Sujet à discuter : Les connaissances mathématiques sont-elles toutes abstraites ?

Recherches d'appui à l'Atelier 3 :

Littérature Rédactionnelle

Vianney Carmel Edey

17 février 2020 / CAMEST

1. Qu'est - ce que les mathématiques ?

D'après le Dictionnaire Larousse, **les mathématiques** sont un ensemble de sciences qui étudient par le moyen du raisonnement déductif les propriétés d'êtres abstraits (nombres, figures géométriques, fonctions, espaces, etc.) ainsi que les relations qui s'établissent entre eux.

Conséquences de la Définition

(1) Tout être ou objet de la vie pratique, avant d'être approché en mathématiques doit être obligatoirement transposé ou transformé en abstrait.

(2) Faire les mathématiques revient donc à manipuler inclusivement des objets ou êtres abstraits créés : on dit qu'on fait de l'abstraction.

2. Qu'est ce que la connaissance mathématique et le savoir mathématique

De façon laconique, dans le monde de l'Enseignement ou Enseignement/Apprentissage, le savoir est la connaissance institutionnalisée ou étudiée pour être enseigné. L'enseignement de la connaissance qui en fait le savoir suppose donc que cette connaissance est démontrable, par la méthode avec une démarche rigoureuse.

Exemples :

(1) Je sais par la croyance qu'il y aura une résurrection après la mort. Ceci est une connaissance religieuse. Mais cette connaissance ne pouvant pas être démontrée, elle ne peut être appréciée par une communauté scientifique pour être enseignée. Ce n'est donc pas un savoir.

(2) Selon **Aristote, le soleil tournait autour de la terre.** C'était une connaissance scientifique. Ne pouvant pas démontrer clairement cette idée dans le temps, cette théorie ne pouvait pas être appelée savoir.

(3) Jacob vient d'établir un modèle de nombre qui permet de retrouver tous les nombres premiers existant. C'est une connaissance mathématique. Cependant, même si Jacob peut démontrer sa théorie, elle reste une connaissance mathématique tant et aussi longtemps qu'elle n'est pas enseignée.

En conclusion, le savoir est donc universel et irréfutable. Par contre, la connaissance peut être réfutée (seulement par une petite contre-preuve...). L'Enseignement de la connaissance devenant savoir lui confère une place presque d'irréfutabilité.

3. Un résultat mathématique peut-il être une connaissance mathématique ?

Au sens dictionnairique du terme, **un résultat** est une issue, une suite d'une opération, d'un événement ou d'une décision. C'est aussi une donnée numérique qui constitue la solution d'un problème, d'une opération.

Un **résultat mathématique** est donc l'aboutissement, l'issue ou la finalité d'une suite d'opérations mathématiques. Ce résultat peut être donc numérique ou non numérique.

Une **connaissance mathématique** à la base désigne des concepts mathématiques établis. Par exemple, le théorème de Pythagore est une connaissance mathématique (formellement savoir mathématique). En appliquant le théorème de Pythagore, l'on peut déterminer l'hypoténuse d'un triangle rectangle connaissant le côté opposé et le côté adjacent : La détermination de l'hypoténuse est un résultat mathématique (application de la connaissance ou le savoir mathématique).

Un **résultat mathématique** devient une **connaissance mathématique** s'il a été ***scientifiquement formalisé*** pour être une connaissance mathématique. De même, un résultat mathématique peut être aussi formalisé par son usager pour devenir une connaissance mathématique pour lui-même et/ou pour son entourage.

Exemples.

(1) Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls de l'ensemble des vecteurs de l'espace, on sait que : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$.

Cette relation est une connaissance mathématique (savoir mathématique).

Calculer $\vec{u} \bullet \vec{v}$ et trouver zéro ($\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$) est un résultat parmi tant d'autres de l'application de la connaissance ci-dessus. Cependant, ce résultat a été formalisé pour être une connaissance mathématique et l'on sait désormais qu'un produit scalaire nul est signe que les vecteurs impliqués sont orthogonaux.

En réalité, même sans formaliser le résultat $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$ en un savoir ou connaissance mathématique, l'apprenant peut déterminer facilement aussi que ce résultat apparaît seulement dans le cas de l'orthogonalité des vecteurs mis en scène.

