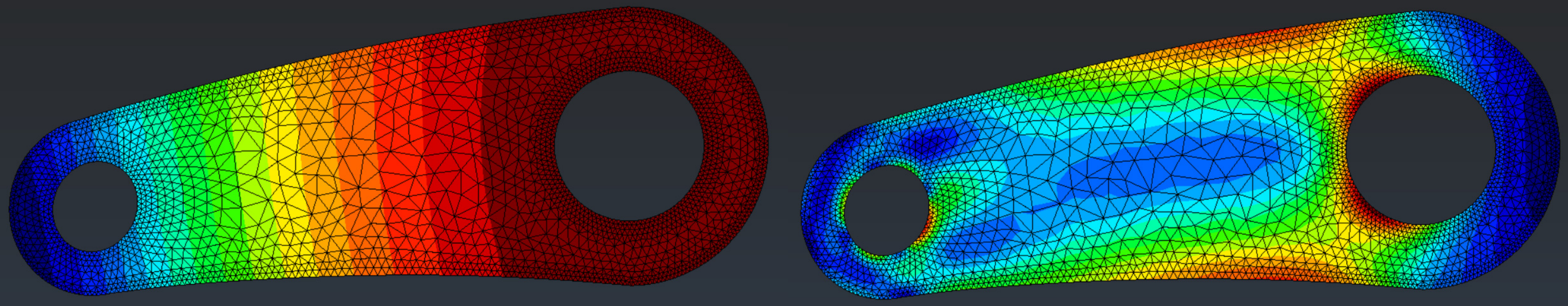
MECÁNICA ESTÁTICA
ME3130



Alejandro Ortiz Bernardin

aortizb@uchile.cl

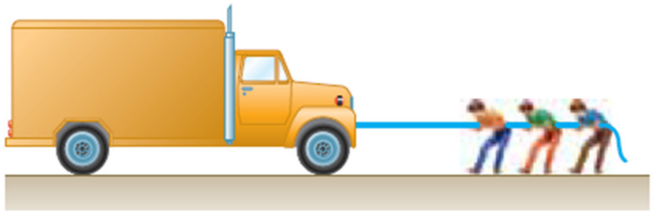
www.camlab.cl/alejandro

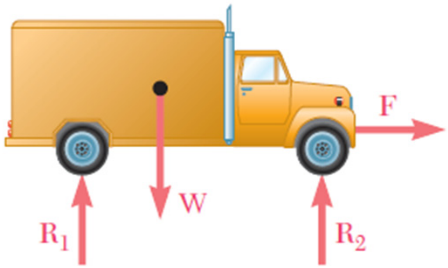
DIMEC
INGENIERÍA MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE CHILE

CUERPOS RÍGIDOS: SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZAS

Contenidos

Fuerzas Externas e Internas


a)



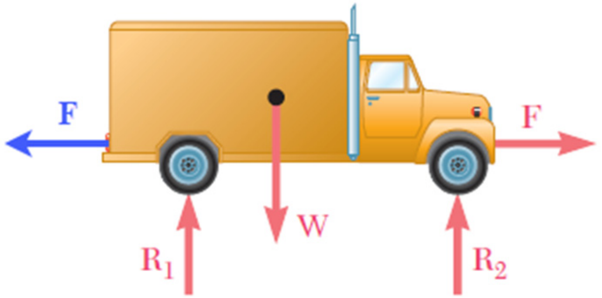
b)

Fuerzas externas

- Son ejercidas por otros cuerpos sobre el cuerpo rígido en consideración.
- Provocan que el cuerpo se mueva o aseguran que se mantenga en reposo.

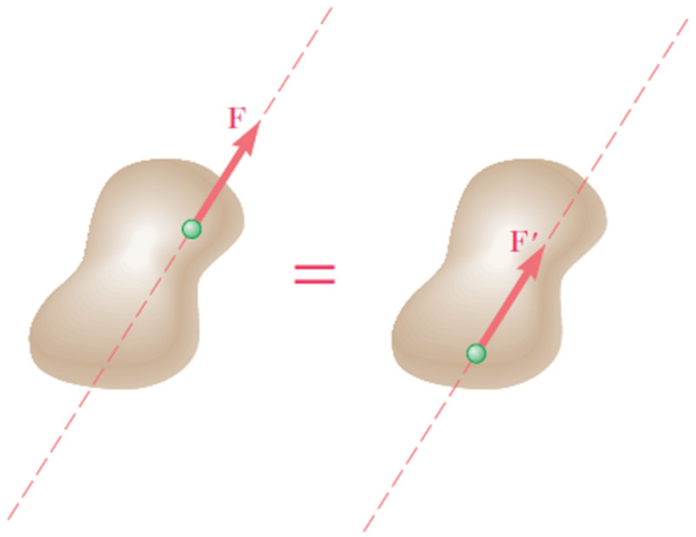
Fuerzas internas

- Impiden que las partículas del cuerpo se separen.
- Cuerpo no es perfectamente rígido → deformación axial.

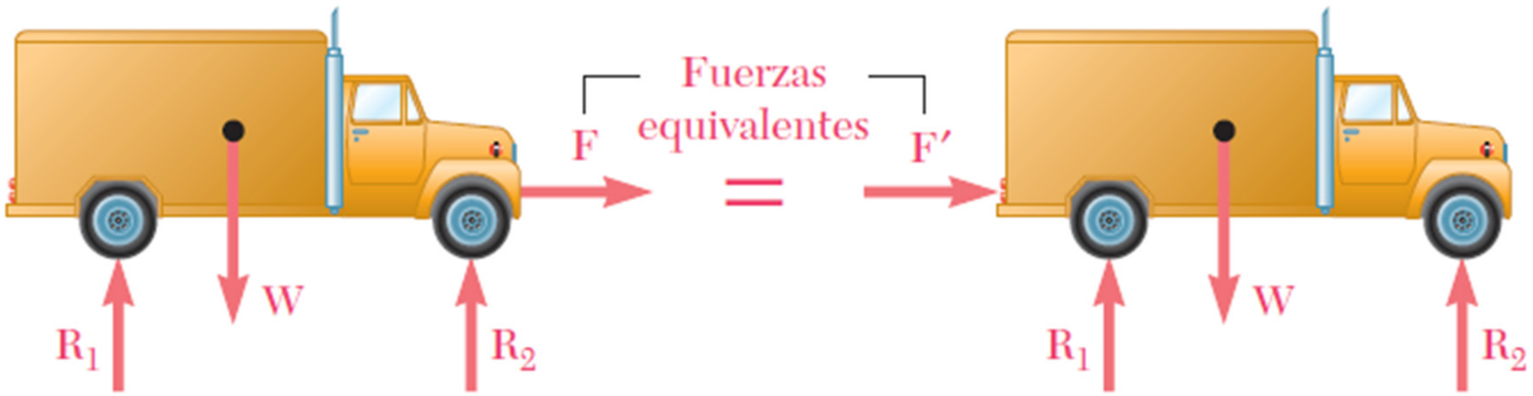


Fuerzas equivalentes

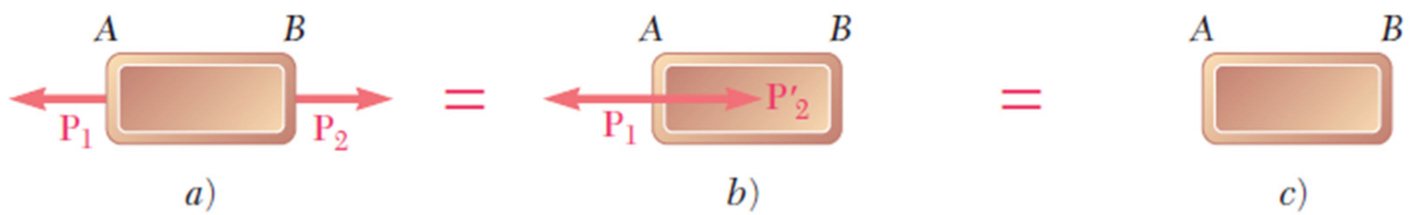
- F y F’ tienen misma magnitud.
- F y F’ tienen la misma dirección.
- F y F’ tienen la misma línea de acción.
- Actúan en puntos distintos ubicados sobre la línea de acción.
- F y F’ son vectores “deslizantes”.
- También llamado “Principio de Transmisibilidad”



