

# Esercizi di Controllo dei Processi N.O.

Prof. R. Scattolini

## ESERCIZIO 1

Il livello  $h$  di un serbatoio a pelo libero è regolato agendo sul segnale di comando  $u$  di una pompa. Il legame tra  $u$  e la portata imposta dalla pompa  $w$  è descritto da una funzione di trasferimento del secondo ordine con guadagno  $\mu$  e costanti di tempo  $T_1$  e  $T_2$ . L'incertezza sul funzionamento della pompa può essere modellizzata come un disturbo di portata  $d$  che agisce su  $w$ , per cui la portata di ingresso effettiva al serbatoio è  $q = w + d$ . Il serbatoio ha sezione costante  $S$ . La sua portata di uscita dipende dalla sezione della condotta di uscita  $S_u$  e dalla pressione  $p_u$  all'interno del serbatoio di raccolta, inferiore alla pressione ambientale  $p_a$ .

Il modello del serbatoio è

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{S} \left\{ q(t) - S_u \sqrt{2 \left[ gh(t) + \frac{p_a - p_u(t)}{\rho} \right]} \right\}$$

e il valore dei parametri è

$$\mu = 0.005 \text{ m}^3/\text{sV} \quad , \quad T_1 = 0.1 \text{ s} \quad , \quad T_2 = 2 \text{ s}$$

$$S = 0.2 \text{ m}^2 \quad , \quad S_u = 8.7 * 10^{-4} \text{ m}^2 \quad , \quad \rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 \quad , \quad p_a = 10^5 \text{ Kg/ms}^2$$

e il valore nominale del disturbo  $p_u$  è

$$\bar{p}_u = 0.9 * 10^5 \text{ Kg/ms}^2$$

Si risponda quindi alle seguenti domande:

1. Si determini, per  $d = 0$ , l'ingresso costante che garantisce all'equilibrio  $\bar{h} = 0.2 \text{ m}$ .

2. Si verifichi che, in corrispondenza dell'equilibrio trovato, la funzione di trasferimento tra la variazione  $\delta q$  dell'ingresso  $q$  e la variazione  $\delta h$  dell'uscita  $h$  è (salvo approssimazioni)

$$G(s) = \frac{573}{1 + 114s}$$

e la funzione di trasferimento tra la variazione  $\delta p_u$  di  $p_u$  e  $\delta h$  è (salvo approssimazioni)

$$M(s) = \frac{10^{-4}}{1 + 114s}$$

3. Si disegni lo schema a blocchi del sistema (linearizzato) con ingressi  $\delta u$  (variazione di  $u$ ) e  $\delta p_u$  e uscita  $\delta h$ .
4. Supponendo che la portata d'ingresso effettiva sia misurabile, si progetti uno schema di controllo in cascata che garantisca un'attenuazione di almeno  $20dB$  del disturbo  $d$ , il cui spettro ha banda massima  $0.1rad/s$ , su  $q$ .
5. Si progetti un regolatore PI in grado di garantire che la risposta del sistema retroazionato a fronte di uno scalino di ingresso arrivi al 99% del valore di regime in circa  $200s$ .
6. Si progetti un compensatore del disturbo  $\delta p_u$ .
7. Volendo discretizzare il PI con una pulsazione di Nyquist corrispondente ad almeno  $30dB$  di attenuazione del sistema in anello chiuso, si determini un periodo di campionamento opportuno.
8. Si discretizzi quindi il PI con un metodo a scelta e si scriva la legge di controllo nel tempo, possibilmente tenendo conto di eventuali saturazioni della sua variabile di uscita (supposte note).
9. Si valuti la riduzione del margine di fase dovuta alla realizzazione digitale del PI.

## Soluzione

- 1) All'equilibrio

$$\bar{q} = \bar{w} = S_u \sqrt{2 \left[ g\bar{h} + \frac{p_a - \bar{p}_u}{\rho} \right]}$$

- 2) Sistema linearizzato

$$\delta \dot{h}(t) = - \frac{S_u g}{S \sqrt{2 \left[ g\bar{h} + \frac{p_a - \bar{p}_u}{\rho} \right]}} \delta h(t) + \frac{S_u}{\rho S \sqrt{2 \left[ g\bar{h} + \frac{p_a - \bar{p}_u}{\rho} \right]}} \delta p_u(t) + \frac{1}{S} \delta q(t)$$

Posto

$$\tau = \left( \frac{S_u g}{S \sqrt{2 \left[ g \bar{h} + \frac{p_a - \bar{p}_u}{\rho} \right]}} \right)^{-1}$$

risulta

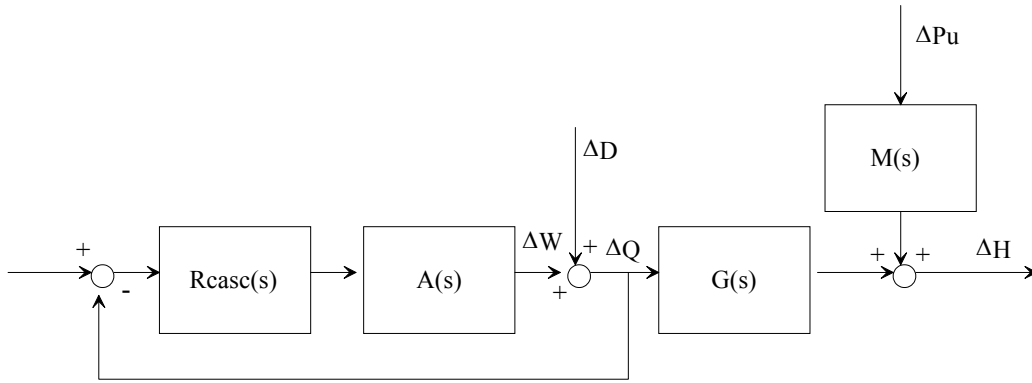
$$\delta \dot{h}(t) = -\frac{1}{\tau} \delta h(t) + \frac{1}{\tau \rho g} \delta p_u(t) + \frac{1}{S} \delta q(t)$$

da cui, passando alle trasformate

$$\Delta H(s) = \frac{1}{\rho g(1 + \tau s)} \Delta P_u(s) + \frac{\tau}{S(1 + \tau s)} \Delta Q(s)$$

Sostituendo i valori numerici si ottengono le funzioni di trasferimento  $G(s)$  e  $M(s)$ .

3) Lo schema a blocchi del sistema linearizzato e del regolatore in cascata  $R_{casc}(s)$  per l'attenuazione del disturbo  $d$  è



dove

$$A(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

4) Per avere l'attenuazione del disturbo richiesta dalle specifiche è necessario imporre che

$$|R_{casc}(j\omega)A(j\omega)|_{dB} \geq 20 \quad , \quad \omega \leq 0.1 rad/s$$

Per questo è sufficiente un regolatore proporzionale  $R_{casc}(s) = \mu_r$  tale che

$$\mu_r \mu \geq 10$$

ad esempio

$$\mu_r = 2000$$

5) L'anello interno ha un limite di banda passante largamente superiore a  $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$  e si può considerare unitario nel progetto di un  $PI$  per  $G(s)$ .

Data la funzione di trasferimento del  $PI$

$$PI(s) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} = K \frac{1 + T s}{s}$$

si può porre  $T = 114s$  (costante di tempo di  $G(s)$ ), così che la funzione d'anello risulti

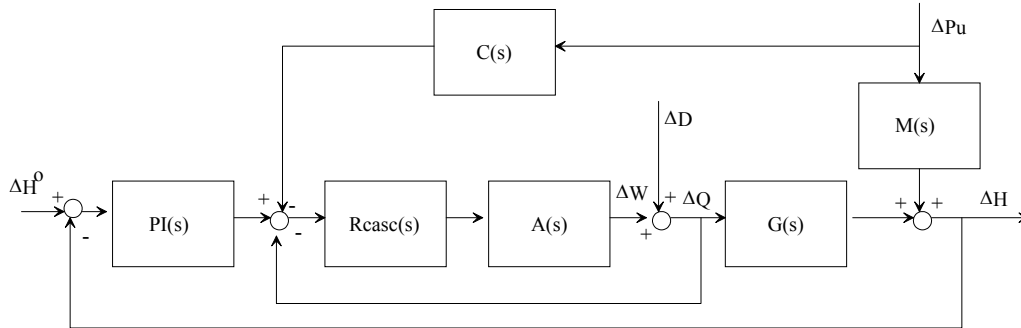
$$L(s) = PI(s)G(s) = K \frac{573}{s}$$

La pulsazione di taglio di  $L(s)$  è  $\bar{\omega} = 573K$ , che corrisponde all'inverso della costante di tempo della funzione di trasferimento in anello chiuso

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + \frac{s}{573K}}$$

Poiché la risposta allo scalino di un sistema del I ordine asintoticamente stabile arriva al 99% del valore di regime dopo 4.6 volte la costante di tempo, per avere un tempo di assestamento di  $200s$ , la costante di tempo di  $F(s)$  deve essere pari a  $200/4.6$ , cioè  $\simeq 43.5s$ . Quindi  $K = 1/(573 * 43.5) = 4 * 10^{-5}$ . Il margine di fase è  $\varphi_m = 90^\circ$ .

6) Lo schema di controllo complessivo, con il  $PI$  e il compensatore  $C(s)$  del disturbo  $p_u$ , è



Supponendo ancora l'anello interno unitario, il compensatore è

$$C(s) = \frac{M(s)}{G(s)} = 0.17 * 10^{-6}$$

7) La funzione d'anello  $L(s)$  ha pulsazione di taglio  $\bar{\omega} = 573 * 4 * 10^{-5} \simeq 0.023$  e scende con pendenza  $.20dB$  per decade. Quindi si ha un'attenuazione maggiore di  $30dB$  per  $\omega_N = 0.3\pi$ , che viene scelta come pulsazione di Nyquist. Pertanto il periodo di campionamento è  $T_c = \pi/\omega_N \simeq 3.3s$ .

