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8.4-2 已知系统的微分方程

$$(1) \ddot{y} + 2\ddot{y} - 3\dot{y} + 6y = u;$$

$$(2) 2\ddot{y} + 3\dot{y} = \ddot{u} - u.$$

试列出它们的状态空间表达式。

8.4-2 解答

(1) 选择状态变量 $y = x_1, \dot{y} = x_2, \ddot{y} = x_3$, 则有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) 由微分方程可以得到系统的传递函数为

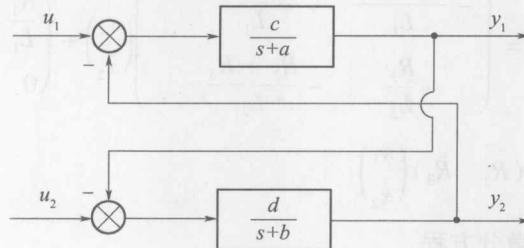
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 - 1}{2s^3 + 3s^2} = \frac{\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}}{s^3 + \frac{3}{2}s^2}$$

则系统的状态空间方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

8.4-3 列写图示系统的状态空间表达式。



8.4-3 题图

8.4-3 解答

选取状态量 $x_1 = y_1, x_2 = y_2$, 则有

$$x_1 = \frac{c}{s+a}(u_1 - x_2) \longrightarrow sx_1 = -ax_1 - cx_2 + cu_1$$

$$x_2 = \frac{d}{s+b}(u_2 - x_1) \longrightarrow sx_2 = -dx_1 - bx_2 + du_2$$

作拉普拉斯反变换, 则

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 - cx_2 + cu_1 \\ \dot{x}_2 = -dx_1 - bx_2 + du_2 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

系统的状态空间表达式为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -c \\ -d & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

8.4-4 设系统微分方程为

$$\ddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$$

试列写可控标准型和可观标准型表达式，并画出状态变量结构图。

8.4-4 解答 由微分方程可以得到系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

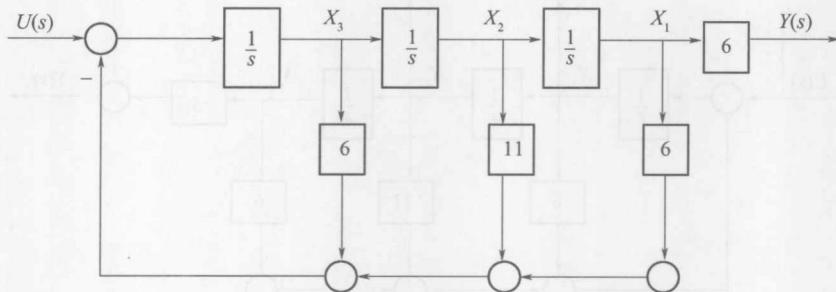
可控标准型为

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}, b_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_c = (6 \quad 0 \quad 0)$$

可观标准型为

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}, b_o = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_o = (0 \quad 0 \quad 1)$$

状态变量结构图如下：



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + u \end{cases}$$

8.4-5 已知下列传递函数，试用直接分解法建立其状态空间表达式，并画出状态变量图。

$$(1) G(s) = \frac{s^3 + s + 1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}; (2) G(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 2s^2 + 3s + 1}.$$

8.4-5 解答

(1) 传递函数为

$$G(s) = 1 + \frac{-6s^2 - 10s - 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

系统的能控标准型状态方程为

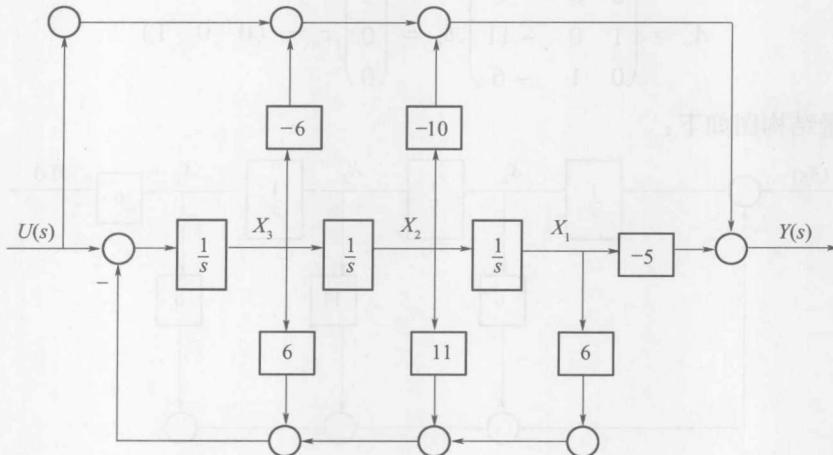
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (-5 \quad -10 \quad -6) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + u$$

则

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + u \\ y = -5x_1 - 10x_2 - 6x_3 + u \end{cases}$$

状态变量图如下：



(2) 系统的能控标准型状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (3 \quad 2 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

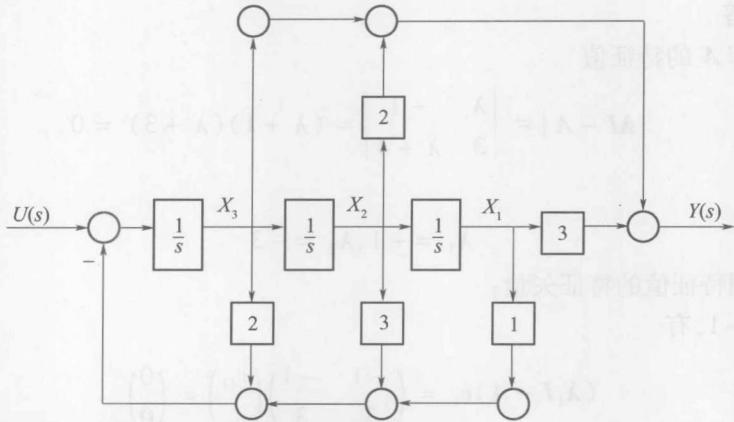
则

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 - 2x_3 + u \\ y = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \end{cases}$$

状态变量图如下：

8.4-6 已知系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3}$$



试求可控标准型、可观标准型、对角线型动态方程。

8.4-6 解答 传递函数为

$$G(s) = 1 + \frac{2s+5}{s^2+4s+3} = 1 + \frac{3}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s+3)}$$

可控标准型为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (5 \quad 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u$$

可观标准型为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

$$y = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u$$

取状态变量

$$x_1 = \frac{1}{s+1} u, x_2 = \frac{1}{s+3} u$$

对角型动态方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u$$

8.4-7 试将下列状态方程化为对角标准型。

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$(2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

8.4-7 解答

(1) 求矩阵 A 的特征值

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0$$

解得

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$$

求对应不同特征值的特征矢量:

对于 $\lambda_1 = -1$, 有

$$(\lambda_1 I - A)v_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_2 = -3$, 有

$$(\lambda_2 I - A)v_2 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得

$$v_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

构造非奇异矩阵, 即

$$P = (v_1 \ v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

则 $\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \bar{B} = P^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(2) 求矩阵 A 的特征值, 即

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -3 & \lambda & -2 \\ 12 & 7 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

解得

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$$

求对应不同特征值的特征矢量:

对于 $\lambda_1 = -1$, 有

$$(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}) v_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \\ 12 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_2 = -2$, 有

$$(\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A}) v_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -2 \\ 12 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得

$$v_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_3 = -3$, 有

$$(\lambda_3 \mathbf{I} - \mathbf{A}) v_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & -2 \\ 12 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得

$$v_3 = \begin{pmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

构造非奇异矩阵, 即

$$\mathbf{P} = (v_1 \quad v_2 \quad v_3) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -1 \\ -3 & -2 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{37}{2} & -27 \\ -15 & -20 \\ \frac{27}{2} & 16 \end{pmatrix}$$

8.4-8 计算下列矩阵的矩阵指数 $e^{\bar{\mathbf{A}}t}$ 。

$$(1) A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; (2) A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}; (3) A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

8.4-8 解答

(1) A 阵为对角型

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

(2) 记 $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, 其中 $A_1 = -2, A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ 为约当型, 则 $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{A_1 t} & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} \end{pmatrix}$;

$$e^{A_1 t} = e^{-2t}; e^{A_2 t} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

则

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$(3) (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & 1 \\ -4 & s \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 4} \begin{pmatrix} s & -1 \\ 4 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s}{s^2 + 4} & -\frac{1}{s^2 + 4} \\ \frac{4}{s^2 + 4} & \frac{s}{s^2 + 4} \end{pmatrix} \text{ 则}$$

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\frac{1}{2} \sin 2t \\ 2 \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}$$

8.4-9 已知 $ad = bc$, 试计算

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{100} = ?$$

8.4-9 解答

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

由于 $ad = bc$, 则

$$\text{原式} = \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + dc & ad + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix}$$

以此类推, 则

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} a(a+d)^{99} & b(a+d)^{99} \\ c(a+d)^{99} & d(a+d)^{99} \end{pmatrix}$$

8.4-10 已知系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

初始条件为 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$ 。试求系统的单位阶跃响应。

8.4-10 解答 由已知条件, 得

$$u(t) = 1(t), U(s) = \frac{1}{s}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2} \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)^2} & \frac{1}{s-1} \end{pmatrix}$$

$$L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} BU(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)^2} & \frac{1}{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s(s-1)} \\ \frac{1}{s(s-1)^2} + \frac{1}{s(s-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \\ \frac{1}{(s-1)^2} \end{pmatrix}$$

则

$$L^{-1}[(sI - A)^{-1} BU(s)] = \begin{pmatrix} e^t - 1 \\ te^t \end{pmatrix}$$

$$x(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0) + L^{-1}[(sI - A)^{-1} BU(s)] = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t - 1 \\ te^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t - 1 \\ 2te^t \end{pmatrix}$$

8.4-11 已知系统的状态转移矩阵为

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 6e^{-t} - 5e^{-2t} & 4e^{-t} - 4e^{-2t} \\ -3e^{-t} - 3e^{-2t} & -2e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

试求该系统的状态矩阵 A 。

8.4-11 解答

$$\dot{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} -6e^{-t} + 10e^{-2t} & -4e^{-t} + 8e^{-2t} \\ 3e^{-t} - 6e^{-2t} & 2e^{-t} - 6e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$A = \dot{\Phi}(0) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

8.4-12 已知系统的状态空间表达式为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u, y = [1 \ 0 \ 1] x$$

求其对应的传递函数。

8.4-12 解答

$$sI - A = \begin{pmatrix} s+1 & 0 & -1 \\ -1 & s+2 & -1 \\ 0 & 0 & s-3 \end{pmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-3)} \begin{pmatrix} (s+2)(s-3) & 0 & s+2 \\ s-3 & (s+1)(s-3) & s+2 \\ 0 & 0 & (s+1)(s+2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{1}{(s+1)(s-3)} \\ \frac{1}{(s+2)(s+1)} & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+1)(s-3)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-3} \end{pmatrix}$$

传递函数为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = (1 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{1}{(s+1)(s-3)} \\ \frac{1}{(s+2)(s+1)} & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+1)(s-3)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{s+1}$$

8.4-13 设离散系统的差分方程为

$$y(k+2) + 5y(k+1) + 3y(k) = u(k+1) + 2u(k)$$

求系统的状态空间表达式。

8.4-13 解答

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z+2}{z^2 + 5z + 3}$$

利用 Z 变换关系

$$z^{-1}[x_i(z)] = x_i(k), z^{-1}[zx_i(z)] = x_i(k+1)$$

得到系统状态空间表达式为

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (21) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

8.4-14 已知连续系统动态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \ 0]x$$

取采样周期为 $T=1\text{s}$, 试求离散化动态方程。

8.4-14 解答

系统的状态转移矩阵为

$$\phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = L^{-1}\left\{\begin{pmatrix} s & -1 \\ 0s & -2 \end{pmatrix}^{-1}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(e^{2t} - 1) \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

离散系统的系数矩阵

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & (e^{2T} - 1) \\ 0 & e^{2T} & \end{pmatrix}$$

将 $T=1s$ 代入, 得

$$\Phi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 3.1945 \\ 0 & 7.3891 \end{pmatrix}$$

$$H(T) = (\int_0^T \Phi(T) dt) B = \left\{ \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & (e^{2t} - 1) \\ 0 & e^{2t} & \end{bmatrix} dt \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{2T} - \frac{1}{2}T - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}e^{2T} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

将 $T=1s$ 代入, 得

$$H(1) = \begin{pmatrix} 1.0973 \\ 3.1945 \end{pmatrix}$$

离散化动态方程为

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3.1945 \\ 0 & 7.3891 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.0973 \\ 3.1945 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

8.4-15 判断下列系统的能控性。

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$(2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

8.4-15 解答

(1)

$$S = (b \quad Ab) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } S = 2$$

故系统可控。

(2)

$$S = (b \quad Ab \quad Ab^2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}S = 2 \neq 3$$

故系统不可控。

(3) 系统矩阵 A 为约当型, 输入矩阵中与约当块最后一行对应的行为全零行, 故系统不可控。

8.4-16 系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}u$$

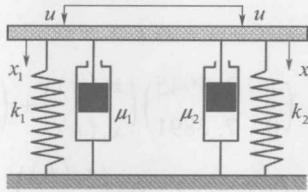
设系统状态可控, 试求 a, b 。

8.4-16 解答

$$S = (B \ AB) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & ab - 1 \end{pmatrix}$$

若系统状态可控, 则 $\text{rank}S = 2$, 即 $|S| \neq 0$, 则 $ab - a - b^2 \neq 0$, 故 $b^2 \neq ab - 1$ 。

8.4-17 如图所示为防震平台(忽略平台质量), 试讨论:



8.4-17 题图

(1) 系统完全能控的条件;

(2) 当 $k_1 = k_2 = 1, \mu_1 = 2, \mu_2 = 4, x_1(0) = 8, x_2(0) = -2$ 时, 求 $u(t)$, 使 $x_1(4) = 0, x_2(4) = 0$ 。

8.4-17 解答

(1) 由题意, 得

$$\begin{cases} k_1 x_1 + u_1 \dot{x}_1 = u \\ k_2 x_2 + u_2 \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

故

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{u_1} & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{u_1} \\ \frac{1}{u_2} \end{pmatrix} u$$

能控性矩阵为

$$S = (b \ AB) = \begin{pmatrix} \frac{1}{u_1} & -\frac{k_1}{u_1^2} \\ \frac{1}{u_2} & -\frac{k_2}{u_2^2} \end{pmatrix}$$

欲使系统能控, 则 $|S| \neq 0$, 即

$$\frac{k_2}{u_1 u_2} \neq \frac{k_1}{u_1^2 u_2}$$

$$k_2 u_2 \neq k_1 u_1$$

$$(2) u(t) = -B^T e^{-At} W^{-1} x_0 = 22.403 e^{\frac{t}{4}} - 10.935 e^{\frac{t}{2}}$$

8.4-18 判断下列系统的输出能控性。

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

8.4-18 解答

$$(1) Q' = (CB \quad CAB \quad CA^2B \quad D) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 & 11 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & -3 & 9 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } Q' = 2 = q$$

故系统输出可控。

$$(2) Q' = (CB \quad CAB \quad CA^2B \quad D) = (0 \ 0 \ 1 \ 0)$$

$$\text{rank } Q' = 1 = q$$

故系统输出可控。

8.4-19 判断下列系统的能观测性。

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, y = [1 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, y = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, y = [0 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

8.4-19 解答

$$(1) C = (1 \ 1), A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

能观性矩阵：

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{rank } \mathbf{U}_0 &= 2 = n \end{aligned}$$

故系统可观。

(2) 能观性矩阵:

$$\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

因为 $\mathbf{U}_0 = 0$, 所以

$$\text{rank } \mathbf{U}_0 \neq 3 = n$$

故系统不可观。

(3) 能观性矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \\ \text{rank } \mathbf{U}_0 &= 2 \neq n \end{aligned}$$

故系统不可观。

8.4-20 确定使得以下系统可观测的 a, b 。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}x, y = [1 \quad -1]x$$

8.4-20 解答

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \mathbf{C} = (1 \quad -1) \\ \mathbf{CA} &= (1 \quad -1) \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} = (a \quad 1-b) \end{aligned}$$

系统的能观性矩阵为

$$\begin{aligned} \text{rank } \mathbf{U}_0 &= 2 \\ 1-b+a &\neq 0 \end{aligned}$$

因为 $\text{rank } \mathbf{U}_0 = 2$, 则 $1-b+a \neq 0$, 所以 $a \neq b-1$ 。

8.4-21 试确定当 p 与 q 为何值时下列系统可控, 为何值时可观测。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [q \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

8.4-21 解答 系统的能控性矩阵为

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} p & p-12 \\ -1 & p \end{pmatrix}$$

因为 $\text{rank}S = 2 = n$, 则 $p^2 + p - 12 \neq 0$, 得 $p \neq -4$ 且 $p \neq 3$ 。
系统的能观性矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ q+1 & 12q \end{pmatrix}$$

因为 $\text{rank}Q = 2 = n$, 则 $12q^2 - q - 1 \neq 0$, 得 $q \neq \frac{1}{3}$ 且 $q \neq -\frac{1}{4}$ 。

8.4-22 将下列状态方程化为能控标准型

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

8.4-22 解答

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

因为 $|S| \neq 0$, 所以系统可控。

构造非奇异性矩阵易得

$$P_1 = (2 \ 0 \ -1)$$

则

$$P_2 = (0 \ 1 \ 0), P_3 = (-1 \ 0 \ 1)$$

所以

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以能控标准型为

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

8.4-23 将下列状态方程和输出方程化为能观标准型。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}x$$

$$y = [-1 \quad 1]x$$

8.4-23 解答 系统能观性矩阵 $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, 求得 $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, 最后一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B_0 = 0, C_0 = CP = (0 \quad 1)$$

所以

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \bar{x}$$

$$y = (0 \quad 1) \bar{x}$$

8.4-24 验证如下系统能控性，并进行结构分解。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) \\ y(t) &= [1 \quad -1 \quad 1]x(t) \end{aligned}$$

8.4-24 解答 能控性矩阵为

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \text{rank } S = 2 < 3$$

故系统不可控。选出线性无关的前两列，附加任意列矢量 $(0 \quad 1 \quad 0)^T$ ，构成非奇异变换矩阵 T^{-1} ，则有

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

令 $x = T^{-1}\bar{x}$ ，则有

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Tb = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, CT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}^T$$

故系统的能控性结构分解为

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_{c(t)} \\ \dot{\tilde{x}}_{\tilde{c}(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{c(t)} \\ \tilde{x}_{\tilde{c}(t)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = (1 \quad 2 \quad -1) \begin{pmatrix} \tilde{x}_{c(t)} \\ \tilde{x}_{\bar{c}(t)} \end{pmatrix}$$

8.4-25 验证习题 8.4-24 的能观性，并进行结构分解。

8.4-25 解答 系统的能观性矩阵为

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -7 & 4 \end{pmatrix}, \text{rank } \mathbf{Q} = 2 < n$$

系统不可观，取 \mathbf{Q} 的两行和 $(0 \quad 0 \quad 1)$ 构成非奇异矩阵 \mathbf{T} ，则

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{Tb} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{CT}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

故系统的可观结构分解表达式为

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_{o(t)} \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{o}(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{o(t)} \\ \tilde{x}_{\bar{o}(t)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} \tilde{x}_{o(t)} \\ \tilde{x}_{\bar{o}(t)} \end{pmatrix}$$

8.4-26 已知系统传递函数为

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 3s + 2}$$

试求系统可控不可观测、可观测不可控、不可控不可观测的动态方程。

8.4-26 解答

(1) 可控不可观：列写可控标准型，即

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(2) 可观不可控：列写可观标准型，即

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(3) G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s+2} \Rightarrow \dot{x}_1 = -2x_1 + \mathbf{u}, \mathbf{y} = x_1$$

取不可观不可控的状态变量为 x_2 ，所以，系统的不可控不可观的动态方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

8.4-27 试用李雅普诺夫稳定性定理判断下列系统在平衡状态的稳定性。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

8.4-27 解答 平衡状态 $X_e = 0$; 令

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 + 2x_3\dot{x}_3 = -4x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3 \\ &= x^T \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

$$P_1 = -4 < 0, P_2 = 12 > 0, P_3 = -12 < 0$$

所以 $V(x)$ 负定, 又 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, 故系统在原点是大范围渐进稳定的。

8.4-28 试用李雅普诺夫第二方法判断如下系统其在平衡状态的稳定性。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - 3x_2 \end{aligned}$$

8.4-28 解答 平衡点 $(0 \quad 0)$

取 $V(x) = (x_1^2 + x_2^2)$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(-x_1 + x_2) + 2x_2(2x_1 - 3x_2) = -2x_1^2 + 6x_1x_2 - 6x_2^2 \\ &= [x_1 \quad x_2] \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因为 $P_1 = -2, |P| = 12 - 9 = 3 > 0$, 所以 $\dot{V}(x)$ 负定, 又 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, 故系统是大范围渐进稳定的。

8.4-29 设系统状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

(1) 当取 $Q = I$ 时, 求 P ;

(2) 若选 Q 为正半定矩阵时, 求 Q 及对应的 P ;

(3) 并判断系统的稳定性。

8.4-29 解答

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

(1) 取 $Q = I$, 则由

$$A^T P + PA = -Q$$

得

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

整理, 得

$$\begin{cases} 4p_{11} = -1 \\ p_{12} + \frac{1}{2}p_{11} + \frac{1}{2}p_{13} = 0 \\ p_{13} - 3p_{11} = 0 \\ p_{12} - 2p_{22} + p_{23} = -1 \\ \frac{1}{2}p_{13} - 2p_{23} + \frac{1}{2}p_{33} - 3p_{12} = 0 \\ -6p_{13} - 2p_{12} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{11} = -\frac{1}{4} \\ p_{12} = \frac{1}{2} \\ p_{13} = -\frac{3}{4} \\ p_{22} = \frac{5}{8} \\ p_{23} = -\frac{11}{4} \\ p_{33} = \frac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix}$$

(2) 取 $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Q 正半定, 同理, 有

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

整理, 得

$$\begin{cases} 4p_{11} = 0 \\ p_{12} + \frac{1}{2}p_{11} + \frac{1}{2}p_{13} = 0 \\ p_{13} - 3p_{11} = 0 \\ p_{12} - 2p_{22} + p_{23} = -1 \\ \frac{1}{2}p_{13} - 2p_{23} + \frac{1}{2}p_{33} - 3p_{12} = 0 \\ -6p_{13} - 2p_{12} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{11} = 0 \\ p_{12} = 0 \\ p_{13} = 0 \\ p_{22} = \frac{1}{2} \\ p_{23} = 0 \\ p_{33} = 0 \end{cases} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) 对于(1)中的矩阵 P , $P_{11} < 0$, $P_{22} < 0$, $P_{33} < 0$, 矩阵 P 不定, 故系统不渐定稳定。

考虑到 A 阵 $|\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2) = 0$, $\lambda_1 = 2 > 0$, 所以系统不稳定。

8.4-30 给定系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)(s+8)}$$

试确定状态反馈控制律,使闭环极点为 $-2, -4, -7$ 。

8.4-30 解答 系统可控, 可控标准型为

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -32 & -12 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}u$$

设状态反馈矩阵

$$k = (k_0 \quad k_1 \quad k_2)$$

则状态反馈系统特征方程为

$$|\lambda I - (A - bk)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ k_0 & 32 + k_1 & k_2 + 12 + \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + (12 + k_2)\lambda^2 + (32 + k_1)\lambda + k_0$$

期望系统的特征方程为

$$(\lambda + 2)(\lambda + 4)(\lambda + 7) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 50\lambda + 56$$

比较两个特征方程, 由同幂项系数相同, 得

$$\begin{cases} k_0 = 56 \\ k_1 + 32 = 50 \\ k_2 + 12 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_0 = 56 \\ k_1 = 18 \\ k_2 = 1 \end{cases}$$

因此满足系统要求的状态反馈阵为

$$k = (56 \quad 18 \quad 1)$$

8.4-31 给定系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y(t) &= [2 \quad -1]x(t) \end{aligned}$$

设计一个具有特征值为 $-10, -10$ 的全维状态观测器。

8.4-31 解答 设计全维状态观测器:

$$|\lambda I - (A - HC)| = |\lambda I - A + HC| = \begin{vmatrix} \lambda + 2H_1 - 1 & -H_1 \\ 2H_2 & \lambda - H_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (2H_1 - H_2 - 1)\lambda + H$$

观测器的期望特征多项式为

$$\lambda^*(s) = (s + 10)(s + 10) = s^2 + 20s + 100$$

与期望特征多项式比较, 得

$$\begin{cases} H_2 = 100 \\ 2H_1 - H_2 - 1 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 60.5 \\ H_2 = 100 \end{cases}$$

所以

$$H = \begin{pmatrix} 60.5 \\ 100 \end{pmatrix}$$

8.4-32 给定系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

试问能否用状态反馈将函数变为

$$G_k(s) = \frac{(s-1)}{(s+2)(s+3)}$$

8.4-32 解答

$$G(s) = \frac{s^2 + s + 2}{s^3 + 2s^2 - 5s - 6}$$

原系统写成可控标准型, 即

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}u \\ y &= (-2 \quad 1 \quad 1)x\end{aligned}$$

假设可以实现期望的系统, 设状态反馈阵为

$$k = (k_0 \quad k_1 \quad k_2)$$

则状态反馈特征方程为

$$|\lambda I - (A - bk)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ k_0 - 6 & k_1 - 5 & k_2 + \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + (k_2 + 2)\lambda^2 + (k_1 - 5)\lambda + k_0 - 6$$

期望系统

$$G(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)} = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+2)(s+3)(s+2)} = \frac{(s-1)(s+2)}{s^3 + 7s^2 + 16s + 12}$$

所以期望的特征方程为

$$f^*(s) = s^3 + 7s^2 + 16s + 12$$

比较两特征方程, 得

$$\begin{cases} k_0 - 6 = 12 \\ k_1 - 5 = 16 \\ k_2 + 2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_0 = 18 \\ k_1 = 21 \\ k_2 = 5 \end{cases}$$

状态反馈阵为

$$k = (18 \quad 21 \quad 5)$$

所以可以用状态反馈实现 $G_k(s)$ 。

状态反馈为

$$u = -(18 \quad 21 \quad 5)x$$

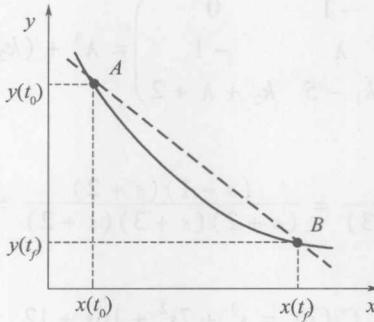
第9章 最优控制理论基础

9.1 知识点辅导

本章重点掌握最优控制的一般问题及类型,泛函与变分,欧拉方程,横截条件,变分法求有约束和无约束的最优控制,连续系统的极小值原理。注意理解变分法中各种边界条件的最优控制和最优轨线的求法,哈密顿函数的构造。

9.2 典型习题及详细解答

9.2-1 最短曲线问题:在所有连接A点和B点的平面曲线中,求一曲线使得从A点到B点的曲线弧长最短。



9.2-1 题图

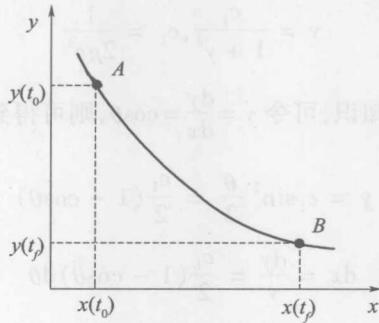
9.2-1 解答 A点到B点的曲线弧长为 $J = \int_A^B ds$, 其中 $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$, 因此曲线弧长可表示为 $J = \int_{x(t_0)}^{x(t_f)} \sqrt{1 + y'^2} dx$ 。

这是个固定端点的泛函极值问题, $L = \sqrt{1 + y'^2}$, 根据欧拉方程 $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0$ 得,

$$\frac{y'}{(1 + y'^2)^{3/2}} = 0, \text{ 即 } y' = 0$$

因此, $y = ax + b$, 连接两点的最短曲线为直线, 参数 a, b 可由边界条件确定。

9.2-2 最速降曲线问题:设A和B是垂直平面上不在同一垂直线上的两点,在所有连接A点和B点的平面曲线中,求一曲线使得质点在重力作用下,初始速度为0时,沿此曲线从A点滑行至B点的时间最短(不计摩擦和空气阻力)。