(2) La notion de sinus (sin) par exemple est un concept ou connaissance mathématique. D'une manière générale, l'on sait que le sinus d'un angle orienté dans un ou le repère trigonométrique convenablement défini est l'ordonnée d'un certain point gravitationnel M relatif à l'angle en question et préalablement défini.

L'application de la notion de sinus à l'angle $\frac{\pi}{2}$ donne un résultat qui est égal à 1. On a donc : $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Cependant, ce résultat a été formalisé pour être pris comme **connaissance mathématique (**que l'on retrouve partout dans les ouvrages mathématiques et dispensé dans l'Enseignement) via sinus et cosinus des angles usuels.

(3) En probabilité, la seule connaissance de base que l'on sait par rapport à l'espérance mathématique est que l'espérance mathématique $E\left[X\right]$ d'une variable aléatoire X est définie de manière compacte par :

$$E\left[X\right] = \sum_{X} x \times p(X = x).$$

L'application de cette définition de l'espérance à une loi binomiale permet de trouver que lorsqu'une variable aléatoire Y suit une loi binomiale, alors nous avons :

$$E\left[Y\right] = np\ ;$$

n étant le paramètre répétitif du processus de Bernoulli et p la probabilité de succès d'une épreuve de Bernoulli.

$E\left[Y\right] = np$ est un résultat issu de l'application de la définition mère d'une espérance. Cependant, il a été formalisé pour être libéré sous forme d'un savoir ou connaissance mathématique.

4. Qu'est ce qu'une connaissance abstraite ?

Par définition, (Voir Larousse) l'abstrait est tout ce qui n'est que dans l'idée, dans la pensée, dans l'imaginaire. C'est tout ce qui s'oppose au concret, au réel. Ce dernier étant ce qui est directement perceptible par les sens, ce qui est palpable, tangible ou matériel.

Ainsi, une connaissance abstraite est une connaissance qui s'oppose à la réalité. C'est donc toute connaissance qui n'est que dans le monde de l'irréel, dans le monde virtuel ou encore dans le monde imaginaire.

5. Exemples de connaissances mathématiques non abstraites

Si l'on admet qu'un résultat mathématique peut être transposé en une ou vers une connaissance mathématique, alors l'idée selon laquelle toutes les connaissances mathématiques ne seraient pas abstraites n'est plus chose à démontrer. Plusieurs exemples peuvent apporter des démentis formels à la thèse selon laquelle toutes les connaissances mathématique sont abstraites.

Quelques exemples

(1) Pour un point A fixé, l'ensemble des points M du plan tels que AM $= k$ (k étant un nombre réel strictement positif) est un cercle. Cette définition du cercle est un résultat de conception ou une connaissance de conception. Cette connaissance mathématique est moins abstraite. Elle a son application dans la vie pratique. Pour le faire, il suffit pour le vieux du village de placer un piquet au sol, d'attacher à cela une corde et de faire une rotation complète pour obtenir un cercle.

De manière générale, tout résultat mathématique transposé en connaissance mathématique devient non-abstrait dès lors qu'il a une utilité dans la vie pratique. Ou encore dès lors qu'on peut le représenter ou le faire voir dans la vie pratique. Cette représentation ou cette utilité le sort de l'imaginaire pour le rendre concret.

Pour des savoirs ou mathématiques à l'état brut, nous pouvons citer encore plusieurs exemples :

(2) La loi des grands nombres est un savoir universel. Ce savoir coïncide presque parfaitement avec la réalité. On ne saurait le qualifier de savoir abstrait ;

(3) L'Épreuve de Bernoulli est un savoir qui se manifeste dans presque toutes nos décisions à deux issues. On ne peut qualifier ce savoir d'abstrait ;

(4) Le Barycentre d'un système est simplement le point ou l'endroit du système qui le maintient en équilibre. Ce savoir est de moins en moins abstrait puisqu'on peut toucher le barycentre dans la vraie vie ;

(5) La Théorie des nombres nous indique que l'addition est une loi associative et commutative. Avec l'Os d'Ishango (Congo, 20 000 ans av J-C), nos aïeux savaient déjà compter avant la formation de la loi $+$. Il suffit de disposer deux bâtonnets et les permuter au sol pour se rendre compte de la commutativité réelle de l'addition que nos aïeux savaient déjà faire avant sa formalisation. Il suffit de même de disposer trois bâtonnets au sol pour se rendre compte de l'associativité réelle de la chose.