8) Discretizzando la funzione di trasferimento del  $PI$  con il metodo di Eulero all'indietro si ottiene

$$R_{PI}(z) = K \frac{(T_c + T)z - 1}{z - 1}$$

La legge di controllo a tempo discreto è

$$u(k) = u(k-1) + K[(T_c + T)e(k) - e(k-1)]$$

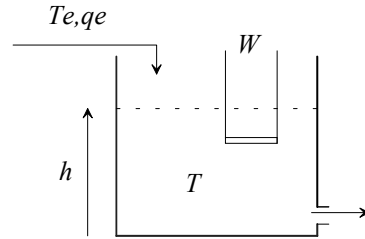
Un'implementazione antiwindup è

$$\begin{aligned} v(k) &= u(k-1) + K[(T_c + T)e(k) - e(k-1)] \\ \text{if } (v(k) > u_{\max}) \quad v(k) &= u_{\max} \\ \text{if } (v(k) < u_{\min}) \quad v(k) &= u_{\min} \\ u(k) &= v(k) \end{aligned}$$

9) La riduzione del margine di fase è

$$\delta\varphi_m = -0.5T_c\bar{\omega}\frac{180}{\pi} \simeq -4.3^\circ$$

## ESERCIZIO 2



Il sistema termico-idraulico riportato in figura è descritto dal modello

$$\begin{aligned} \frac{dh(t)}{dt} &= \frac{1}{A} \left[ q_e(t) - A_u \sqrt{2gh(t)} \right] \\ \frac{dT(t)}{dt} &= \frac{1}{C\rho Ah(t)} \left\{ \begin{aligned} &-C\rho T(t)q_e(t) + \rho q_e(t) \left[ CT_e(t) + \frac{q_e^2(t)}{2A_e^2} + gh(t) \right] \\ &-\rho A_u \sqrt{2gh(t)}gh(t) + W(t) - k[T(t) - T_e(t)] \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

dove il livello  $h$  e la temperatura del liquido  $T$  sono le variabili che si desidera controllare, la portata  $q_e$  e la potenza  $W$  sono le variabili di controllo e la temperatura esterna  $T_e$  è un disturbo misurabile. I parametri geometrici del sistema sono i seguenti:  $A = 0.08m^2$  è la superficie costante del serbatoio,  $A_e = 10^{-4}m^2$  è la sezione della condotta

d'entrata,  $A_u = 2.5 * 10^{-5}m$  è la sezione della condotta d'uscita,  $C = 4184J/CKg$  è il calore specifico del liquido,  $\rho = 1000Kg/m^3$  è la densità del liquido,  $g = 9.8m/s^2$  è l'accelerazione di gravità e  $k = 10W/K$  è un coefficiente di scambio.

In corrispondenza degli ingressi costanti  $\bar{q}_e = 4.95 * 10^{-5}m^3/s$ ,  $\bar{W} = 1035W$ ,  $\bar{T}_e = 20C$  si ha  $\bar{h} = 0.2m$  e  $\bar{T} = 25C$  (salvo approssimazioni) e il sistema linearizzato

$$\begin{bmatrix} H(s) \\ T(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8081}{1+646s} & 0 \\ \frac{-10080}{1+646s} & \frac{0.0048}{1+322s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_e(s) \\ W(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+322s} \end{bmatrix} T_e(s)$$

1. Si verifichi che i valori di equilibrio siano corretti (salvo approssimazioni).
2. Si calcoli la matrice dei guadagni relativi e si giustifichi il risultato.
3. Si elimini l'effetto di  $q_e$  su  $T$  mediante uno schema di disaccoppiamento.
4. Si progettino due  $PI$  per gli anelli disaccoppiati facendo in modo che la velocità di risposta dei sistemi reazionati sia all'incirca doppia di quella dei sistemi in anello aperto.
5. Si discretizzino i  $PI$  con un tempo di campionamento opportuno.
6. Si mostri una realizzazione anti-windup dei  $PI$  e si scriva la legge di controllo a tempo discreto.
7. Si progetti un compensatore del disturbo.
8. Si valuti la riduzione del margine di fase relativa all'anello di controllo di livello causata dall'implementazione digitale del regolatore.
9. Sempre con riferimento all'anello di regolazione di livello, volendo realizzare una legge di controllo in cui il valore di  $u(k)$  dipende al più da  $e(k-1)$ , si supponga di introdurre un ritardo aggiuntivo nella funzione di trasferimento a tempo discreto  $R(z)$  del regolatore precedentemente trovata. Si mostri come viene modificata  $R(z)$ . Si valuti, in termini di riduzione del margine di fase, il deterioramento delle prestazioni comportato da questa modifica.

## ESERCIZIO 3

Il modello di una macchina per la produzione della carta è il seguente

$$\begin{aligned} \dot{h}_1(t) &= -3.371\sqrt{h_1(t)+h_2(t)} + u_1(t) \\ \dot{h}_2(t) &= \frac{1}{1.5-h_1(t)} \left\{ (h_a(t)+h_2(t)) \left( -3.325\sqrt{h_1(t)+h_2(t)} + u_1(t) \right) \right. \\ &\quad \left. + 3.128 - u_2(t)\sqrt{h_a(t)h_2(t)} \right\} \end{aligned}$$

- Considerando il segnale di disturbo costante  $\bar{h}_a = 10.32$  e il valore di regime desiderato delle due variabili di stato  $\bar{h}_1 = 0.7$  e  $\bar{h}_2 = 1.5$  (nelle opportune unità di misura), determinare i valori di regime  $\bar{u}_1$  e  $\bar{u}_2$  che devono assumere le variabili di controllo.
- A partire dal modello linearizzato

$$\begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.75(1+0.75s)}{(1+0.05s)(1+10.8s)} & \frac{5.6}{(1+0.05s)(1+10.8s)} & \frac{0.17}{(1+0.05s)(1+10.8s)} \\ \frac{0.13(1+64.5s)}{(1+0.05s)(1+10.8s)} & \frac{-3.2(1+0.88s)}{(1+0.05s)(1+10.8s)} & \frac{-0.1}{(1+0.05s)(1+10.8s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ H_a(s) \end{bmatrix}$$

si determini la matrice dei guadagni relativi tra le variabili di controllo e quelle controllate e si individuino i migliori accoppiamenti ingresso/uscita.

- Si progetti un regolatore di disaccoppiamento e se ne disegni lo schema realizzativo.
- Si progettino due regolatori decentralizzati di tipo PI in modo da garantire, per i singoli anelli, un margine di fase di almeno  $60^\circ$  e un tempo di assestamento della risposta allo scalino di circa 10 unità di tempo.
- Sul sistema disaccoppiato e regolato con i PI, si progetti anche un regolatore in anello aperto in grado di eliminare, o ridurre, l'effetto del disturbo  $h_a$  e si disegni lo schema di controllo complessivo.
- Si determinino le funzioni di trasferimento di tutti i regolatori discretizzati con il metodo di Eulero all'indietro dopo aver scelto un intervallo di campionamento opportuno. Si scriva l'espressione della legge di controllo a tempo discreto che consente di calcolare le due variabili di controllo discretizzate. Si valuti inoltre la riduzione del margine di fase (supponendo i due anelli separati) dovuta alla presenza dei mantenitori di ordine zero.
- Si discuta un'eventuale realizzazione "anti-windup" dei regolatori.
- Si ricavi il modello linearizzato precedentemente fornito.

## ESERCIZIO 4

Dato

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 3x(t) + 2u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned}$$

progettare un *PI* in modo da garantire una sovraelongazione massima del 30% e un tempo di assestamento all'1% minore di 1.

# Soluzione

La funzione di trasferimento del processo è

$$G(s) = \frac{2}{s-3}$$

Utilizzando un regolatore  $PI$  con funzione di trasferimento

$$PI(s) = K \frac{1+Ts}{s}$$

e un sistema in anello chiuso con funzione di trasferimento tra riferimento e uscita data da

$$F(s) = \frac{\frac{2}{s-3} K \frac{1+Ts}{s}}{1 + \frac{2}{s-3} K \frac{1+Ts}{s}} = \frac{2K(1+Ts)}{s^2 + (2KT-3)s + 2K}$$

Benché il legame tra smorzamento e sovraelongazione e quello tra tempo di assestamento e parte reale dei poli valga per funzioni di trasferimento del II ordine *senza zeri*, applichiamo le stesse regole anche in questo caso. Dalla figura relativa si vede che per avere sovraelongazione massima minore del 30% lo smorzamento dei poli deve essere  $\xi \geq 0.35$ ; per sicurezza scegliamo  $\xi = 0.5$ . Inoltre, per avere tempo di assestamento  $T_a$  al 1% deve essere

$$e^{-\xi\omega_n T_a} \leq 0.01$$

Per  $T_a = 1$  dovrà essere

$$\xi\omega_n \geq -\ln 0.01$$

da cui  $\xi\omega_n \geq 4.6$ . Posto  $\xi\omega_n = 5$ , risulta  $\omega_n = 10$ . L'equazione caratteristica in anello chiuso dovrà essere

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 10s + 100 = 0$$

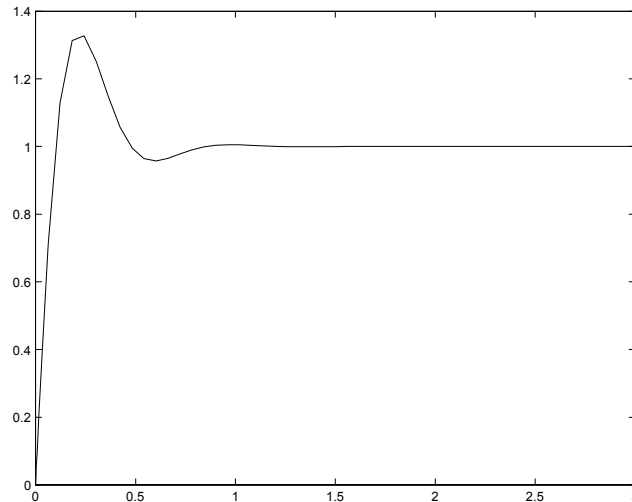
Quindi

$$\begin{aligned} 2KT - 3 &= 10 \\ 2K &= 100 \end{aligned}$$

e  $K = 50$ ,  $T = 0.13$ .