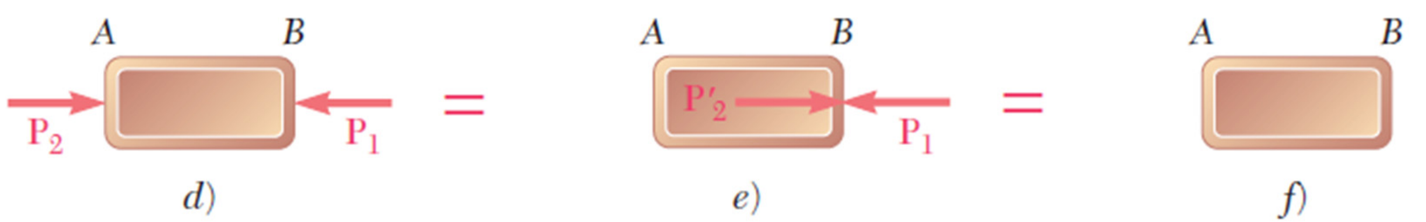
Fuerzas Equivalentes: Ejemplos



Sistema 1:

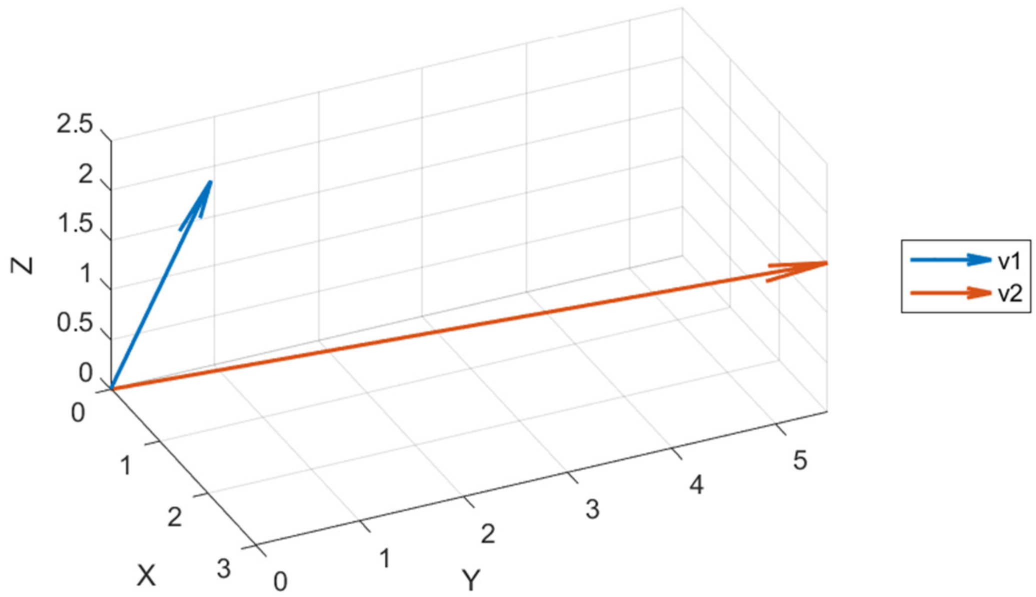


Sistema 2:



Precaución: fuerzas internas y deformaciones producidas por el sistema 1 difiere de aquellas producidas por el sistema 2 aún cuando ambos sistemas están en equilibrio.

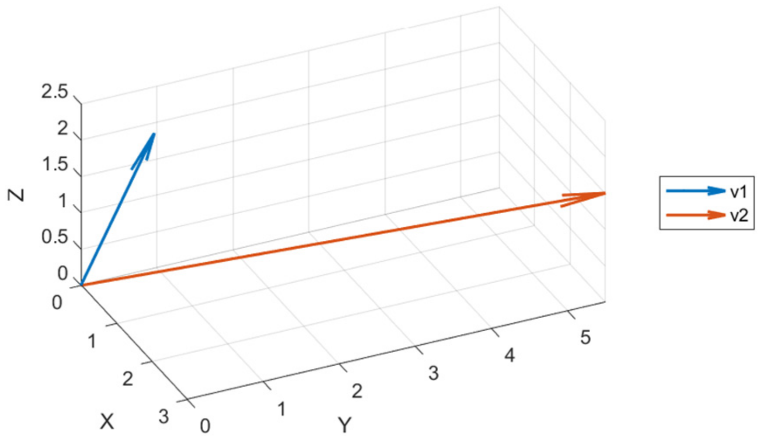
Producto Vectorial de Dos Vectores

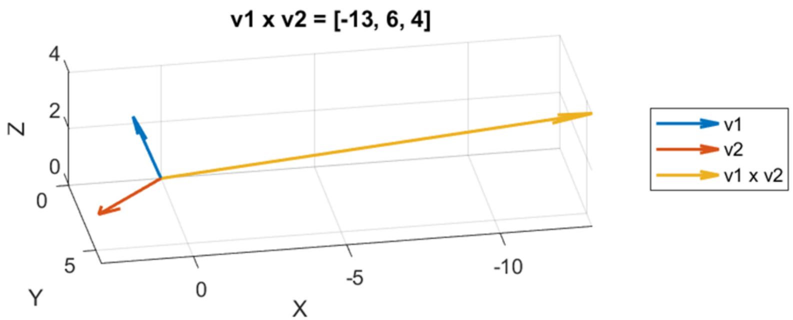


$$\boldsymbol{V}_3 = \boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{vmatrix}$$

$$= (v_{1y}v_{2z} - v_{1z}v_{2y})\boldsymbol{i} - (v_{1x}v_{2z} - v_{1z}v_{2x})\boldsymbol{j} + (v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x})\boldsymbol{k}$$