9.2-2 题图

9.2-2 解答 假定初始时刻的 A 点坐标为 $(x(t_0), y(t_0))$, 终端时刻的 B 点坐标为 $(x(t_f), y(t_f))$ 。要求的性能指标为 $J = \int_{t_0}^{t_f} dt$ 。根据能量守恒定律, 在重力作用下, 质点在曲线 上任意点处的状态满足

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

其中 m 为质点质量, v 为质点瞬时速度, $v = \frac{ds}{dt}$, s 为质点瞬时位移, $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ 。

由此可得到

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gy}} = \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{2gy}} dx$$

因此, 最速降曲线问题描述为寻求使泛函 $J = \int_{x(t_0)}^{x(t_f)} \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{2gy}} dx$ 极小的曲线 $y = f(x)$ 。为使

求解方便, 可令 A 点坐标为 $(0, 0)$, B 点坐标为 (x_f, y_f) , $J = \int_0^{t_f} \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{2gy}} dx$ 。

和习题 9.2-1 非常类似, 这是个固定端点的泛函极值问题, $L = \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{2gy}}$, 不显含自变量 x 。

回顾: 若积分型泛函指标中的 L 是 $L = L[x, \dot{x}]$ 这种形式, 欧拉方程可降阶为

$$L - \dot{x}L_x = c, c \text{ 为待定系数}$$

上式可对欧拉方程进行首次积分推导得到。

因此在速降曲线问题中, 由于 $L = \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{2gy}}$ 只依赖于 y 和 \dot{y} , 即得

$$L - \dot{y}L_y = \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{2gy}} - \frac{\dot{y}^2}{\sqrt{2gy(1 + \dot{y}^2)}} = c$$

化简得

$$y = \frac{c_1}{1 + y^2}, c_1 = \frac{1}{2gc^2}$$

由常微分方程求解的相关知识,可令 $\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \cos\theta$, 则可得到

$$y = c_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{c_1}{2} (1 - \cos\theta)$$

$$dx = \frac{dy}{y} = \frac{c_1}{2} (1 - \cos\theta) d\theta$$

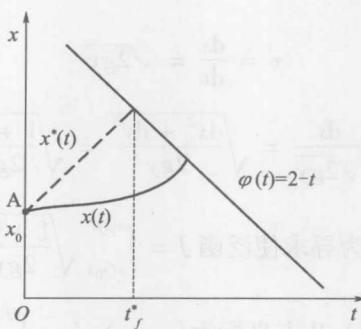
$$x = \frac{c_1}{2} (\theta - \sin\theta) + c_2$$

由边界条件 $y(0) = 0$, 可知 $c_2 = 0$; c_1 可由终端边界条件 $y(x_f) = y_f$ 求得。最终的曲线方程为

$$\begin{cases} x = \frac{c_1}{2} (\theta - \sin\theta) \\ y = \frac{c_1}{2} (1 - \cos\theta) \end{cases}$$

这是摆线(圆滚线)的参数方程,其中 $\frac{c_1}{2}$ 为滚圆半径,是最速降曲线问题的唯一解。

9.2-3 点到直线的最短曲线问题:求点 A 到直线 $x = 2 - t$ 距离最短的曲线,如图所示。



9.2-3 题图

在习题 9.2-1 基础上,该问题可描述为:给定初始点 $x(0) = x_0$, 终端时间 t_f 自由、终端状态 $x(t_f)$ 满足约束条件 $x(t_f) = \varphi(t_f) = 2 - t_f$, 求解最优曲线 $x^*(t)$, 使性能指标 $J = \int_0^{t_f} \sqrt{1 + x^2} dt$ 极小。

9.2-3 解答 $L = \sqrt{1 + x^2}$, 根据欧拉方程 $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$ 得,

$$\frac{x}{(1 + x^2)^{3/2}} = 0, \text{ 即 } \dot{x} = 0$$

因此, $x = at + b$, 点到某直线的最短曲线为直线。

由初始条件 $x(0) = x_0$ 得, $b = x_0$; 由横截条件 1 可解得 $a = 1$, 最优曲线为

$$x = t + x_0$$

当 $t = t_f$ 时, $x(t_f) = \varphi(t_f)$, 即 $t_f + x_0 = 2 - t_f$, 从中解出最优终端时刻为 $t_f^* = 1 - 0.5x_0$ 。

由上述结果可知, A 点到直线 $x = 2 - t$ 的最短曲线为, 通过 A 点并垂直于 $x = 2 - t$ 的直线 $x = t + x_0$ 。

9.2-4 库存管理优化问题(控制无约束): 已知库存模型, $\begin{cases} \dot{x}_1 = u - x_2 \\ \dot{x}_2 = -u \end{cases}, x_1(0) = 2, x_2(0) = 0, x_1(1) = 1, x_2(1) = 1$ 。其中, $x_1(t)$ 为 t 时刻的库存量, $x_1(t)$ 为销售率, $u(t)$ 为生产率; 第 2 个方程表示销售率的变化随着生产率的增长呈反比关系。现要求寻求最优生产率 $u^*(t)$ 使得在 $[0, 1]$ 时间内有最小的总生产量, 即 $\min_{u(t)} \{ J = \int_0^1 \frac{1}{2} u^2(t) dt \}$ 。

9.2-4 解答 由题意知 $t_0 = 0, x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, t_f = 1, x(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L = \frac{1}{2} u^2(t), \Phi = 0, f = \begin{bmatrix} u - x_2 \\ -u \end{bmatrix}$, 拉格朗日乘子为 $\lambda^T(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]$ 。

构造哈密顿方程, $H = \frac{1}{2} u^2 + \lambda_1(u - x_2) - \lambda_2 u$ 。

由控制方程 $\frac{\partial H}{\partial u(t)} = u + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$, 得 $u^* = \lambda_2 - \lambda_1$ 。

由协态方程 $\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} \\ -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1(t) \end{bmatrix}$, 得 $\lambda_1(t) = a, \lambda_2(t) = at + b$

由状态方程 $\begin{cases} \dot{x}_1 = u - x_2 \\ \dot{x}_2 = -u \end{cases}$, 得 $x_2 = -\frac{1}{2}at^2 + (a - b)t + c, x_1 = \frac{1}{6}at^3 + \frac{1}{2}at^2 + (b - a - c)t + d$ 。

由端点条件 $x_1(0) = 2, x_2(0) = 0, x_1(1) = 1, x_2(1) = 1$, 得 $a = -6, b = -4, c = 0, d = 2$, 最优生产率为 $u^*(t) = -6t + 2$ 。

9.2-5 库存管理优化问题(控制有约束): 已知库存模型, $\begin{cases} \dot{x}_1 = u - x_2 \\ \dot{x}_2 = -u \end{cases}, u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$, $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, x_1(T), x_2(T)$ 自由。现要求寻求最优生产率 $u^*(t)$ 使得在 $[0, T]$ 时间内, 使库存和生产的代价和最小, 即 $J = \int_0^T -(2x_1 + u) dt$ 。

9.2-5 解答 控制有约束问题需用极小值原理。 $L = 2x_1 + u, \Phi = 0, f = \begin{bmatrix} u - x_2 \\ -u \end{bmatrix}$, 拉格朗日乘子为 $\lambda^T(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]$ 。

构造哈密顿方程, $H = -(2x_1 + u) + \lambda_1(u - x_2) - \lambda_2 u = -2x_1 - \lambda_1 x_2 + (\lambda_1 - \lambda_2 - 1)u$ 。

哈密顿函数是 u 的线性函数, 极小值出现在边界。

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max} & \lambda_1 - \lambda_2 - 1 > 0 \\ u_{\min} & \lambda_1 - \lambda_2 - 1 < 0 \end{cases}$$

由协态方程 $\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} \\ -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \lambda_1(t) \end{bmatrix}$, 得 $\lambda_1(t) = 2t + a, \lambda_2(t) = t^2 + at + b$ 。

由横截条件 $\lambda(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)}$, 得 $a = -2T, b = T^2$, 则 $\lambda_1(t) = 2(t-T), \lambda_2(t) = (t-T)^2$ 。

控制律变为 $u^*(t) = \begin{cases} u_{\max} & -(1-t+T)^2 > 0 \\ u_{\min} & -(1-t+T)^2 < 0 \end{cases}$, 显然 $-(1-t+T)^2 < 0$ 恒成立且切换时间

$t = T + 1$ 超过了边界时间, 因此最优控制律为 $u^*(t) \equiv u_{\min}$ 。

9.2-6 飞行器高度控制问题: 飞行器的控制方程如下

$$\begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ \ddot{h}(t) \\ \ddot{\ddot{h}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(t) \\ \dot{h}(t) \\ \ddot{h}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(t)$$

其中, $h(t)$ 是飞行器的高度; $u(t)$ 是油门输入; 试设计控制律使如下性能指标最小

$$J[x(t), u(t)] = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ [h(t), \dot{h}(t), \ddot{h}(t)] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(t) \\ \dot{h}(t) \\ \ddot{h}(t) \end{bmatrix} + 2u^2(t) \right\} dt$$

初始状态 $[h(t) \quad \dot{h}(t) \quad \ddot{h}(t)] = [10 \quad 0 \quad 0]^T$ 。对如下给定的 Q、R 矩阵进行仿真分析, 并绘制系统状态与控制输入的曲线。

$$(1) Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 2; \quad (2) Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 2000;$$

$$(3) Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 2; \quad (4) Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 2$$

9.2-6 解答 给定的性能指标为线性二次型指标

$$J[x(t), u(t)] = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt$$

其中 Q 和 R 分别是对状态变量和控制量的加权矩阵, 线性二次型最优控制器设计如下:

(1) $Q = diag(1, 0, 0), R = 2$ 时, 由后面给出的 MATLAB 程序可求得最优状态反馈矩阵为 $K_1 = [0.7071 \quad 2.0072 \quad 2.0510], u(t) = -K_1 * x(t)$ 。状态响应曲线及控制输入曲线如图 9.2-4 所示。

(2) $Q = diag(1, 0, 0), R = 2000$ 时, $K_2 = [0.0224 \quad 0.2517 \quad 0.4166], u(t) = -K_2 * x(t)$, 结果如图 9.2-5 所示。

(3) $Q = diag(10, 0, 0), R = 2$ 时, $K_3 = [2.2361 \quad 4.3892 \quad 3.3077], u(t) = -K_3 * x(t)$, 结果如图 9.2-6 所示。

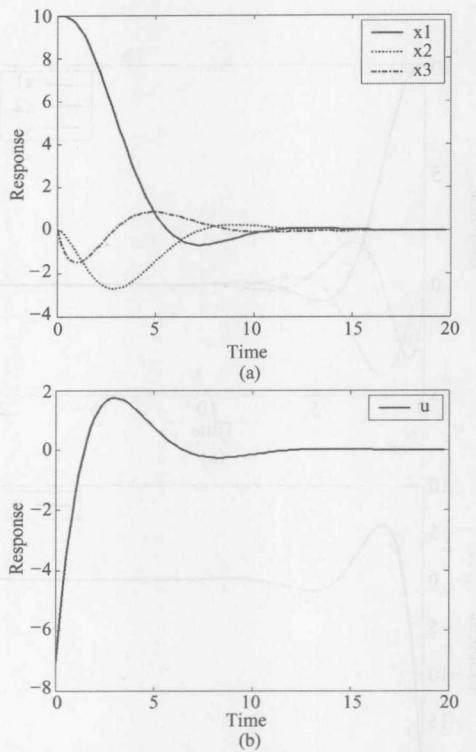


图 9.2-4 状态响应曲线及控制输入曲线

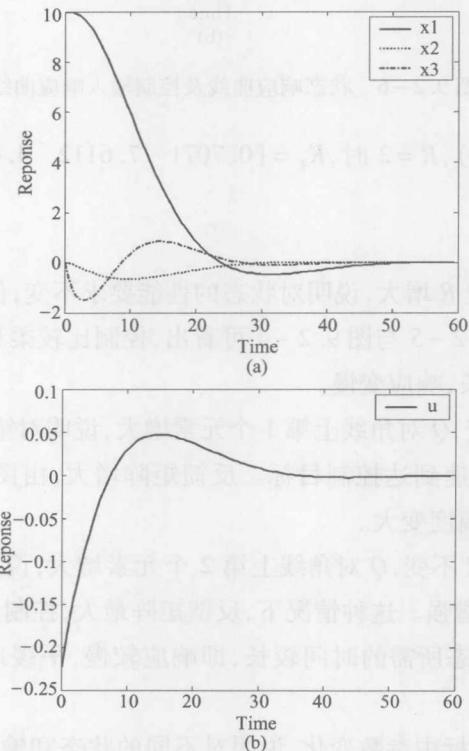


图 9.2-5 状态响应曲线及控制输入的响应曲线

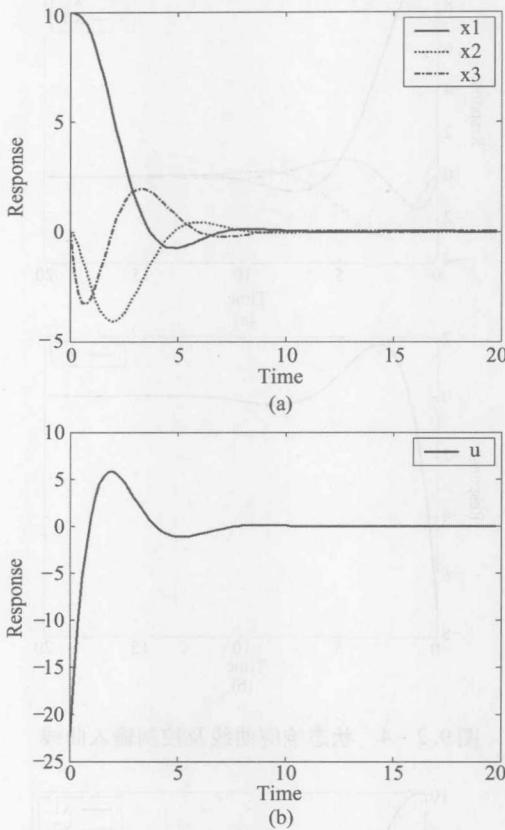


图 9.2-6 状态响应曲线及控制输入响应曲线

(4) $Q = \text{diag}(1, 100, 0)$, $R = 2$ 时, $K_4 = [0.7071 \quad 7.6112 \quad 4.6076]$, $u(t) = -K_4 * x(t)$, 结果如图 9.2-7 所示。

结果分析如下。

比较(2)和(1), Q 不变 R 增大, 说明对状态的性能要求不变, 但要求控制的能量更小。反馈矩阵的数值变小, 由图 9.2-5 与图 9.2-4 可看出, 控制比较柔和, 响应变得平滑, 但响应曲线达到稳态时所需时间增长, 响应变慢。

比较(3)和(1), R 不变, Q 对角线上第 1 个元素增大, 说明对第一个状态(飞行高度)的要求增强, 即希望飞行高度快速到达控制目标。反馈矩阵增大, 由图 9.2-6 与图 9.2-4 可看出, 状态响应迅速, 但波动幅度变大。

比较(4)、(3)和(1), R 不变, Q 对角线上第 2 个元素增大, 说明对第二个状态(飞行高度的变化率, 即速度)的要求增强。这种情况下, 反馈矩阵最大, 控制作用最强, 由图 9.2-7 可看出, 状态 x_1 、 x_2 曲线达到稳态所需的时间较长, 即响应较慢, 平缓地趋于零; 状态 x_3 受输入 u 的控制, 快速达到稳态值。

上述分析说明, 性能指标中参数变化, 说明对不同的状态和输入的要求有变化, 实际中应根据要求适当选择 Q 和 R 。

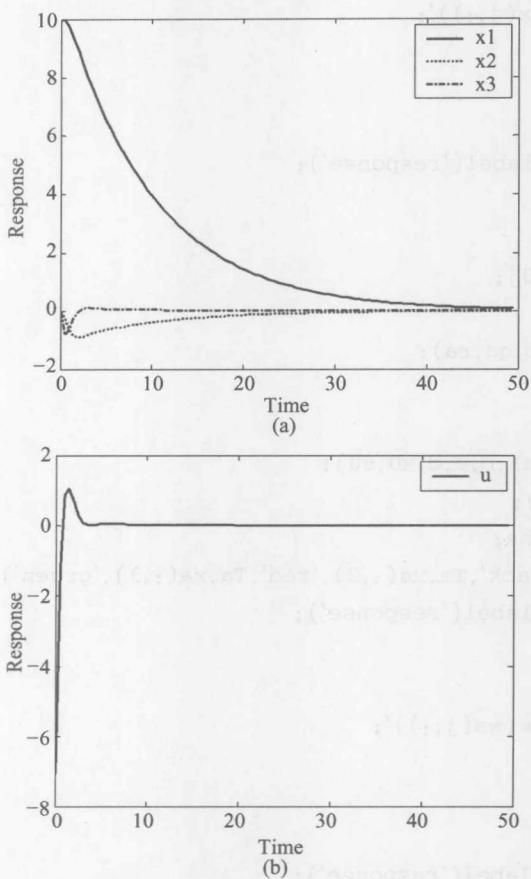


图 9.2-7 状态响应曲线及控制输入响应曲线

```
% * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * %  
a=[0 1 0;0 0 1;0 0 -1/2];  
b=[0;0;1/2];  
c=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];  
d=[0;0;0];  
figure(1)  
q=[1 0 0;0 0 0;0 0 0];  
r=2;  
[k,p,e]=lqr(a,b,q,r);  
x0=[10;0;0];  
a1=a-b*k;  
[y,x]=initial(a1,b,c,d,x0,20);  
n=length(x(:,3));  
T=0:20/n:20-20/n;  
plot(T,x(:,1),'black',T,x(:,2),'red',T,x(:,3),'green');  
xlabel('time - s');ylabel('response');  
hold on  
for j =1:n
```

```

u(j,:) = - k * (x(j,:))';
end
figure(2)
plot(T,u);
xlabel('time - s'); ylabel('response');
hold on
figure(3)
qa=[1 0 0;0 0 0;0 0 0];
ra=2000;
[ka,pa,ea]=lqr(a,b,qa,ra);
x0=[10;0;0];
aa1=a-b*ka;
[ya,xa]=initial(aa1,b,c,d,x0,60);
na=length(xa(:,3));
Ta=0:60/na:60-60/na;
plot(Ta,xa(:,1),'black',Ta,xa(:,2),'red',Ta,xa(:,3),'green');
xlabel('time - s'); ylabel('response');
hold on
for j =1:na
    ua(j,:) = - ka * (xa(j,:))';
end
figure(4)
plot(Ta,ua);
xlabel('time - s'); ylabel('response');
hold on
figure(5)
qb=[10 0 0;0 0 0;0 0 0];
rb=2;
[kb,pb,eb]=lqr(a,b,qb,rb);
x0=[10;0;0];
ab1=a-b*kb;
[yb,xb]=initial(ab1,b,c,d,x0,20);
nb=length(xb(:,3));
Tb=0:20/nb:20-20/nb;
plot(Tb,xb(:,1),'black',Tb,xb(:,2),'red',Tb,xb(:,3),'green');
xlabel('time - s'); ylabel('response');
hold on
for j =1:nb
    ub(j,:) = - kb * (xb(j,:))';
end
figure(6)
plot(Tb,ub);
xlabel('time - s'); ylabel('response');
hold on

```

```

figure(7)
qc = [1 0 0; 0 100 0; 0 0 0];
rc = 2;
[kc, cp, ec] = lqr(a, b, qc, rc);
x0 = [10; 0; 0];
ac1 = a - b * kc;
[yc, xc] = initial(ac1, b, c, d, x0, 50);
nc = length(xc(:, 3));
Tc = 0:50/nc:50-50/nc;
plot(Tc, xc(:, 1), 'black', Tc, xc(:, 2), 'red', Tc, xc(:, 3), 'green');
xlabel('time - s'); ylabel('response');
hold on
for j = 1:nc
    uc(j, :) = -kc * (xc(j, :))';
end
figure(8)
plot(Tc, uc);
xlabel('time - s'); ylabel('response');
hold on

```

9.3 课后练习题及详细解答

9.3-1 已知 $J = \int_0^1 (x^2 + 12xt) dt$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$, 试求使泛函 J 取极值的轨迹 $x^*(t)$, 并判别泛函极值的性质(极大/极小值)。

9.3-1 解答 构造拉格朗日函数

$$L = \dot{x}^2 + 12xt$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 12t, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}, \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\ddot{x}$$

根据欧拉方程, 得

$$12t - 2\ddot{x} = 0$$

即 $\ddot{x} = 6t$, 则

$$x = t^3 + at + b$$

由边界条件 $x(0) = 0$, $x(1) = 1$, 得 $x^* = t^3$ 。

此时泛函极值为最小值。

9.3-2 $\dot{x} = -x + u$, $x(0) = 3$, $x(2) = 0$, 求 $u^*(t)$ 使 $J = \int_0^2 (1 + u^2) dt$ 为最小。

9.3-2 解答 构造拉格朗日函数

$$L = 1 + u^2 - \lambda(-x + u - \dot{x})$$

由欧拉方程, 得

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0, \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

即

$$2u + \lambda = 0, -\lambda + \dot{\lambda} = 0$$

所以

$$\lambda = Ce^t, u = -\frac{C}{2}e^t, x = -\frac{C}{4}e^t + C_0e^{-t}$$

又 $x(0) = 3, x(2) = 0$, 得

$$C = \frac{12}{e^4 - 1}, C_0 = \frac{3e^4}{e^4 - 1}$$

$$u^*(t) = \frac{6}{1 - e^4}e^t$$

9.3-3 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}u, x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1(2) = 0$, 求 $u^*(t)$ 使 $J = \frac{1}{2} \int_0^2 (u_1^2 + u_2^2) dt$ 为最小。

9.3-3 解答 构造哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) + \lambda(x_2 + u_1) + \lambda_2 u_2$$

协态方程为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} \\ -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix}$$

故 $\lambda_1(t) = a, \lambda_2(t) = -at + b$

控制方程为

$$\frac{\partial H}{\partial u_1(t)} = u_1(t) + \lambda_1(t) = 0$$

即

$$u_1(t) = -a$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2(t)} = u_2(t) + \lambda_2(t) = 0$$

即

$$u_2(t) = at - b$$

由状态方程, 得

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1(t)} = x_2 + u_1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2(t)} = u_2 = at - b$$

所以

$$x_1 = \frac{1}{6}at^3 - \frac{1}{2}bt^2 + (c-a)t + d$$

$$x_2 = \frac{1}{2}at^2 - bt + c$$

解得

$$c = d = 1$$

$$-\frac{2}{3}a - 2b + 3 = 0$$

又 $\Psi = x_2(t_f)$, 由横截条件 $\lambda(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)} + \frac{\partial \Psi^T}{\partial x(t_f)} \cdot \gamma$, 得

$$\lambda_1(2) = \gamma, \lambda_2(2) = 0$$

即

$$2a = b$$

联解, 得

$$a = \frac{9}{14}, b = \frac{9}{7}$$

所以

$$u = \begin{pmatrix} -\frac{9}{14} \\ \frac{9}{14}t - \frac{9}{7} \end{pmatrix}$$

9.3-4 $\dot{x} = u, x(0) = 1, x(t_f) = 0$, 求 t_f^* 及 $u^*(t)$ 使(1) $J = t_f + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2 dt$; (2) $J = t_f^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2 dt$ 为最小。

9.3-4 解答

(1) 构造哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda u$$

协态方程为

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

即

$$\lambda(t) = a$$

控制方程为

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0$$

即

$$u = -a$$

状态方程为

$$\dot{x} = u$$

即

$$\dot{x} = -at + b$$

又 $x(0) = 1$, 故 $b = 1$, 又 $x(t_f) = 0$, $t_f = \frac{1}{a}$, 则

$$J = t_f + \frac{a^2}{2}t_f = \frac{1}{a} + \frac{a}{2}$$

当 $a = \sqrt{2}$ 时, J 最小, 则

$$t_f^* = \frac{1}{\sqrt{2}}, u^* = \sqrt{2}$$

(2) 同(1), 得

$$u = -a, x = -at + 1, t_f = \frac{1}{a}$$

$$J = t_f^2 + \frac{a^2}{2}t_f = t_f^2 + \frac{1}{2t_f}$$

当 $t_f = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ 时, J 最小, 则

$$t_f^{*2} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, u^* = -\sqrt[3]{4}$$

9.3-5 $\dot{x} = u, x(0) = 1$, 求 t_f^* 及 $u^*(t)$ 使 $J = \int_0^t (1 + x + \frac{1}{2}u^2) dt$ 为最小。

9.3-5 解答 构造哈密顿函数

$$H = 1 + x + \frac{u^2}{2} + \lambda u$$

协态方程为

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -1$$

得

$$\lambda = -t + b$$

控制方程为

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0$$

得

$$u = t - b$$

状态方程为

$$\dot{x} = u$$

得

$$x = \frac{t^2}{2} - bt + c$$

又 $\Phi = 0, \Psi = 0$, 由横截条件 $\lambda(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)} + \frac{\partial \Psi^T}{\partial x(t_f)} \cdot \gamma$, 得

$$\lambda(t_f) = 0, t_f = b$$

所以

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{t_f} (t^2 - 2bt + 2 + \frac{b^2}{2}) dt \\ &= -\frac{b^3}{6} + 2b \end{aligned}$$

当 $b = 2$ 时, J 最小, 则

$$t_f^* = 2, u^*(t) = t - 2$$

9.3-6 $\dot{x} = -0.1x + u, x(0) = x_0, 0 \leq u \leq 1$, 求 $u^*(t)$ 使 $J = \int_0^{100} x(t) dt$ 为极大。

9.3-6 解答 构造哈密顿函数

$$H = (1 - \frac{\lambda}{10})x + \lambda u$$

要使 H 极大, 则

$$u = \begin{cases} 0, \lambda < 0 \\ 1, \lambda > 0 \end{cases}$$

由协态方程

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\lambda}{10} - 1 \\ \lambda(t) &= Ce^{\frac{t}{10}} + 10 \end{aligned}$$

由横截条件, 得

$$\begin{aligned} \lambda(t_f) &= 0 \\ C &= -10e^{-10} \\ \lambda(t) &= -10e^{\frac{t}{10}-10} + 10 \\ 0 \leq t \leq 100, \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

所以

$$u^*(t) = 1$$

9.3-7 $\dot{x} = -x + u, x(0) = 1, |u| \leq 1$, 求 $u^*(t)$ 使 $J = \int_0^1 (x - \frac{1}{2}u) dt$ 为极小。

9.3-7 解答 构造哈密顿函数

$$H = (1 - \lambda)x + (\lambda - \frac{1}{2})u$$

要使 H 极小, 则

$$u = \begin{cases} 1, & \lambda < \frac{1}{2} \\ -1, & \lambda > \frac{1}{2} \end{cases}$$

协态方程为

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda - 1, \lambda(t) = Ce^t + 1$$

由横截条件, 得

$$\lambda_f = 0$$

所以

$$C = -\frac{1}{e}, \lambda(t) = -e^{t-1} + 1$$

当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, $t = 1 - \ln 2$, 故

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [1 - \ln 2, 1] \\ -1, & t \in [0, 1 - \ln 2] \end{cases}$$

9.3-8 $\dot{x} = x - u, x(0) = 5, 0 \leq u \leq 2$, 求 $u^*(t)$ 使 $J = \int_0^2 (2x - 3u - \alpha u^2) dt (\alpha \geq 0)$ 为极大。

9.3-8 解答 构造哈密顿函数

$$H = (2 + \lambda)x - (3 + \lambda)u - \alpha u^2$$

协态方程为

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda + 2, \lambda(t) = Ce^t - 2$$

由横截条件, 得

$$\lambda(t_f) = 0$$

所以

$$\lambda(t) = 2e^{t-2} - 2$$

当 $\alpha \geq 0$ 时, 要使 H 极大, 则 $u^* = 0$ 。

9.3-9 $\dot{x} = -2x + u, x(0) = 1$, 求 $u^*(t)$ 使 $J = \frac{1}{2}x^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2 dt$ 极小, 其中 t_f 固定。

9.3-9 解答 构造哈密顿函数

$$H = \frac{u^2}{2} + \lambda(-2x + u)$$

协态方程为

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 2\lambda, \lambda(t) = C_1 e^{2t}$$

控制方程为

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0, u = -\lambda = -C_1 e^{2t}$$

状态方程为

$$\dot{x} = -2x - C_1 e^{2t}, x = -\frac{C_1}{4} e^{2t} + C_2 e^{-2t}$$

横截条件为

$$\lambda(t_f) = x(t_f) = C_1 e^{2t_f}$$

又由 $x(0) = 1$, 得

$$C_1 = \frac{4e^{-2t_f}}{5e^{2t_f} - e^{-2t_f}}$$

$$u^*(t) = \frac{-4e^{-2(t_f-t)}}{5e^{2t_f} - e^{-2t_f}}$$

9.3-10 $x(k+1) = x(k) + 0.1(x^2(k) + u(k))$, $x(0) = 3$, 求 $u^*(0), u^*(1)$ 使 $J = \sum_{i=0}^1 |x(k) - 3u(k)|$ 极小。