La risposta allo scalino del sistema in anello chiuso mostra che le verifiche sono soddisfatte nonostante l'approssimazione introdotta,





## ESERCIZIO 5

Dato il sistema

$$G(s) = \frac{(1 - 2s)e^{-0.5s}}{(1 + s)^2}$$

progettare un  $PI$  in modo tale da allargare il più possibile la banda passante e ottenere un margine di fase di almeno  $50^\circ$

## ESERCIZIO 6

Dato il sistema con funzione di trasferimento

$$G_c(s) = \frac{1}{(s + 0.1)(s + 1)}$$

1. Progettare un regolatore  $PI$  in grado di garantire  $\varphi_m \geq 50^\circ$  e la massima velocità di risposta possibile
2. Discretizzare il  $PI$  con il metodo di Eulero all'indietro scegliendo un periodo di campionamento opportuno
3. Valutare la riduzione del margine di fase dovuto allo  $ZOH$
4. Determinare la legge di controllo a tempo discreto
5. Discretizzare il  $PI$  con il metodo di Tustin lasciando indicato il periodo di campionamento
6. Confrontare con Simulink la risposta allo scalino del sistema retroazionato con regolatore continuo e con regolatore discretizzato al variare del periodo di campionamento
7. Considerare il caso in cui il segnale di ingresso saturi a  $-0.3$  e a  $+0.3$

8. Implementare con Simulink una tecnica di desaturazione

## ESERCIZIO 7

Dato il sistema con funzione di trasferimento

$$G_c(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.1s + 1)}$$

1. Progettare un regolatore del secondo ordine in grado di garantire errore nullo a transitorio esaurito per riferimenti a scalino,  $\varphi_m \geq 70^\circ$  e una banda passante di 10 (rad/sec). (Suggerimento: progettare con Bode cancellando i poli poco smorzati del processo)
2. Considerare cosa succede se c'è un disturbo a scalino sulla variabile di controllo
3. Considerare cosa succede se c'è un errore di modello e il sistema sotto controllo vero è:

$$G_1(s) = \frac{0.25}{(s^2 + 0.05s + 0.25)}, \quad o \quad G_2(s) = \frac{4}{(s^2 + 0.2s + 4)}$$

4. Discretizzare il processo con un periodo di campionamento opportuno
5. Sintetizzare un regolatore digitale con il metodo di assegnamento dei poli in modo da garantire errore nullo a transitorio esaurito per riferimenti a scalino, e in modo tale che i poli dominanti dell'anello chiuso nel continuo abbiano  $w_N = 10$ ,  $\xi = 0.7$ .
6. Considerare cosa succede se c'è un disturbo a scalino sulla variabile di controllo
7. Considerare cosa succede se c'è un errore di modello e il sistema sotto controllo vero è:

$$G_1(s) = \frac{0.25}{(s^2 + 0.05s + 0.25)}, \quad o \quad G_2(s) = \frac{4}{(s^2 + 0.2s + 4)}$$

## ESERCIZIO 8

Un carrello, in cui il coefficiente  $k$  è una funzione non lineare di  $x$ , è descritto dal seguente modello

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k_0}{M}e^{-x_1}x_1 - \frac{h}{M}x_2 + u \\ y &= x_1 \end{cases}$$

in cui  $M = 1$ ,  $h = 1.1$ ,  $k_0 = 0.33$ .

- A) Determinare il valore di  $\bar{u}$  per cui all'equilibrio risulta  $\bar{x}_1 = 0.5$

- B) Linearizzare il sistema attorno all'equilibrio trovato e verificare che (salvo approssimazioni) la funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{1}{(s + 0.1)(s + 1)}$$

- C) Progettare un regolatore PI in grado di garantire  $\varphi_m \geq 50^\circ$  e la massima velocità di risposta possibile
- D) Valutare il tempo di assestamento della risposta allo scalino del sistema in anello chiuso
- E) Supponendo invece di volere  $\bar{x}_1 = 2$ , trovare il valore di  $\bar{u}$  corrispondente
- F) Verificare che la funzione di trasferimento del sistema linearizzato è

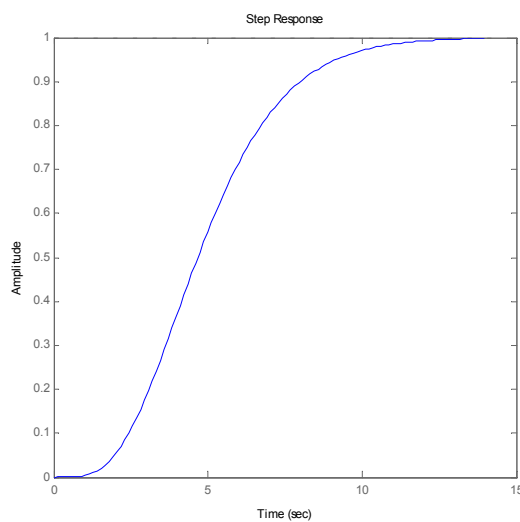
$$G(s) = \frac{1}{(s - 0.04)(s + 1.14)}$$

- G) Progettare uno schema di regolazione in modo che il sistema in anello chiuso sia stabile asintoticamente e abbia  $\varphi_m \geq 50^\circ$ .

Valutare anche per questo sistema retroazionato la velocità di risposta ad uno scalino del segnale di riferimento

## ESERCIZIO 9

Si consideri un sistema la cui risposta allo scalino unitario è



1. Si determini, a partire dalla risposta allo scalino, un modello approssimato con funzione di trasferimento

$$G_a(s) = \frac{\mu}{1 + sT} e^{-\tau s}$$

2. Si progetti un regolatore PI su  $G_a(s)$  in modo che il sistema in anello chiuso si comporti all'incirca come un sistema con 2 poli dominanti con smorzamento  $\xi = 0.7$ .
3. Si progetti in alternativa uno schema con PI e predittore di Smith.
4. Sapendo che la vera funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{2}{(1 + s)^5}$$

si valutino le effettive prestazioni fornite dal regolatore progettato al punto 2.

5. Volendo discretizzare il regolatore del punto 2, si determini un periodo di campionamento opportuno, si discretizzi con il metodo di Eulero in avanti e si ricavi la legge di controllo a tempo discreto ( $u(k) = \dots$ ).
6. Si mostri una possibile realizzazione antiwindup del regolatore così ottenuto.

## Soluzione

Utilizzando il metodo della tangente, un modello approssimato è

$$G_a(s) = \frac{2}{1 + 5s} e^{-2.4s}$$

Utilizzando la relazione approssimata

$$\xi = \frac{\varphi_m}{100}$$

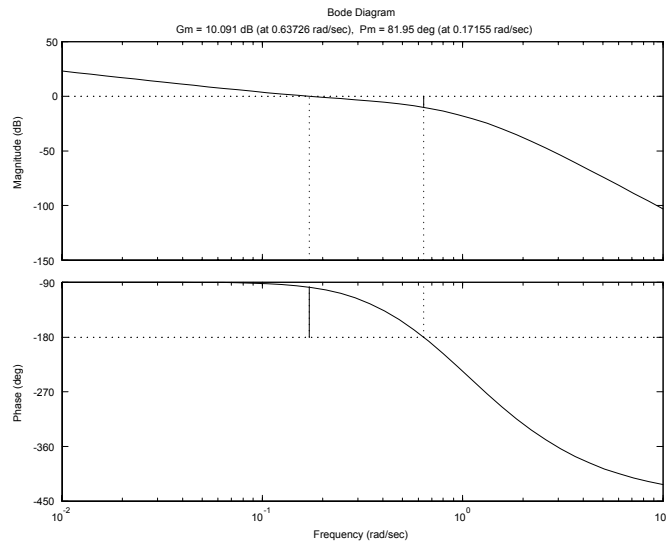
dove  $\xi$  è lo smorzamento dei poli in anello chiuso nelle ipotesi fatte, si deve richiedere  $\varphi_m = 70$ . La funzione di trasferimento del PI può quindi essere scelta come

$$PI(s) = \frac{0.07(1 + 5s)}{s}$$

a cui corrisponde la funzione d'anello vera

$$G(s)PI(s) = \frac{0.14(1 + 5s)}{s(s + 1)^5}$$

i cui diagrammi di Bode sono riportati nel seguito



I diagrammi mostrano che comunque si ottiene un margine di fase  $\varphi_m \simeq 82^\circ$ , più che accettabile nonostante le approssimazioni.