Producto Vectorial de Dos Vectores

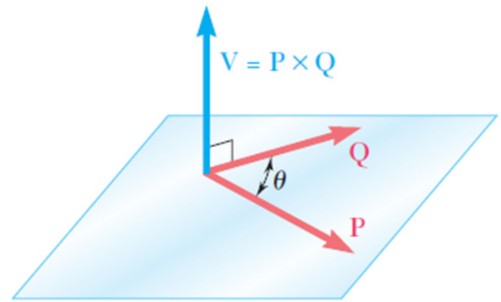





```
Producto vectorial de dos vectores (fórmula del determinante)
-----------------------------------------------------------------

v1 = [1.000000, 0.500000, 2.500000]
v2 = [3.000000, 5.500000, 1.500000]

          |   i      j      k  | = |   i      j      k   |
v1 x v2 = |  v1x    v1y    v1z | = | v1(1)  v1(2)  v1(3) |
          |  v2x    v2y    v2z | = | v2(1)  v2(2)  v2(3) |
        = (v1(2)*v2(3) - v1(3)*v2(2))i - (v1(1)*v2(3) - v1(3)*v2(1))j + (v1(1)*v2(2) - v1(2)*v2(1))k
        = cross(v1,v2)

v1 x v2 = (v1(2)*v2(3) - v1(3)*v2(2))i - (v1(1)*v2(3) - v1(3)*v2(1))j + (v1(1)*v2(2) - v1(2)*v2(1))k
        = (-13.000000)i - (-6.000000)j + (4.000000)k
v1 x v2 = cross(v1,v2) = [-13.000000, 6.000000, 4.000000]
```

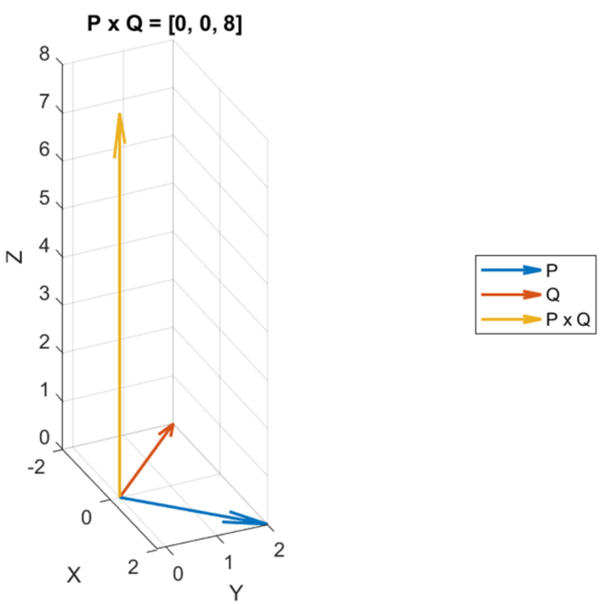
```matlab
%---------------------------------------------------------------------------------
%                               Código MATLAB
%---------------------------------------------------------------------------------
% Definición de vectores
v1x = 1; v1y = 0.5 ; v1z = 2.5; v2x = 3.0; v2y = 5.5 ; v2z = 1.5;
v1 = [v1x, v1y, v1z];  v2 = [v2x, v2y, v2z];
%-- Ejemplo  -------------------------------------------------------------------
fprintf('v1 = [%f, %f, %f]\n',v1); % impresión como arreglo
fprintf('v2 = [%f, %f, %f]\n\n',v2); % impresión como arreglo
fprintf(' | i j k | = | i j k |\n');
fprintf('v1 x v2 = | v1x v1y v1z | = | v1(1) v1(2) v1(3) |\n');
fprintf(' | v2x v2y v2z | = | v2(1) v2(2) v2(3) |\n');
fprintf(' = (v1(2)*v2(3) - v1(3)*v2(2))i - (v1(1)*v2(3) - v1(3)*v2(1))j
+ (v1(1)*v2(2) - v1(2)*v2(1))k\n');
fprintf(' = cross(v1,v2)\n\n')
fprintf('v1 x v2 = (v1(2)*v2(3) - v1(3)*v2(2))i - (v1(1)*v2(3) -
v1(3)*v2(1))j + (v1(1)*v2(2) - v1(2)*v2(1))k\n');
fprintf(' = (%f)i - (%f)j + (%f)k\n',v1(2)*v2(3) -
v1(3)*v2(2),v1(1)*v2(3) - v1(3)*v2(1),v1(1)*v2(2) - v1(2)*v2(1))
fprintf('v1 x v2 = cross(v1,v2) = [%f, %f, %f]\n\n',cross(v1,v2));
% ploteo del vector desde el origen
figure;  x0 = [0,0,0];
plotvec3d(x0,v1,'LineWidth',1.5,'MaxHeadSize',1.2);  hold on;
view([170,25]);
plotvec3d(x0,v2,'LineWidth',1.5,'MaxHeadSize',0.7);
plotvec3d(x0,cross(v1,v2),'LineWidth',1.5,'MaxHeadSize',0.3);
legend('v1','v2','v1 x v2','Location','eastoutside’);
v1xv2 = cross(v1,v2);
title(['v1 x v2 = [',num2str(v1xv2(1)),', ',num2str(v1xv2(2)),',
',num2str(v1xv2(3)),']']);
```

Regla de la mano derecha

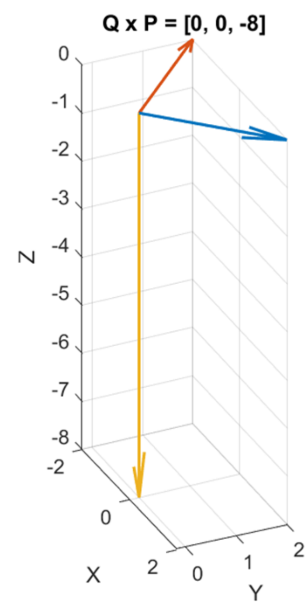


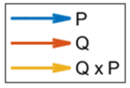
a)

b)



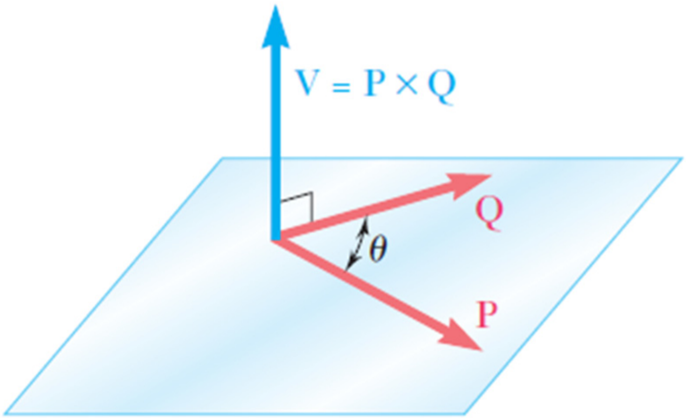
$$\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{P}$$





Producto Vectorial: Aspectos Relevantes

Magnitud del producto vectorial:



$$\|\boldsymbol{V}\| = \|\boldsymbol{P}\|\|\boldsymbol{Q}\|\sin(\theta); \quad \theta \leq 180^\circ$$

Ejemplo: si $\theta = 0$, ||**V**|| = 0 (vectores tienen la misma dirección).