Tout ceci permet de dire que cette notion est plutôt moins abstraite. Ce qui est abstrait ou est une représentation de imaginaire de l'esprit dans cela est simplement les qualificatifs : «associative», «commutative» et les signes et symboles qui entourent. Le fond et l'application de ces notions demeurent moins abstraites.

(6) Considérons le problème suivant :

Supposons que dans un royaume, un Roi aimerait savoir quel nombre de litres d'eau remplirait la jarre de la Cour Royale ?

Pour répondre à cette question, il suffit pour le roi de faire remplir la jarre avec des litres d'eau et de compter le nombre de litres d'eau l'ayant remplie.

@Jarre de la Cour Royale

À partir de ce moment, si le roi vient de savoir que 55,25 litres d'eau ont pu remplir exactement la jarre, alors ce résultat est une connaissance mathématique pour le roi et pour son entourage, puisqu'il peut le démontrer en faisant simplement remplir la jarre.

Supposons maintenant que par magie, un mathématicien établit que la quantité de litres d'eau pouvant remplir cette jarre peut être donnée par ϑ (en litres d'eau) défini par : $\vartheta = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{t} i + \dfrac{1}{\pi(1+x^2)} \right) \mathrm{d}x$.

Sur la base de cette information, nous commencerons par faire de l'abstraction (manipuler des objets, symboles abstraits) en écrivant que :

$$\begin{aligned}
\vartheta &= \int_0^1 \sum_{i=0}^{10} i \ \mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{\pi(1+x^2)} \ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{10}{2} + \frac{10^2}{2} \right) \mathrm{d}x + \tfrac{1}{\pi} \arctan(x) \Big|_0^1 \\
&= 55 + \frac{1}{4} \\
&= 55{,}25 .
\end{aligned}$$

Des méthodes d'abstractions mathématiques nous ont permis d'obtenir un résultat qui devient une connaissance mathématique démontrable au sein de la cour royale. Pour autant, cette connaissance n'est pas abstraite...

(7) Dans le monde des mathématiques appliquées, les théories mathématiques servent de base à la découverte de nouvelles théories dans les domaines concernés. Ces nouvelles théories peuvent être des théories à l'état pur ou encore des théories pratiques. Par exemple, en ingénierie une théorie mise en pratique devient une connaissance pratique. C'est ainsi que des **robots programmés** peuvent plier des surfaces pour fabriquer des voitures, des bateaux, des avions, etc. **Le résultat obtenu** suite à une transformation ou application mécanique d'une fonction ou équation mathématique spécifique par un robot devient une connaissance pratique retenue. C'est ainsi qu'un robot peut utiliser l'équation $x^2 + \left(y - \sqrt[3]{x^2}\right)^2 = 1$ pour dessiner une surface en forme de cœur (Love). Cette connaissance devenue ainsi matérielle, elle ne peut être qualifiée d'abstraite.

De même, en informatique, la logique mathématique (si,..., alors... ; si non,...,alors..., etc.) permettent de faire des ordinateurs et systèmes qui parlent. Un «si» abstrait (condition mathématique) est ainsi rendu concret.

6. Quoi retenir ?

En définitive, **faire les mathématiques** revient à **faire de l'abstraction** par la **manipulation des êtres ou objets abstraits**. Les résultats ou connaissances mathématiques issues de l'abstraction mathématique peuvent **être abstraits ou non abstraits.** L'ensemble de ces connaissances formant les connaissances mathématiques, il est légitime d'éviter de généraliser les connaissances mathématiques par des connaissances abstraites inclusivement.

Nous faisons l'abstraction mais l'objectif final n'est pas toujours de rester dans l'abstrait. Si non, faire les mathématiques serait perdre son temps...

Références

[1] Dictionnaire Larousse en ligne :

[2] Dictionnaire le Robert

[3] Archives / Journal monde.fr : www.lemonde.fr

[4] Patrick Juignet, article Philosophie et science : philosciences.com

[5] Durandeau, Durupthy. Physique-Chimie 2000

[6] © Jarre : archive, online sc/archivesweb-imagesfree.com