## ESERCIZIO 10

Dato il sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1 - s}{(1 + 5s)(1 + 0.2s)}$$

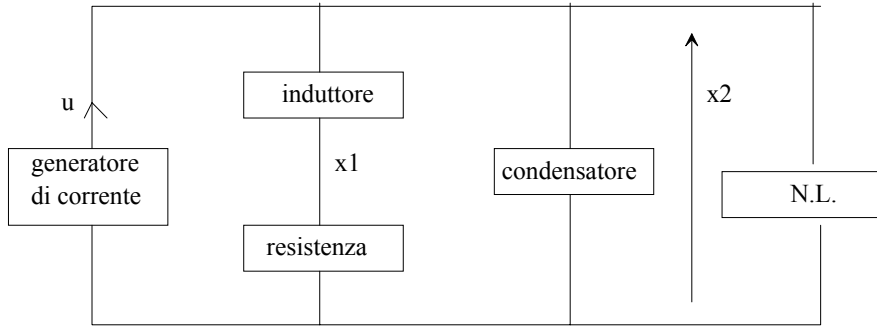
progettare un PI per avere margine di fase  $60^\circ$ . Discretizzare il PI scegliendo un periodo di campionamento opportuno e utilizzando il metodo della mappa poli-zero. Determinare la legge di controllo a tempo discreto.

## ESERCIZIO 11

Si presentino i metodi per la taratura automatica dei regolatori PID.

## ESERCIZIO 12

Si consideri il circuito riportato nella figura seguente, dove l'elemento non lineare è descritto da  $i = -gv + kv^3$ .



Definendo come variabili di stato la corrente  $x_1$  nell'induttore e la tensione  $x_2$  sul condensatore, il sistema è descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{r}{l}x_1 + \frac{1}{l}x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{c}x_1 + \frac{1}{c}(gx_2 - kx_2^3) + \frac{1}{c}u \\ y &= x_2\end{aligned}$$

Posto, nelle opportune unità di misura,  $r = 1$ ,  $l = 0.2$ ,  $c = 1$ ,  $g = 0.8$ ,  $k = 0.05$ , si risponda alle seguenti domande:

1. si determini il valore dell'ingresso costante e lo stato di equilibrio che garantiscono l'uscita di equilibrio  $\bar{x}_2 = 1$ ;
2. si determini il sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio trovato;
3. si progetti un regolatore di tipo PI che garantisca un margine di fase di almeno  $60^\circ$  e si valuti il tempo di assestamento del sistema retroazionato a fronte di uno scalino del segnale di riferimento  $x_2^o$ ;
4. si discretizzi il PI scegliendo un periodo di campionamento opportuno e si determini la legge di controllo a tempo discreto.

## ESERCIZIO 13

Il modello (parziale) di un reattore per la polimerizzazione è descritto dalle seguenti equazioni, dove, in variabili adimensionali,  $x_1$  è la concentrazione del monomero e  $x_2$  è la concentrazione dell'iniziatore e  $u$  è la portata volumetrica dell'iniziatore.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 10(6 - x_1(t)) - 2x_1(t)\sqrt{x_2(t)} \\ \dot{x}_2(t) = 80u(t) - 10x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

1. si determini lo stato di equilibrio che corrisponde all'ingresso costante  $\bar{u} = 0.125$ ;
2. si determini il sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio trovato;
3. si progetti un regolatore in grado di garantire errore nullo a transitorio esaurito per segnali di riferimento costanti, smorzamento dei poli in anello chiuso  $\xi > 0.7$  (salvo poli cancellati) e tempo di assestamento al 99% della risposta allo scalino minore di  $T_a = 0.4$ .

## ESERCIZIO 14

Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{u(t)}x(t) - \frac{2d(t)}{x(t)} \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

dove  $d$  è un disturbo misurabile,

1. si determini l'ingresso costante  $\bar{u}$  a cui corrisponde lo stato di equilibrio  $\bar{x} = -1$  quando  $\bar{d} = 1$ ;
2. si determini il sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio trovato e il corrispondente schema a blocchi;
3. si progetti sul sistema linearizzato un regolatore PI stabilizzante che imponga i poli in anello chiuso in posizione  $-2$  e un compensatore del disturbo;
4. si discretizzi il PI con un metodo a scelta e se ne mostri una realizzazione che tenga conto del fenomeno del wind-up.

## ESERCIZIO 15

Il modello semplificato di una sospensione magnetica con due elettromagneti contrapposti è descritto dall'equazione

$$m\ddot{x}(t) = K\left(\frac{I_1^2(t)}{D_1^2} - \frac{I_2^2(t)}{D_2^2}\right) + p(t)$$

dove  $x$  è la distanza tra rotore ed elettromagneti,  $m$  è la massa del rotore,  $I_1 \geq 0$  e  $I_2 \geq 0$  sono le correnti negli elettromagneti,  $K$  è una costante e  $p$  un disturbo.

Supponendo (nelle opportune unità di misura)

$$m = 1 \quad , \quad K = 0.5 \quad , \quad D_1 = 2 \quad , \quad D_2 = \sqrt{2}$$

e considerando  $I_1$  e  $p$  come disturbi,  $I_2$  come effettiva variabile di controllo, si risponda alle seguenti domande.

1. Si determini il valore costante  $\bar{I}_2$  di  $I_2$  all'equilibrio in corrispondenza di  $\bar{I}_1 = 2$  e  $\bar{p} = 0.5$ .
2. Si linearizzi il sistema attorno all'equilibrio trovato e si determini la funzione di trasferimento tra  $\delta I_2(t) = I_2(t) - \bar{I}_2$  e  $\delta x(t) = x(t) - \bar{x}$ .
3. Sul sistema linearizzato si progetti un controllore PID (ideale) discutendo le prestazioni che si possono ottenere.
4. Si discretizzi il PID scegliendo un periodo di campionamento opportuno e si mostri una possibile realizzazione del regolatore discretizzato che tenga conto dei problemi dovuti alla saturazione dell'attuatore.

## Soluzione

1) All'equilibrio si ha

$$0.5 \left( 1 - \frac{\bar{I}_2^2}{2} \right) + 0.5 = 0$$

cioè  $\bar{I}_2 = 2$ .

2) Ponendo poi  $x_1 = x$  e  $x_2 = \dot{x}$ , il sistema si può riscrivere nella forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{m} \left[ K \left( \frac{I_1^2(t)}{D_1^2} - \frac{I_2^2(t)}{D_2^2} \right) + p(t) \right] \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

la cui linearizzazione attorno all'equilibrio trovato è

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_1(t) &= \delta x_2(t) \\ \delta \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{m} \left[ K \frac{2\bar{I}_1}{D_1^2} \delta I_1(t) - K \frac{2\bar{I}_2}{D_2^2} \delta I_2(t) + \delta p(t) \right] \\ \delta y(t) &= \delta x_1(t) \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_1(t) &= \delta x_2(t) \\ \delta \dot{x}_2(t) &= 0.5 \delta I_1(t) - \delta I_2(t) + \delta p(t) \\ \delta y(t) &= \delta x_1(t) \end{aligned}$$



Passando alle trasformate di Laplace, la funzione di trasferimento tra le trasformate di  $\delta I_2$  e  $\delta y$  è

$$G(s) = -\frac{1}{s^2}$$

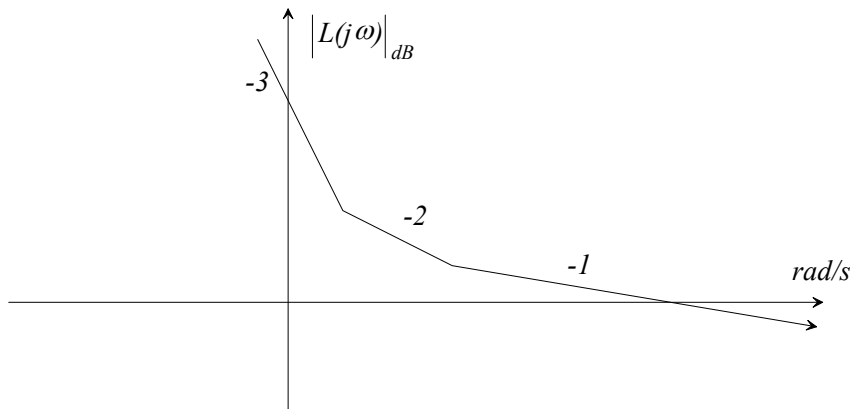
3) Dato il PID ideale, con funzione di trasferimento

$$PID(s) = K \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{s}$$

in cui  $K$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  dipendono in modo banale dalle costanti del PID  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$ , il guadagno  $K$  deve essere negativo in modo che il guadagno d'anello sia positivo. Inoltre, poiché la funzione d'anello

$$L(s) = PID(s)G(s) = -K \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{s^3}$$

ha 3 poli nell'origine, per avere un adeguato margine di fase i due zeri del PID devono essere posti a pulsazioni inferiori rispetto alla pulsazione di taglio, in modo che il margine di fase sia adeguato. In questo caso, la pulsazione di taglio può essere scelta arbitrariamente, almeno per quanto riguarda il margine di fase, e il diagramma di Bode del modulo di  $L(j\omega)$  deve avere la forma seguente



4) Per quanto riguarda l'ultima parte dell'esercizio, si veda ad esempio il primo esercizio.

## ESERCIZIO 16

Il modello di un mulino per la produzione di cemento è descritto dalle seguenti equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + 0.8\varphi(x_2) \\ \dot{x}_2 &= -0.8\varphi(x_2) + u \\ y &= x_1 \end{cases}$$

in cui  $\varphi(x_2) = -0.1x_2^2 + 16x_2$ .