Propiedades del producto vectorial:

$$\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{P} \times (\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{S}) = \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{S}$$

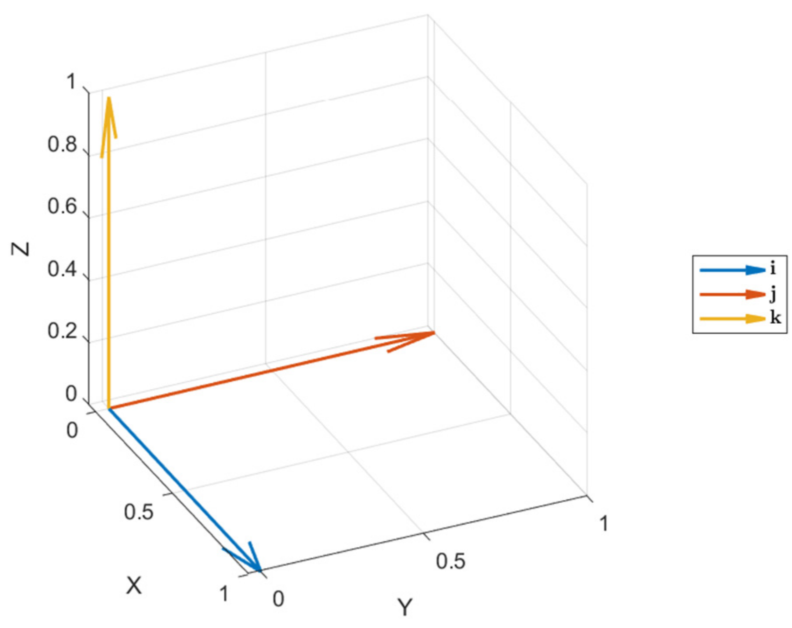
$$(\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q}) \times \boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{P} \times (\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{S})$$

Vectores unitarios del sistema de coordenadas Cartesiano:

Sean los vectores unitarios **i** = [1,0,0]; **j** = [0,1,0]; **k** = [0,0,1]. Entonces, ángulos entre:

i y **j** $\theta = 90°$; **j** y **k** $\theta = 90°$; **i** y **k** $\theta = 90°$

i y **i** $\theta = 0°$; **j** y **j** $\theta = 0°$; **k** y **k** $\theta = 0°$



Luego,

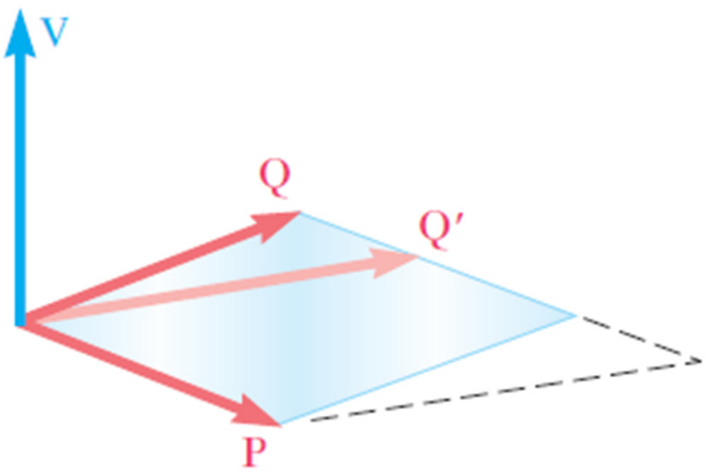
i x **i** = **0**; **j** x **i** = **-k**; **k** x **i** = **j**;

i x **j** = **k**; **j** x **j** = **0**; **k** x **j** = **-i**;

i x **k** = **-j**; **j** x **k** = **i**; **k** x **k** = **0**;

Producto Vectorial: Aspectos Relevantes

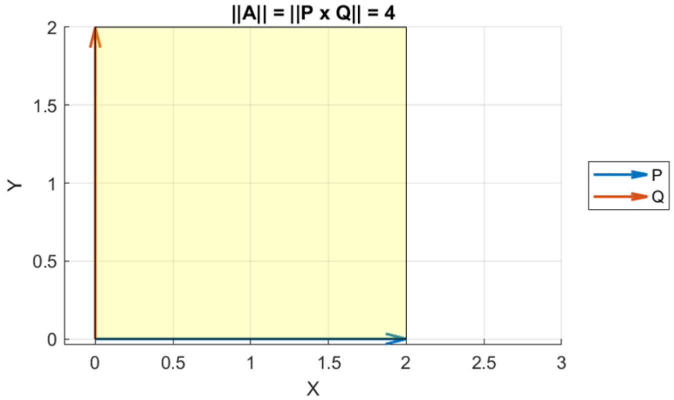
Interpretación geométrica:

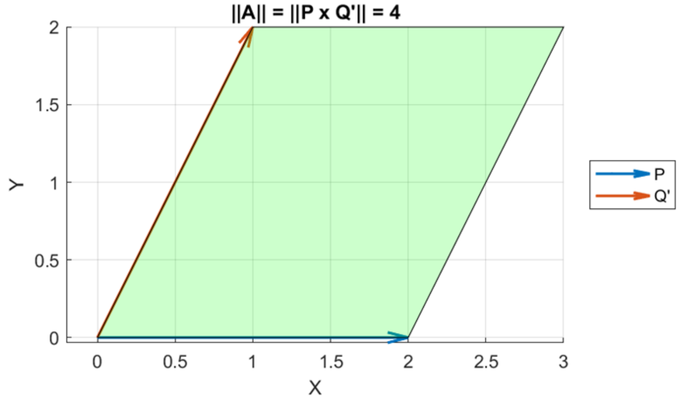


$$V = P \times Q = P \times Q'$$

- ||**V**|| representa el área del paralelogramo formado por **P** y **Q** (coloreado en celeste).
- Un vector **Q'** que termina sobre el lado del paralelogramo original forma un nuevo paralelogramo con **P** cuya área sigue siendo ||**V**||.