9.3-10 解答

(1) $k=1$ 时, 初态为 $x(1)$, 单步最优求 $u^*(1)$, 使

$$J[x(1), 1] = \min_{u(1)} [|x(1) - 3u(1)|]$$

当 $x(1) = 3u(1)$ 时, 有

$$J^*[x(1), 1] = 0$$

由系统状态方程, 有

$$x(1) = x(0) + 0.1 = [x^2(0) + u(0)]$$

(2) $k=0$ 时, 初态为 $x(0)$, 单步最优求 $u^*(0)$, 使

$$\begin{aligned} J[x(0), 0] &= \min_{u(0)} \{|x(1) - 3u(1)| + J^*[x(1), 1]\} \\ &= \min_{u(0)} [|x(1) - 3u(1)|] \end{aligned}$$

当 $x(0) = 3u(0)$ 时, 有

$$J^*[x(0), 0] = 0$$

故

$$u^*(0) = 1, u^*(1) = \frac{x(1)}{3} = \frac{4}{3}$$

2004—2013 年《自动控制原理》 硕士研究生入学考试初试试题集锦

I 2004 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题

1. 某系统结构如图 1 所示：

(1) 试求出系统闭环传递函数 $C(s)/R(s)$ ；

(2) 若此时系统特征方程为 $D(s) = s^5 + 5s^4 + 9s^3 + 11s^2 + 8s + 6 = 0$, 试用劳斯判据判断系统的稳定性。(20 分)

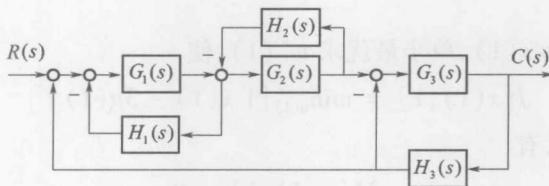


图 1

2. 已知某系统闭环对数幅频特性曲线如图 2 所示, 试求出系统单位阶跃响应的超调量 $\sigma\%$ 、峰值时间 t_p 和调节时间 t_s 。(20 分)

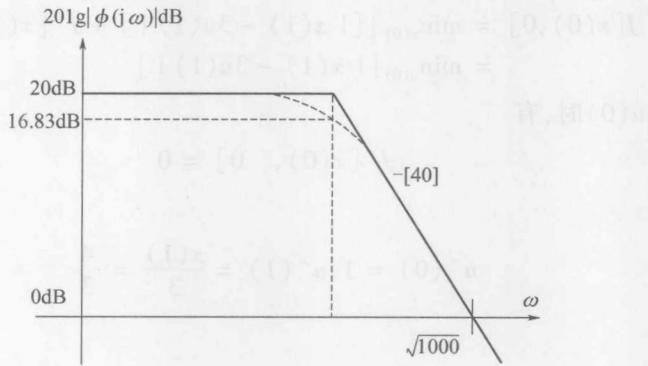


图 2

3. 已知单位反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{s - 2}{s + 2}$$

试求输入信号 $r(t) = 2\cos(3t + 30^\circ)$ 时, 系统的稳态输出 $c_{ss}(t)$ 。(16 分)

4. 已知单位反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{9}{s(s + k)(s + 2)}$$

试绘制出 k 从 $0 \rightarrow +\infty$ 变化的闭环根轨迹。[要求求出分离点坐标] (18 分)

5. 已知单位反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(0.1s+1)(0.5s+1)}$$

(1) 试用奈氏判据确定闭环系统稳定的 K 值范围；

(2) 若希望系统的闭环极点全部位于 $s = -1$ 垂线之左, 试用奈氏判据确定此时 K 的取值范围。(其他方法无效) (20 分)

6. 最小相角系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(0.4s+1)}$$

要求设计一串联超前校正网络, 使校正后系统的相角裕度 $\gamma'' \geq 50^\circ$; 并求此时的幅值裕度 h'' 。(20 分)

7. 试判断图 3 所示采样系统的稳定性。(18 分)

[提示: $Z[\frac{1}{s+a}] = \frac{z}{z - e^{-aT}}$; 采样周期 $T = 1s$]

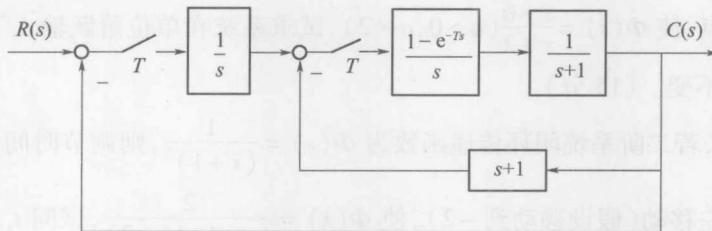


图 3

以下两题中任选一题:

8. 非线性系统的微分方程为 $\ddot{x} + \dot{x}^2 + ax + x^2 + bx + c = 0$, 奇点为 $(2, 0)$ 和 $(-1, 0)$, 其中 $(2, 0)$ 为稳定的焦点, 试求:

- (1) b, c 的值和 a 的取值范围;
- (2) 确定奇点 $(-1, 0)$ 的类型;
- (3) 概略绘制奇点附近的相轨迹。(要求标出方向) (18 分)

9. 某非线性系统结构如图 4 所示, 要求:

- (1) 若系统存在频率为 $\omega = \pi/4$ 的自激振荡, 试求此时的 k 值和振幅 A ;
- (2) 确定系统只有一个自振点的条件。(18 分)

[注: 线性环节中的 $k > 0$; 非线性环节的描述函数为 $N(A) = \frac{4}{A} \sqrt{1 - \frac{4^2}{A^2}} - j \frac{4^2}{A^2}, A \geq 4$]

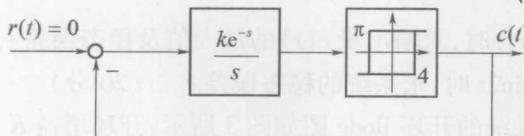


图 4

II 2005 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题

1. 某系统结构如图 1 所示：

- (1) 试判断系统稳定的 K 值范围；
- (2) 试设计 $C_r(s)$, 使系统在输入 $r(t) = t$ 单独作用下无稳态误差；
- (3) 试设计 $G_n(s)$, 使系统在扰动 $n(t) = t$ 单独作用下无稳态误差。 (20 分)

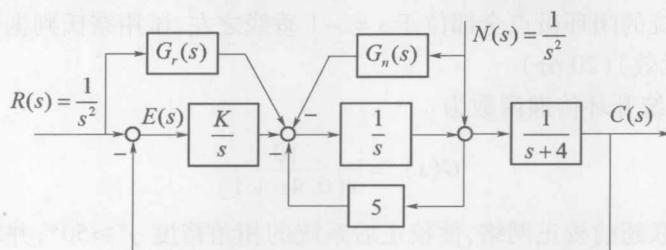


图 1

2. 设系统闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{1}{s+2}$, 试求选取误差带 $\Delta = 0.05$ 时的调节时间 t_s ; 若给系统增加一个零点, 使 $\Phi(s) = \frac{s+a}{s+2}$ ($a > 0, a \neq 2$), 试求系统在单位阶跃输入下的初值和终值, 并证明此时的 t_s 不变。 (15 分)

3. 我们知道, 若二阶系统闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$, 则调节时间 $t_s = 4.75s$ 。若将其中一个极点向左移动(假设移动到 -2), 使 $\Phi(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$, 试问 t_s 是增大还是减小(不说理由不得分)? 试求出此时的 t_s 。 (15 分)

4. 设正反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*(s+1)}{s^2+4s+5}$, 试绘制 K^* 从 $0 \rightarrow \infty$ 时的闭环根轨迹图, 并由此确定使系统稳定的 K^* 范围。(要求出分离点的坐标) (15 分)

5. 某单位反馈系统的开环幅相曲线如图 2 所示, 且 $G(j\sqrt{2}) = -j\sqrt{2}$

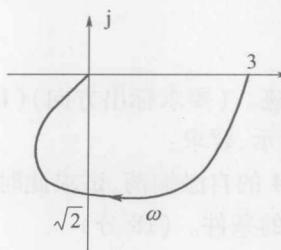


图 2

- (1) 当输入 $r(t) = 1(t)$ 时, 求输出量 $c(t)$ 的最大值及稳态误差 e_{ss} ;
- (2) 当输入 $r(t) = 5\sin 2t$ 时, 求系统的稳态误差 e_{ss} 。 (20 分)

6. 已知非最小相角系统的开环 Bode 图如图 3 所示, 开环增益 $K > 0$ 。

- (1) 确定开环传递函数 $G(s)$;
- (2) 用奈氏判据确定使系统稳定的 K 值范围。 (20 分)

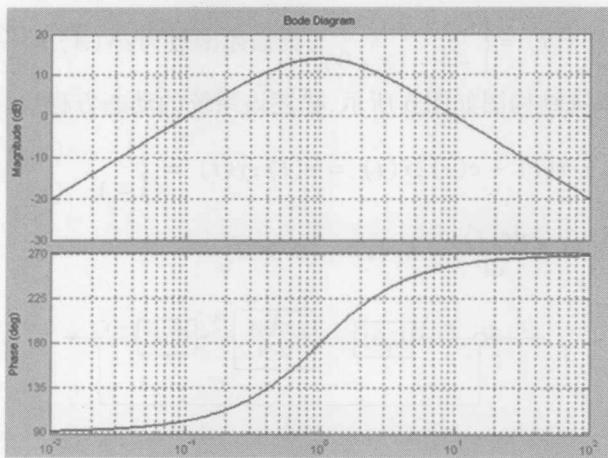


图 3

7. 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{5}{s(0.2s+1)(s+1)}$, 试设计串联校正网络使校正后的系统截止频率 $\omega_c^* \approx 0.7 \text{ rad/s}$, 相角裕度 $\gamma^* \geq 40^\circ$ 。(15 分)

8. 闭环采样系统结构图如图 4 所示, 采样周期 $T=1\text{s}, k>0$ 。

(1) 求使系统稳定的 k 值范围;

(2) 当 $k=1$ 时, 求系统在单位阶跃输入下的输出响应和稳态输出值。(15 分)

[提示: $Z\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{z}{z - e^{-aT}}$; $Z^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\right] = a^n$]

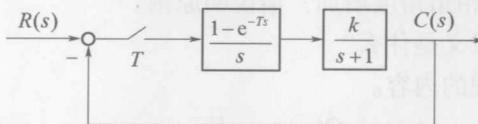


图 4

以下两题任选一题:

9. 已知非线性系统结构图如图 5 所示, 描述该系统的动态方程组如下:

$$e(t) = r(t) - c(t); \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = e(t); y(t) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases};$$

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 4 \frac{dc(t)}{dt} = ky(t) \quad (k > 0)$$

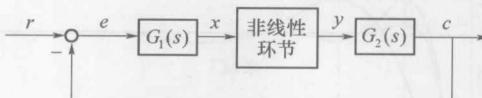


图 5

- (1) 求出 $G_1(s), G_2(s)$, 画出非线性环节的输入输出静特性关系曲线;
 (2) 用描述函数法研究系统的稳定性, 若有自振, 试求出自振参数。(15 分)

[提示: 非线性环节 $y(t) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$, 其描述函数为: $N(A) = \frac{4}{\pi A}$]

10. 已知非线性系统结构图如图 6 所示, 描述该系统的动态方程组如下:

$$e(t) = r(t) - c(t); x(t) = e(t); y(t) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases};$$

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 4 \frac{dc(t)}{dt} = ky(t) \quad (k > 0)$$



图 6

- (1) 求出 $G_1(s)$ 、 $G_2(s)$, 画出非线性环节的输入输出静特性关系曲线;
- (2) 求出 $e - \dot{e}$ 平面上的等倾线方程、开关线方程;
- (3) 请说出相轨迹的 2 个特点。(15 分)

III 2006 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题

1. 简答题(共 20 分, 每小题 4 分)

- (1) 何为系统的截止频率 ω_c ? 何为系统的带宽频率 ω_b ? 带宽频率通常取大好还是取小好? 为什么?
- (2) 简要说明比例积分微分 PID 控制规律中 P、I 和 D 的作用。
- (3) 串联超前校正的目的是利用其超前角使系统相角裕度 γ 增加, 串联滞后校正的相角为负值, 为何也会使系统的相角裕度增加? 请说明原因。
- (4) 频率特性的物理意义是什么?
- (5) 叙述香农采样定理的内容。

2. 设某伺服电动机的传递函数为 $\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$, 其中 $\Omega(s)$ 为角速度, $U(s)$ 为输入电压。

假设电动机在控制电压 U_0 作用下以 ω_0 恒定速度转动, 试求电压 U_0 突然降到零时, 电动机的输出响应 $\omega(t)$ 。(10 分)

3. 设三个二阶系统闭环传递函数均为 $\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$, 其单位阶跃响应如

图 1 所示, 试确定各闭环系统极点的相对位置, 并说明理由。(15 分)

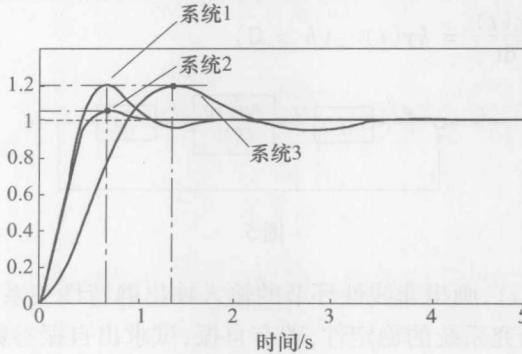


图 1

4. 设系统的结构如图 2 所示。

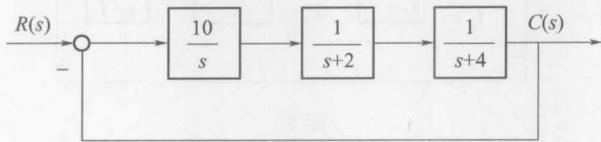


图 2

(1) 试求系统在输入 $r(t) = t$ 时的稳态误差;

(2) 试设计校正网络,使系统在输入 $r(t) = \sin t$ 时无误差。(20 分)

5. 某单位反馈系统的闭环根轨迹如图 3 所示。

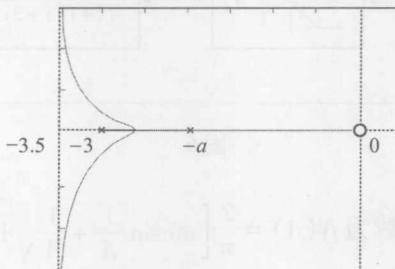


图 3

(1) 若使所有特征根均为负实根,根轨迹增益 K^* 取值范围是多少? 此时系统单位阶跃响应有超调吗?

(2) 求系统在输入 $r(t) = 1(t)$ 作用下的稳态输出 c_{ss} 。(20 分)

6. 已知最小相位系统开环对数幅频特性渐近曲线如图 4 所示,试确定其开环传递函数。(15 分)

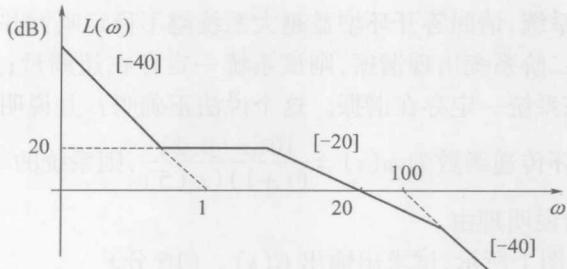


图 4

7. 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{20}{s(s+1)}$, 试设计串联校正网络使校正后的系统相角裕度 $\gamma'' \geq 45^\circ$ 。(15 分)

8. 已知采样系统的结构如图 5 所示,采样周期 $T = 1s$

(1) 判断系统的稳定性;

(2) 求系统在单位阶跃输入下的稳态误差 $e(+\infty)$ 。(20 分)

$$[\text{提示: } Z\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{z}{z - e^{-at}}]$$

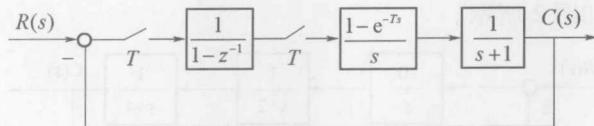


图 5

以下两题中任选一题：

9. 已知非线性系统结构如图 6 所示, 试用描述函数法分析 $K(K > 0)$ 的取值对系统稳定性的影响。(15 分)

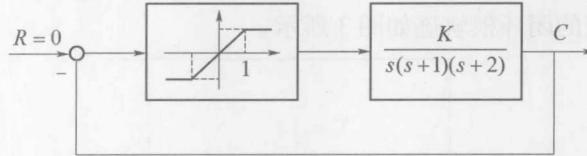


图 6

[提示: 非线性环节描述函数为 $N(A) = \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \frac{1}{A} + \frac{1}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{A} \right)^2} \right], A \geq 1$]

10. 若非线性系统的微分方程为 $\ddot{x} + (3\dot{x} - 0.5)x + x + x^2 = 0$, 试求系统的奇点, 并概略绘制奇点附近的相轨迹。(15 分)

IV 2007 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题

1. 简答题(本题共 20 分, 每小题 5 分)

(1) 某单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{10(s+2)}{s^2(2s+1)}$, 请说出其闭环根轨迹会出现共轭复数分离点吗? 并说明理由。

(2) 对于连续控制系统, 请回答开环增益越大系统越不稳定吗? 并说明理由。

(3) 某闭环无零点二阶系统出现谐振, 则该系统一定存在超调量; 反之, 某闭环无零点二阶系统出现超调量, 则该系统一定存在谐振。这个说法正确吗? 并说明理由。

(4) 若某系统的闭环传递函数为 $\varphi(s) = \frac{10(s+0.2)}{(s+1)(s+5)}$, 则系统的单位阶跃响应一定无超调, 这个说法正确吗? 请说明理由。

2. 某系统结构图如图 1 所示, 试求出输出 $C(s)$ 。(16 分)

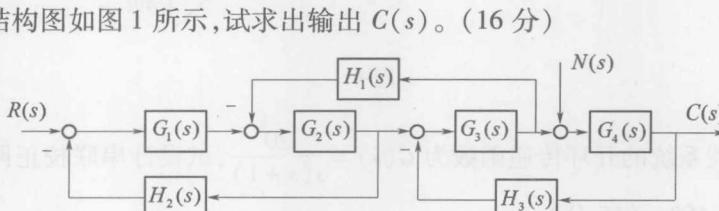


图 1

3. 系统结构图如图 2 所示, 已知未加测速反馈时, 系统在单位阶跃信号作用下的稳态输出为 1, 而过渡过程的瞬时最大值为 1.4, 要求:

(1) 确定系统结构参数 K 、 a , 并计算单位阶跃响应下的峰值时间 t_p 、调节时间 t_s 、超调

量 $\sigma\%$;

- (2) 为了改善系统性能, 引入测速反馈 bs , 若 $b = 0.82$, 再计算超调量 $\sigma\%$;
 - (3) 在该测速反馈情况下, 若此时系统的输入为 $r(t) = 2 + 1.38 \sin t$, 计算稳态输出 c_{ss} 。
- (16 分)

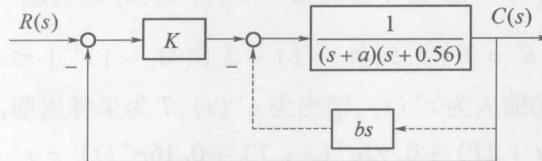


图 2

4. 设某反馈控制系统中前向通道的传递函数为 $G(s) = \frac{K^*}{s^2(s+2)(s+a)}$, 主反馈通道传递函数为 $H(s) = 1$, a 为大于 0 的常数, 系统闭环根轨迹具有重极点 -4。

- (1) 概略绘制闭环系统根轨迹($0 < K^* < \infty$), 试分析闭环系统稳定性;
- (2) 若改变主反馈通道传递函数为 $H(s) = 1 + 2s$, 用根轨迹法分析 $H(s)$ 改变后系统的闭环稳定性, 并研究 $H(s)$ 的改变所产生的效应。(18 分)

5. 设系统结构图如图 3 所示, 其中 $G(s) = \frac{10}{s^2(2s+1)}$

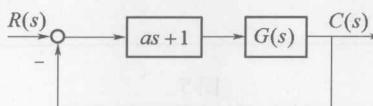


图 3

- (1) 试绘制 $a = 0$ 的开环幅相曲线, 并用奈氏判据判断该系统的闭环稳定性;
 - (2) $a > 0$, 若系统开环截止频率 ω_c 为 4, 问能否满足相角裕度 $\gamma > 25^\circ$ 的要求;
 - (3) 讨论参数 a 对系统稳定性的影响。(15 分)
6. 某最小相位系统, 其开环对数幅频特性曲线如图 4 所示, 试求出系统的开环传递函数 $G(s)$ 。(15 分)

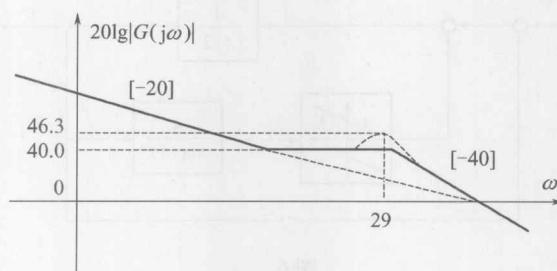


图 4

7. 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{200}{s(s+1)(s+100)}$$

设计一校正网络,使校正后的系统超调量 $\sigma\%$ 为原系统的 50% (允许误差 $\pm 5\%$)。并计算校正前后系统的调节时间。(18 分)

[提示:高阶系统频域性能指标与时域性能指标的关系为

$$M_r = \frac{1}{\sin\gamma}; \sigma\% = 0.16 + 0.4(M_r - 1), 1 \leq M_r \leq 1.8;$$

$$t_s = K\pi/\omega_c; K = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2, 1 \leq M_r \leq 1.8]$$

8. 已知某离散系统的输入为 $r^*(t)$, 输出为 $c^*(t)$, T 为采样周期, 系统的差分方程为
 $c^*(t+3T) + 1.7c^*(t+2T) + 0.92c^*(t+T) + 0.16c^*(t) = r^*(t+T) + 0.1r^*(t)$

(1) 试判断该系统的闭环稳定性;

(2) 设误差 $e^*(t) = r^*(t) - c^*(t)$, 当 $r(t) = 1(t)$ 时, 求系统的稳态误差 $e(+\infty)$ 。

[附: $Z(e^{-at}) = \frac{z}{z - e^{-at}} Z[1(t)] = \frac{z}{z - 1}$] (16 分)

以下两题任选一题:

9. 设某非线性系统结构如图 5 所示, 试绘制输入信号为 $r(t) = -2 \cdot 1(t) + 0.4t$ 时 $e - e$ 平面上的相轨迹。(16 分)

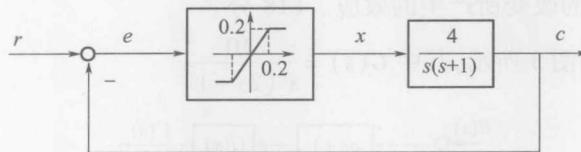


图 5

10. 设某非线性系统结构如图 6 所示, 其中 $M=1, K=1$ 。

(1) 试求系统等效线性部分的传递函数;

(2) 试用描述函数法分析系统是否产生自激振荡, 若有自振, 求出输出 $c(t)$ 的振荡频率和振幅。(16 分)

[附: 非线性环节的描述函数为: $N(A) = K + \frac{4M}{\pi A}$]

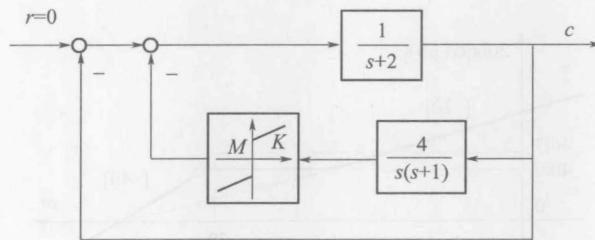


图 6

V 2008 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题

1. 简答题(本题共 20 分, 每小题 5 分)

(1) 已知某线性系统在单位阶跃信号作用下稳态误差为无穷大, 该系统是否不稳定? 请说明理由。

(2) 已知某二阶系统的闭环极点位于图 1 所示平面的阴影部分中, 请确定其阻尼比 ξ 和

无阻尼振荡频率 ω_n 的取值范围。

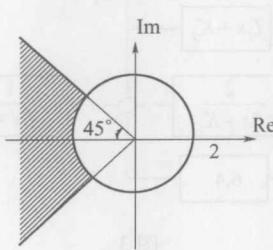


图 1

(3) 线性定常离散系统的稳定性除了与系统结构参数有关之外,还与哪些因素有关?