- A) Determinare il valore dell'equilibrio  $(\bar{x}, \bar{u})$  per cui risulta  $\bar{x}_2 = 50$
- B) Linearizzare il sistema attorno a tale punto di equilibrio trovando le equazioni del sistema in variabili di stato
- C) Verificare che la funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{4.8}{(s+1)(s+4.8)}$$

- D) Basandosi sulla funzione di trasferimento  $G(s)$  progettare un regolatore PI in grado di garantire  $\varphi_m \geq 50^\circ$  e la massima velocità di risposta possibile
- E) Valutare il tempo di assestamento della risposta allo scalino del sistema in anello chiuso
- F) Determinare il valore dell'equilibrio per cui all'equilibrio risulta  $\bar{x}_2 = 100$ .
- G) Linearizzare il sistema attorno a tale punto di equilibrio trovando le equazioni del sistema in variabili di stato
- H) Verificare che la funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{-3.2}{(s+1)(s-3.2)}$$

- I) Basandosi sulla funzione di trasferimento  $G(s)$  progettare uno schema di regolazione in modo che il sistema in anello chiuso sia stabile asintoticamente e abbia  $\varphi_m \geq 50^\circ$ .
- L) Valutare anche per questo sistema retroazionato la velocità di risposta ad uno scalino del segnale di riferimento

## Soluzione

A) In corrispondenza di  $\bar{x}_2 = 50$  risulta  $\bar{\varphi} = 550$ ,  $\bar{u} = \bar{x}_1 = 0.8\bar{\varphi} = 440$ .

B) Il sistema linearizzato attorno a questi valori di equilibrio è

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}_1(t) &= -\delta x_1(t) + 4.8\delta x_2(t) \\ \delta \dot{x}_2(t) &= -4.8\delta x_2(t) + \delta u(t)\end{aligned}$$

C) la cui funzione di trasferimento è appunto

$$G(s) = \frac{4.8}{(s+1)(s+4.8)} = \frac{1}{(1+s)(1+0.2083s)}$$

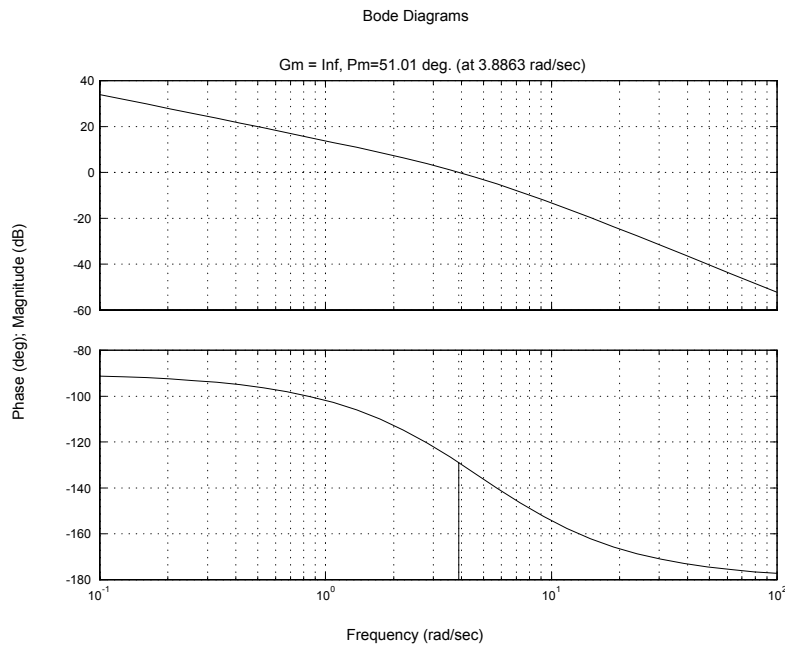
D) Utilizzando un  $PI$  con funzione di trasferimento

$$R_{PI}(s) = K \frac{1+s}{s}$$

si ha la funzione d'anello

$$G(s)R_{PI}(s) = K \frac{1}{s(1+0.2083s)}$$

Per avere un margine di fase maggiore o uguale a  $50^\circ$ , il contributo del polo in  $s = -4.8$  deve essere al più di  $-40^\circ$ , cioè il polo deve essere oltre la pulsazione di taglio. Come mostrato in figura, con  $K = 5$  si ottiene il margine di fase richiesto



E) Il sistema in anello chiuso è del secondo ordine senza zeri; i suoi poli hanno smorzamento pari circa a

$$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100} = 0.5$$

e pulsazione naturale pari circa alla pulsazione di taglio della funzione d'anello, cioè

$$\omega_n \simeq 3.9 \text{ rad/s}$$

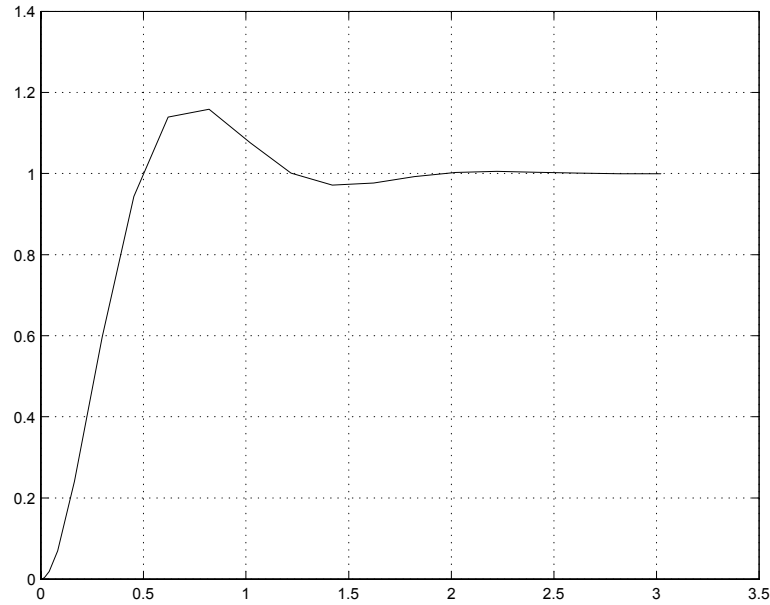
Il tempo  $T$  per avere assestamento al 90% della risposta allo scalino si può quindi stimare come quello necessario perché

$$e^{-\xi\omega_n T} \geq 0.1$$

Con i valori precedenti di  $\xi$  e  $\omega_n$ , supponendo che valga l'uguaglianza, si ha

$$T = 1.18$$

Dall'esame della risposta allo scalino in anello chiuso, qui riportata, si vede che la stima è più che accettabile.



F) In corrispondenza di  $\bar{x}_2 = 100$  risulta  $\bar{\varphi} = 600$ ,  $\bar{u} = \bar{x}_1 = 0.8\bar{\varphi} = 480$ .

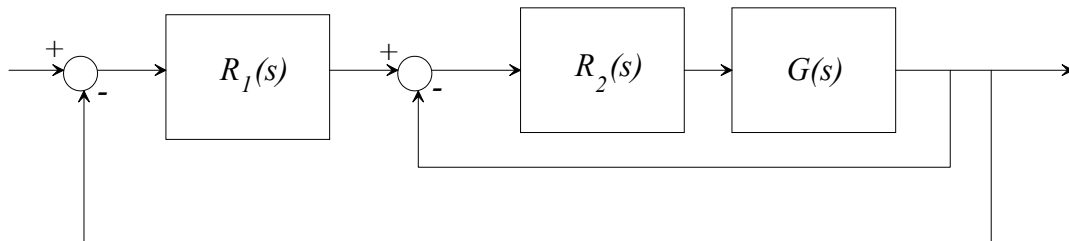
G) Il sistema linearizzato attorno a questi valori di equilibrio è

$$\begin{aligned}\delta\dot{x}_1(t) &= -\delta x_1(t) - 3.2\delta x_2(t) \\ \delta\dot{x}_2(t) &= 3.2\delta x_2(t) + \delta u(t)\end{aligned}$$

H) la cui funzione di trasferimento è appunto

$$G(s) = \frac{-3.2}{(s+1)(s-3.2)}$$

I) Poiché il sistema è instabile, non è possibile applicare il criterio di Bode, ma si può realizzare uno schema di controllo in cascata, come mostrato nella figura seguente, in cui il regolatore  $R_1(s)$  stabilizza il sistema in anello chiuso e il regolatore  $R_2(s)$  dell'anello esterno è progettato per ottenere determinate prestazioni.



Per progettare  $R_1(s)$  si può pensare di utilizzare il luogo delle radici. In particolare, ponendo

$$R_1(s) = \mu \frac{s+1}{s+\alpha}$$

si cancella lo zero del processo e si possono scegliere  $\mu$  e  $\alpha$  in modo da posizionare i poli nel piano complesso. Posto  $\alpha = 5.2$  e  $\mu = -5.5125$ , la funzione di trasferimento in anello chiuso (anello interno) è

$$G'(s) = \frac{R_1(s)G(s)}{1 + R_1(s)G(s)} = \frac{17.64}{(s+1)^2}$$

A questo punto il progetto di  $R_2(s)$  va fatto con riferimento a  $G'(s)$  procedendo come nel caso precedente.

## ESERCIZIO 17

Si considerino due bacini artificiali con livelli  $x_1$  e  $x_2$ , superfici  $L_1$  e  $L_2$ , portate volumetriche di afflusso  $u_1$  e  $u_2$ , portate volumetriche di deflusso  $y_1$  e  $y_2$ . Poiché l'emissario del primo bacino è l'immissario del secondo, risulta  $u_2(t) = y_1(t - \tau)$ , dove  $\tau$  è il tempo di trasporto. Le portate volumetriche  $y_1$  e  $y_2$  sono funzione dei livelli dei rispettivi laghi tramite la corrispondente scala di deflusso descritta dalle relazioni

$$y_i(t) = \alpha_i x_i(t)^2$$

Il modello del sistema è quindi

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{\alpha_1 x_1(t)^2}{L_1} + \frac{u_1(t)}{L_1} \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{\alpha_2 x_2(t)^2}{L_2} + \frac{\alpha_1 x_1(t - \tau)^2}{L_2} \end{cases}$$

Posto

$$\begin{aligned} L_1 &= 20000m^2 & , & & L_2 &= 10000m^2 \\ \alpha_1 &= 0.06m/s & , & & \alpha_2 &= 0.08m/s & , & \tau &= 6h \end{aligned}$$

1. si determini il valore dell'ingresso e dello stato di equilibrio corrispondenti al livello di equilibrio  $\bar{x}_1 = 12m$ .
2. Si linearizzi il sistema attorno all'equilibrio trovato e si disegni il corrispondente schema a blocchi con ingresso  $\delta u_1$  e uscita  $\delta y_2$  evidenziando il segnale  $\delta x_1$  e il ritardo di trasporto.