Producto Vectorial: Área de un Paralelogramo

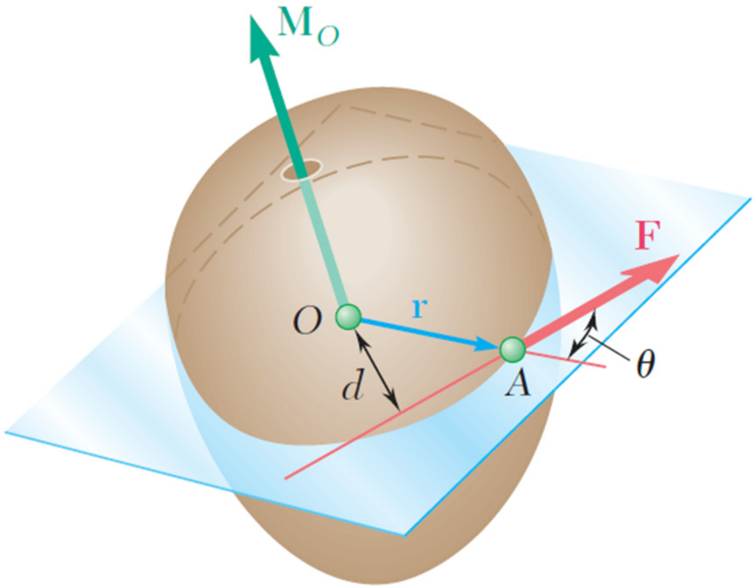





```
Área de un paralelogramo
------------------------

P = [2.000000, 0.000000, 0.000000]
Q = [0.000000, 2.000000, 0.000000]
Q' = [1.000000, 2.000000, 0.000000]

A = P x Q = cross(P,Q) = [0.000000, 0.000000, 4.000000]
Área paralelogramo P-Q = norm(A) = 4.000000

A = P x Q' = cross(P,Q') = [0.000000, 0.000000, 4.000000]
Área paralelogramo P-Q' = norm(A) = 4.000000
```

```matlab
%-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------
%                                              Código MATLAB
%-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------
% define vectores
P = [2, 0, 0]; Q = [0, 2, 0];Qp = [1, 2, 0];
%
fprintf('Área de un paralelogramo\n');
fprintf('------------------------\n\n');
fprintf('P = [%f, %f, %f]\n',P); fprintf('Q = [%f, %f, %f]\n',Q);
fprintf('Q'' = [%f, %f, %f]\n\n',Qp);
% plotea vectores P y Q
figure; x0 = [0,0,0];
plotvec3d(x0,P,'LineWidth',1.5,'MaxHeadSize',0.2); hold on; view(2);
axis([-0.2 3 -0.2 2]);
plotvec3d(x0,Q,'LineWidth',1.5,'MaxHeadSize',0.2); legend('P','Q','Location','eastoutside');
% colorea el area del paralelogramo formado por P y Q
x = [0, 2, 2, 0]; y = [0, 0, 2, 2]; plt = fill(x,y,'yellow','FaceAlpha',0.2);
plt.Annotation.LegendInformation.IconDisplayStyle = 'off'; % ignora plt en la leyenda
Apq = cross(P,Q); areapq = norm(Apq);
title(['||A|| = ||P x Q|| = ',num2str(areapq)]);
fprintf('A = P x Q = cross(P,Q) = [%f, %f, %f]\n',cross(P,Q));
fprintf('Área paralelogramo P-Q = norm(A) = %f\n\n',norm(cross(P,Q)));
% plotea vectores P y Q'
figure; x0 = [0,0,0];
plotvec3d(x0,P,'LineWidth',1.5,'MaxHeadSize',0.2); hold on; view(2);
axis([-0.2 3 -0.2 2]);
plotvec3d(x0,Qp,'LineWidth',1.5,'MaxHeadSize',0.2);
legend('P','Q''','Location','eastoutside');
% colorea el area del paralelogramo formado por P y Q'
x = [0, 2, 3, 1]; y = [0, 0, 2, 2]; plt = fill(x,y,'green','FaceAlpha',0.2);
plt.Annotation.LegendInformation.IconDisplayStyle = 'off'; % ignora plt en la leyenda
Apqp = cross(P,Qp); areapqp = norm(Apqp);
title(['||A|| = ||P x Q''|| = ',num2str(areapqp)]);
fprintf('A = P x Q'' = cross(P,Q'') = [%f, %f, %f]\n',cross(P,Qp));
fprintf('Área paralelogramo P-Q'' = norm(A) = %f\n\n',norm(cross(P,Qp)));
```

Momento de una Fuerza c/r a un Punto

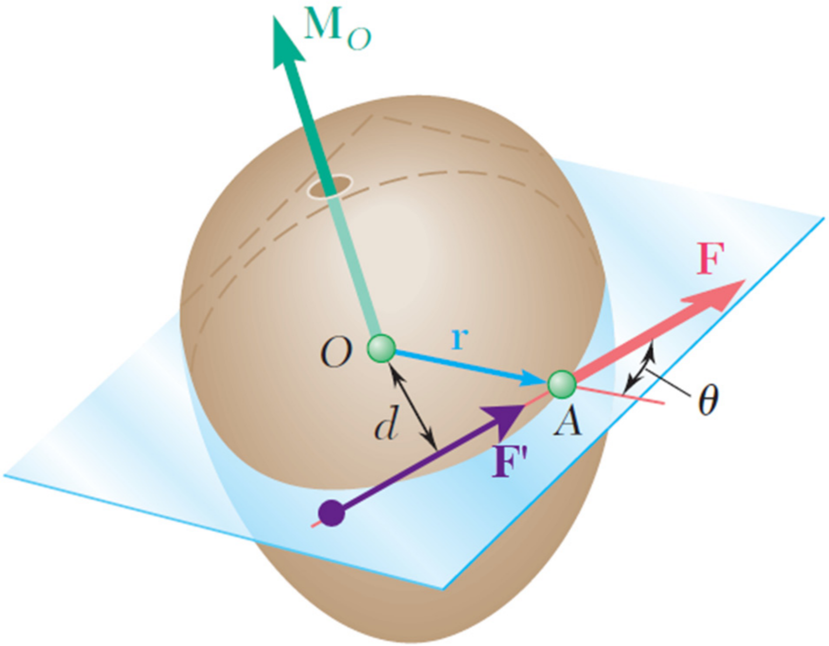


- Aplicación del producto vectorial:

$$M_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F};$$
$$\|M_O\| = \|\boldsymbol{r}\|\|\boldsymbol{F}\| \sin(\theta) = \|\boldsymbol{F}\| d.$$

- $||\mathbf{M}_O||$ mide la tendencia de la fuerza **F** a hacer rotar al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de $\mathbf{M}_O$.

Momento de una Fuerza c/r a un Punto

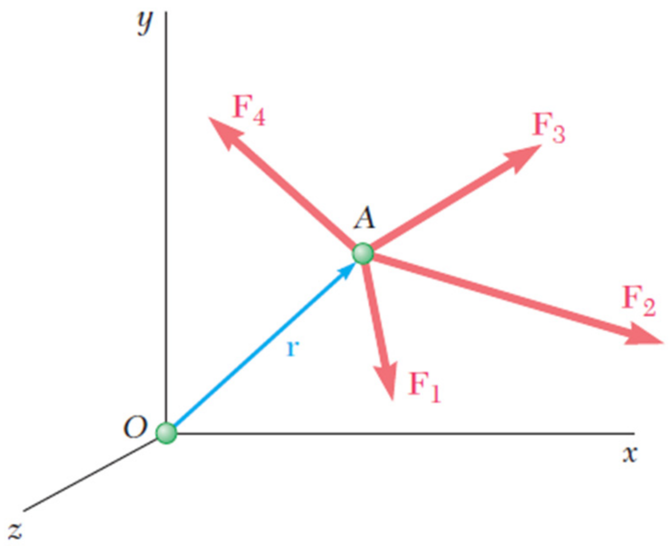


Fuerzas equivalentes

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'; \quad \boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{M}'_O$$

- **F** y **F’** tienen misma magnitud.
- **F** y **F’** tienen la misma dirección.
- **F** y **F’** tienen momentos iguales con respecto a un punto *O*.

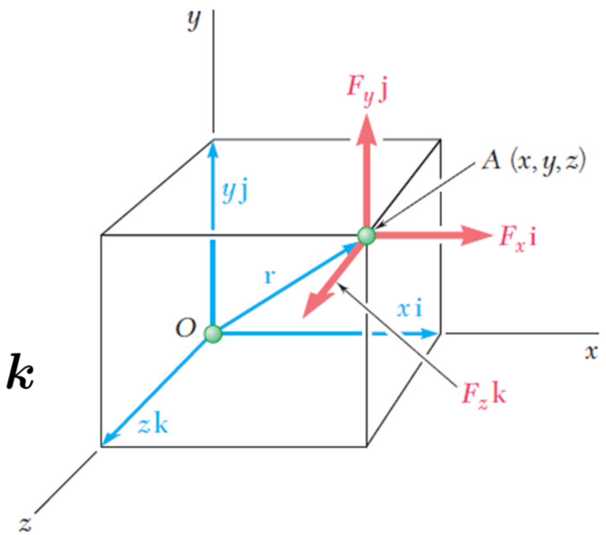
Momento de varias fuerzas con respecto a un punto



$$\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_2 + \ldots.$$

Momento de una fuerza con respecto al origen *O* del sistema Cartesiano

Sea **F** = [F_x, F_y, F_z]. Entonces,



$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$
$$= (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} - (xF_z - zF_x)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k}$$