(4) 已知两个非线性系统的非线性环节相同,但其线性部分的传递函数分别为

$$G_1(s) = \frac{k}{s(5s+1)}, G_2(s) = \frac{k}{s(s+5)}$$

其中 $k > 0$, 用描述函数法分析时, 哪个系统分析的准确度高? 请说明理由。

2. 已知系统结构图如图 2 所示, 图中 $R(s)$ 为输入信号, $N(s)$ 为干扰信号, $C(s)$ 为输出信号。

(1) 试求传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 和 $\frac{C(s)}{N(s)}$;

(2) 若此时系统的特征方程为 $D(s) = s^6 + 4s^5 - 4s^4 + 4s^3 - 7s^2 - 8s + 10 = 0$, 试用劳斯判据判断系统的稳定性, 系统是否有在 s 右半平面和虚轴上的特征根? 若有, 求出这些根。(16 分)

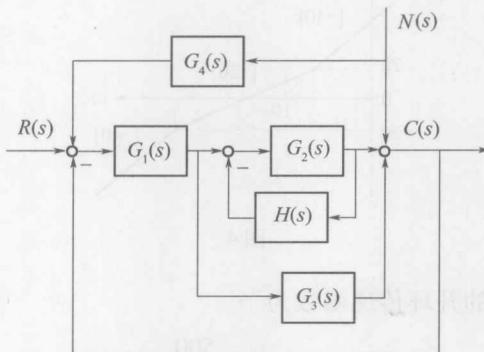


图 2

3. 已知图 3 所示系统在输入信号 $r(t) = 5 \cdot 1(t)$ 和扰动信号 $n(t) = 0.24\sin(2t + 45^\circ)$ 的作用下, 输出 $c(t)$ 的最大值为 2.8。稳态值为 2.0。

(1) 试确定系统的结构参数 K_1, K_2, T_1, T_2 ;

(2) 试求在输入信号 $r(t)$ 作用下的超调量 $\sigma\%$ 、峰值时间 t_p 和调节时间 t_s ;

(3) 试求在输入信号 $r(t)$ 作用下的稳态误差 e_{ss} 。(按输出端定义)(18 分)

4. 已知某系统的闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{4}{s^3 + 4s^2 + 4s + b}$$

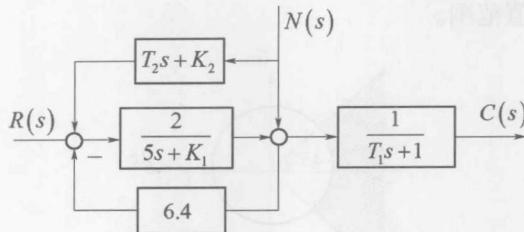


图 3

(1) 试绘制 b 从 $0 \rightarrow \infty$ 时的根轨迹图, 并确定使系统稳定的 b 值范围;

(2) 试确定系统阶跃响应无超调的 b 值范围;

(3) 试确定系统阻尼比 $\xi = 0.5$ 时的 b 值。 (16 分)

5. 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{100(as + 1)}{s(s + b)(s + c)}$$

(1) 当 $b = 1, c = 2$, 输入 $r(t) = 2\sin 8t$ 时, 若使稳态输出与输入信号反相, 请确定 a 值;

(2) 当 $a = 2, b = 0, c = -1$ 时, 绘制系统的开环幅相曲线, 并用奈氏判据判断系统稳定性;

(3) 在(2)的基础上, 如果该系统不稳定, 请采用校正方法使得闭环系统稳定。 (20 分)

6. 某最小相位系统, 其开环对数幅频特性曲线如图 4 所示, 试求系统的开环传递函数 $G(s)$ 。 (15 分)

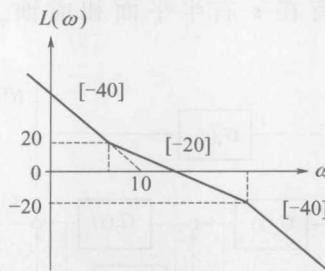


图 4

7. 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{500}{s(s + 5)(s + 20)}$$

试设计串联校正网络, 使校正后的系统超调量 $\sigma \% \leq 25\%$, 调节时间 $t_s \leq 1s$ 。 (15 分)

[提示: 高阶系统频域性能指标与时域性能指标的关系为

$$M_r = \frac{1}{\sin \gamma}; \quad \sigma = 0.16 + 0.4(M_r - 1) \quad 1 \leq M_r \leq 1.8; \quad t_s = \frac{K\pi}{\omega_c};$$

$$K = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2, \quad 1 \leq M_r \leq 1.8]$$

8. 已知离散系统结构图如图 5 所示, 其中 $K = 10, T = 0.2s$, 试求当输入 $r(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$

时系统的稳态误差 $e(\infty)$ 。 (15 分)

$$[\text{提示}]: Z\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{z}{z - e^{-at}}, Z\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{z}{z-1}, Z\left[\frac{1}{s^2}\right] = \frac{Tz}{(z-1)^2}, Z\left[\frac{1}{s^3}\right] = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

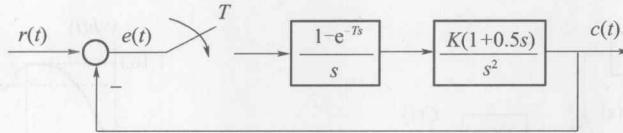


图 5

9. 已知非线性系统结构图如图 6 所示, 其中 $N(A) = e^{-A}$, $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$, ($K > 0$), 试用描述函数法分析当 K 从 $0 \rightarrow \infty$ 时, 非线性系统的自由运动。若有自振, 请求出自振参数。(15 分)

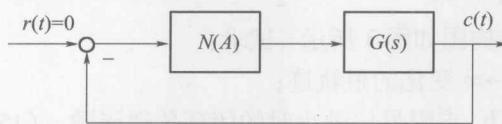


图 6

VI 2009 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题

1. 问答题(本题共 24 分, 每题 6 分)

(1) 已知某系统闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{200(s+10)}{(s+9.9)(25s^2 + 50s + 100)(s+100)}$, 试估算系统单位阶跃响应的调节时间($\Delta = 5\%$)。

(2) 某单位负反馈系统, 其开环传递函数为 $G(s) = \frac{10}{s(s+2)}$, 当输入 $r(t) = 3\sin 5t$ 时, 试求该系统的稳定输出。

(3) 某系统的特征方程如下, $s^5 + 3s^4 + 3s^3 + 9s^2 - 4s - 12 = 0$, 请用劳斯判据判断系统的稳定性, 并求出系统所有的特征根。

(4) 已知系统的状态方程为 $\dot{x} = \begin{bmatrix} -a & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$ (a 为实数), 试用李雅普诺夫第二方法判断系统的稳定性, 并说明物理意义。

2. 已知系统的结构图如图 1 所示。

(1) 求输入 $R(s)$ 和扰动 $N(s)$ 同时作用下的系统输出 $Y(s)$;

(2) 若使系统输出完全不受扰动的影响, 求 $G_1, G_2, G_3, G_4, H_1, H_2$ 应满足的关系。(15 分)

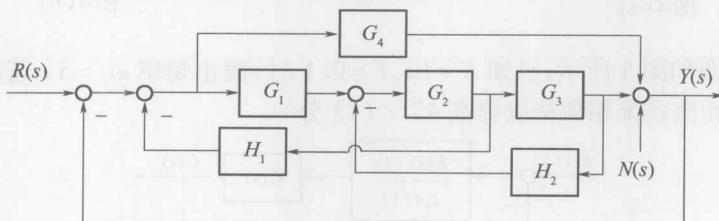


图 1

3. 已知系统结构图如图 2(a) 所示, 其中 $G(s)$ 为无零点的二阶环节。当 $G_c(s) = 0$ 时, 系统单位阶跃响应如图 2(b) 所示。

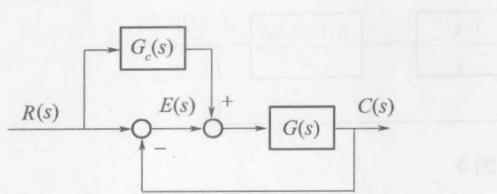


图 2(a)

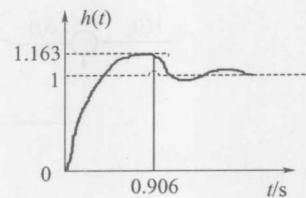


图 2(b)

(1) 求 $G(s)$ 的表达式;

(2) 若 $G_c(s) = \frac{as^2 + bs}{1+s}$, 在输入 $r(t) = \frac{1}{2}t^2$ 时, 稳态误差为零, 试确定 a, b 。(15 分)

4. 某正反馈系统的结构图如图 3 所示, 试求:

(1) 绘制参数 a 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化的根轨迹;

(2) 当系统稳定情况下, 求阻尼比最小时的闭环传递函数。(15 分)

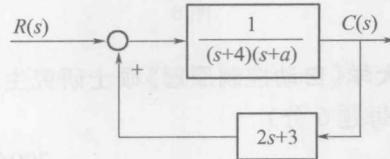


图 3

5. 已知某最小相位系统的结构图如图 4(a) 所示。其中, $\alpha > 0$, 前向通路 $G(s)$ 的对数幅频特性曲线如图 4(b) 所示。

(1) 求 $G(s)$ 的表达式。

(2) 用奈奎斯特稳定判据分析使闭环系统稳定的 α 的取值范围。

(3) 若 $\alpha = 0.2$ 时, 求系统相角裕度 γ 。(18 分)

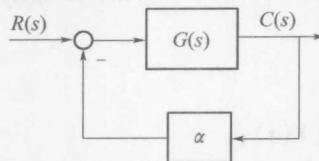


图 4(a)

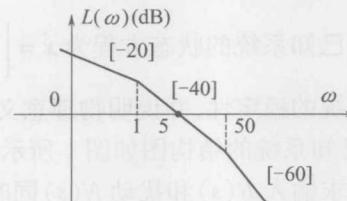


图 4(b)

6. 系统结构图如图 5 所示, 已知 $K = 10, T = 0.1$ 时, 截止频率 $\omega_c = 5$ 。若要求 ω_c 不变, 如何改变 K 和 T 才能使系统相角裕度提高 45° ? (13 分)

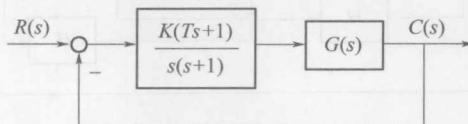


图 5

7. 某离散系统的结构图如图 6 所示。

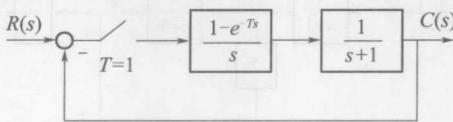


图 6

(1) 判断该系统的闭环稳定性;

(2) 若 $r(t) = 1(t)$, 求 $c(2), c(\infty)$ 的数值。(15 分)

$$[\text{提示: } Z\left[\frac{1}{s+a}\right] = \left[\frac{z}{z - e^{-at}}\right]]$$

8. 某非线性系统如图 7 所示, 已知非线性环节描述函数为 $N(A) = \frac{A+2}{3A+1}$ 。

(1) 分析参数 K 对系统自由运动的影响;

(2) 若能产生自激振荡, 试求使系统输出 $c(t)$ 处振幅为 1 时的自激振荡频率 ω 和参数 K 的值。(15 分)

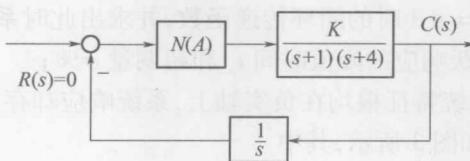


图 7

9. 已知系统动态方程 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$, 输出方程为 $y = [1 \ 0]x$ 。

(1) 判断系统的能控性和能观性;

(2) 设计状态控制反馈控制律 $u = r - k_1x_1 - k_2x_2$ (如图 8 所示), 将系统的闭环极点配置在 $-1 \pm j$;

(3) 令 $k_1 = 2500$, 画出闭环系统特征方程 k_2 从 0 变化到 ∞ 时的根轨迹, 并求出使闭环系统响应具有超调最短时间的 k_2 的值。(20 分)

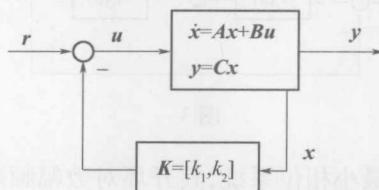


图 8

VII 2010 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题

1. 已知系统结构图如图 1 所示。

(1) 若将结构图等效为图 2 形式, 试求出等效的 $G_{\text{open}}(s)$;

(2) 试求使系统所有闭环特征根都位于 $s = -1$ 垂线之左的 K 值范围。(15 分)

2. 已知系统开环传递函数为

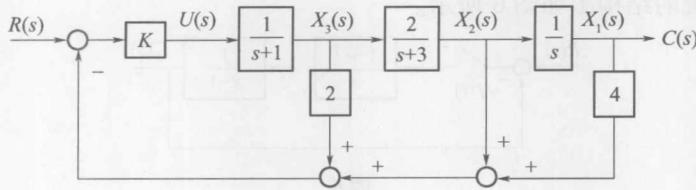


图 1

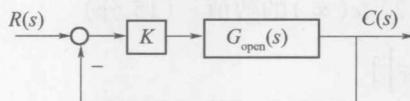


图 2

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-3)}$$

- (1) 绘制 K 从 0 变化至 ∞ 时系统闭环特征根的轨迹；
- (2) 写出闭环极点为 $s = -3$ 时的闭环传递函数，并求出此时系统的单位阶跃响应 $h(t)$ ；
- (3) 求出(2)中单位阶跃响应的峰值时间 t_p 和超调量 $\sigma\%$ ；
- (4) 简述为什么闭环系统特征根均在负实轴上，系统响应却存在超调？(15 分)

3. 已知系统的结构图如图 3 所示，其中

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

- (1) 若控制器 $G_c(s) = K$ 绘制 K 从 0 变化至 ∞ 时系统闭环特征根的轨迹(要求计算共轭极点的出射角)；
- (2) 若扰动信号为 $n(t) = 1(t)$ ，计算闭环系统仅在扰动作用下的稳态输出 c_{ss} ；
- (3) 若 $r(t) = 0, n(t) = 1(t)$ ，稳态输出 $c_{ss} < 0.1$ ，比例控制器是否能实现这样的性能指标？是，则求出比例增益 K ；否，则概述原因。(15 分)

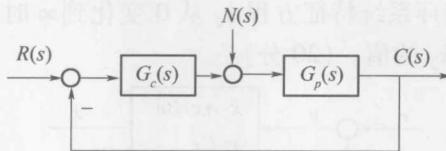


图 3

4. 设某单位负反馈系统为最小相位系统，其开环对数幅频渐近特性曲线如图 4 所示。
- (1) 求出该系统的开环传递函数 $G(s)$ ；
- (2) 求出该系统的相角裕度 γ ；
- (3) 如欲使其相角裕度 $\gamma > 30^\circ$ ，如果采用串联校正，应采用何种校正环节，如何设计？(15 分)

5. 假设单位负反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{K(T_2 s + 2)}{s^2 (T_1 s + 1)}$, $K > 0$ ，试绘制出 $T_1 > T_2 = 0$,

$T_1 > T_2 > 0$, $T_1 = T_2 > 0$, $T_2 > T_1 > 0$ 四种情况下的开环幅相曲线，并用奈奎斯特稳定判据判断系

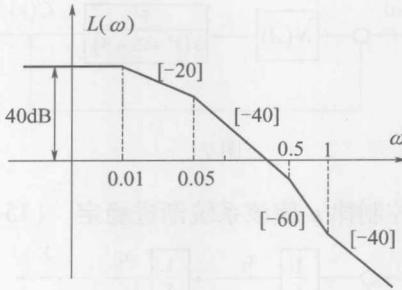


图 4

统在这四种情况下的闭环稳定性。(15 分)

6. 若某单位反馈系统的开环传递函数为 $G_1(s)e^{-\tau s}$, 二阶环节 $G_1(j\omega)$ 曲线如图 5 所示, 试求使该系统闭环稳定的 τ 值范围。(15 分)

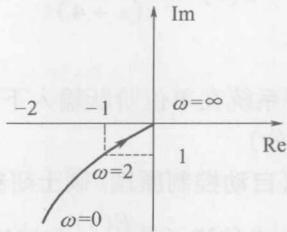


图 5

7. 已知采样系统的结构图如图 6 所示, 采样周期 $T=1$ 。

(1) 试确定系统稳定时 K 值范围;

(2) 求出 $K=2$ 时的 $c(\infty)$, 其中 $r(t)=1(t)$ 。(15 分)

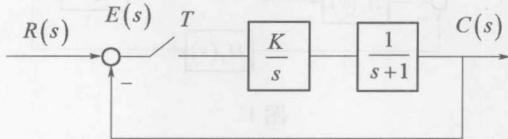


图 6

$$[\text{提示: } Z\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{z}{z - e^{-aT}}, Z\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{z}{z - 1}]$$

8. 已知非线性系统的结构图如图 7 所示, 图中 $N(A) = \frac{4M}{\pi A} + K$ 为非线性元件的描述函数, 若 $M=1, K=0.5$ 。

(1) 试分析该非线性系统的稳定性, 若产生自激振荡, 则求出自振振幅 A 和自振频率 ω 以及系统输出 $c(t)$ 的表达式;

(2) 若线性环节的开环增益扩大 5 倍, 再分析该非线性系统的稳定性。(15 分)

9. 已知系统结构图如图 8 所示。

(1) 将系统写成状态方程表达式;

(2) 试用李雅普诺夫稳定性理论判断系统稳定性;

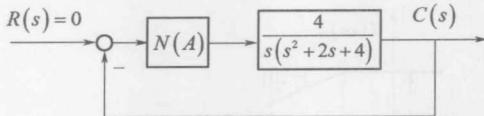


图 7

(3) 在(2)的基础上,设计控制律 u 使该系统渐进稳定。(15 分)

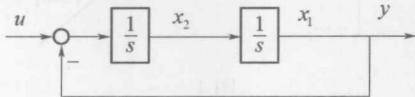


图 8

10. 已知系统的传递函数

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)}$$

(1) 写出系统的可控标准型;

(2) 设计状态反馈控制器,使得系统在单位阶跃输入下,最大超调量为 $\sigma\% = 16.3\%$, 调节时间 $t_s = 2s$ (2% 的误差带)。(15 分)

VIII 2011 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题

1. 已知某系统结构如图 1 所示,求传递函数 $\frac{E(s)}{R(s)}$ 和输出 $C(s)$ 。(15 分)

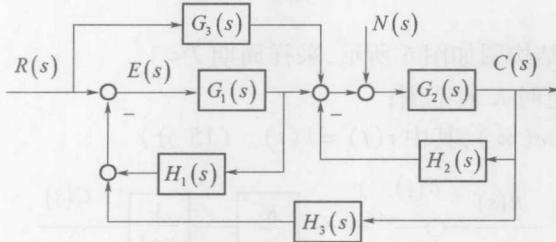


图 1

2. 已知某单位反馈的三阶系统(无闭环零点)结构图如图 2 所示,系统满足下列条件:

(1) 在单位斜坡信号输入下稳态误差 e_{ss} 为 1.125;

(2) 在单位阶跃信号输入下动态性能指标峰值时间 $t_p = 3.626s$, 超调量 $\sigma\% = 16.32\%$ 试求开环传递函数 $G(s)$ 。(15 分)

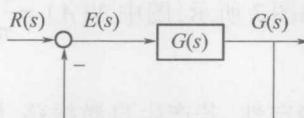


图 2

3. 已知某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{(s+K)(s+4)}{s(s^2+s-3)}$$

- (1) 绘制该系统的闭环根轨迹($K:0 \rightarrow \infty$)；
(2) 确定闭环系统有重极点时闭环传递函数(零、极点表达式)；
(3) 当输入为单位斜坡信号时, 欲使稳态误差 $|e_{ss}| \leq 1$, 求此时 K 值范围。(15 分)

4. 已知某系统的开环传递函数为 $GH_1(s)e^{-rs}$, 二阶环节 $GH_1(j\omega)$ 曲线如图 3 所示, 试判断该系统的闭环稳定性。(15 分)

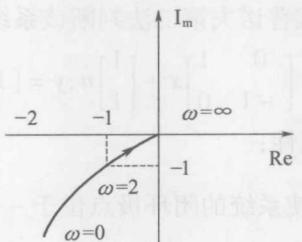


图 3

5. 已知某单位负反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$, 试设计串联滞后校正装置, 要求校正后系统的静态误差系数 $K_v = 30$, 相角裕度 $\gamma'' \geq 40^\circ$, 截止频率 $\omega'' \geq 2.3 \text{ rad/s}$ 。(15 分)

6. 已知某离散系统结构图如图 4 所示, 采样周期 $T = 1 \text{ s}$ 。

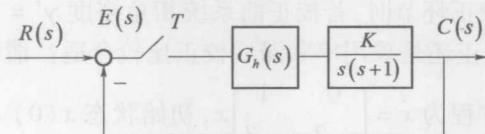


图 4

- (1) 当 $G_h(s) = 1$ 时, 求闭环系统稳定的 K 值范围;
(2) 当 $G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}, K = 1, R(s) = \frac{1}{s}$ 时, 试求该离散系统的输出相应 $c^*(t)$ 、稳态输出 $c^*(\infty)$ 和稳态误差 $e^*(\infty)$ 。(15 分)

[附 Z 变换表: $Z\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{z}{z - e^{-aT}}$; $Z\left[\frac{1}{s^2}\right] = \frac{Tz}{(z-1)^2}$; $Z\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{z}{z-1}$]

7. 已知非线性系统的结构图如图 5 所示, 图中非线性环节的描述函数 $N(A) = \frac{A+1}{4A+0.5}$, 线性部分的传递函数 $G(s) = \frac{k}{s(s+2)^2 + 10}$ 。

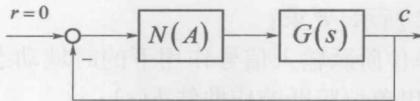


图 5

- (1) 当 $k = 5$ 时, 试用描述函数分析系统是否存在自激振荡? 若存在, 求出自激振荡振幅和频率;

(2) 当 $k=1$ 时, 分析该非线性系统的稳定性。(15 分)

8. 已知系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{s+10}{s^2 + 2as + 1} \quad (a \text{ 为实数})$$

(1) 试列写该系统的可控标准型实现;

(2) 在(1)的基础上, 试用李雅普诺夫第二法判断该系统的稳定性。(10 分)

9. 已知系统的动态方程为 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u, y = [1 \ 0]x$ 。

(1) 判断系统的可控性和可观性;

(2) 试设计状态反馈控制器, 使系统的闭环极点位于 $-\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ 处;

(3) 试求加入状态反馈后的闭环系统传递函数。(15 分)

10. (本题共 20 分, 每小题 4 分)

(1) 若单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*(s+1)}{(s-1)^2(s+18)}$, 请问该系统的闭环根

轨迹图中可能存在复数分离点吗? 请说明理由。

(2) 某负反馈最小相位系统的开环增益为 5, 其幅值裕度为 20dB, 则保证闭环系统稳定的最大开环增益为多少?

(3) 频率响应法设计校正环节时, 若校正前系统相角裕度 $\gamma' = -25^\circ$, 校正后的相角裕度 $\gamma'' = 45^\circ$, 则采用串联超前校正还是采用串联滞后校正比较合适? 请说明理由。

(4) 已知系统的状态方程为 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}x$, 初始状态 $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 试求该状态方程的解 $x(t)$ 。

(5) 线性定常系统经过状态空间的线性变换后特征值改变吗? 试证明之。

IX 2012 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题(学术型)

1. 用梅逊公式求图 1 所示系统在 $R(s)$ 和 $N(s)$ 同时作用下的输出 $C(s)$ 。(15 分)

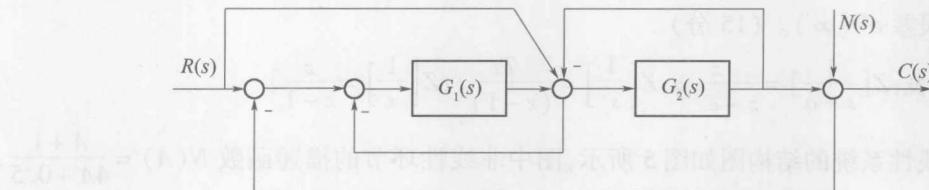


图 1

2. 某系统的结构图如图 2 所示, 要求:

(1) $K_t = 0$ 时, 求系统在单位阶跃输入信号作用下的时域动态性能指标, 超调量 $\sigma\%$ 和调节时间 t_s ($\Delta = 5\%$), 并概略绘出单位阶跃响应曲线 $h(t)$;

(2) 接上测速反馈 $K_t s$, 要求阻尼比 $\xi = 1$, 试确定 K_t 值, 此时 $\sigma\% = ?$ $t_s = ?$ 并概略绘出单位阶跃响应曲线。(15 分)

3. 某单位负反馈二阶系统, 其开环极点数大于开环零点数, 在输入信号 $r(t) = 1 + 2t + 3t^2$ 时, 系统稳态误差 $e_{ss} = 0.2$, 试求该系统截止频率 $\omega_c = 10$ 时的相角裕度 γ 。(15 分)

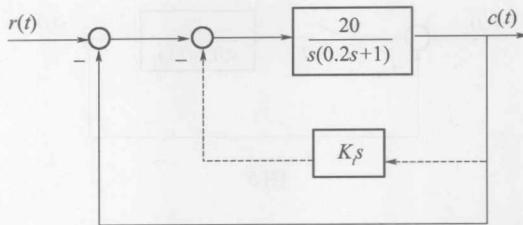


图 2

4. 某系统的结构图如图 3,若要求输入信号 $r(t) = t$ 时,稳态误差 $e_{ss} \leq 2.25$,同时系统单位阶跃响应无超调,试确定 K_1 的值。(15 分)

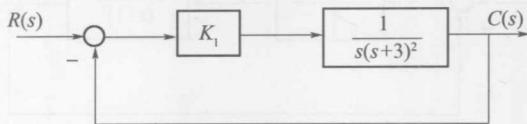


图 3

5. 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(0.2s + 1)(0.1s + 1)}{s^2(s + 1)(0.01s + 1)}$$

- (1) 请概略绘制系统的开环对数频率特性曲线(波德图),并判定使系统闭环稳定的 K 值范围;
 (2) 绘制 K 从 $0 \rightarrow \infty$ 时闭环特征根的轨迹,利用波德图中信息给出根轨迹穿过 S 平面虚轴时的 K 和 ω 。(15 分)

6. 系统结构图如图 4 所示(K_1, K_2, T 均大于零):

- (1) 当 $G_c(s) = 1$ 时,试判断系统的稳定性;
 (2) 若系统不稳定,加入校正网络 $G_c(s) = \tau s + b$,试求此时使系统稳定 τ 和 b 应满足的条件。(15 分)

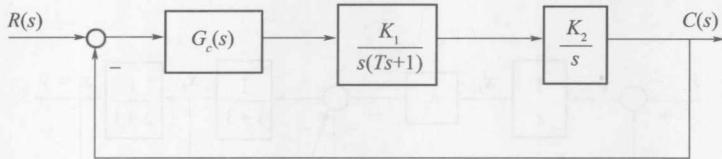


图 4

7. 已知采样系统的结构图如图 5 所示,要求:

- (1) 若使系统在 $r(t) = t$ 作用时稳态误差为 0.1,试确定采样周期 T 的值;
 (2) 求系统在上述采样周期下的单位阶跃响应 $c^*(t)$ (写出前三项即可)。(15 分)

[提示: $Z\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{z}{z - e^{-aT}}$, $Z\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{z}{z - 1}$]

8. 已知非线性系统的结构图如图 6,图中非线性元件的描述函数为 $N(A) = \frac{4M}{\pi A} + K$;其中 $M = 1, K = 0.5$ 。要求:

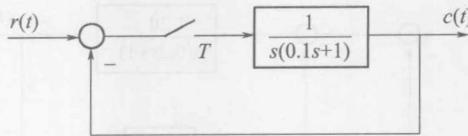


图 5

- (1) 分析周期运动的稳定性;
- (2) 求出稳定周期运动的振幅 A 和频率 ω 以及 $c(t)$ 表达式。(15 分)

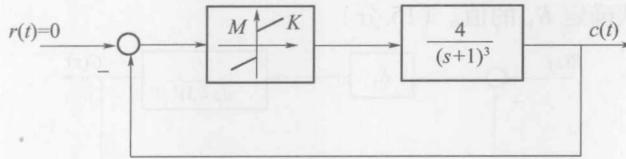


图 6

9. 某系统的状态空间模型为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + 5x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -6x_1(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

现采用状态反馈控制策略, 即 $u(t) = -k_1x_1(t) - k_2x_2(t) + r(t)$, 其中 k_1, k_2 为实常数, $r(t)$ 为系统参考输入。

- (1) 欲使闭环系统的阻尼比为 0.707, 请给出 k_1, k_2 应满足的关系式;
- (2) 欲使闭环系统的阻尼比为 0.707, 自然频率为 10, 请给出 k_1, k_2 的具体数值;
- (3) 欲使闭环系统在阶跃输入下的稳态误差为 0, 请给出 k_1, k_2 应满足的关系式。(15 分)

10. 某状态负反馈控制系统如图 7 所示, 反馈增益 k_1, k_2, k_3 为实常数。

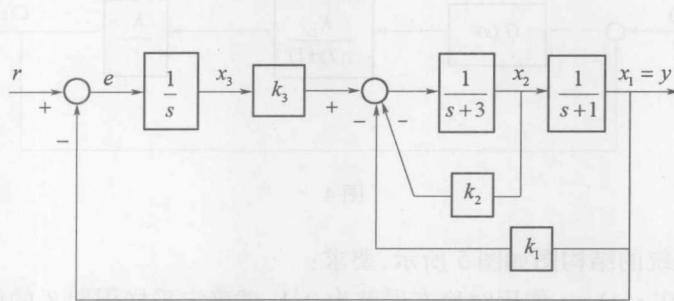


图 7

- (1) 请分别写出闭环系统的状态表达式模型和误差传递函数模型;
- (2) 欲使得闭环系统在阶跃输入下稳态误差 e_{ss} 为 0, 请确定 k_1, k_2, k_3 的关系式;
- (3) 欲使得经状态反馈控制后系统特征根为 $\{-1+j, -1-j, 10\}$, 请确定反馈增益 k_1, k_2, k_3 的数值。(15 分)

X 2012 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题(专业型)

1. 用梅逊公式求图 1 所示系统的闭环传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 和 $\frac{C(s)}{N(s)}$ 。(15 分)

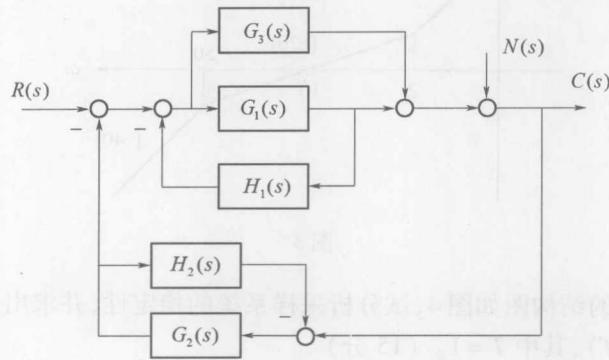


图 1

2. 某系统结构如图 2 所示,当 $K_r = 0, r(t) = 1(t)$ 时系统的超调量为 $\sigma\% = 16.3\%$, 当 $K_r = 0, r(t) = t$ 时, 稳态误差 $e_{ss} = 0.25$ 。

- (1) 求系统的结构参数 K, K_i ;
- (2) 试求 $K_r = 0, r(t) = 1(t)$ 时系统的调节时间 t_s ($\pm 5\%$ 误差带) 及输出的最大值 c_{max} ;
- (3) 设计 K_r , 使系统在 $r(t) = t$ 作用下无稳态误差。(20 分)