3. Supponendo di poter misurare  $\delta x_1$ , si progetti uno schema di controllo in cascata, con due PI, per regolare  $x_2$  agendo su  $u_1$ . Il regolatore dell'anello interno deve essere progettato per ridurre l'effetto di disturbi (perdite) sul livello del primo serbatoio e in modo che la risposta ad uno scalino del segnale di riferimento di  $\delta x_1$  si esaurisca al più in due ore. Il PI relativo all'anello esterno deve essere progettato in modo da velocizzare il più possibile il sistema di controllo garantendo un margine di fase di  $60^\circ$ . Si valuti quindi se l'ipotesi di disaccoppiamento in frequenza dei due anelli può ritenersi verificata.
4. Scegliendo il periodo di campionamento, si discretizzi il regolatore esterno con la mappa poli-zero e si determini la legge di controllo a tempo discreto.

## ESERCIZIO 18

Il modello, in variabili normalizzate, di crescita di un insetto soggetto a fenomeni di predazione, è

$$\frac{dx}{dt} = x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{u(t)}\right) - \frac{x^2(t)}{1 + x^2(t)}$$

dove  $x$  è la popolazione dell'insetto e  $u$  rappresenta la disponibilità nutrizionale dell'ambiente.

1. Si determini il valore che a regime deve assumere  $u$  affinché  $\bar{x} = 1$  sia un equilibrio.
2. Si determini il sistema linearizzato corrispondente all'equilibrio trovato.
3. Si determini, per il sistema linearizzato, un regolatore PI tale che la risposta ad un riferimento costante arrivi al 99% del suo valore finale in 4 unità di tempo e che garantisca un margine di fase di almeno  $40^\circ$ . Si dia una stima dello smorzamento dei poli del sistema in anello chiuso ottenuto.
4. Si discretizzi il regolatore trovato con il metodo di Tustin e si mostri una realizzazione antiwind-up del regolatore discretizzato.

## ESERCIZIO 19

Si consideri un braccio robotico a singolo link e giunto flessibile, il cui modello matematico è

$$\begin{aligned} I\ddot{q}_1 + MgL \sin(q_1) + K(q_1 - q_2) &= 0 \\ J\ddot{q}_2 - K(q_1 - q_2) &= u \end{aligned}$$

La variabile di controllo  $u$  è la coppia generata dal motore. La variabile controllata è la posizione angolare del link  $q_1$ .

1. Si verifichi che, per ingresso nullo, uno stato di equilibrio è  $q_1 = q_2 = 0$ .
2. Si verifichi che la funzione di trasferimento attorno a questo modello linearizzato è

$$G(s) = \frac{\frac{K}{IJ}}{s^4 + \frac{KI + KJ + JMgL}{IJ}s^2 + \frac{MgLK}{IJ}}$$

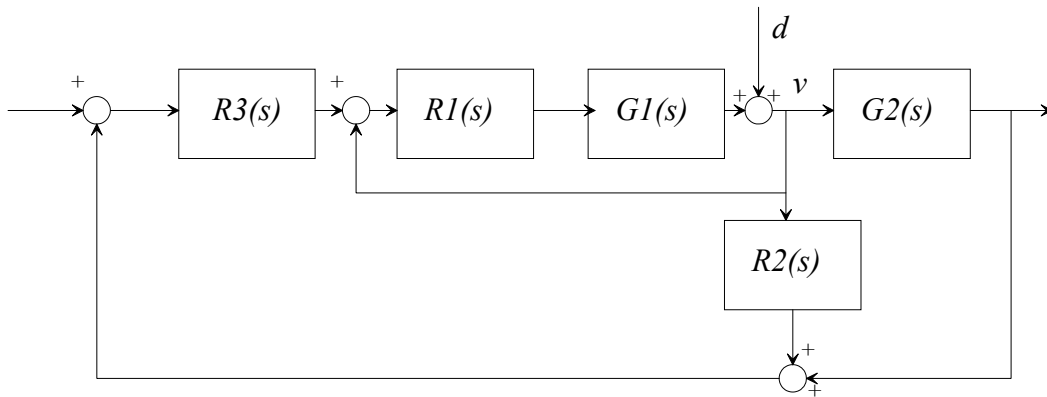
e, posto  $\frac{K}{IJ} = 1$ ,  $MgL = 100$ ,  $\frac{KI + KJ + JMgL}{IJ} = 101$ , risulti

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 100)}$$

3. Si imposti il problema della sintesi di un regolatore ad assegnamento dei poli con azione integrale scegliendo in anello chiuso due poli dominanti con pulsazione uguale a quella dei poli in anello aperto a pulsazione minore e con smorzamento pari a 0.7. Posizionare quindi gli altri poli almeno una decade oltre a questi.
4. Si discuta la realizzazione digitale dello schema di controllo, con particolare riferimento alla scelta dell'intervallo di campionamento e alla discretizzazione del regolatore. Mostrare un possibile schema di realizzazione antiwindup e valutare (in forma letterale) la riduzione del margine di fase.

## ESERCIZIO 20

Si consideri il seguente sistema di controllo



in cui

$$G1(s) = \frac{-0.1}{1+s} \quad , \quad G2(s) = \frac{(1-s)e^{-s}}{(1+5s)^2} \quad , \quad d(t) = \sin(\varpi t) \quad , \quad \varpi \leq 10$$

1. Si progetti  $R1(s)$  di tipo statico in modo da garantire un'attenuazione di  $d$  su  $v$  di almeno  $20dB$ .
2. Si progetti  $R2(s)$  secondo uno schema a predittore di Smith in modo da eliminare l'effetto del ritardo di tempo di  $G2(s)$ .
3. Si progetti  $R3(s)$  di tipo PI in modo da garantire un margine di fase di almeno  $60^\circ$  e la massima banda passante possibile per l'anello esterno.
4. Si discretizzi il PI scegliendo un opportuno periodo di campionamento. Si valuti la riduzione del margine di fase dovuta al mantenitore di ordine zero e si determini la legge di controllo a tempo discreto. Si mostri una possibile realizzazione antiwindup nel tempo della stessa.

## ESERCIZIO 21

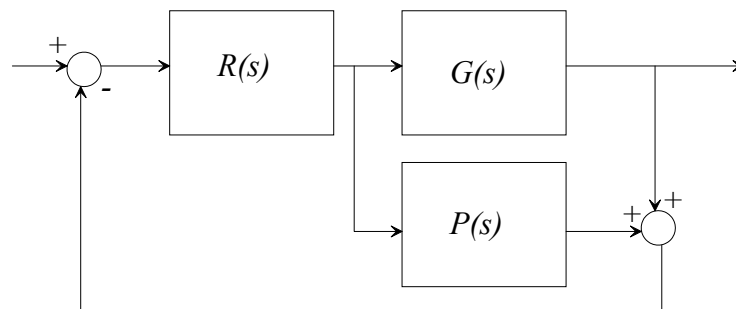
Dato il sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s}$$

si mostri che, utilizzando un predittore di Smith in cui il ritardo è sostituito da un'approssimante di Padè del primo ordine per numeratore e denominatore, non vi è alcuna cancellazione del polo non asintoticamente stabile e che quindi lo schema può essere ancora utilizzato. Si discutano brevemente anche le limitazioni che comporta l'uso, nel predittore, dell'approssimante di Padè al posto del ritardo.

## Soluzione

Lo schema di controllo con predittore di Smith è



dove  $G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s}$  e  $P(s) = (1 - e^{-\tau s})\frac{1}{s}$ . L'approssimante di Padé i I ordine del ritardo è

$$e^{-\tau s} \simeq \frac{1 - 0.5\tau s}{1 + 0.5\tau s}$$



Sostituendo questa espressione in  $P(s)$  si ottiene

$$P'(s) \simeq \left(1 - \frac{1 - 0.5\tau s}{1 + 0.5\tau s}\right) \frac{1}{s} = \frac{\tau}{1 + 0.5\tau s}$$

Utilizzando questa funzione di trasferimento anziché  $P(s)$  non si ha più il parallelo di due sistemi con polo non asintoticamente stabile, e quindi in questo caso lo schema può essere impiegato anche in assenza dell'asintotica stabilità della parte razionale di  $G(s)$ .

## ESERCIZIO 22

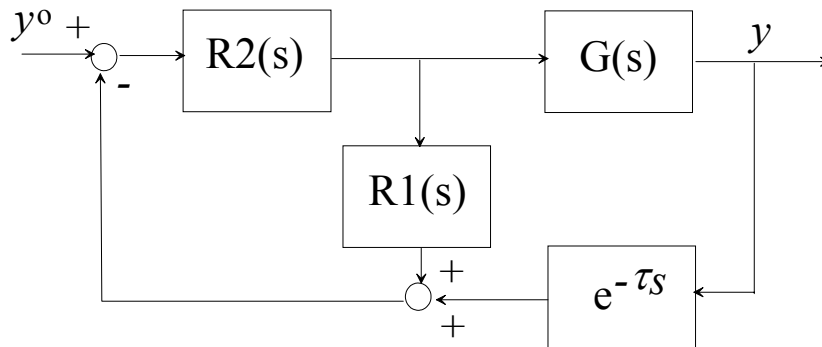
Si consideri il sistema a segnali campionati con funzione di trasferimento

$$G(z) = z^{-5} \frac{1}{z - 0.9}$$

frutto della discretizzazione con  $T = 1$ . Per questo sistema si progetti un controllore con predittore di Smith, con azione integrale e tale per cui il sistema in anello chiuso ha un polo nel discreto che nel continuo corrisponde a  $s = -1$ .