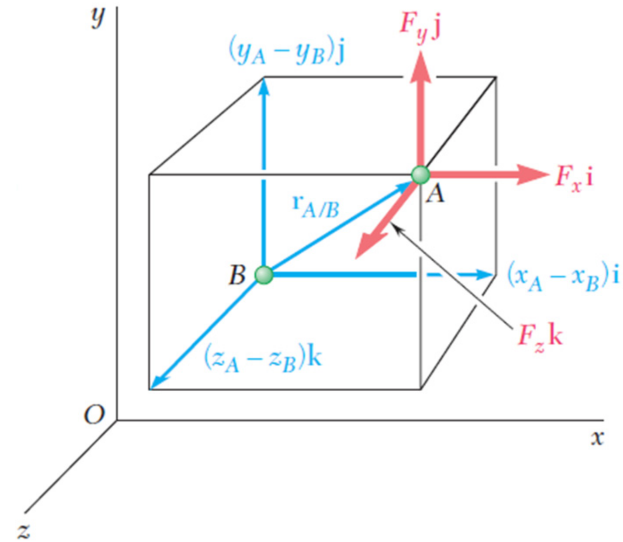
Reordenando:

$$\boldsymbol{M}_O = M_x\boldsymbol{i} + M_y\boldsymbol{j} + M_z\boldsymbol{k}$$
$$= (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k}$$

Momento de una fuerza con respecto a un punto arbitrario *B* en el sistema Cartesiano

Sea **F** = [F_x, F_y, F_z]. Entonces,

$$\boldsymbol{M}_B = \boldsymbol{r}_{A/B} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ (x_A - x_B) & (y_A - y_B) & (z_A - z_B) \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$
$$= \Big((y_A - y_B)F_z - (z_A - z_B)F_y\Big)\boldsymbol{i}$$
$$- \Big((x_A - x_B)F_z - (z_A - z_B)F_x\Big)\boldsymbol{j}$$
$$+ \Big((x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x\Big)\boldsymbol{k}.$$



Reordenando:

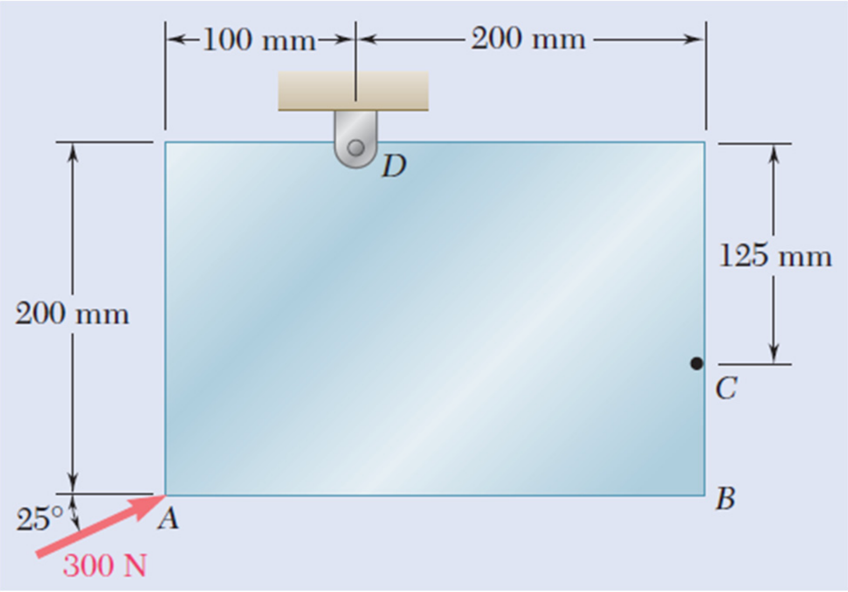
$$\boldsymbol{M}_B = M_x\boldsymbol{i} + M_y\boldsymbol{j} + M_z\boldsymbol{k}$$
$$= \Big((y_A - y_B)F_z - (z_A - z_B)F_y\Big)\boldsymbol{i} + \Big((z_A - z_B)F_x - (x_A - x_B)F_z\Big)\boldsymbol{j}$$
$$+ \Big((x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x\Big)\boldsymbol{k}$$

Problema: Se aplica una fuerza de 300 N en *A*. Determinar:

a) El momento de la fuerza de 300 N con respecto a *D*.

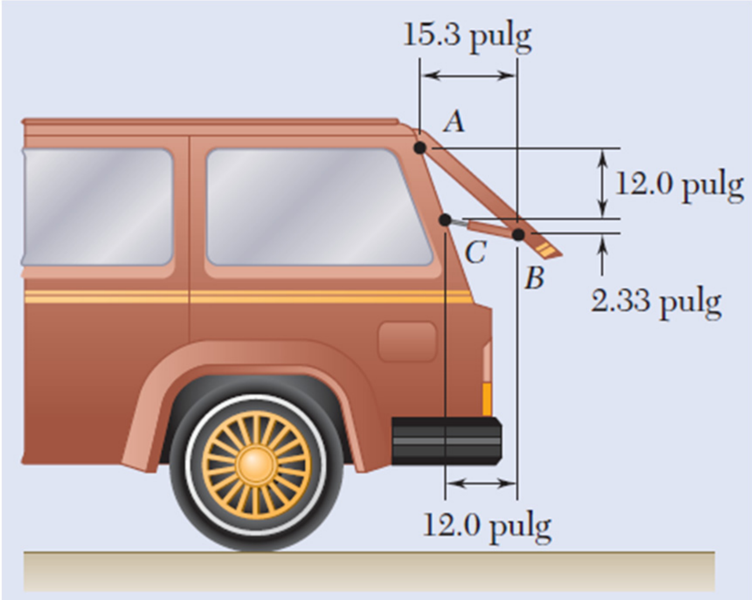
b) La magnitud y sentido de la fuerza horizontal aplicada en *C* que crea el mismo momento con respecto a *D*.

c) La fuerza mínima aplicada en *C* que crea el mismo momento con respecto a *D*.