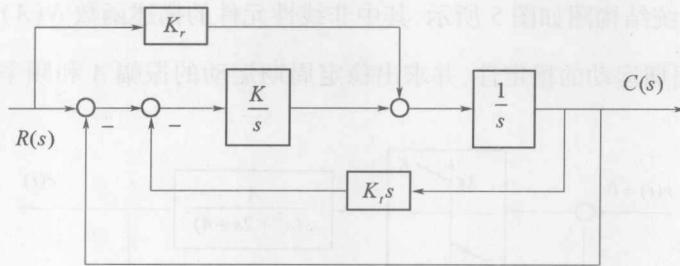


图 2

3. 某单位负反馈二阶系统,其开环极点数大于开环零点数,在输入信号 $r(t) = 1 + 2t + 3t^2$ 时, 系统稳态误差 $e_{ss} = 0.2$, 试求该系统截止频率 $\omega_c = 10$ 时的相角裕度 γ 。(20 分)

4. 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{s + T}{s(s + 2)(s + 4)}$$

- (1) 当 T 从零到无穷变化时, 绘制系统的闭环根轨迹;
- (2) 确定系统阶跃响应中含有分量 $e^{-at} \sin(\omega t + \varphi)$ 时 T 的取值范围(其中 $a > 0$)。(15 分)

5. 已知最小相角系统的开环对数幅频渐近特性见图 3, 要求:

- (1) 写出系统的开环传递函数 $G(s)H(s)$;
- (2) 计算相角裕度 γ ;
- (3) 概略绘出开环系统的幅相频率特性曲线, 并用奈氏判据判断系统稳定性。(15 分)

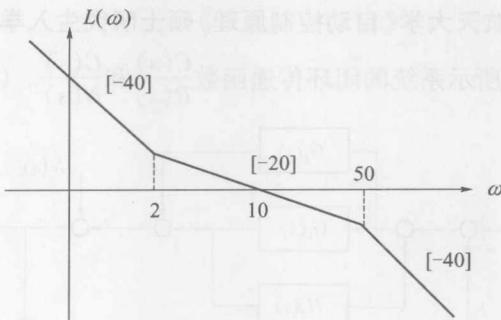


图 3

6. 已知采样系统的结构图如图 4, 试分析采样系统的稳定性, 并求出 $r(t) = 1(t)$ 时的稳态输出 $c^*(\infty)$ 以及 $c(2T)$, 其中 $T=1$ 。(15 分)

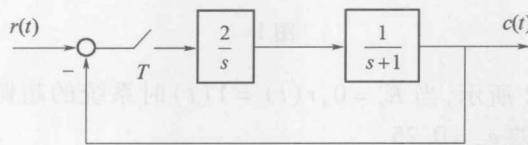


图 4

$$[\text{提示: } Z\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{z}{z - e^{-at}}, Z\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{z}{z - 1}]$$

7. 某非线性系统结构图如图 5 所示, 其中非线性元件的描述函数 $N(A) = \frac{4M}{\pi A} + K$, 若 $M = 1, K = 0.5$, 试分析周期运动的稳定性, 并求出稳定周期运动的振幅 A 和频率 ω 以及 $c(t)$ 的表达式。(15 分)

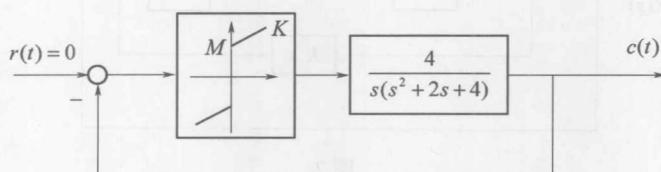


图 5

8. 已知控制系统如图 6 所示。

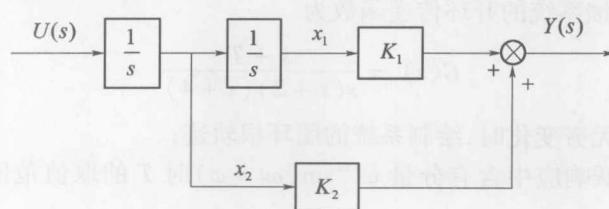


图 6

(1) 写出以 x_1, x_2 为状态变量的系统状态空间表达式;

(2) 试判断系统的能控性和能观性。若不满足系统的能控性和能观性条件, 问当 K_1 与

K_2 取何值时, 系统能控或能观;

(3) 求系统的传递函数。(20 分)

9. 已知系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+5)}$$

(1) 设计状态反馈控制律, 将闭环极点配置在 $-5, -1 \pm j$ 处;

(2) 分析经状态反馈设计后, 系统动态性能和稳态性能的变化。(10 分)

10. 已知系统 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}x$, 试应用李雅普诺夫方程, 当 $Q = I$ 时, 求 P 并判断系统的稳定性。(5 分)

XI 2013 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题(学术型)

1. 某系统结构图如图 1 所示, 求在 $R(s)$ 和 $N(s)$ 作用下, 系统输出 $C(s)$ 的表达式。(15 分)

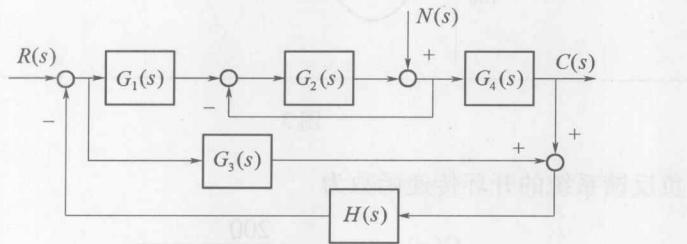


图 1

2. 某控制系统结构图如图 2 所示, 当扰动 $n(t) = 0$, 输入 $r(t) = 1(t)$ 时, 系统超调量 $\sigma\% = 20\%$, 调节时间 $t_s = 1s$ (取 $\Delta = 5\%$)。

(1) 试确定结构参数 K 和 T 的值;

(2) 当 $r(t) = t, n(t) = 1(t)$ 时, 求系统的稳态误差。(15 分)

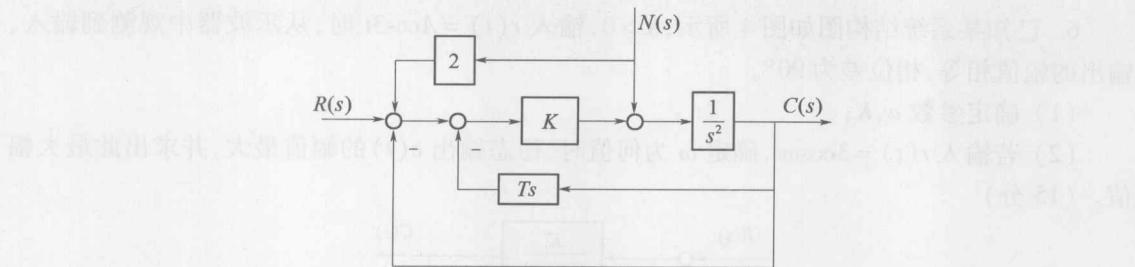


图 2

3. 已知某系统特征多项式为 $s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s + K(s+2)$, 要求:

(1) 确定特征根均为复根的 K 值范围;

(2) 确定系统临界稳定时的闭环极点。(15 分)

4. 已知某最小相位系统的开环对数幅频渐近线如图 3 所示, 用奈奎斯特判据判断系统稳定性, 并求系统的相位裕度 γ 与幅值裕度 h 。(15 分)

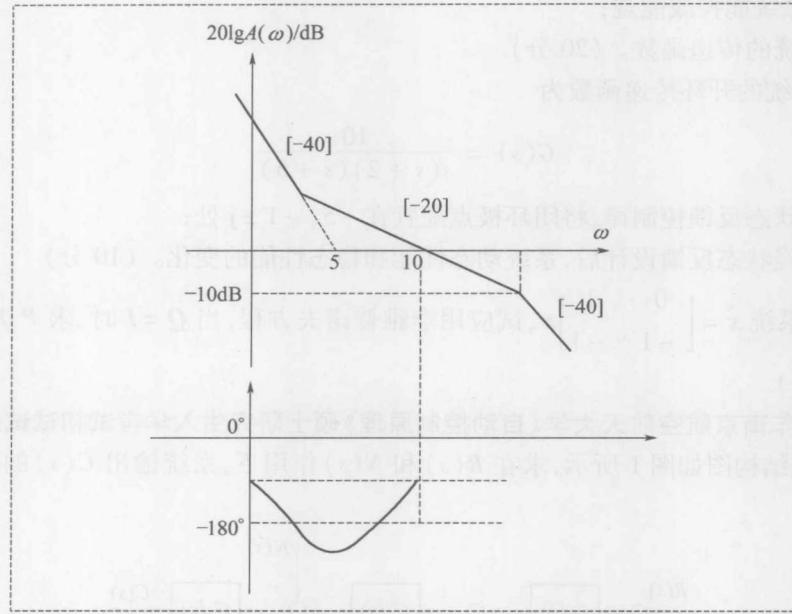


图 3

5. 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{200}{s(s+1)(s+100)}$$

设计一校正网络,使校正后的系统超调量 $\sigma\%$ 为原系统的 50% (允许误差 $\pm 5\%$)。并计算校正前后系统的调节时间。(15 分)

[提示:高阶系统频域性能指标与时域性能指标的关系为

$$M_r = \frac{1}{\sin\gamma}, \sigma\% = 0.16 + 0.4(M_r - 1), 1 \leq M_r \leq 1.8,$$

$$t_s = K\pi/\omega_c, K = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2, 1 \leq M_r \leq 1.8]$$

6. 已知某系统结构图如图 4 所示, $K > 0$, 输入 $r(t) = A \cos 3t$ 时, 从示波器中观测到输入、输出的幅值相等, 相位差为 90° 。

(1) 确定参数 a, K ;

(2) 若输入 $r(t) = 3 \cos \omega t$, 确定 ω 为何值时, 稳态输出 $c(t)$ 的幅值最大, 并求出此最大幅值。(15 分)

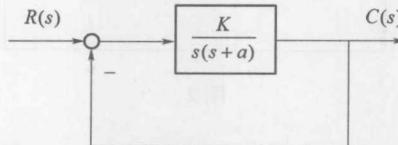


图 4

7. 已知某采样系统结构图如图 5 所示, 采样周期 $T = 0.693$ s, 试分析该系统的稳定性, 并求 $r(t) = 1(t)$ 时的稳态输出 $c(\infty)$ 。(15 分)

$$[\text{提示: } Z\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{z}{z - e^{-at}}, Z\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{z}{z - 1}]$$

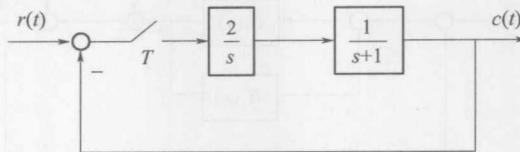


图 5

8. 某非线性系统结构图如图 6 所示, 其中非线性元件的描述函数 $N(A) = \frac{4M}{\pi A} + K$, 若 $M = 1, K = 0.5$, 试分析周期运动的稳定性, 并求出稳定周期运动的振幅 A 和频率 ω 以及 $c(t)$ 的表达式。(15 分)

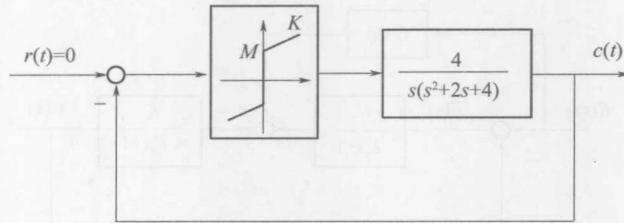


图 6

9. 已知系统的状态空间表达式为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = [0 \ 1]x$$

- (1) 判断系统是否渐近稳定和 BIBO 稳定;
 (2) 判断系统的可控性和可观性;
 (3) 若该系统状态不完全可控, 试按能控性进行结构分解, 并分析能否用状态反馈使闭环系统稳定。(15 分)

10. 已知系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{12}{s^3 + 18s^2 + 72s}$$

- (1) 试求其可控标准型实现;
 (2) 在可控标准型实现的基础上设计状态反馈控制律, 使闭环系统单位阶跃响应的超调量 $\sigma\% = 4.3\%$, 调节时间 $t_s = 3.5s$ (取 $\Delta = 5\%$), 且其中一个闭环极点为 $s = -7$;
 (3) 在零初始条件下, 试求经过状态反馈后闭环系统的单位阶跃响应稳态值。(15 分)

XII 2013 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题(专业型)

1. 试求图 1 所示系统的闭环传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 和 $\frac{C(s)}{N(s)}$ 。(15 分)

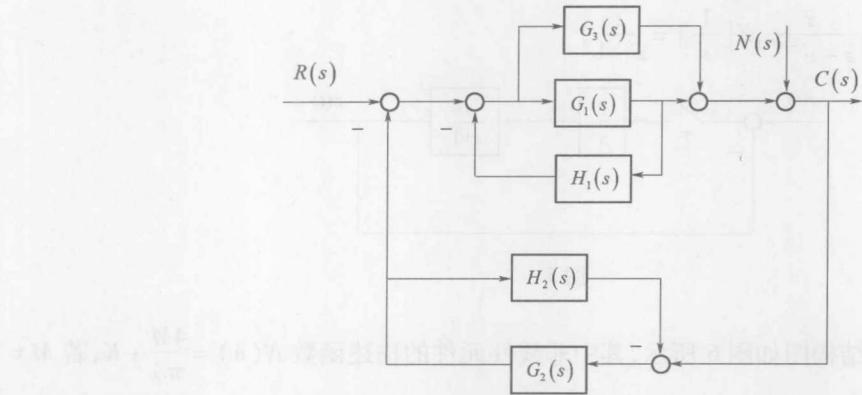


图 1

2. 设某系统结构图如图 2 所示, 图中 K_1, K_2, T_1, T_2 为大于零的常数。(15 分)

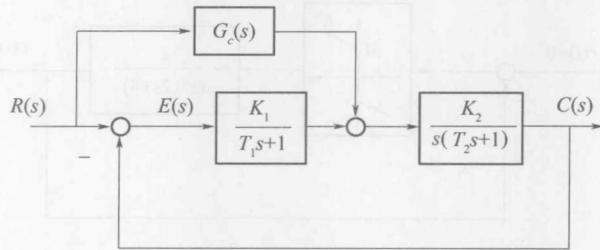


图 2

(1) 确定当闭环系统稳定时, 参数 K_1, K_2, T_1, T_2 应满足的条件;

(2) 当输入 $r(t) = V_0 t$ 时, 选择校正装置 $G_c(s)$ 使得系统无稳态误差(误差 $E(s)$ 定义为 $R(s) - C(s)$)。(15 分)

3. 设某单位负反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

试概略绘制 K^* 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时的闭环根轨迹, 并求临界根轨迹增益及该增益对应的三个闭环极点。(15 分)

4. 设某单位负反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

设 $|\varphi(j\omega)|$ 表示闭环幅频特性, ω_n 表示系统的无阻尼震荡频率, ω_r 表示系统的谐振频率, $r(t)$ 为系统输入, $c(t)$ 为系统输出, 且知 $|\varphi(j1)| = 1$, $\omega_r = 0.707$, $r(t) = 1 + 2\sin 2t$ 。

(1) 确定参数 K, a , 并求系统的稳态输出 $c_{ss}(t)$;
 (2) 求相角裕度 γ , 若在相角裕度保持不变的情况下, 使 $K = 10$, 则此时的 a 值应为多少?(15 分)

5. 设某单位负反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

试设计串联校正装置,要求校正后系统的静态速度误差系数等于 $30(1/s)$, 相角裕度不低于 40° , 幅值裕度不小于 10dB , 截止频率不小于 2.3rad/s 。(15 分)

6. 已知某离散系统的结构如图 3 所示, 要求:

(1) 判断系统的稳定性;

(2) 求 $r(t) = 1(t)$ 时系统的输出 $c(T)$ 和 $c(\infty)$ 。(15 分)

[提示: $Z\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{z}{z - e^{-aT}}$, $Z\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{z}{z - 1}$]

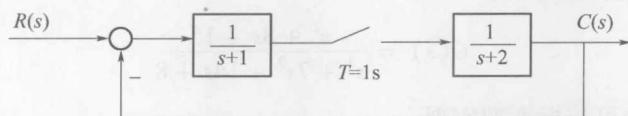


图 3

7. 某非线性系统的结构图如图 4 所示, 非线性环节的描述函数 $N(A) = \frac{1}{2} + \frac{3}{16}A^2$, 线性部分的传递函数 $G(s) = \frac{K(s+1)(0.1s+1)}{s(10s+1)(5s+1)}$, 其幅相曲线如图 5 所示, 试确定系统产生自激振荡的临界值 K 。(15 分)

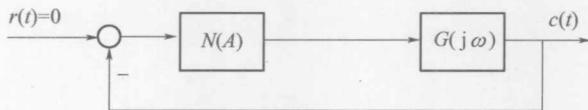


图 4

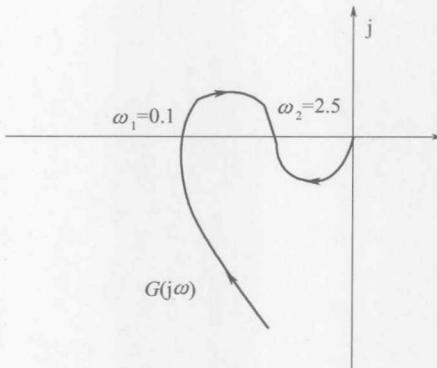


图 5

8. 已知系统的状态空间表达式为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}u$$

$$y = [c_1 \quad c_2]x$$

其中 b_1, b_2, c_1, c_2 为实数。

(1) 试将其化为对角型;

(2) 在状态空间表达式化为对角型的基础上若使系统一个状态既能控又能观, 另一个状

态既不能控又不能观,试确定 b_1, b_2, c_1, c_2 应满足的条件。(15 分)

9. 已知线性定常离散系统的状态方程为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

试判断系统在平衡状态处的稳定性。(15 分)

10. 已知系统的传递函数为

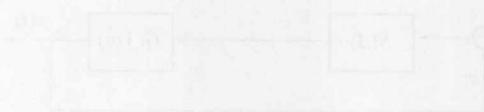
$$G(s) = \frac{s^2 + 8s + 15}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

(1) 试求系统的可控标准型实现;

(2) 在可控标准型实现的基础上设计状态反馈控制律使系统的闭环极点配置在 $-1, -2, -3$ 处。(15 分)

备题库中所有练习题的解题步骤及图解请参阅其 (1) 的最后部分。

(代号) 之前空出的



2007—2013 年《自动控制原理》 硕士研究生入学考试初试试题参考答案

I 2007 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题参考答案

1. (20 分)

(1) 该系统没有复数分离点。因为如果有复数分离点必须是共轭出现的，起码有 4 条根轨迹，本系统只有 3 条根轨迹，所以本系统无复数分离点。

(2) 对于连续控制系统，开环增益越大系统不一定越不稳定。因为这个结论只对最小相角系统成立，非最小相角系统没有这个规律。可能是开环增益越大稳定性越好。

(3) 这个说法不正确。因为有谐振的范围是 $0 < \xi < 0.707$ 时，而有超调量的范围是 $0 < \xi < 1$ 。因此 $0.707 < \xi < 1$ 时，系统有超调量，但没有谐振。

(4) 这个说法不正确。本来应该是二阶过阻尼系统，无超调的，这里因为系统有闭环零点，且十分靠近虚轴，会削弱系统阻尼比，因而该系统可能有超调。

2. (16 分)

(1) 计算 $\phi_{cr}(s)$ ：前向通路个数为 1 个： $p_1 = G_1 G_2 G_3 G_4, \Delta_1 = 1$ ；共有 3 个回路：

$$L_1 = -G_1 G_2 H_2, L_2 = -G_2 G_3 H_1, L_3 = -G_3 G_4 H_3$$

两两不相交回路增益：

$$L_1 L_3 = G_1 G_2 G_3 G_4 H_2 H_3$$

$$\text{从而 } \phi_{cr}(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_1 G_2 H_2 + G_2 G_3 H_1 + G_3 G_4 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_2 H_3}$$

(2) 计算 $\phi_{cn}(s)$ ：前向通路个数为 1 个： $p'_1 = G_4, \Delta'_1 = 1 + G_1 G_2 H_2 + G_2 G_3 H_1$ ；从而

$$\phi_{cn}(s) = \frac{G_4 (1 + G_1 G_2 H_2 + G_2 G_3 H_1)}{1 + G_1 G_2 H_2 + G_2 G_3 H_1 + G_3 G_4 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_2 H_3}$$

所以

$$\begin{aligned} C(s) &= R(s) \phi_{cr}(s) + N(s) \phi_{cn}(s) \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 R + G_4 (1 + G_1 G_2 H_2 + G_2 G_3 H_1) N}{1 + G_1 G_2 H_2 + G_2 G_3 H_1 + G_3 G_4 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_2 H_3} \end{aligned}$$

3. (16 分)

(1) 未加测速反馈时，有 $\Phi(s) = \frac{K}{(s+a)(s+0.56)+K} = \frac{K}{s^2 + (a+0.56)s + 0.56a + K}$ ；

又因为 $\sigma\% = \frac{1.4-1}{1} \times 100\% = 40\% \Rightarrow \xi = 0.28, h(\infty) = 1 \Rightarrow a = 0$ ，所以

$$\Phi(s) = \frac{K}{s^2 + 0.56s + K} \Rightarrow \omega_n = 1, K = \omega_n^2 = 1$$

峰值时间为

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 3.27s$$

调节时间为

$$t_s = \frac{3.5}{\xi \omega_n} = 12.5s$$

(2) 加入测速反馈后,有

$$G'(s) = \frac{1}{s(s + 0.56) + bs}, \Phi'(s) = \frac{1}{s^2 + (0.56 + b)s + 1}$$

特征方程式

$$D(s) = s^2 + (0.56 + b)s + 1 \Rightarrow \omega_n = 1 \\ 2\xi\omega_n = b + 0.56 = 1.38 \Rightarrow \xi = 0.69$$

故 $\sigma\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 5\%$ 。

(3) 测速反馈下,有

$$\Phi'(s) = \frac{1}{s^2 + 1.38s + 1}, r_2(t) = 1.38 \sin t$$

故

$$\Phi'(j1) = \frac{1}{1.38j}, A(1) = \frac{1}{1.38}, \varphi(1) = -90^\circ \Rightarrow c_{ss2} = \sin(t - 90^\circ), r_1(t) = 2$$

该系统为 I 型系统, $c_{ss1} = 2$, 故 $c_{ss} = 2 + \sin(t - 90^\circ)$ 。

4. (18 分)

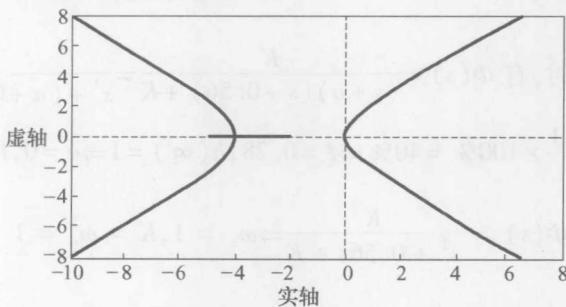
$$G(s) = \frac{K^*}{s^2(s+2)(s+a)}$$

(1) $K^*(0 \rightarrow +\infty)$ 的根轨迹以 -4 为分离点, 所以 $\frac{2}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+a} = 0 \Rightarrow a = 5$; 所以

$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s^2(s+2)(s+5)} \Rightarrow n = 4, p_{1,2} = 0, p_3 = -2, p_4 = -5; m = 0$; 实轴根轨迹为 [-5, -2]; 渐近线与实轴交点 $\sigma_a = \frac{-2 - 5}{4} = -\frac{7}{4}$; 夹角 $\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$; 与虚轴的交点

为 $1 + G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K^*}{-\omega^2(j2+2)(j\omega+5)} + 1 = 0$, 令 $\text{Re}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0, \text{Im}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$

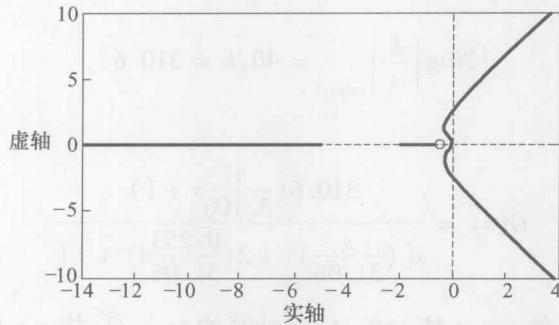
得到 $\omega = 0, K^* = 0$ 。画根轨迹如下图:



从而系统不稳定。

$$(2) H(s) = 1 + 2s \Rightarrow G(s)H(s) = \frac{K^*(2s+1)}{s^2(s+2)(s+5)}$$

所以 $m=1, z = -0.5; n=4, p_{1,2}=0, p_3=-2, p_4=-5$; 实轴根轨迹为 $[-2, -0.5]$, $(-\infty, -5]$; 漐近线交点 $\sigma_a = \frac{-2-5+0.5}{4-1} = -\frac{11}{6}, \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{4-1} = \pm\frac{\pi}{3}, \pi$; 与虚轴交点为 $-\omega^2(j\omega+2)(j\omega+5) + K^*(2j\omega+1) = 0 \Rightarrow K^* = 22.75, \omega = 2.55$; 画根轨迹如下图:



当 $0 < K^* < 22.75$ 时, 系统稳定; 当 $K^* > 22.75$, 系统不稳定。

由前面两种根轨迹稳定性分析可以知道, 单位反馈时, 系统不稳定, 而测速反馈加入后, 增加了系统开环零点, 使得系统在一定条件下稳定, 提高了稳定性。

5. (15 分)

$$(1) G(s) = \frac{10}{s^2(2s+1)}$$

$$\text{当 } a=0 \text{ 时, } G(j\omega) = \frac{10}{-\omega^2(2j\omega+1)},$$

$$\text{当 } \omega \rightarrow 0^+ \text{ 时, } \angle G(j\omega) = -180^\circ, |G(j\omega)| = \infty;$$

$$\text{当 } \omega \rightarrow \infty \text{ 时, } \angle G(j\omega) = -270^\circ, |G(j\omega)| = 0.$$

由此可知, $(-1, j0)$ 在 $G(j\omega)$ 与实轴交点的右边, 所以 $Z = P - 2N = P - 2(N_+ - N_-) = 2 \neq 0$, 从而系统闭环不稳定。

$$(2) G(s) = \frac{10(as+1)}{s^2(2s+1)}, \text{ 开环截止频率为 } \omega_c = 4, \text{ 故 } \left| \frac{10(as+1)}{s^2(2s+1)} \right|_{s=j4} = 1, a = 3.2 \text{ 因而 } \gamma =$$

$180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ + \arctan(a\omega_c) - 180^\circ - \arctan(2\omega_c)$ 代入 $\omega_c = 4, a = 3.2 \Rightarrow \gamma = 2.66^\circ$, 不满足要求。

(3) $a=2, \gamma=0^\circ$, 闭环系统临界稳定; $a>2, \gamma>0^\circ$, 闭环系统稳定; $a<2, \gamma<0^\circ$, 闭环系统不稳定。

6. (15 分)

$$G(s) = \frac{k(s/\omega_1 + 1)}{s(s^2/\omega_2^2 + 2s\xi/\omega_2 + 1)}$$

对于谐振部分, 有

$$M_r = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$20\lg M_r = 20\lg \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}} = 46.3 - 40 = 6.3 \text{ dB}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

代入 ω_d , 故 $\omega_2 = 31.06, \xi = 0.253$ 。设截止频率为 ω_c , 则有

$$-40(\lg \omega_c - \lg \omega_2) = 0 - 40, \omega_c = 310.6$$

$$\text{又 } -20(\lg \omega_c - \lg \omega_1) = 0 - 40, \omega_1 = 3.106$$

代入:

$$20\lg \left| \frac{k}{s} \right|_{s=j\omega_1} = 40, k = 310.6$$

从而

$$G(s) = \frac{310.6 \left(\frac{1}{3.106}s + 1 \right)}{s \left[\left(\frac{s}{31.06} \right)^2 + 2 \left(\frac{0.253}{31.06}s \right) + 1 \right]}$$

7. (18 分) 求原系统的 $\omega_c, \gamma, M_r, \sigma\%, t_s$, 经计算的 $\omega_c = \sqrt{2}$, 故 $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \sqrt{2} - \arctan(0.01 \times \sqrt{2}) = 34.45^\circ$

$$M_r = \frac{1}{\sin \gamma'} = \frac{1}{\sin 34.45^\circ} = 1.77, \sigma\% = 0.16 + 0.4(M_r - 1) = 46.8\%$$

$$K = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2 = 4.637, t_s = \frac{K\pi}{\omega_c} = 10.3s$$

根据题意校正后的超调量 $\sigma'\% = 0.468/2 = 23.4\%$, 故

$$M'_r = \frac{\sigma'\% - 0.16}{0.4} + 1 = 1.185, K' = 2 + 1.5(M'_r - 1) + 2.5(M'_r - 1)^2 = 2.361$$