## ESERCIZIO 23

Dato il seguente sistema di controllo



- Si determini  $R1(s)$  in modo che la funzione di trasferimento tra  $y^o(s)$  e  $y(s)$  sia

$$\frac{R2(s)G(s)}{1 + R2(s)G(s)}$$

- Si discutano le differenze con il predittore di Smith.
- Per

$$G(s) = \frac{10(1 - 10s)}{(1 + 2s)(1 + s)}$$

si progetti un regolatore  $R2(s)$  di ordine 1 tale che il margine di fase del sistema risultante sia di  $60^\circ$  e che l'errore a transitorio esaurito per segnali di riferimento costanti sia nullo.

- In corrispondenza del regolatore trovato si valuti l'andamento della risposta di  $y$  ad uno scalino d'ingresso di  $y^o$ .
- Si scelga un periodo di campionamento opportuno e si discretizzino con il metodo di Eulero in avanti i due regolatori sostituendo al ritardo di tempo la sua approssimazione di Padé del I ordine.
- Si mostri una possibile realizzazione digitale antiwindup di  $R2(s)$ .

## ESERCIZIO 24

Dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \frac{1}{x_1^2(t)} - u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t)x_2(t) - x_2^2(t) + u_1(t) - u_1(t)u_2^2(t)\end{aligned}$$

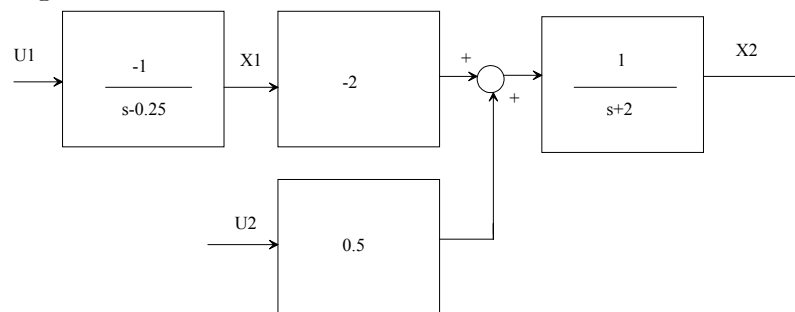
- verificare che in corrispondenza degli ingressi di equilibrio

$$\bar{u}_1 = 0.25, \quad \bar{u}_2 = -1$$

uno stato di equilibrio è

$$\bar{x}_1 = -2, \quad \bar{x}_2 = 2$$

- verificare che, in corrispondenza di questo stato di equilibrio, il sistema linearizzato è descritto dal seguente schema a blocchi



- Supponendo che nello schema  $X1$  e  $X2$  siano misurabili, progettare
  1. un regolatore che, agendo su  $U1$ , stabilizzi  $X1$  con retroazione su  $X1$  stessa;
  2. un regolatore che, agendo su  $U2$ , faccia sì che la risposta di  $X2$  ad un segnale di riferimento a scalino del corrispondente segnale di riferimento  $X2^o$  abbia errore nullo a regime e si esaurisca in al più 1 unità di tempo;

3. un regolatore di disaccoppiamento che, agendo su  $U_2$ , annulli l'effetto di  $X_1$  su  $X_2$ .

- Si discretizzino i regolatori trovati.

## ESERCIZIO 25

Il modello linearizzato di un sistema composto da due serbatoi in cascata è

$$H_1(s) = -\frac{19}{1+400s}P_1(s) + \frac{400}{1+400s}Q(s)$$

$$H_2(s) = -\frac{3(1-1300s)}{(1+180s)(1+400s)}P_1(s) - \frac{6}{1+180s}P_2(s) + \frac{300}{(1+180s)(1+400s)}Q(s)$$

dove  $H_1(s)$  e  $H_2(s)$  rappresentano i livelli nei due serbatoi,  $P_1(s)$  e  $P_2(s)$  le posizioni dello stelo delle relative valvole di uscita e  $Q(s)$  la portata di ingresso al primo serbatoio.

Per questo sistema

- progettare un regolatore PI che, agendo su  $P_1$ , consenta di regolare  $H_1$  avendo in anello chiuso un tempo di assestamento alla risposta allo scalino minore di  $800s$ ;
- annullare l'effetto di  $P_1$  e  $Q$  su  $H_2$  con un opportuno schema di disaccoppiamento;
- progettare un PI per regolare  $H_2$  agendo su  $P_2$  in modo che in anello chiuso il tempo di assestamento alla risposta allo scalino sia minore di  $200s$ ;
- discretizzare il regolatore complessivo trovato scegliendo un tempo di campionamento opportuno e determinare la legge di controllo a tempo discreto.

## ESERCIZIO 26

Dato il sistema con 2 ingressi e 2 uscite

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{-1}{s+1} & \frac{-1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

- Progettare uno schema di controllo decentralizzato in cui l'ingresso  $U_1$  è generato da un PI che ha a sua volta come ingresso l'errore  $Y_1^0 - Y_1$ , mentre l'ingresso  $U_2$  è generato da un PI che ha a sua volta come ingresso l'errore  $Y_2^0 - Y_2$ . I due PI vanno progettati sulle funzioni di trasferimento  $G_{11}(s)$  e  $G_{22}(s)$  rispettivamente, in modo da garantire in entrambi i casi margine di fase di  $90^\circ$  e pulsazione di taglio pari a 1.

- Dimostrare che lo schema progettato nel punto precedente è instabile calcolando la matrice di trasferimento in anello chiuso tra  $Y^o$  e  $Y$  ed analizzare questo risultato in termini di matrice dei guadagni relativi.
- Mantenendo il progetto del primo PI (che genera  $U_1$ ) sviluppato nel punto 1 e non considerando il secondo regolatore PI, dimostrare che la funzione di trasferimento tra  $U_2$  e  $Y_2$  è

$$\tilde{G}_{22}(s) = \frac{1-s}{(1+s)^2}$$

Su questa funzione di trasferimento si progetti un regolatore PI che consenta di ottenere un margine di fase di  $60^\circ$ . Si discretizzi quindi questo regolatore con il metodo di Tustin e scegliendo un tempo di campionamento opportuno. Si determini infine la legge di controllo a tempo discreto corrispondente.

## Soluzione

Si riscriva il sistema come

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

I due PI sono

$$PI_1(s) = \frac{1+s}{s} \quad , \quad PI_2(s) = -\frac{1+s}{s}$$

e in anello chiuso si ha

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PI_1(s) & 0 \\ 0 & PI_2(s) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} Y_1^o(s) \\ Y_2^o(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} \right\}$$

Sostituendo e moltiplicando risulta

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} Y_1^o(s) \\ Y_2^o(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} \right\}$$

cioé

$$\frac{1}{s} \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^o(s) \\ Y_2^o(s) \end{bmatrix}$$

e infine

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 2s - 1} \begin{bmatrix} s-1 & -2s \\ -s & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^o(s) \\ Y_2^o(s) \end{bmatrix}$$

I poli del sistema in anello chiuso sono le radici dell'equazione  $s^2 + 2s - 1 = 0$ . Poiché i coefficienti non sono tutti dello stesso segno (condizione necessaria), questi poli non sono tutti a parte reale negativa.

In termini di matrice dei guadagni relativi  $RGA$ , si ha che

$$G(0) = \begin{bmatrix} G_{11}(0) & G_{12}(0) \\ G_{21}(0) & G_{22}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$G(0)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

quindi

$$RGA = G(0) \otimes (G(0)^{-1})' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

I legami  $y_1 - u_1$  e  $y_2 - u_2$  corrispondono quindi a elementi negativi di  $RGA$ .

Considerando solo la legge di controllo

$$U_1(s) = -PI_1(s)Y_1(s)$$

e trascurando i segnali di riferimento, inessenziali per lo studio della stabilità, si ha

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= -G_{11}(s)PI_1(s)Y_1(s) + G_{12}(s)U_2(s) \\ Y_2(s) &= -G_{21}(s)PI_1(s)Y_1(s) + G_{22}(s)U_2(s) \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{G_{12}(s)}{1 + G_{11}(s)PI_1(s)} U_2(s) \\ Y_2(s) &= \left[ \frac{-G_{21}(s)PI_1(s)G_{12}(s)}{1 + G_{11}(s)PI_1(s)} + G_{22}(s) \right] U_2(s) \end{aligned}$$

Sostituendo i valori corrispondenti si ottiene

$$\tilde{G}_{22}(s) = \left[ \frac{-G_{21}(s)PI_1(s)G_{12}(s)}{1 + G_{11}(s)PI_1(s)} + G_{22}(s) \right] = \frac{1-s}{(1+s)^2}$$

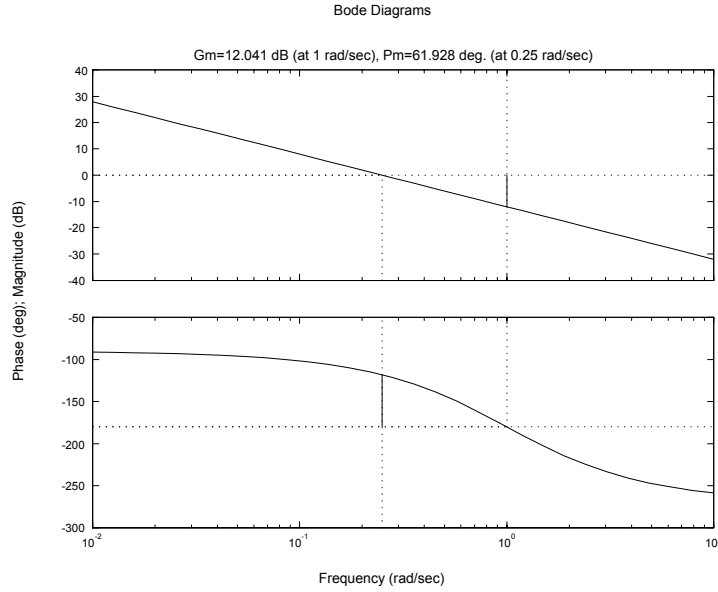
Il regolatore  $R(s)$  per  $\tilde{G}_{22}(s)$  con struttura PI può essere scelto come

$$R(s) = K \frac{1+s}{s}$$

a cui corrisponde la funzione d'anello

$$L(s) = R(s)\tilde{G}_{22}(s) = K \frac{1-s}{s(1+s)}$$

Per la presenza dello zero in  $s = 1$ , la pulsazione di taglio deve essere in  $\omega < 1$  e tale per cui il contributo del polo in  $s = -1$  e dello zero sia complessivamente minore di  $30^\circ$ . Come mostrato in figura, si può scegliere  $K = 0.25$



Scegliendo  $\omega_N = 2\pi \text{ rad/s}$  si ha un'attenuazione maggiore di  $20\text{dB}$ . In corrispondenza il tempo di campionamento è  $T_c = \frac{\pi}{\omega_N} = 0.5$ .