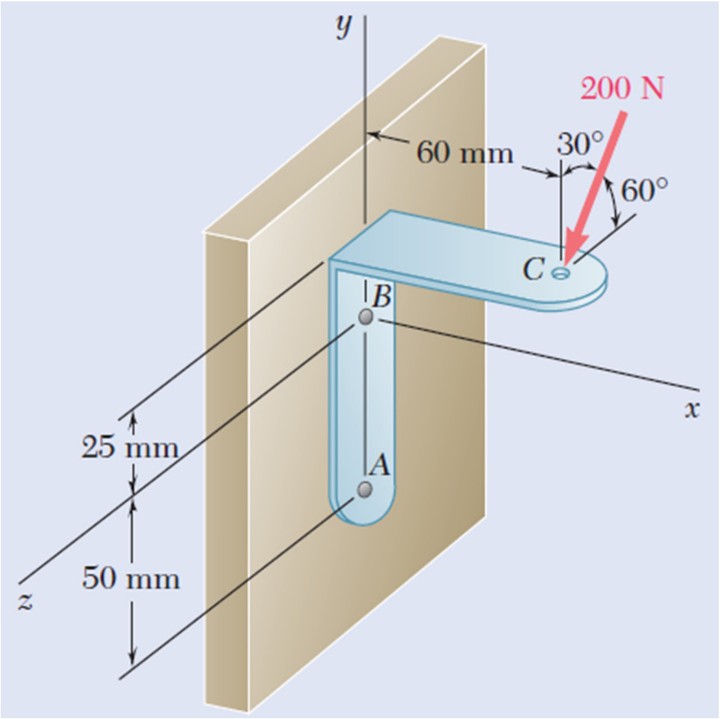


Momento de una Fuerza c/r a un Punto

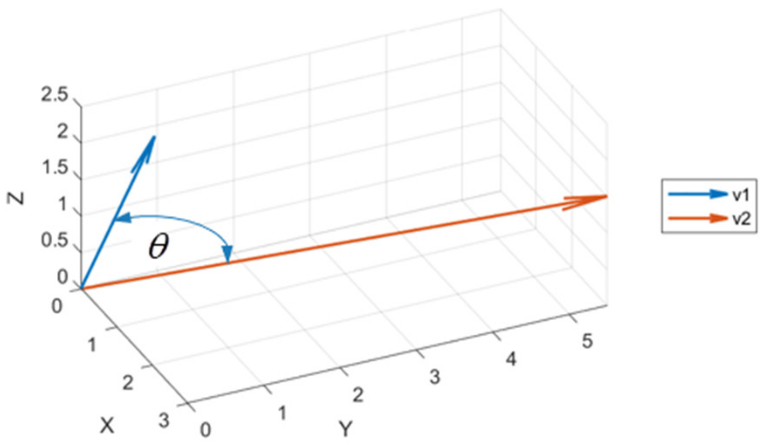
Problema: La ventanilla trasera de un automóvil se sostiene mediante el amortiguador hidráulico *BC*. Si para iniciar el levantamiento de la ventanilla se ejerce una fuerza de 125 lbf en la dirección del cilindro hidráulico, determinar el momento de la fuerza con respecto a *A*.



Problema: Se aplica una fuerza de 200 N sobre la ménsula *ABC*. Determinar el momento de la fuerza con respecto a *A*.



Producto Escalar de Dos Vectores



$$\boldsymbol{V}_1 \cdot \boldsymbol{V}_2 = v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z}$$
$$= \|\boldsymbol{V}_1\|\|\boldsymbol{V}_2\| \cos(\theta)$$

```
Producto escalar de dos vectores
--------------------------------

v1 = [1.000000, 0.500000, 2.500000]
v2 = [3.000000, 5.500000, 1.500000]
v1*v2 = v1(1)*v2(1) + v1(2)*v2(2) + v1(3)*v2(3) = 9.500000
v1*v2 = dot(v1,v2) = 9.500000
||v1|| =  norm(v1) = 2.738613
||v2|| =  norm(v2) = 6.442049
theta =  acos(v1*v2/(||v1|| ||v2||)) = 57.419829°
```

```
%-----------------------------------------------------------------------------
%                              Código MATLAB
%-----------------------------------------------------------------------------
% Definición de vectores
v1x = 1; v1y = 0.5 ; v1z = 2.5; v2x = 3.0; v2y = 5.5 ; v2z = 1.5;
v1 = [v1x, v1y, v1z]; v2 = [v2x, v2y, v2z];
% ploteo de vectores desde el origen
figure;
x0 = [0,0,0]; % origen del vector
plotvec3d(x0,v1,'LineWidth',1.5,'MaxHeadSize',0.7); % plotea el vector v1 con origen en x0
hold on; % mantiene la figura para seguir ploteando sobre ella
view([65,30]);
plotvec3d(x0,v2,'LineWidth',1.5,'MaxHeadSize',0.3); % plotea el vector v2 con origen en x0
legend('v1','v2','Location','eastoutside');
%-- Ejemplo  ----------------------------------------------------------------
fprintf('Producto escalar de dos vectores\n');
fprintf('--------------------------------\n\n');
fprintf('v1 = [%f, %f, %f]\n',v1); % impresión como arreglo
fprintf('v2 = [%f, %f, %f]\n',v2); % impresión como arreglo
fprintf('v1*v2 = v1(1)*v2(1) + v1(2)*v2(2) + v1(3)*v2(3) = %f\n',v1(1)*v2(1)+v1(2)*v2(2)+v1(3)*v2(3)); % cálculo componente por componente
fprintf('v1*v2 = dot(v1,v2) = %f\n',dot(v1,v2)); % cálculo mediante función producto punto
fprintf('||v1|| = norm(v1) = %f\n',norm(v1));
fprintf('||v2|| = norm(v2) = %f\n',norm(v2));
fprintf('theta = acos(v1*v2/(||v1|| ||v2||)) = %f°\n\n',acos(dot(v1,v2)/(norm(v1)*norm(v2)))*180/pi);
```

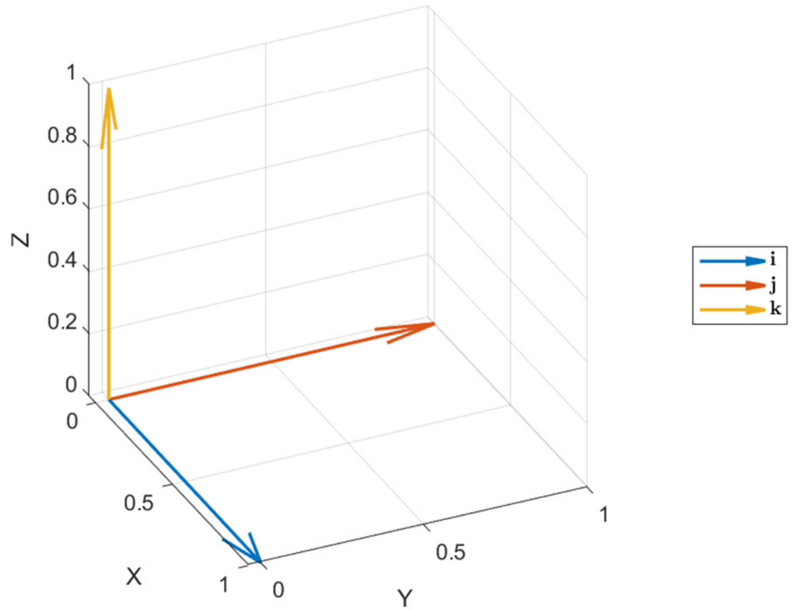
Producto Escalar: Aspectos Relevantes

Vectores unitarios del sistema de coordenadas Cartesiano:

Sean los vectores unitarios **i** = [1,0,0]; **j** = [0,1,0]; **k** = [0,0,1]. Entonces, ángulos entre:

i y **j** $\theta = 90°$; **j** y **k** $\theta = 90°$; **i** y **k** $\theta = 90°$

i y **i** $\theta = 0°$; **j** y **j** $\theta = 0°$; **k** y **k** $\theta = 0°$



Luego,

i • **i** = 1; **j** • **i** = 0; **k** • **i** = 0;

i • **j** = 0; **j** • **j** = 1; **k** • **j** = 0;

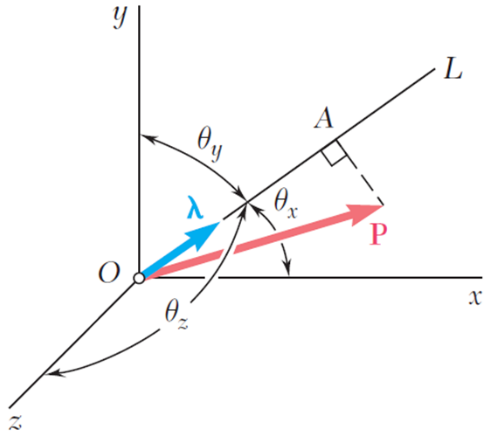
i • **k** = 0; **j** • **k** = 0; **k** • **k** = 1;