根据题意需将原来的相角裕度从 34.45° 提高到 57.55° ; 这里采用超前校正设计。

设 $aG(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$, 采用超前校正后系统的截止频率会增大, 造成原来系统相角裕度变小, 假设变小 6° , 即 $180^\circ + \varphi(\omega'_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega'_c - \arctan(0.01 \times \omega'_c) = 34.45^\circ - 6^\circ$

解得 $\omega'_c = 1.84$ 。校正后的相角裕度 $\gamma' = \gamma - 6^\circ + \varphi_m$, 即 $57.55^\circ = 34.45^\circ - 6^\circ + \varphi_m$, 即

$$\varphi_m = 29.1^\circ, \text{ 所以 } a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} = 3, t'_s = \frac{K' \pi}{\omega'_c} = 4.03s$$

8. (16 分)

(1) $c^*(t+3T) + 1.7c^*(t+2T) + 0.92c^*(t+T) + 0.16c^*(t) = r^*(t+T) + 0.1r^*(t)$ 对两侧取 Z 变换, 有

$$\Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

得

$$\Phi(z) = \frac{z + 0.1}{z^3 + 1.7z^2 + 0.92z + 0.16}$$

特征方程式为

$$D(z) = z^3 + 1.7z^2 + 0.92z + 0.16 = 0$$

所以

$$D(z) = (z + 0.4)(z + 0.8)(z + 0.5) = 0 \Rightarrow z_1 = -0.4, z_2 = -0.8, z_3 = -0.5$$

所以

$$|z_1| = 0.4 < 1, |z_2| = 0.8 < 1, |z_3| = 0.5 < 1$$

从而系统稳定。

$$(2) E(z) = R(z) - C(z) = R(z)(1 - \Phi(z)) = R(z) \cdot \frac{z^3 + 1.7s^2 - 0.08z + 0.06}{z^3 + 1.7s^2 + 0.92z + 0.16},$$

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) = 0.71.$$

9. (16 分)

(1) 特征多项式为 $D(s) = 1 + \frac{1}{s+2} + \frac{4N(A)}{s(s+1)(s+2)} \Rightarrow$

$$D(s) = 1 + \frac{4N(A)}{s(s+1)(s+2) + s(s+1)}$$

故

$$G'_c(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+3)}$$

$$(2) G'_c(j\omega) = \frac{4}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+3)}$$

$\omega = 0$ 时, 有

$$|G'_c(j\omega)| = \infty, \angle G'_c(j\omega) = -90^\circ$$

$\omega = \infty$ 时, 有

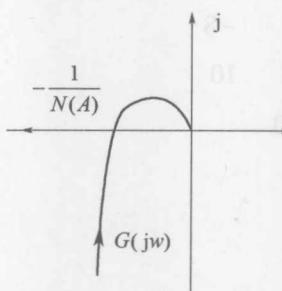
$$|G'_c(j\omega)| = 0, \angle G'_c(j\omega) = -270^\circ$$

求幅相曲线与负实轴的交点, 令

$$\operatorname{Im}[G'_c(j\omega)] = 0 \Rightarrow \omega^2 = 3, |G'_c(j\omega)| = \frac{1}{3}$$

即交点为 $(-\frac{1}{3}, j0)$ 。

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{\pi A + 4}, A = 0 \text{ 时}, -\frac{1}{N(A)} = 0; A = \infty \text{ 时}, -\frac{1}{N(A)} = -1, \text{ 令 } -\frac{1}{N(A)} = -\frac{1}{3}.$$



解得 $A = \frac{2}{\pi}, \omega = \sqrt{3}$ 。

II 2008 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题参考答案

1. (20 分)

(1) 不是, 稳态误差与稳定性是两个不同的概念。稳定性只与系统结构有关, 稳态误差除了与系统结构有关之外, 还与系统的输入有关。

(2) $\xi > 0.707, \omega_n > 2$ 。

(3) 线性定常离散系统的稳定性除了与系统的结构参数有关之外, 还与采样周期 T 有关, T 越小, 稳定性越好。

(4) $G_1(s) = \frac{k}{s(5s+1)}$ 的准确度高, 因为具有更好的低通滤波特性。

2. (16 分)

(1) 对 $R(s)$, 有两条前向通路:

$$p_1 = G_1 G_2, \Delta_1 = 1; p_2 = G_1 G_3, \Delta_2 = 1 + G_2 H$$

有 3 条回路:

$$L_1 = -G_2 H, L_2 = -G_1 G_3, L_3 = -G_1 G_2$$

两两不接触回路:

$$L_1 L_2 = G_1 G_2 G_3 H$$

因此

$$\frac{G(s)}{R(s)} = \frac{G_2 G_1 + G_1 G_3 (1 + G_2 H)}{1 + G_2 H + G_1 G_3 + G_1 G_2 + G_1 G_2 G_3 H}$$

对 $N(s)$, 有 3 条前向通路:

$$p'_1 = 1, \Delta'_1 = 1 + G_2 H; p'_2 = G_1 G_2 G_4, \Delta'_2 = 1;$$

$$p'_3 = G_1 G_3 G_4, \Delta'_3 = 1 + G_2 H$$

回路情况同上。

因此

$$\frac{G(s)}{N(s)} = \frac{1 + G_2 H + G_4 G_1 G_2 + G_4 G_1 G_3 (1 + G_2 H)}{1 + G_2 H + G_1 G_3 + G_1 G_2 + G_1 G_2 G_3 H}$$

$$\begin{array}{cccc} s^6 & 1 & -4 & -7 & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} s^5 & 4 & 4 & -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} s^4 & -5 & -5 & 10 \end{array}$$

(2) 列劳斯表: s^3 -20 -10

$$\begin{array}{cccc} s^2 & -2.5 & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} s & -90 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} s^0 & 10 \end{array}$$

由于在 s^3 行出现全 0, 故用 s^4 行构造方程, $-5s^4 - 5s^2 + 10 = 0$, 求导, 得 $-20s^3 - 10s = 0$ 。劳斯表第一列数值有两次变号, 根据劳斯判据, 系统不稳定, 且在右半平面有两个根。

由 $-5s^4 - 5s^2 + 10 = 0$, 得 $s_{1,2} = \pm j\sqrt{2}, s_{3,4} = \pm 1$ 。

又由 $s^6 + 4s^5 - 4s^4 - 7s^2 - 8s + 10 = (s^4 + s^2 - 2)(s + s_5)(s + s_6)$, 得 $s_5 = 1, s_6 = -5$ 。

3. (18 分)

(1) 由题设知 $N(s)$ 扰动作用被抵消, 即

$$(T_2 s + K_2) \frac{2}{5s + K_1} + 1 = 0$$

得

$$2T_2 s + 2K_2 = -5s - K_1$$

可得 $T_2 = -2.5$, $K_1 = -2K_2$ 。

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{2}{5T_1 s^2 + (5 + K_1 T_1)s + K_1 + 12.8}$$

$$\Phi(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2 \times 5}{5T_1 s^2 + (5 + K_1 T_1)s + K_1 + 12.8} = \frac{10}{K_1 + 12.8} = 2$$

得

$$K_1 = -7.8, K_2 = 3.9$$

$$\text{由 } \sigma\% = \frac{2.8 - 2}{2} * 100\% = 40\%, 2\xi\omega_n = \frac{5 - 7.8T_1}{5T_1}, \omega_n^2 = 1/T_1, \text{ 得}$$

$$\xi = 0.28, \omega_n = 1.56, T_1 = 0.41$$

$$(2) t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 2.1s, t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 6.87 (\Delta = 5\%)$$

$$(3) E(s) = [\frac{1}{6.4} - \Phi(s)]R(s), e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} [\frac{1}{6.4} - \Phi(s)] \cdot \frac{5}{s} = -1.2$$

4. (16 分)

$$(1) \text{令 } s^3 + 4s^2 + 4s + b = 0, \text{ 则 } 1 + \frac{b}{s^3 + 4s^2 + 4s} = 0, \text{ 令 } G'(s) = \frac{b}{s(s+2)^2}, \text{ 故 } p_1 = 0, p_2 = p_3 = -2, \sigma_a = \frac{-2 - 2}{3} = \frac{-4}{3}, \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, -180^\circ, \frac{1}{d} + \frac{2}{d+2} = 0, \text{ 得 } d = -\frac{2}{3}.$$

令 $1 + G'(\text{j}\omega) = 0$, 即 $-\text{j}\omega^3 + 4\text{j}\omega = 0, -4\omega^2 + b = 0$, 得 $b = 16, \omega = 2$ 。

且当 $0 < b < 16$ 时系统稳定。根轨迹图略。

(2) 系统为过阻尼或临界阻尼, 即当系统特征根在负半轴上时满足要求。由 $d = -\frac{2}{3}$ 得

$$b = \frac{32}{27}, \text{ 故当 } 0 < b < \frac{32}{27} \text{ 时满足要求。}$$

(3) $\xi = 0.5$ 时, $\beta = 60^\circ$, 设特征根为 $(x \pm \text{j}\sqrt{3}x)$, 另一个根为 y , 由 $(s - x - \text{j}\sqrt{3}x)(s - x + \text{j}\sqrt{3}x)(s - y) = s^3 + 4s^2 + 4s + b$, 得 $x = -0.5, y = -3, b = 3$ 。

5. (20 分)

$$(1) G(s) = \frac{100(as+1)}{s(s+b)(s+c)}$$

由题意得: $\arctan(8a) - \arctan(8) - \arctan(4) = -180^\circ$, 解得 $a = 0.32$ 。

$$(2) G(s) = \frac{100(2s+1)}{s^2(s-1)}, G(\text{j}\omega) = \frac{100(1-2\omega^2) + \text{j}300\omega}{\omega^2(1+\omega^2)}$$

当 $\omega = 0^+$ 时, $G(j\omega) = +\infty$; 当 $\omega = +\infty$ 时, $G(j\omega) = 0$ 。 $Z = P - 2(N^+ - N^-) = 2$, 故不稳定。开环幅相曲线图略。

(3) 串联校正环节 $G_c(s) = s + 1$ (答案不唯一)。

6. (15 分): 可设 $G(s) = \frac{k(\frac{s}{\omega_1} + 1)}{s^2(\frac{s}{\omega_2} + 1)}$, 对 $\frac{k}{s^2}$ 环节, 由图知 $20\lg \left| \frac{k}{s^2} \right|_{s=j10} = 0$, 即 $20\lg k - 40\lg 10 = 0$, 得 $k = 100$ 。

又由 $\frac{20-0}{\lg 10 - \lg \omega_1} = 40$, 得 $\omega_1 = 3.16$; 由 $\frac{20+20}{\lg \omega_2 - \lg \omega_1} = 20$, 得 $\omega_2 = 316$ 。故

$$G(s) = \frac{100(\frac{s}{3.16} + 1)}{s^2(\frac{s}{316} + 1)}$$

7. (15 分) 取 $\sigma\% = 0.25$, 由公式得

$$M_r = 1 + \frac{\sigma - 0.16}{0.4} = 1.225, \gamma'' = \arcsin\left(\frac{1}{M_r}\right) = 54.7^\circ$$

适当将 γ'' 取大一些, 则稳定裕度更高, 此处取 $\gamma'' = 65^\circ$ 。计算原来系统的截止频率 ω_c , 得, 到 $\omega_c = 3.9 \text{ rad/s}$, 取校正后的 $\omega''_c = 8 \text{ rad/s}$ 。

$$L(\omega''_c) = -10\lg a, a = 10.56, \omega''_c = \frac{1}{T\sqrt{a}}, \text{ 得 } T = 0.038 \text{ s}$$

故 $G_c(s) = \frac{0.406s + 1}{0.038s + 1}$ 。经验算, $\gamma'' = 66.2^\circ$, 符合要求(答案不唯一)。

8. (15 分) 开环脉冲传递函数 $G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z\left[\frac{10(1+0.5s)}{s^3}\right] = \frac{1.2z-0.8}{(z-1)^2}$, 系统特征方程为

$$D(z) = z^2 - 0.8z + 0.2 = 0$$

得

$$z_{1,2} = 0.4 \pm 0.2j, |z_{1,2}| = 0.4472 < 1$$

系统稳定。

系统为 II 型系统, 对于阶跃输入和斜坡输入没有稳态误差, 对于加速度输入有

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z) = 0.4, e_{ss} = 0 + 0 + \frac{T^2}{K_a} = 0.1$$

$$9. (15 分) G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

得 $\omega_x = 2$, $G(j2) = -\frac{K}{20}$, $-\frac{1}{N(A)} = -\frac{1}{e^{-A}} = -e^A$ 当 $A=0$ 时, $-\frac{1}{N(A)} = -1$; 当 $A = +\infty$

时, $-\frac{1}{N(A)} = -\infty$, 故当 $-\frac{K}{20} < -1$ 时, 即 $K > 20$ 时, 有交点, 存在自振。图略。当 $-\frac{K}{20} > -1$ 时, 即 $0 < K < 20$ 时, 两曲线没有交点, 系统稳定, 无自振; 图略。有自振时, 由 $1 + G \cdot N(A) = 0$ 和 $\omega = 2$ 得 $\omega_x = 2$, 得 $e^{-A} \cdot \frac{-K}{20} - 1 = 0$, 得 $A = \ln \frac{K}{20}$ 。

III 2009 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题参考答案

1. (24 分)

(1) 去掉非主导极点、偶极子, 则 $\phi(s) = \frac{2/25}{s^2 + 2s + 4}$, 得 $\xi = 0.5, \omega_n = 2, t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n} = 3.5$ 。

(2) 闭环传递函数 $\phi(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$, 频率特性为 $\phi(j5) = 0.56 \angle (-146.3^\circ)$ 稳态输出

$$c_{ss}(t) = 1.68 \sin(5t - 146.3^\circ)。$$

(3) 列劳斯表, 根据劳斯判据, 系统不稳定; 所有特征根为 $s_{1,2} = \pm 1, s_{3,4} = \pm 2j, s_5 = -3$ 。

(4) 由题可知系统是一个线性定常系统, $x = [0; 0]$ 是系统唯一的平衡点, 构造李雅普诺夫函数:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2, \dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(-ax_1 - x_2) + 2x_1x_2 = -2ax_1^2$$

(a) 若 $a > 0, \dot{V} = -2ax_1^2 \leq 0$, 分析 $x_1 = 0, x_2 \neq 0, \dot{V} = 0; x_1 \neq 0$ 时 $\dot{V}(x) \neq 0$, 除了平衡位置外 $\dot{V}(x)$ 不恒等于零, 系统渐进稳定。系统能量随时间推移逐渐衰减, 处于稳定状态。

(b) 若 $a = 0, \dot{V} = -2ax_1^2 = 0$, 系统李氏意义下稳定。系统能量不增加也不衰减, 处于一种临界稳定状态。

(c) 若 $a < 0, \dot{V} = -2ax_1^2 \geq 0$, 系统不稳定, 系统能量随着时间推移逐渐增加, 系统处于不稳定状态。

2. (15 分)

(1) 首先令 $N(s) = 0$, 求 $Y(s)/R(s)$, 用梅森公式。

独立回路:

$$L_1 = -G_1 G_2 H_1; L_2 = -G_2 G_3 H_2; L_3 = -G_4; L_4 = -G_1 G_2 G_3$$

两两互不接触回路:

$$L_2 L_3 = G_2 G_3 G_4 H_2$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_2 L_3 = 1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_4 + G_1 G_2 G_3 + G_2 G_3 G_4 H_2$$

前向通路:

$$P'_1 = G_1 G_2 G_3, \Delta'_1 = 1; P_2 = G_4, \Delta_2 = 1 + G_2 G_3 H_2$$

$$Y(s)/R(s) = (G_1 G_2 G_3 + G_4(1 + G_2 G_3 H_2)) / (1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_4 + G_1 G_2 G_3 + G_2 G_3 G_4 H_2)$$

其次令 $R(s) = 0$, 求 $Y(s)/N(s)$, 回路和流程图特征式相同。

前向通路:

$$P_1 = 1, \Delta_1 = 1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2$$

$$Y(s)/N(s) = (1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2) / (1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_4 + G_1 G_2 G_3 + G_2 G_3 G_4 H_2)$$

$$Y(s) = (R(s) \times (G_1 G_2 G_3 + G_4(1 + G_2 G_3 H_2))) + N(s) \times (1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2) / (1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_4 + G_1 G_2 G_3 + G_2 G_3 G_4 H_2)$$

(2) 若使系统完全不受 $N(s)$ 影响, 即 $Y(s)/N(s) = 0, 1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 = 0$ 。

3. (15 分)

(1) 由图可知: $\sigma\% = 16.3\%, t_p = 0.906$; 解得 $\xi = 0.5, \omega_n = 4$ 得

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} = \frac{16}{s(s + 4)}$$

(2) 误差为 $E(s) = \frac{1 - G_c(s)G(s)}{1 + G(s)}R(s)$, 稳态误差为

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s^3 \frac{s(s+1)(s+4) - (as^2 + bs)16}{s(s+1)(s+4) + 16(s+1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \frac{s^3 + 5s^2 + 4s - (16as^2 + 16bs)}{s(s+1)(s+4) + 16(s+1)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 + (5 - 16a)s^2 + (4 - 16b)s}{s^5 + 5s^4 + 20s^3 + 16s^2} \end{aligned}$$

由稳态误差为零, 得

$$\begin{cases} 5 - 16a = 0 \\ 4 - 16b = 0 \end{cases}$$

解方程组, 得

$$\begin{cases} a = 0.313 \\ b = 0.25 \end{cases}$$

4. (15 分)

(1) 特征方程 $1 - \frac{2s+3}{(s+4)(s+a)} = 0$, 化成标准型, 得 $1 + \frac{a(s+4)}{(s+3)(s-1)} = 0$, 即等效开环传递函数为 $G(s) = \frac{a(s+4)}{(s+3)(s-1)}$, 分离点为 $\frac{1}{d+3} + \frac{1}{d-1} = \frac{1}{d+4}$, 得 $d = -4 \pm \sqrt{5}$ 。根轨迹为复平面上的圆, 图略。

(2) 由几何知识知, 过原点与圆相切时阻尼比最小, 此时, 阻尼角 $\beta = \sin^{-1} \frac{\sqrt{5}}{4} = 34^\circ$, 设 $\alpha = 90^\circ - \beta = 56^\circ$, 阻尼比最小时的极点为

$$s = j\sqrt{5} \sin \alpha + (\sqrt{5} \cos \alpha - 4) = j1.85 - 2.75$$

极点代入特征方程解得 $a = 3.5$, 则闭环传递函数为 $\phi = \frac{1}{s^2 + 5.5s + 11}$ 。

5. (18 分)

(1) 由对数幅频曲线得传递函数 $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(\frac{1}{50}s+1)}$, 由 $20\lg K = -40(\lg 1 - \lg 5)$, 得

$$K = 25, \text{ 所以 } G(s) = \frac{25}{s(s+1)(\frac{1}{50}s+1)}$$

(2) 由 $-90^\circ - \arctan(\omega_x) - \arctan\left(\frac{\omega_x}{50}\right) = -180^\circ$, 得 $\omega_x = \sqrt{50} = 7.07$, 由奈奎斯特曲线形状可知, 稳定时 $\alpha |G(j\omega_x)| = \frac{\alpha 25}{\sqrt{50} \sqrt{51} \sqrt{\frac{51}{50}}} = \frac{25\alpha}{51} < 1$, 得 $0 < \alpha < 2.04$ 。

(3) 由 $\alpha = 0.2$ 得开环增益 $K = 25 \times 0.2 = 5$, 可取 $\omega_c = \sqrt{K} = \sqrt{5} = 2.24$, 故 $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(\omega_c) - \arctan\left(\frac{\omega_c}{50}\right) = 21.49^\circ$ 。

6. (13 分) 依题意, K, T 改变前, 得

$$\left| \frac{10(0.1s+1)}{s(s+1)} \right|_{s=j5} \cdot |G(s)|_{s=j5} = 1$$

(1) $\gamma = 180^\circ + \angle G(j5) + \arctan(0.5) - \arctan(5)$;

(2) K, T 改变后, 得 $\left| \frac{K(Ts+1)}{s(s+1)} \right|_{s=j5} \cdot |G(s)|_{s=j5} = 1$;

(3) $\gamma' = 180^\circ + \angle G(j5) + \arctan(5T) - \arctan(5)$;

(4) 因相角裕度提高 45° , 则 $\gamma' - \gamma = 45^\circ$, 即 $\arctan(5T) - \arctan(0.5) = 45^\circ$, 解得 $T = 0.6$, 将 $T=0.6$ 代入改变前后的两个等式并比较, 得 $|10(0.1s+1)|_{s=j5} = |K(0.6s+1)|_{s=j5}$, 解得 $K=3.536$ 。

7. (15 分) $G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = \frac{0.632}{z-0.368}; \phi(z) = \frac{0.632}{z+0.264}$

闭环极点 $z = -0.264; |z| < 1$, 所以系统稳定。

$$C(z) = \frac{0.632}{z+0.264} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{0.632z}{z^2 - 0.736z - 0.264}$$

利用长除法, 得

$$c(2) = 0.465$$

$$c(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot C(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.632}{z+1.264} = 0.5$$

8. (15 分) $-\frac{1}{N(A)} = -\frac{3A+1}{A+2}$

当 $A \rightarrow 0^+$ 时, $-\frac{1}{N(A)} \rightarrow -\frac{1}{2}$; $A \rightarrow \infty$ 时, $-\frac{1}{N(A)} \rightarrow -3$ 。

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}, \omega_x = 2, G(j2) = -\frac{K}{20}$$

(1) 当 $-\frac{K}{20} < -3$ 时, 即 $K > 60$ 时, $G(j\omega)$ 曲线完全包围 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线, 系统不稳定;

(2) 当 $-\frac{K}{20} > -\frac{1}{2}$ 时, 即 $K < 10$ 时, $G(j\omega)$ 曲线不包围 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线, 系统稳定;

(3) 当 $-3 < -\frac{K}{20} < -\frac{1}{2}$ 时, 即 $10 < K < 60$ 时, $G(j\omega)$ 曲线与 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线相交, 且 $-\frac{1}{N(A)}$

曲线随着 A 的增大方向从不稳定区域指向稳定区域。系统存在稳定的周期振荡。

因为系统输出的振幅为 1, 自振时应满足交点方程: $\angle G(j\omega) = -180^\circ$, 故自振频率为 $\omega = 2$, 所以根据主反馈通道的频率特性可以求出非线性环节的输入处的振幅为

$$A = 1 \cdot \left| \frac{1}{s} \right|_{s=j2} = \frac{1}{2}$$

又 $G(j2) = -\frac{K}{20}$, 则 $-\frac{3A+1}{A+2} = -\frac{K}{20}$, 产生自振时, $A = \frac{1}{2}$, 则 $K = 20$ 。

9. (20 分)

(1) 利用秩判据(也可用其他判据)

$$W_c = [b \ Ab] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -25 \end{bmatrix}, \text{rank}(W_c) = 2, \text{满秩, 系统可控;}$$

$$W_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank}(W_o) = 2, \text{满秩, 系统可观。}$$

(2) 闭环系统状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r, y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

整理,得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -25 - k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r, y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

上式是可控标准型,闭环特征多项式为 $D(s) = s^2 + (25 + k_2)s + k_1$;

理想特征多项式为 $D'(s) = (s+1+j)(s+1-j) = s^2 + 2s + 2$;

由极点配置算法, $D(s) = D'(s)$, 对应系数相等, 得 $k_1 = 2, k_2 = -23$ 。

(3) $k_1 = 2500$, 系统闭环特征多项式 $D(s) = s^2 + (25 + k_2)s + 2500$, 构造等效开环函数过程为

$$D(s) = s^2 + (25 + k_2)s + 2500 = 0$$

得

$$1 + \frac{k_2 s}{s^2 + 25s + 2500} = 0$$

$$G_1(s) = \frac{k_2 s}{s^2 + 25s + 2500}$$

根轨迹的一部分是复平面上的半圆,图略。使闭环系统响应具有最小超调、最短调节时间,即系统具有临界阻尼,此时 $s_{1,2} = -50, k_2 = 75$ 。

IV 2010 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题参考答案

1. (15 分)

(1) $G_{\text{open}}(s) = \frac{Q(s)}{U(s)}$ 。前向通路 3 条:

$$P_1 = \frac{2}{s+1}, P_2 = \frac{2}{(s+1)(s+3)}, P_3 = \frac{8}{s(s+1)(s+3)}$$

$$\text{所以 } G_{\text{open}}(s) = \frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)(s+3)} + \frac{8}{s(s+1)(s+3)} = \frac{2s^2 + 8s + 8}{s(s+1)(s+3)}$$

(2) 原系统闭环特征多项式为

$$\begin{aligned} D(s) &= s(s+1)(s+3) + 2k(s^2 + 4s + 4) = s^3 + 3s^2 + 2s + 2ks^2 + 6ks + 8k \\ &= s^3 + (4 + 2k)s^2 + (2 + 8k)s + 8k \end{aligned}$$

将 $s = s_1 - 1$ 代入 $D(s)$, 得

$$D(s_1) = s^3 + (2k + 1)s^2 + (4k - 2)s + 2k = 0$$

列劳斯表:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 4k - 2 \\ s^2 & 2k + 1 & 2k \\ s^1 & 2k - 3 & 0 \\ s^0 & 4k & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 \\ 2k - 3 & 1 \\ 4k & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 \\ 4k & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

可得

$$\begin{cases} 2k > 0 \\ 4k - 2 > 0 \\ (2k+1)(4k-2) - 2k > 0 \end{cases} \Rightarrow k > 0.64$$

2. (15 分) $G(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-3)}$

(1) $n=2, p_1=0, p_2=3, m=1, z=-1$; 实轴根轨迹 $(-\infty, -1), [0, 3]$; 漐近线交点 $\sigma_a=2, \varphi_a=0, \pi$; 分离点 $\frac{1}{d} + \frac{1}{d-3} = \frac{1}{d+1} \Rightarrow d=-3, d=1$; 根轨迹的一部分是复平面上的半圆, 半径为 2, 图略; 由几何知识知, 与虚轴交点 $\omega = \pm\sqrt{3}$, 可以求得 $k=3$ 。

(2) 由(1)知当闭环极点为 $s=-3$ 时, 位于分离点处是重极点, 由模值方程, 得

$$\frac{k|s+1|}{|s||s-3|}|s=-3|=1 \Rightarrow k=9$$

所以

$$\Phi(s) = \frac{9(s+1)}{(s+3)^2}, C(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{9(s+1)}{(s+3)^2}$$

利用拉普拉斯逆变换, 有

$$h(t) = 1 + 6te^{-3t} - e^{-3t}$$

(3) $h(\infty)=1, h'(t)=6e^{-3t}-18te^{-3t}+3e^{-3t}$, 令 $h'(t)=0 \Rightarrow t=0.5s$, 所以

$$t_p = 0.5s, h(t_p) = 1 + 3e^{-1.5} - e^{-1.5} = 1.446$$

$$\sigma\% = \frac{h(t_p) - h(\infty)}{h(\infty)} \times 100\% = 44.6\%$$

(4) 系统不是典型的二阶系统, 由于零点的影响, 即使闭环特征根都在负实轴上, 也可能出现超调量。

3. (15 分) $G_p(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+2)}$

(1) $m=0, n=3, p_1=0, p_{2,3}=-1 \pm 2j$; 漐近线与实轴交点 $\sigma_a = -\frac{2}{3}$, 夹角 $\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3}, \pi$; 实轴根轨迹 $(-\infty, 0)$, 无分离点; 按照出射角计算公式解得 $\theta_{p2} = -45^\circ$, 由对称性 $\theta_{p3} = 45^\circ$; 与虚轴交点与虚轴交点 $\omega = \pm\sqrt{2}, k=4$ 。图略。

(2) $\phi_{CN}(s) = \frac{G_p(s)}{1+G_p(s)G(s)} = \frac{1}{s(s^2+2s+2)+k}, C(s) = \frac{1}{s} \cdot \phi_{CN}(s)$

$$c_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(s^2+2s+2)+k} = \frac{1}{k}$$

(3) 由(2)知 $c_{ss} = \frac{1}{k} < 0.1 \Rightarrow k > 10$, 但由根轨迹图知当 $k > 4$ 时系统不稳, 所以单纯用比例控制器达不到性能指标的要求。