Utilizzando il metodo di Tustin, la funzione di trasferimento a tempo discreto del regolatore è

$$\bar{R}(z) = K \frac{\left(1 + \frac{T_2}{2}\right)z + \left(\frac{T_2}{2} - 1\right)}{z - 1} = \frac{\alpha z + \beta}{z - 1}$$

e la legge di controllo a tempo discreto è

$$u_2(k) = u_2(k-1) + \alpha e_2(k) - \beta e_2(k-1)$$

dove  $e_2(k) = y_2^o(k) - y_2(k)$ .

## ESERCIZIO 27

Il sistema a tempo discreto equivalente all'insieme del mantenitore ZOH, del campionatore e del processo con funzione di trasferimento

$$G_c(s) = \frac{10}{(s+1)^2}$$

per il periodo di campionamento  $T = 0.1$  è descritto da

$$G(z) = \frac{0.0468z + 0.0438}{z^2 - 1.8097z + 0.8187}$$

1. si analizzino le caratteristiche di  $G(z)$  in funzione di quelle di  $G_c(s)$  in termini di poli, zeri e guadagno;

2. si imposti il progetto di un regolatore ad assegnamento dei poli (come è fatto il regolatore, qual'è il suo ordine, che equazioni sarebbe necessario risolvere per determinare i suoi parametri, con quale criterio si potrebbero scegliere i poli in anello chiuso).

## ESERCIZIO 28

1. Discretizzare con il metodo della mappa poli-zeri la seguente funzione di trasferimento

$$G_c(s) = \frac{2}{s(1+5s)}$$

utilizzando come tempo di campionamento  $T_c = 1$ . Discutere le differenze tra la funzione di trasferimento  $G(z)$  trovata e quella corretta relativa all'insieme di mantenitore di ordine zero, processo e campionatore.

2. Relativamente a  $G(z)$ , impostare con il metodo dell'assegnamento dei poli il problema della sintesi di un regolatore con azione integrale e che cancelli il polo asintoticamente stabile di  $G(z)$ .
3. Discutere brevemente possibili criteri di scelta della posizione dei poli in anello chiuso.
4. Determinare una realizzazione in variabili di stato di  $G(z)$  e su questa progettare un ricostruttore di ordine ridotto (si suggerisce di utilizzare la forma canonica di osservazione riportata nel foglio allegato).

## ESERCIZIO 29

Con riferimento all'algoritmo ad assegnamento dei poli per sistemi SISO descritti dalla funzione di trasferimento

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B(z)}{A'(z)A''(z)}$$

con grado di  $A(z)$  pari a  $n$ , si discuta il progetto di un regolatore tale che:

1. ci sia un'azione integrale sull'errore o su un termine ad esso proporzionale;
2. la variabile di controllo all'istante  $k$  dipenda al più dalla variabile di uscita e dal riferimento all'istante  $k-1$ ;
3. venga forzata la cancellazione delle radici di  $A'(z)$ ;
4. si motivi (brevemente!) la ragione per cui in alcuni casi è opportuno realizzare il regolatore con un blocco non unitario sulla linea di retroazione.

## ESERCIZIO 30

Dato il sistema a tempo continuo con funzione di trasferimento

$$G_c(s) = \frac{1}{s^2}$$

1. Si determini la funzione di trasferimento  $G(z)$  del corrispondente sistema a segnali campionati utilizzando il periodo di campionamento  $T$ .
2. A partire da  $G(z)$  si determini una rappresentazione nello spazio degli stati.
3. Si progetti un osservatore di tipo *dead-beat* di ordine intero e senza ritardo.
4. Supponendo lo stato accessibile, si progetti una legge di controllo di tipo *dead-beat*.
5. Si determini, in forma simbolica, la funzione di trasferimento del regolatore equivalente ad usare la legge di controllo sullo stato e l'osservatore precedentemente trovati e si dica quali e quanti autovalori ha il sistema in anello chiuso.

## ESERCIZIO 31

Dato il sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s-2}{(s-1)(s+3)}$$

progettare un regolatore tale per cui tutti i poli in anello chiuso sono in posizione  $s = -1$

## ESERCIZIO 32

Dato il sistema

$$\begin{aligned}x(k+1) &= x(k) - u(k) \quad , \quad x \in R^1 \\ y(k) &= x(k)\end{aligned}$$

1. Progettare un regolatore ad assegnamento dei poli con azione integrale e tale che il valore della variabile di controllo  $u(k)$  dipenda dai valori dell'uscita e del segnale di riferimento fino all'istante  $k-1$  al più. Determinare la struttura del regolatore e impostare i calcoli da effettuare senza sviluppare i conti.

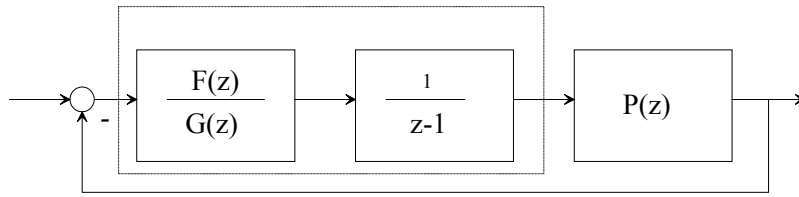
## Soluzione

La funzione di trasferimento del processo è

$$P(z) = \frac{-1}{z-1}$$



Lo schema di controllo ad assegnamento dei poli con azione integrale è riportato in figura



dove il regolatore complessivo è quello contenuto nel rettangolo tratteggiato.

Il polinomi  $F(z)$  e  $G(z)$  sono del primo ordine

$$F(z) = f_1 z + f_0 \quad , \quad G(z) = g_1 z + g_0$$

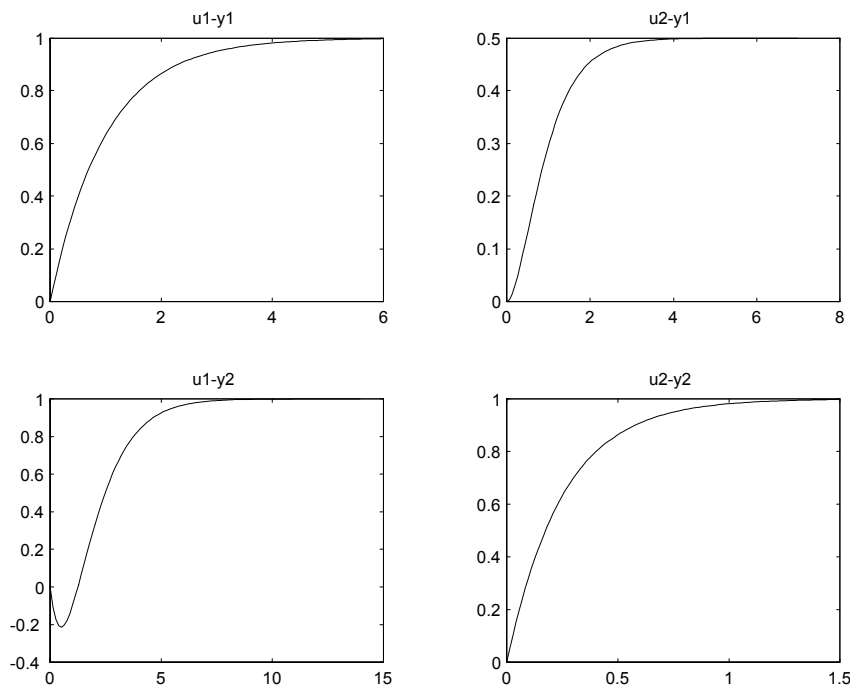
e i coefficienti  $f_1, f_0, g_1, g_0$  si determinano risolvendo l'equazione

$$(z-1)^2 G(z) - F(z) = P(z) = z^3 + p_2 z^2 + p_1 z + p_0$$

dove le radici del polinomio  $P(z)$  sono i poli desiderati in anello chiuso.

## ESERCIZIO 33

Dato il sistema con 2 ingressi e 2 uscite e con le seguenti risposte allo scalino unitario, si progettino un sistema di controllo digitale ricavando funzioni di trasferimento approssimate.



*Parte d'esercizio NON d'esame:* sapendo che il sistema effettivo ha matrice di trasferi-

mento

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{0.5}{(1+0.5s)^2} \\ \frac{1-s}{(1+s)^2} & \frac{1}{1+0.25s} \end{bmatrix}$$

verificare con Simulink le prestazioni del sistema di controllo progettato.