4. (15 分)

$$(1) G(s) = \frac{k(T_4 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

因 $20\lg k = 40$, $k = 100$; $\omega_1 = 0.01$, $T_1 = 100$, $\omega_2 = 0.05$, $T_2 = 20$, $\omega_3 = 0.5$, $T_3 = 2$, $\omega_4 = 1$, $T_4 = 1$, 所以

$$G(s) = \frac{100(s+1)}{(100s+1)(20s+1)(2s+1)}$$

(2) 由幅频特性曲线知 $0.05 \leq \omega_c \leq 0.5$, 可以认为起作用的环节有 $k, \frac{1}{T_1 s + 1}, \frac{1}{T_2 s + 1}$, 所以

$$\frac{100}{100 \times 20 \omega^2} = 1 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{\sqrt{20}} = 0.224 \text{ rad/s}$$

$$\gamma = 180^\circ + \arctan \omega_c - \arctan(100\omega_c) - \arctan(20\omega_c) - \arctan(2\omega_c) = 5.2^\circ$$

(3) $\gamma' \geq 30^\circ$, 所以 $\varphi_m = \gamma' - \gamma + 8^\circ = 33^\circ$, 可采用串联超前校正。

$$a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} = 3.39, -10\lg a = 20 \lg \left| \frac{100\omega}{100 \times 20 \omega^3} \right| \Rightarrow \omega'_m = 0.303$$

所以

$$T = \frac{1}{\sqrt{a} \omega'_m} = 1.793$$

$$3.39 G_c(s) = \frac{6.08s + 1}{1.793s + 1}$$

经验证, $\gamma' = 30^\circ$ 符合题意(若将 φ_m 再取大一些, 相角裕度会更大一些)。

$$5. (15 \text{ 分}) G(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}$$

$$\angle G(j\omega) = -180^\circ + \arctan(\omega T_2) - \arctan(\omega T_1)$$

$$(1) \text{ 当 } T_1 > T_2 > 0 \text{ 时, } G(s) = \frac{K}{s^2(T_1 s + 1)}, \angle G(j\omega) : -180^\circ \rightarrow -270^\circ,$$

$Z = P - 2(N_+ - N_-) = 2$, 不稳定。

(2) $T_2 > T_1 > 0$, $G(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}$, $\angle G(j\omega)$ 先增大后减小, 幅相曲线不经过实轴(图略), $Z = 0$, 系统稳定。

(3) $T_1 = T_2 > 0$, $G(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}$, 系统临界稳定。

(4) $T_1 > T_2 > 0$, $G(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}$, $\angle G(j\omega)$ 先减小后增大(图略) $Z = P - 2(N_+ - N_-) = 2$, 系统不稳定。

$$6. (15 \text{ 分}) G_1(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)}, G_1(j\omega) = \frac{k}{j\omega(T_1 j\omega + 1)} = \frac{k(jT_1 - 1)}{\omega(T_1^2 \omega^2 + 1)}$$

将 $\omega = 2$ 代入上式, 由图得 $|G(j\omega)| = \sqrt{2}$, $\angle G_1(j\omega) = -\frac{3\pi}{4}$, 从而有

$$G_1(s) = \frac{4}{s(\frac{s}{2} + 1)}, G_1(s)e^{-\tau s} = \frac{4e^{-\tau s}}{s(\frac{s}{2} + 1)}$$

由 $|G_1(s)e^{-\tau s}|_{s=j\omega}=1$ 得开环截止频率为 $\omega_c=2.5, \gamma=180^\circ-90^\circ-\arctan\frac{\omega_c}{2}=57.3\tau\omega_c>0 \Rightarrow 0<\tau<0.27$ 。

7. (15分)

(1) 闭环特征方程

$$D(z)=1+Z\left[\frac{k}{s} \cdot \frac{1}{s+1}\right]=0$$

整理得

$$z^2 + (0.632k - 1.368)z + 0.368 = 0$$

令 $z=\frac{\omega+1}{\omega-1}$, 则

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega+1}{\omega-1}\right)^2 + (0.632k - 1.368) \frac{\omega+1}{\omega-1} + 0.368 &= 0 \\ \Rightarrow 0.632k\omega^2 + 1.264\omega + 2.736 - 0.632k &= 0 \end{aligned}$$

由劳斯判据得 $0 < k < 4.33$ 。

$$(2) C(z) = R(z)\Phi(z) = R(z) \frac{2 \times 0.632z}{z^2 - 0.140z + 0.368}, R(z) = \frac{z}{z-1}$$

所以

$$c(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \cdot \frac{z}{z-1} \cdot \frac{2 \times 0.632}{z^2 - 0.104z + 0.368} = 1$$

8. (15分)

$$(1) G(s) = \frac{A}{s(s^2 + 2s + 4)}, G(j\omega) = \frac{A}{j\omega(4 - \omega^2 + 2j\omega)}$$

令其虚部为零, 得 $\omega_x=2$ 。

$\omega=0$ 时, $\angle G(j\omega) = -90^\circ$, $|G(j\omega)| = \infty$; $\omega=\infty$ 时, $\angle G(j\omega) = -270^\circ$, $|G(j\omega)| = 0$ 。与负实轴交点为 $(-0.5, j0)$, 所以

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} + k = \frac{4}{\pi A} + 0.5$$

所以

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{2\pi A}{\pi A + 8}$$

$A=0$ 时, $-\frac{1}{N(A)}=0$; $A=\infty$ 时, $-\frac{1}{N(A)}=-2$ 。可知存在自振, 令 $-\frac{2\pi A}{\pi A + 8} = -0.5$, $A=0.85$; $c(t) = -0.85 \sin 2t$ 。

(2) 将开环增益增大 5 倍后, $G(j\omega)$ 与负实轴交点为 $(-2.5, j0)$, 从而系统不稳定。

9. (15分)

$$(1) \begin{cases} X_2(s) \frac{1}{s} = X_1(s) \\ (U(s) - X_1(s)) \frac{1}{s} = X_2(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$$

从而得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(2) 构造能量函数 $U(x) = x_1^2 + x_2^2$ 。由(1)知平衡点为 $(0, 0)$ 。

所以 $\dot{U}(x) = 2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 = 0$, 李雅普诺夫意义下的稳定。

(3) 例如, 令 $U(s) = \frac{s^2 + 1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$, 则 $u = e^{-t} + 5e^{-3t} - 5e^{-2t}$ 满足题意(本题答案不唯一, 满足条件即可)。

10. (15 分) $G(s) = \frac{1}{s(s+4)}$

(1) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$y = [1 \ 0] x$

(2) 可控标准型一定可控, $\sigma\% = 16.3\% \Rightarrow \xi = 0.5$, $t_s = 2s$ ($\Delta = 2\%$), 所以 $\frac{4}{\xi\omega_n} = 2s \Rightarrow \omega_n =$

4, 所以理想的特征方程为 $D(s) = s^2 + 4s + 16$, 设 $K = [k_1 \ k_2]$, 则

$$|\lambda E - (A + BK)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -k_1 & \lambda + 4 - k_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (4 - k_2)\lambda - k_1$$

所以

$$k_2 = 0, k_1 = -16$$

V 2011 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题参考答案

1. (15 分)

(1) 回路有 3 条:

$$L_1 = -G_1(s)H_1(s), L_2 = -G_2(s)H_2(s), L_3 = -G_1(s)G_2(s)H_3(s)$$

两两不接触回路:

$$L_1 L_2 = G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s), \Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3 + L_1 L_2$$

前向通路两条:

$$p_1 = 1, \Delta_1 = 1 + G_2(s)H_2(s), p_2 = -G_3(s)G_2(s)H_3(s), \Delta_2 = 1$$

从而

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + G_2(s)H_2(s) - G_3(s)G_2(s)H_3(s)}{1 + G_1(s)H_1(s) + G_2(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)H_3(s) + G_1(s)H_1(s)G_2(s)H_2(s)}$$

(2) 按照同样的求解步骤, 可以求得

$$\Phi_{CR}(s) = \frac{G_1(s)G_2(s) + G_3(s)G_2(s) + G_3(s)G_2(s)G_1(s)H_1(s)}{1 + G_1(s)H_1(s) + G_2(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)H_3(s) + G_1(s)H_1(s)G_2(s)H_2(s)}$$

$$\Phi_{CN}(s) = \frac{G_2(s) + G_2(s)G_1(s)H_1(s)}{1 + G_1(s)H_1(s) + G_2(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)H_3(s) + G_1(s)H_1(s)G_2(s)H_2(s)}$$

从而

$$C(s) = \frac{[G_1(s)G_2(s) + G_3(s)G_2(s) + G_3(s)G_2(s)G_1(s)H_1(s)]R(s) + [G_2(s) + G_2(s)G_1(s)H_1(s)]N(s)}{1 + G_1(s)H_1(s) + G_2(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)H_3(s) + G_1(s)H_1(s)G_2(s)H_2(s)}$$

2. (15分)令系统的闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{K}{s^3 + as^2 + bs + K}$, 则

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + as + b)}, e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{b}{K} = 1.125$$

由 $t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 3.626$, 得 $\omega_d = 0.866$, $\sigma\% = 16.32\%$

得 $\xi = 0.5$ 。

由 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$, 得 $\omega_n = 1$ 。故主导极点 $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d = -0.5 \pm j0.866$ 。又因为 $s^3 + as^2 + bs + K = (s + 0.5 + j0.866)(s + 0.5 - j0.866)(s + c)$, 即

$$s^3 + as^2 + bs + K = (s^2 + s + 1)(s + c)$$

得

$$K = 8, a = 9, b = 9, c = 8$$

所以

$$G(s) = \frac{8}{s(s^2 + 9s + 9)}$$

3. (15分)

(1) 特征方程为 $1 + G(s) = 0$, 即 $1 + \frac{(s+K)(s+4)}{s(s^2+s-3)} = 0$, 等效开环传递函数 $G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+1)^2}$, 分离点 $\frac{1}{d} + \frac{2}{d+1} = \frac{1}{d+4}$, $d_1 = -0.354$, $d_2 = -5.646$ (舍去); 根轨迹与虚轴交点 $K = 1$, $\omega = \sqrt{2}$; 根轨迹图略。

(2) 将 $s = d_1 = -0.354$ 代入特征方程, 可以求出闭环出现重极点时 $K = 0.04$; 开环传递函数为

$$G(s) = \frac{(s+4)(s+0.04)}{s(s^2+s-2)}$$

闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{(s+4)(s+0.04)}{(s+0.354)^2(s+1.292)}$$

$$(3) G(s) = \frac{(s+K)(s+4)}{s(s^2+s-3)} = \frac{-\frac{4K}{3}(s/K+1)(s/4+1)}{s(-s^2/3-s/3+1)}; e_{ss} = \frac{1}{-4K/3} = -\frac{3}{4K}$$

由 $|e_{ss}| = \frac{3}{4K} \leq 1$, 得 $K \geq \frac{3}{4}$; 考虑到稳定性, 最后得 $\frac{3}{4} \leq K < 1$ 。

$$4. (15分) GH_1 = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

当 $\omega = 2$ 时, $\angle GH_1 = -135^\circ$, $|GH_1| = \sqrt{2}$; 则

$$\angle \left. \frac{1}{Ts+1} \right|_{s=j2} = -45^\circ, T = \frac{1}{2} = 0.5, |GH_1|_{\omega=2} = \frac{K}{2\sqrt{1+(T\omega)^2}} = \frac{K}{2\sqrt{2}}, K = 4$$

令 $\frac{4}{\omega \sqrt{(1+0.25\omega^2)}} = 1$, 得 $\omega_c = 2.5$, 此时

$$\angle GH_1(j\omega) |_{\omega_c=2.5} = -90^\circ - \arctan(0.5 \times 2.5) = -141.3^\circ$$

若 $-57.3\tau\omega_c = -38.7^\circ$, 本系统处于临界稳定状态, 即 $GH_1(s)e^{-\tau s}$ 恰好其幅相曲线过 $(-1, j0)$ 点, 故 $0 \leq \tau < 0.27$ 。

5. (15 分)

(1) 由 $K_v = 30$, 得 $K = 30$ 。 $G(s) = \frac{30}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$, 校正前的指标: 考虑截止频率比较大, 可以利用 $\frac{30}{\omega \cdot 0.1\omega \cdot 0.2\omega} = 1$ 进行计算 $\omega'_c = 11.4 \text{ rad/s}$, $\gamma' = -25^\circ$, 超前校正不能提供足够大的超前相角, 故采用滞后校正 $G_c(s) = \frac{1+bTs}{1+Ts}$ 。

(2) 校正后的相角裕度设计 $\gamma'' = 180^\circ + \varphi_c(\omega''_c) + \angle G(j\omega''_c)$, 取 $\varphi_c(\omega''_c) = -5^\circ$, 则

$$\angle G(j\omega''_c) = \gamma'' - 180^\circ - \varphi_c(\omega''_c) = 40^\circ - 180^\circ - (-5^\circ) = -135^\circ$$

$$\angle G(j\omega''_c) = -90^\circ - \arctan(0.1\omega''_c) - \arctan(0.2\omega''_c) = -135^\circ$$

$$\omega''_c = 2.8 \text{ rad/s}$$

满足要求。

$$(3) 20\lg \left| \frac{30}{s(0.1s+1)(0.2s+1)} \right|_{s=j2.8} + 20\lg b = 0, \text{ 则 } b = 0.1.$$

(4) $\frac{1}{bT} = \frac{1}{10}\omega''_c$, $T = \frac{10}{b\omega''_c}$, $T = 35.7$, 则 $G(s) = \frac{1+3.57s}{1+35.7s}$, 经验算 $\omega''_c = 2.8 \text{ rad/s}$, 相角裕度满足要求。

6. (15 分)

$$(1) G(z) = Z\left[\frac{K}{s(s+1)}\right] = \frac{0.632Kz}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

特征式为 $D(z) = z^2 + (0.632K - 1.368)z + 0.368$, 令 $z = \frac{\omega+1}{\omega-1}$ 代入特征式, 得

$0.632K\omega^2 + 1.264\omega + 2.736 - 0.632K = 0$, 由劳斯判据, 得 $0 < K < 4.33$ 。

$$(2) G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] = \frac{z-1}{z} \cdot Z\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] = \frac{0.368z+0.264}{(z-1)(z-0.368)},$$

$$\Phi(z) = \frac{0.368z+0.264}{z^2 - z + 0.632}, C(z) = R(z)\Phi(z) = \frac{0.368z^2+0.264z}{z^3 - 2.368z^2 + 2z - 0.632}$$

利用长除法, 得 $c^*(t) = 0.368\delta(t-1) + \delta(t-2) + 1.4\delta(t-3) + 1.4\delta(t-4) + \dots$, 又由于系统是 I 型系统, $e^*(\infty) = 0$, 从而 $c^*(\infty) = 1$ 。

7. (15 分)

(1) 当 $k=5$ 时, $G(j\omega) = \frac{5}{j\omega(j\omega+2)^2+10}$ 。与负实轴交点处 $\omega_x = 2$, $G(j\omega_x) = -0.833$; 与负虚轴的交点处 $\omega = 1.581$, $G(j\omega) = -j2.108$ 。负倒描述函数为 $-\frac{1}{N(A)} = -\frac{4A+0.5}{A+1}$, 当 $A = 0$ 时, $-\frac{1}{N(A)} = -0.5$; 当 $A \rightarrow \infty$ 时, $-\frac{1}{N(A)} = -4$, 绘出 $-\frac{1}{N(A)}$ 和 $G(j\omega)$ 曲线, 可以判定存在

自激振荡,由自振条件 $G(j\omega)N(A) = -1$ 和自振角频率 $\omega = 2\text{rad/s}$,得自振振幅 $A = 0.105$ 。

(2) 当 $k=1$ 时, $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+2)^2 + 10}$ 。由 $|G(j\omega_x)|_{\omega_x=2} < \frac{1}{2}$, 得系统稳定。

8. (10 分)

$$(1) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2a \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}; \mathbf{y} = [10 \quad 1] \mathbf{x}$$

(2) 平衡点为: $x_e = 0$, 令 $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$, 则 $\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -4ax_2^2$, 讨论:

当 $a > 0$ 时, 系统渐进稳定;

当 $a = 0$ 时, 系统李雅普诺夫意义下稳定;

当 $a < 0$ 时, 系统不稳定。

9. (15 分)

$$(1) S_c = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{rank}(S_c) = 2, \text{可控};$$

$$S_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank}(S_o) = 2, \text{可观}.$$

(2) 系统可控, 所以可以利用状态反馈控制器任意配置极点。

令 $K = [k_1 \quad k_2]$, 则

$$f(\lambda) = |\lambda I - (A - bK)| = \lambda^2 + (k_1 + k_2)\lambda + 1 + k_1 - k_2,$$

$$f^*(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$$

令 $f(\lambda) = f^*(\lambda)$, 得

$$K = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$(3) \bar{G}(s) = c(sI - \bar{A})^{-1}b = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

其中 $\bar{A} = A - bk$ 。

10. (20 分)

(1) 分离点为根轨迹上的点, 根轨迹关于实轴对称, 若存在复数分离点, 一定为共轭复数, 系统一定为四阶以上, 该系统为三阶系统, 所以不存在分离点。

(2) 最大开环增益为 50。

(3) 因为相角裕度需要提高 70° , 超前校正无法提供大的相角, 选择串联滞后校正比较合适。

$$(4) \dot{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t)x(0) = \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

(5) 特征值不变。设原系统动态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x} \end{cases}$$

令 $\mathbf{x} = P\bar{\mathbf{x}}$, 新系统动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = P^{-1}AP\bar{\mathbf{x}} + P^{-1}B\mathbf{u}$$

则 $|\lambda I - \bar{A}| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}| |\lambda I - A| |A| = |\lambda I - A|$, 得证。

VI2012 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题(学术型)参考答案

1. (15 分) 求 $\Phi_{cr}(s)$, 有 3 条回路:

$$L_1 = -G_1(s), L_2 = -G_2(s), L_3 = -G_1(s)G_2(s)$$

两两不接触回路:

$$L_1L_2 = G_1(s)G_2(s), \Delta = 1 + G_1(s) + G_2(s) + 2G_1(s)G_2(s)$$

有 2 条前向通路:

$$p_1 = G_1(s)G_2(s), \Delta_1 = 1, p_2 = G_2(s), \Delta_2 = 1 + G_1(s)$$

从而

$$\Phi_{cr}(s) = \frac{G_1(s)G_2(s) + G_2(s)(1 + G_1(s))}{1 + G_1(s) + G_2(s) + 2G_1(s)G_2(s)}$$

按照同样的步骤可以求得

$$\Phi_{cn}(s) = \frac{1 + G_1(s) + G_2(s) + G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s) + G_2(s) + 2G_1(s)G_2(s)}$$

$$C(s) = \frac{[G_1(s)G_2(s) + G_2(s)(1 + G_1(s))]R(s) + [1 + G_1(s) + G_2(s) + G_1(s)G_2(s)]N(s)}{1 + G_1(s) + G_2(s) + 2G_1(s)G_2(s)}$$

2. (15 分)

$$(1) \phi(s) = \frac{100}{s^2 + 5s + 100}; \omega_n = 10; \xi = 0.25, \sigma\% = 44.4\%; t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n} = 1.4s; \text{单位阶跃响应曲线如图 a 所示。}$$

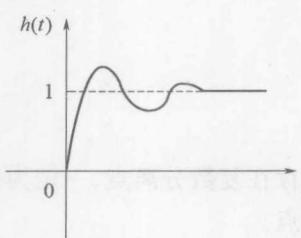


图 a

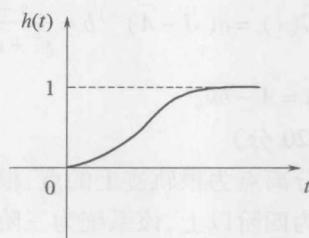


图 b

$$(2) \phi(s) = \frac{100}{s^2 + (5 + 100K_t)s + 100}; \omega_n = 10; \text{由 } 5 + 100K_t = 2\xi\omega_n, \text{ 得 } K_t = 0.15; \sigma\% \text{ 不存在}, t_s = 4.75T_1 = 0.475s; \text{ 如图 b 所示。}$$

3. (15 分) 系统对输入信号的稳态误差为: $e_{ss} = 0.2$, 所以该系统只能是 II 型系统, 否则对加速度输入信号误差 ∞ 。

设系统开环传函为 $G(s) = \frac{K(Ts + 1)}{s^2}$, 则 $K_a = K$, 又 $e_{ss} = \frac{6}{K_a} = 0.2$, 得 $K = 30$ 。

由截止频率 $\omega_c = 10$, 得 $T = 0.318$ 。

故相角裕度 $\gamma = 180^\circ - 180^\circ + \arctan(0.318\omega_c) = 72.5^\circ$ 。

4. (15 分) 开环传递函数 $G(s) = \frac{K_1}{s(s+3)^2} = \frac{K_1/9}{s(\frac{s}{3}+1)^2}$, 则 $K_v = \frac{K_1}{9}$ 。由 $e_{ss} = \frac{9}{K_v} \leq 2.25$, 得 $K_1 \geq 4$ 。利用根轨迹判定无超调的 K_1 范围过程如下: $\sigma_a = -2$; $\varphi_a = \pm 60^\circ, 180^\circ$; $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+3} = 0$ 得分离点位置 $d = -1$; 将 $s = d = -1$ 代入闭环特征方程, 求得分离点处 $K_1 = 4$, 从而当 $K_1 \leq 4$ 时, 系统具有负实根, 单位阶跃响应无超调。

因而 $K_1 = 4$ 。

5. (15 分)

(1) $\angle G(j\omega) = -180^\circ - \arctan(\omega) - \arctan(0.01\omega) + \arctan(0.2\omega) + \arctan(0.1\omega)$ 对其求导可知, 相角先减小后增大, 两次穿越 -180° 线。令 $\angle G(j\omega) = -180^\circ$, 解得 $\omega_c = 6.42$ 。

将 $\omega_c = 6.42$ 代入式 $|G(j\omega)|_{\omega_c=6.42} = 1$, 解得 $K = 138.75$ 。所以当 $K > 138.75$ 时, $N_+ = N_- = 1$, 系统稳定。伯德图略。

(2) $G(s) = \frac{2K(s+5)(s+10)}{s^2(s+1)(s+100)}$, $n = 4$, $m = 2$, $p_{1,2} = 0$, $p_3 = -1$, $p_4 = -100$, $z_1 = -5$, $z_2 = -10$, $\sigma_a = -43$, $\varphi_a = \pm \frac{\pi}{2}$, 根轨迹图略; 由题意得, 根轨迹穿过 s 平面虚轴, 即是系统临界稳定, 此时 $K = 138.75$, $\omega = 6.42$ 。

6. (15 分)

$$(1) \phi(s) = \frac{K_1 K_2}{s^2(Ts+1) + K_1 K_2} = \frac{K_1 K_2}{Ts^3 + s^2 + K_1 K_2}$$

特征式中有缺项, 系统不稳定。

$$(2) G_c(s)G(s) = \frac{K_1 K_2 (\tau s + b)}{s^2(Ts+1)}; D(s) = Ts^3 + s^2 + K_1 K_2 \tau s + K_1 K_2 b = 0$$

列写劳斯表, 由劳斯判据知: $K_1 K_2 \tau > T K_1 K_2 b$ 且 $b > 0$ 时, 系统稳定。即当 $\tau > Tb$, $b > 0$ 时系统稳定。

7. (15 分)

(1) $G(z) = Z\left[\frac{10}{s(s+10)}\right] = \frac{(1-e^{-10T})z}{(z-1)(z-e^{-10T})}$, 系统为 I 型系统, $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = 1$, $e(\infty) = \frac{T}{K_v} = 0.1$, 从而 $T = 0.1s$ 。

$$(2) \Phi(z) = \frac{0.632z}{z^2 - 0.736z + 0.368}, C(z) = R(z)\Phi(z) = \frac{0.632z^2}{z^3 - 1.736z^2 + 1.104z - 0.368}$$

利用长除法, 得 $c*(t) = 0.632\delta(t-0.1) + 1.097\delta(t-0.2) + 1.207\delta(t-0.3) + \dots$

8. (15 分)

$$(1) -\frac{1}{N(A)} = -\frac{2\pi A}{\pi A + 8}, \text{ 当 } A \rightarrow 0 \text{ 时, } -\frac{1}{N(A)} \rightarrow 0, \text{ 当 } A \rightarrow \infty, -\frac{1}{N(A)} \rightarrow -2;$$

把 $s = j\omega$ 代入 $G(s)$ 中, 令其虚部为零, 解得 $\omega = \sqrt{3}$, $G(j\omega) = -0.5$ 。两者有交点, 且随着 A 增大, 由不稳定区进入稳定区, 所以自振稳定。

$$(2) \text{由(1)知 } \omega = \sqrt{3}; \text{ 利用 } 1 + N(A)G(s) = 0, \text{ 求得 } A = \frac{8}{3\pi}; c(t) = -\frac{8}{3\pi} \sin \sqrt{3}t.$$

9. (15 分)

$$(1) \dot{x} = Ax + Bu, \text{ 其中 } A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. y = Cx, \text{ 其中 } C = [1 \ 0].$$

闭环系统传递函数为 $\Phi(s) = C(sI - A + BK)^{-1}B = \frac{5}{(s+1)(s+k_2) + 5(6+k_1)}$, 即闭环特征多项式为 $s^2 + (1+k_2)s + 5k_1 + k_2 + 30 \Rightarrow \begin{cases} (1+k_2) = 2\xi\omega_n \\ 5k_1 + k_2 + 30 = \omega_n^2 \end{cases}$ 。欲使得阻尼为 0.707, 则满足 $(1+k_2) = 2\sqrt{\frac{2}{5k_1 + k_2 + 30}}$, 整理, 得 $k_2^2 = 59 + 10k_1$ 。

$$(2) \omega_n = 10, \text{ 即 } 5k_1 + k_2 + 30 = 100, \text{ 联合 } k_2^2 = 59 + 10k_1, \text{ 可求得 } k_1 = 11.37, k_2 = 13.14.$$

(3) 欲使闭环系统在阶跃输入下的稳态误差为 0, 即 $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s) \frac{1}{s} = 0$, 则闭环特征多项式分母中有原点处极点, 则 k_1, k_2 满足 $5k_1 + k_2 = -30$ 。

10. (15 分)

(1) 状态空间模型为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -k_1 & -(k_2+3) & k_3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r, y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

利用梅森公式, 可求得

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s^3 + (k_2+4)s^2 + (k_1+k_2+3)s}{s^3 + (k_2+4)s^2 + (k_1+k_2+3)s + k_3}$$

从而误差传递函数模型为

$$E(s) = \frac{s^3 + (k_2+4)s^2 + (k_1+k_2+3)s}{s^3 + (k_2+4)s^2 + (k_1+k_2+3)s + k_3} R(s)$$

(2) 欲使得系统阶跃输入下稳态误差 e_{ss} 为 0, 要求系统稳定, 且 $k_3 \neq 0$ 。即满足如下不等式

$$\begin{cases} k_2 + 4 > 0 \\ k_1 + k_2 + 3 > 0 \\ k_3 > 0 \\ (k_2 + 4)(k_1 + k_2 + 3) > k_3 \end{cases}$$

$$(3) s^3 + (k_2+4)s^2 + (k_1+k_2+3)s + k_3 = (s+1+j)(s+1-j)(s+10)$$

解得 $k_1 = 11, k_2 = 8, k_3 = 20$ 。

VII 2012 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题(专业型) 参考答案

1. (15 分) 对 $R(s)$, 回路 4 条:

$$L_1 = -G_1H_1, L_2 = -G_2H_2, L_3 = -G_1G_2, L_4 = -G_2G_3$$

两两不接触回路:

$$L_1L_2 = G_1G_2H_1H_2, \Delta = 1 + G_1H_1 + G_2H_2 + G_1G_2 + G_2G_3 + G_1G_2H_1H_2$$

前向通路 2 条:

$$p_1 = G_1, \Delta_1 = 1 + G_2 H_2, p_2 = G_3, \Delta_2 = 1 + G_2 H_2$$

从而

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(G_1 + G_3)(1 + G_2 H_2)}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 + G_2 G_3 + G_1 G_2 H_1 H_2}$$

对 $N(s)$, 有

$$p'_1 = 1, \Delta'_1 = 1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_1 H_2$$

从而

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_1 H_2}{1 + G_2 H_2 + G_1 H_1 + G_1 G_2 + G_2 G_3 + G_1 H_1 G_2 H_2}$$

2. (20 分)

(1) $\Phi(s) = \frac{K}{s^2 + K_t K s + K}$, 等效开环传函 $G(s) = \frac{K}{s^2 + K_t K s}$, 对于斜坡输入, 有

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{1}{K_t}, e_{ss} = \frac{1}{K_v} = K_t = 0.25$$

从而 $K_t = 0.25$ 。 $\omega_n = \sqrt{K}$, 由 $\sigma\% = 16.3\%$, 可求出 $\xi = 0.5$, 利用 $K_t K = 2\xi\omega_n$, 可求出 $\omega_n = 4$, 从而 $K = 16$ 。

(2) $t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 1.75$; $\sigma\% = \frac{c_{\max} - c(\infty)}{c(\infty)} = 16.3\%$, 由于系统对阶跃输入无稳态误差, $c(\infty) = 1$, 从而求出 $c_{\max} = 1.163$ 。

(3) 加入 K_r 环节后, $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 4s - K_r s}{s^2 + 4s + 16}$, 对于斜坡输入, 有

$$E(s) = s^2 \cdot \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 4s - K_r s}{s^4 + 4s^3 + 16s^2}, e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s + 4 - K_r}{s^2 + 4s + 16} = 0$$

从而 $K_r = 4$ 。

3. (20 分) 系统对输入信号的稳态误差为 $e_{ss} = 0.2$, 所以该系统只能是 II 型系统, 否则对加速度输入信号误差 ∞ 。

设系统开环传函为 $G(s) = \frac{K(Ts+1)}{s^2}$, 则 $K_a = K$, 又 $e_{ss} = \frac{6}{K_a} = 0.2$, 得 $K = 30$ 。

由截止频率 $\omega_n = 10$, 得 $T = 0.318$ 。

故相角裕度 $\gamma = 180^\circ - 180^\circ + \arctan(0.318\omega_c) = 72.5^\circ$ 。

4. (20 分)

(1) 闭环特征方程为 $s^3 + 6s^2 + 9s + T = 0$, 等效开环传函 $G(s) = \frac{T}{s(s+3)^2}$, $n = 3, m = 0$,

$p_{1,2} = -3, p_3 = 0, \sigma_a = -2, \varphi_a = \pm \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{1}{d} + \frac{2}{d+3} = 0$, 得分离点 $d = -1$ 。根轨迹图略。

(2) 将 $s = d = -1$ 代入闭环特征方程, 得 $T = 4$ 。当 $T > 4$ 时, 出现共轭复根。又考虑到系统稳定时 $T < 54$, 故当 $4 < T < 54$ 时系统中含有 $e^{-at} \sin(\omega t + \varphi)$ 分量。

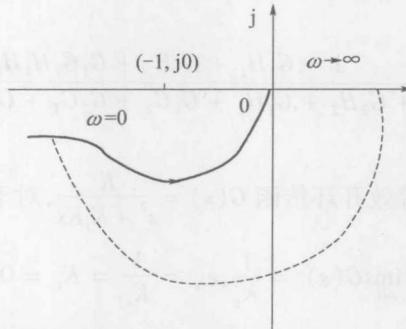
5. (20 分) 由图可设 $G(s)H(s) = \frac{K(\frac{s}{2} + 1)}{s^2(\frac{s}{50} + 1)}$, 又由于 $20\lg |G(s)H(s)||_{s=j10} = 0$, 解

得 $K = 20$ 。

所以

$$G(s)H(s) = \frac{20(\frac{1}{2}s + 1)}{s^2(\frac{1}{50}s + 1)}$$

$$\gamma = 180^\circ - 180^\circ + \arctan(0.5\omega_c) - \arctan(\omega_c/50)$$



由图知 $\omega_c = 10$, 代入上式, 得 $\gamma = 51.8^\circ$ 。

(2) 奈奎斯特曲线如图所示, $Z = P - 2N = 0$, 根据奈奎斯特判据, 该系统闭环稳定。

6. (15 分)

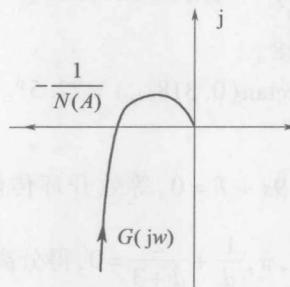
$$(1) G(z) = Z\left[\frac{2}{s(s+1)}\right] = \frac{2(1-e^{-1})z}{(z-1)(z-e^{-1})}; \phi(z) = \frac{2(1-e^{-1})z}{z^2 + (1-3e^{-1})z + e^{-1}}$$

特征方程 $z^2 + (1-3e^{-1})z + e^{-1} = 0$, 即 $z^2 - 0.104z + 0.368 = 0$, 极点 $z_{1,2} = 0.052 \pm 0.644j$, $|z_{1,2}| < 1$, 故而系统稳定。

$$(2) C(z) = \phi(z)R(z) = \frac{1.264z^2}{z^3 - 1.104z^2 + 0.472z - 0.368}$$

利用长除法并进行逆变换, 得 $c(2T) = 1.282$ 。因为系统是 I 型系统, 对阶跃输入无稳态误差, 故 $c^*(\infty) = 1$ 。

$$7. (15 分) -\frac{1}{N(A)} = -\frac{2\pi A}{\pi A + 8}, \text{ 当 } A \rightarrow 0 \text{ 时, } -\frac{1}{N(A)} \rightarrow 0, \text{ 当 } A \rightarrow \infty, -\frac{1}{N(A)} \rightarrow -2.$$



把 $s = j\omega$ 代入 $G(s)$ 中, 令其虚部为零, 解得 $\omega = 2$, 此时 $G(s) = -0.5$ 。画图如下, 分析图可以看出 $-\frac{1}{N(A)}$ 从被包围区走向未包围区, 存在稳定的周期振荡(自激振荡), 自激振荡的频率 $\omega = 2$ 。又把 $s = j\omega = j2$ 代入 $1 + N(A)G(s) = 0$, 解得振幅 $A = 0.85$, 从而系统输出 $c(t) = -$

$0.85 \sin 2t$ 。

8. (20 分)

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; y = [K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(2) 能控性矩阵 $U_c = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\text{rank } U_c = 2$, 无论 K_1 与 K_2 取何值, 系统均能控。

能观性矩阵 $U_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix}$, 此时无法判断系统的能观性。要使系统能观, U_o 应满秩,

即 $\det U_o = K_1^2 \neq 0, K_1 \neq 0$ 。

(3) 系统的传递函数为 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{K_1 + K_2 s}{s^2}$.

9. (10 分)

(1) 由开环传函可写成可控标准型, $\dot{x} = Ax + bu, y = cx$ 其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -7 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c = [10 \quad 0 \quad 0]$ 。故系统一定可控, 可任意配置极点; 设反馈矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$, 则令 $\det(sI - A + bK) = (s+5)(s+1+j)(s+1-j)$, 即有

$$s^3 + (7+k_3)s^2 + (10+k_2)s + k_1 = s^3 + 7s^2 + 12s + 10$$

得 $K = [10, 2, 0]$ 。

(2) 原系统不稳定, 状态反馈后, 主导极点配置在 $-1 \pm j$, 系统具有适当的阻尼和自然频率, 响应变快, 具有超调, 动态性能改善; 闭环后系统稳定, 稳态性能改善。

10. (5 分) 设实对称矩阵 $= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$, 并将其带入 $A^T P + PA = -Q = -I$ 中, 解得 $P = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$, 因为 P 的各阶主子式为正, 故是正定矩阵, 因而系统渐近稳定。

VIII2013 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题(学术型)参考答案

1. (15 分) 该图形中回路 3 条:

$$L_1 = -G_2, L_2 = -G_3H, L_3 = -G_1G_2G_4H$$

两两不接触回路:

$$L_1L_2 = G_2G_3H, \Delta = 1 + G_2 + G_3H + G_1G_2G_4H + G_2G_3H$$

对于输入 R :

$$p_1 = G_1G_2G_4, \Delta_1 = 1$$

对于输入 N :

$$p'_1 = G_4, \Delta'_1 = 1 + G_3H$$

从而

$$C = \frac{G_1 G_2 G_4 R + G_4 (1 + G_3 H) N}{1 + G_1 G_2 G_4 H + G_3 H + G_2 + G_2 G_3 H}$$

2. (15 分)

(1) $n(t) = 0$ 时, 闭环传递函数 $\phi(s) = \frac{K}{s^2 + KTs + K}$, 由 $\sigma\% = 20\%$, 解出 $\xi = 0.46$ 。由 $t_s = \frac{3.5}{\omega_n \xi} = 1$, 解出 $\omega_n = 7.6$ 。由 $K = \omega_n^2$, 求出 $K = 57.9$ 。又 $2\xi\omega_n = KT$, $T = 0.12$ 。

(2) 当 $r(t) = t$ 时, 开环传递函数 $G(s) = \frac{K}{s(s+KT)}$, $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{1}{T}$, $e_{ss1} = \frac{1}{K_v} = 0.12$ 。

当 $n(t) = 1(t)$ 时, $\phi_{cn}(s) = \frac{2K+1}{s^2 + KTs + K}$, $c_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s\phi_{cn}(s)N(s) = \frac{2K+1}{K} = 2.02$, $e_{ss2} = -2.02$, 故而系统的稳态误差为 $e_{ss} = 0.12 - 2.02 = -1.9$ 。

3. (15 分)

(1) 等效开环传函 $G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)^3}$, $n=4$, $p_{1,2,3} = -1$, $p_4 = 0$, $m=1$, $z_1 = -2$ 。

$\sigma_a = \frac{-1}{3}$, $\varphi_a = \pm \frac{\pi}{3}, \pi$, 分离点方程 $\frac{1}{d} + \frac{3}{d+1} = \frac{1}{d+2}$, 从而两个分离点分别为

$d_1 = -0.28$, $d_2 = -2.39$, 将 $s = d_1$, $s = d_2$ 代入特征多项式并令其为零, 得

$K_1 = 0.06$, $K_2 = 16.4$ 。所以特征根为复根的范围为 $0.06 < K < 16.4$ 。

(2) 将 $s = j\omega$ 代入特征多项式并令其为零, 得临界稳定时 $K = 0.68$, $\omega = 0.74$ 。

把 $K = 0.68$ 代入特征多项式, 又知 $(s + 0.74j)$, $(s - 0.74j)$ 是其因子, 从而可以求得闭环极点为 $\pm j0.74$, $-1.5 \pm j0.43$ 。

4. (15 分)

(1) 设 $G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)}$, 由 $20\lg \left| \frac{K}{s^2} \right|_{s=j\omega_1} = 0$, 得 $K = 25$ 。由 $20\lg \left| \frac{K\tau s}{s^2} \right|_{s=j10} = 0$, 得 $\tau = 0.4$ 。

又由于 $-20(\lg\omega_1 - \lg 10) = -10 - 0$, 得 $\omega_1 = 31.6$, 从而 $T = \frac{1}{\omega_1} = 0.0316$ 。

(2) 绘出开环幅相曲线, 可知与负实轴无交点, 因而系统闭环稳定。

$$\gamma = 180^\circ - 180^\circ + \arctan(4) - \arctan(0.316) = 59^\circ$$

不存在穿越频率, 故而 $h = \infty$ 。

5. (15 分) 求原系统的 ω_c , γ , M_r , $\sigma\%$, t_s , 经计算, 得 $\omega_c = \sqrt{2}$, 故

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \sqrt{2} - \arctan(0.01 \times \sqrt{2}) = 34.45^\circ$$

$$M_r = \frac{1}{\sin \gamma} = \frac{1}{\sin 34.45^\circ} = 1.77, \sigma\% = 0.16 + 0.4(M_r - 1) = 46.8\%,$$

$$K = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2 = 4.637, t_s = \frac{K\pi}{\omega_c} = 10.3s$$

根据题意校正后的超调量 $\sigma'\% = 0.468/2 = 23.4\%$, 故

$$M'_r = \frac{\sigma'\% - 0.16}{0.4} + 1 = 1.185, K' = 2 + 1.5(M'_r - 1) + 2.5(M'_r - 1)^2 = 2.361$$

根据题意需将原来的相角裕度从 34.45° 提高到 57.55° ; 这里采用超前校正设计。

设 $aG(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$, 采用超前校正后系统的截止频率会增大, 造成原来系统相角裕度变小, 假设变小 6° , 即 $180^\circ + \varphi(\omega'_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan\omega'_c - \arctan(0.01 \times \omega'_c) = 34.45^\circ - 6^\circ$

解得 $\omega'_c = 1.84$ 。校正后的相角裕度 $\gamma' = \gamma - 6^\circ + \varphi_m$, 即 $57.55^\circ = 34.45^\circ - 6^\circ + \varphi_m$, 即 $\varphi_m = 29.1^\circ$, 所以 $a = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m} = 3$, $t'_s = \frac{K'\pi}{\omega'_c} = 4.03$ 。

6. (15 分) 系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{K}{s^2 + as + K}$$

频率特性为

$$\Phi(j\omega) = \frac{K}{K - \omega^2 + aj\omega}$$

由已知条件得幅频特性为

$$A(3) = \frac{K}{\sqrt{(K-9)^2 + 9a^2}} = 1$$

相频特性为

$$\varphi(3) = -\arctan \frac{3a}{K-9} = -90^\circ$$

由上两式解得 $K=9$, $a=3$, 所以 $\omega_n = \sqrt{K} = 3$, $\xi = \frac{a}{2\omega_n} = 0.5$; 谐振频率 $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, 谐振峰值 $M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, 所以输出最大幅值 $A = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 3 = 2\sqrt{3}$ 。

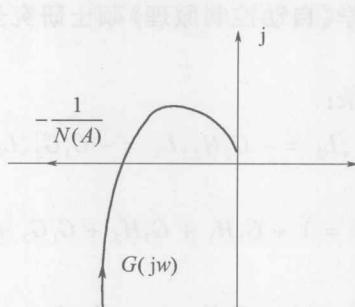
$$7. (15 \text{ 分}) G(z) = Z\left[\frac{2}{s(s+1)}\right] = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)}, \phi(z) = \frac{z}{z^2 - 0.5z + 0.5}$$

特征方程 $z^2 - 0.5z + 0.5 = 0$, $z_{1,2} = 0.25 \pm j0.66$, $|z_{1,2}| = 0.706 < 1$, 系统稳定。

系统是 I 型系统, 对阶跃输入无稳态误差, 故 $c(\infty) = 1$ 。

$$8. (15 \text{ 分}) -\frac{1}{N(A)} = -\frac{2\pi A}{\pi A + 8}, \text{ 当 } A \rightarrow 0 \text{ 时, } -\frac{1}{N(A)} \rightarrow 0, \text{ 当 } A \rightarrow \infty, -\frac{1}{N(A)} \rightarrow -2.$$

把 $s = j\omega$ 代入 $G(s)$ 中, 令其虚部为零, 可以解得 $\omega = 2$, 此时 $G(s) = -0.5$ 。绘图如下。分析图中可以看出 $-\frac{1}{N(A)}$ 从被包围区走向未包围区, 存在稳定的周期振荡(自激振荡), 自激振荡的频率 $\omega = 2$ 。又把 $s = j\omega = j2$ 代入 $1 + N(A)G(s) = 0$, 解得振幅 $A = 0.85$, 从而系统输出 $c(t) = -0.85\sin 2t$ 。



9. (15 分)

$$(1) \quad \mathbf{x}_e = [0 \ 0]^T, |sI - A| = \begin{vmatrix} s & -2 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix} = s^2 - s - 2 = 0, \text{特征根 } s = 2, -1, \text{系统在原点处}$$

非渐近稳定; $G(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{1}{s-2}$, 系统非 BIBO 稳定。

(2) $\mathbf{S}_c = [b \ Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{rank } \mathbf{S}_c = 1; \mathbf{S}_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank } \mathbf{S}_o = 2$ 系统不可控但可观。

(3) 令 $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, 能控性结构分解:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} &= [1 \ 1] \bar{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

因为不能控分量对应特征值为 -1, 对系统的稳定性无影响, 所以可以通过状态反馈的方法, 对能控子空间极点进行任意配置, 从而使系统稳定。

10. (15 分)

(1) 可控标准型:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -72 & -18 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} &= [12 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \end{aligned}$$

(2) 由 $\sigma\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 4.3\%$ 得 $\xi = 0.707$; 由 $t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n} = 3.5$, 得

$$\omega_n = 1.414;$$

$$f^*(s) = (s^2 + 2s + 2)(s + 7) = s^3 + 9s^2 + 16s + 14$$

令

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [k_1 \ k_2 \ k_3], f(s) = [sI - (A - b\mathbf{k})] = s^3 + (18 + k_3)s^2 + (72 + k_2)s + k_1 \\ f(s) &= f^*(s) \end{aligned}$$

得 $\mathbf{K} = [14 \ -56 \ -9]$ 。

$$(3) \Phi(s) = \frac{12}{s^3 + 9s^2 + 16s + 14}, \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{12}{14} = 1.2$$

IX 2013 年南京航空航天大学《自动控制原理》硕士研究生入学考试初试试题(专业型)
参考答案

1. (15 分) 对 $R(s)$, 回路 4 条:

$$L_1 = -G_1H_1, L_2 = -G_2H_2, L_3 = -G_1G_2, L_4 = -G_2G_3$$

两两不接触回路:

$$L_1L_2 = G_1G_2H_1H_2, \Delta = 1 + G_1H_1 + G_2H_2 + G_1G_2 + G_2G_3 + G_1G_2H_1H_2$$

前向通路 2 条:

$$p_1 = G_1, \Delta_1 = 1 + G_2H_2, p_2 = G_3, \Delta_2 = 1 + G_2H_2$$

从而

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(G_1 + G_3)(1 + G_2 H_2)}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 + G_2 G_3 + G_1 G_2 H_1 H_2}$$

对 $N(s)$:

$$p'_1 = 1, \Delta'_1 = 1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_1 H_2$$

从而

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_1 H_2}{1 + G_2 H_2 + G_1 H_1 + G_1 G_2 + G_2 G_3 + G_1 H_1 G_2 H_2}$$

2. (15 分)

(1) 系统误差传递函数

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 - \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)} G_c(s)}{1 + \frac{K_1 K_2}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}} = \frac{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) - K_2 G_c(s)(T_1 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K_1 K_2}$$

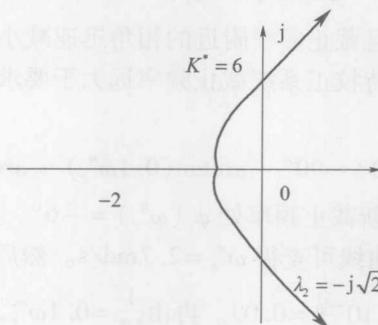
因 K_1, K_2, T_1, T_2 均大于零, 所以只要 $\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} > K_1 K_2$ 即可满足稳定条件。

(2) 在斜坡输入信号作用下其稳态误差为

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_e(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) - K_2 G_c(s)(T_1 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K_1 K_2} \frac{V_0}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{V_0}{K_1 K_2} \left[1 - K_2 \frac{G_c(s)}{s} \right] \end{aligned}$$

令 $e_{ss} = 0$, 得 $G_c(s) = \frac{s}{K_2}$, 由此可见, 校正装置 $G_c(s) = \frac{s}{K_2}$ 时, 可保证无稳态误差。

3. (15 分)



$n = 3, p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -2, \sigma_a = \frac{-1 - 2}{3}, \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3}, \pi$, 分离点方程为

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} = 0$$

得分离点坐标 $d = -0.423$ 。将 $s = j\omega$ 代入特征式方程

$$D(s) = s(s+1)(s+2) + K^* = 0$$

解得 $\begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K^* = 6 \end{cases}$, $K^* = 6$ 为临界根轨迹增益, 根轨迹与虚轴的交点为对应的两个闭环极点, 第三个闭环极点可由根之和法则求得, 即

$$0 - 1 - 2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_3 + j\sqrt{2} - j\sqrt{2}, \lambda_3 = -3$$

4. (15 分) $\varphi(s) = \frac{K}{s^2 + as + K}$, $\omega_n = \sqrt{K}$, $2\xi\omega_n = a$, $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ 得

$$a = 2K - 1$$

又 $|\varphi(j1)| = \frac{K}{\sqrt{(K-1)^2 + a^2}} = 1$

联立两式, 解得 $K=1$, $a=1$ 。系统是 I 型系统, 对于 $r_1(t)=1$ 无稳态误差, 故 $c_{ss1}=1$ 。对于 $r_2(t)=2\sin(2t)$, 有

$$|\varphi(j\omega)|_{\omega=2} = \frac{K}{\sqrt{(K-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}} = 0.545, \angle\varphi(j\omega)_{\omega=2} = -146.3^\circ$$

从而

$$c_{ss2} = 0.545\sin(2t - 146.3^\circ), c_{ss} = 1 + 0.545\sin(2t - 146.3^\circ)$$

令 $|G(j\omega)|=1$, 得 $\omega_c=0.786$ 。

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(0.786) = 51.8^\circ$$

把 a 当成未知量, 将 $K=10$, $\omega=\omega_c=0.786$ 代入 $|G(j\omega)|=1$, 解得 $a=3.16$ 。

5. (15 分) 由于 $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K = 30$, 故

$$G(s) = \frac{30}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

$$|G(j\omega)| = 1$$

可以解得 $\omega_c=9.8$ 。

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(0.1\omega_c) - \arctan(0.2\omega_c) = -17.4^\circ$$

显然, 待校正系统不稳定, 且截止频率附近的相角迅速减小, 在这种情况下, 采用串联超前校正是无效的。考虑到本例中待校正系统截止频率远大于要求值, 有较大余量, 所以采用滞后校正。现作如下设计:

$$\gamma(\omega''_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(0.1\omega''_c) - \arctan(0.2\omega''_c)$$

根据性能要求 $\gamma'' \geq 40^\circ$, 设新截止频率处 $\varphi_c(\omega''_c) = -6^\circ$ 。则由 $\gamma'' = \gamma(\omega''_c) + \varphi_c(\omega''_c)$, 得 $\gamma(\omega''_c) \geq 46^\circ$ 。于是由 $\gamma(\omega''_c)$ 曲线可查得 $\omega''_c = 2.7 \text{ rad/s}$ 。然后由图查出 $L'(\omega''_c) = 21 \text{ dB}$ 。因为 $20\lg b + L'(\omega''_c) = 0$, 可得 $b = 10^{-\frac{21}{20}} = 0.09$ 。再由 $\frac{1}{bT} = 0.1\omega''_c$, 得 $T = \frac{1}{0.1b\omega''_c} = 41$ 。

于是, 滞后校正网络的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1 + bTs}{1 + Ts} = \frac{1 + 3.7s}{1 + 41s}$$

最后, 检验已校正系统的性能指标。

6. (15 分) $G(z) = Z\left[\frac{1}{s+1}\right] \cdot Z\left[\frac{1}{s+2}\right] = \frac{z^2}{z^2 - 0.503z + 0.05}$, $\Phi(z) = \frac{z^2}{2z^2 - 0.503z + 0.05}$

从而特征式 $D(z) = 2z^2 - 0.503z + 0.05 = 0$, 解得 $z_{1,2} = 0.125 \pm 0.097j$, $|z_{1,2}| < 1$, 故而系统稳定。

$$C(z) = R(z)\Phi(z) = \frac{z^2}{2z^2 - 0.503z + 0.05} \cdot \frac{z}{z-1}$$

利用长除法并求逆变换,得 $c(T) = 0.632$ 。 $c(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})C(z) = 0.646$

7. (15分) $-\frac{1}{N(A)} = -\frac{16}{8+3A^2}$, $A=0$ 时, $-\frac{1}{N(A)} = -2$; $A=\infty$ 时, $-\frac{1}{N(A)} = 0$ 。若系统存在自激振荡,则自振频率 $\omega = 2.5$,因为在这一点是随着 A 的增大,由不稳定区域进入稳定区域。

$$|G(j2.5)| = \frac{K \sqrt{2.5^2 + 1} \sqrt{(0.1 \times 2.5)^2 + 1}}{2.5 \sqrt{(10 \times 2.5)^2 + 1} \sqrt{(5 \times 2.5)^2 + 1}} = 2, K = 566.19$$

8. (15分) $f(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

A 为友矩阵,且特征值互异,所以

$$P = [P_1 \ P_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

令 $x = P\bar{x}$, 则

$$\dot{\bar{x}} = P^{-1}AP\bar{x} + P^{-1}bu = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\bar{x} + \begin{bmatrix} 2b_1 + b_2 \\ -b_1 - b_2 \end{bmatrix}u$$

$$y = cP = [c_1 - c_2 \ c_1 - 2c_2]\bar{x}$$

讨论:(1) \bar{x}_1 能控又能观, \bar{x}_2 不能控不能观的条件为

$$\begin{cases} 2b_1 + b_2 \neq 0, -b_1 - b_2 = 0 \\ c_1 - c_2 \neq 0, c_1 - 2c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = -b_1 \neq 0 \\ c_1 = 2c_2 \neq 0 \end{cases}$$

(2) \bar{x}_2 能控又能观, \bar{x}_1 不能控不能观的条件为

$$\begin{cases} -b_1 - b_2 \neq 0, 2b_1 + b_2 = 0 \\ c_1 - 2c_2 \neq 0, c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = -2b_1 \neq 0 \\ c_1 = c_2 \neq 0 \end{cases}$$

9. (15分) 平衡点为 $x_e = 0$, 令 $Q = I$, 实对称矩阵 $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$ 。由 $\Phi^T P \Phi - P = -Q$,

解得

$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

P 的各阶主子式均为正,故 P 正定,系统在原点处大范围渐近稳定。

10. (15分)

$$(1) \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u; y = [15 \ 8 \ 1]x$$

(2) 可化为可控标准型,故系统可控,可以任意配置极点。

令 $K = [k_1 \ k_2 \ k_3]$, $f(s) = |sI - (A - bK)| = s^3 + (7 + k_3)s^2 + (14 + k_2)s + 8 + k_1$, $f^*(s) = (s+1)(s+2)(s+3)$, 令 $f(s) = f^*(s)$, 得 $k_1 = -2, k_2 = -3, k_3 = -1$, 即 $K = [-2 \ -3 \ -1]$ 。

参 考 文 献

- [1] 李友善. 自动控制原理[M]. 3 版. 北京: 国防工业出版社, 2009.
- [2] 王划一, 杨西侠. 自动控制原理[M]. 2 版. 北京: 国防工业出版社, 2009.
- [3] 谢克明. 自动控制原理[M]. 2 版. 北京: 电子工业出版社, 2009.
- [4] 周献中, 盛安冬, 姜斌. 自动化导论[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [5] 陈复扬, 姜斌. 自适应控制与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2009.
- [6] 姜长生, 等. 线性系统理论与设计(中英文版)[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [7] 王宏禹, 邱天爽. 线性时变离散系统[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008.
- [8] 吴受章. 最优控制理论与应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2008.
- [9] 胡寿松. 自动控制原理[M]. 5 版. 北京: 科学出版社, 2007.
- [10] 窦曰轩. 自动控制原理[M]. 北京: 机械工业出版社, 2007.
- [11] 杨一栋. 直升机飞行控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007.
- [12] Bateson, Robert N. Introduction to control system technology[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006.
- [13] 李国勇, 等. 最优控制理论及参数优化[M]. 北京: 国防工业出版社, 2006.
- [14] 张洪钺, 王青. 最优控制理论与应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [15] R. C. 多尔夫, R. H. 毕晓普. 现代控制系统[M]. 10 版. 北京: 科学出版社, 2005.
- [16] 胡寿松, 王执铨, 胡维礼. 最优控制理论与系统[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [17] 龚德恩. 离散控制系统理论引论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2004.
- [18] Richard C. Dorf, Robert H. Bishop. 现代控制系统[M]. 谢红卫, 等译. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [19] Driels M. 线性控制系统工程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.
- [20] 薛定宇. 控制系统计算机辅助设计[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.
- [21] 孟宪蔷. 控制工程基础[M]. 北京: 航空工业出版社, 1993.
- [22] 戴忠达. 自动控制理论基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 1991.
- [23] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990.
- [24] 吴麒. 自动控制原理[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990.
- [25] 胡寿松. 自动控制原理习题集[M]. 北京: 科学出版社, 1990.
- [26] 孙虎章. 自动控制原理[M]. 北京: 中央广播电视台大学出版社, 1984.
- [27] 王照林, 等. 现代控制理论基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 1980.



责任编辑：丁福志 ding@ndip.cn
责任校对：钱辉玲
封面设计：徐 鑫



配套主教材《自动控制原理（第2版）》

书号978-7-118-08872-4 定价：40.00

主教材中引入MATLAB辅助分析与设计，以培养学生现代化的分析与设计能力，适应21世纪教学现代化的发展要求。辅导书配有不同层次和不同用途的例题讲解、考研题分析与课后习题解答，方便学生熟练掌握和深刻理解自动控制原理的基础理论。

▶ 上架建议：自动控制 ◀

<http://www.ndip.cn>

ISBN 978-7-118-09128-1

9 787118 091281 >

定价：32.00 元