Producto Escalar: Aspectos Relevantes

Proyección de un vector sobre un eje *OL* dado:

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos(\theta_x)\boldsymbol{i} + \cos(\theta_y)\boldsymbol{j} + \cos(\theta_z)\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned} P_{OL} &= \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} \\ &= P_x \cos(\theta_x) + P_y \cos(\theta_y) + P_z \cos(\theta_z) \end{aligned}$$

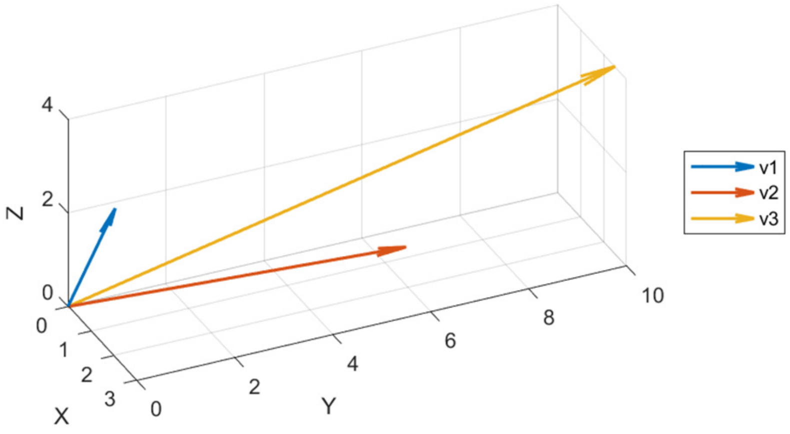


Propiedades del producto escalar:

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{P} \cdot (\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{S}) = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{S}$$

Triple Producto Mixto de Tres Vectores



$$\boldsymbol{V}_1 \cdot (\boldsymbol{V}_2 \times \boldsymbol{V}_3) = \begin{vmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \end{vmatrix}$$

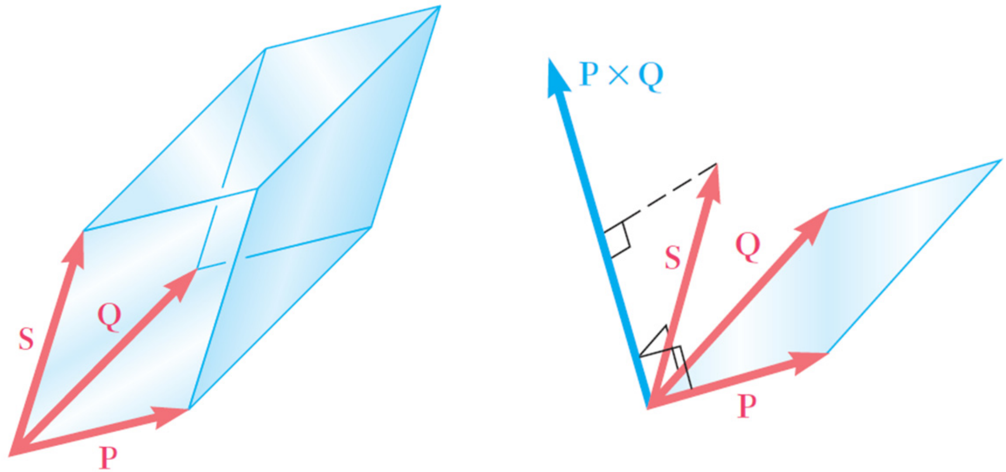
$$= v_{1x}(v_{2y}v_{3z} - v_{2z}v_{3y}) - v_{1y}(v_{2x}v_{3z} - v_{2z}v_{3x}) + v_{1z}(v_{2x}v_{3y} - v_{2y}v_{3x})$$

```
Triple producto mixto de tres vectores
--------------------------------------

v1 = [1.000000, 0.500000, 2.500000]
v2 = [3.000000, 5.500000, 1.500000]
v3 = [2.500000, 10.000000, 4.000000]

                |  v1x    v1y    v1z | = | v1(1)  v1(2)  v1(3) |
v1*(v2 x v3) =  |  v2x    v2y    v2z | = | v2(1)  v2(2)  v2(3) |
                |  v3x    v3y    v3z | = | v3(1)  v3(2)  v3(3) |
              = (v2(2)*v3(3) - v2(3)*v3(2))*v1(1)
                - (v2(1)*v3(3) - v2(3)*v3(1))*v1(2)
                + (v2(1)*v3(2) - v2(2)*v3(1))*v1(3) = 43.500000
v1*(v2 x v3) =  det([v1; v2; v3]) = 43.500000
v1*(v2 x v3) =  dot(v1,cross(v2,v3) = 43.500000
```

```
%-------------------------------------------------------------------------------------------
%                                   Código MATLAB
%-------------------------------------------------------------------------------------------
% Definición de vectores
v1x = 1; v1y = 0.5 ; v1z = 2.5; v2x = 3.0; v2y = 5.5 ; v2z = 1.5;
v3x = 2.5; v3y = 10 ; v3z = 4.0;
v1 = [v1x, v1y, v1z]; v2 = [v2x, v2y, v2z]; v3 = [v3x, v3y, v3z];
% ploteo de vectores desde el origen
figure; x0 = [0,0,0]; plotvec3d(x0,v1,'LineWidth',1.5,'MaxHeadSize',0.7);
hold on; view([65,30]);
plotvec3d(x0,v2,'LineWidth',1.5,'MaxHeadSize',0.3);
plotvec3d(x0,v3,'LineWidth',1.5,'MaxHeadSize',0.2);
legend('v1','v2','v3','Location','eastoutside');
%-- Ejemplo  -------------------------------------------------------------
fprintf('Triple producto mixto de tres vectores\n');
fprintf('--------------------------------------------------\n\n');
fprintf('v1 = [%f, %f, %f]\n',v1);
fprintf('v2 = [%f, %f, %f]\n',v2);
fprintf('v3 = [%f, %f, %f]\n\n',v3);
fprintf(' | v1x v1y v1z | = | v1(1) v1(2) v1(3) |\n');
fprintf('v1*(v2 x v3) = | v2x v2y v2z | = | v2(1) v2(2) v2(3) |\n');
fprintf(' | v3x v3y v3z | = | v3(1) v3(2) v3(3) |\n');
fprintf(' = (v2(2)*v3(3) - v2(3)*v3(2))*v1(1)\n');
fprintf(' - (v2(1)*v3(3) - v2(3)*v3(1))*v1(2)\n');
fprintf(' + (v2(1)*v3(2) - v2(2)*v3(1))*v1(3) = %f\n',...
(v2(2)*v3(3) - v2(3)*v3(2))*v1(1) - (v2(1)*v3(3) - v2(3)*v3(1))*v1(2)+
(v2(1)*v3(2) - v2(2)*v3(1))*v1(3));
fprintf('v1*(v2 x v3) = det([v1; v2; v3]) = %f\n',det([v1; v2; v3]));
fprintf('v1*(v2 x v3) = dot(v1,cross(v2,v3)) = %f\n\n',dot(v1,cross(v2,v3)));
```

Interpretación geométrica:

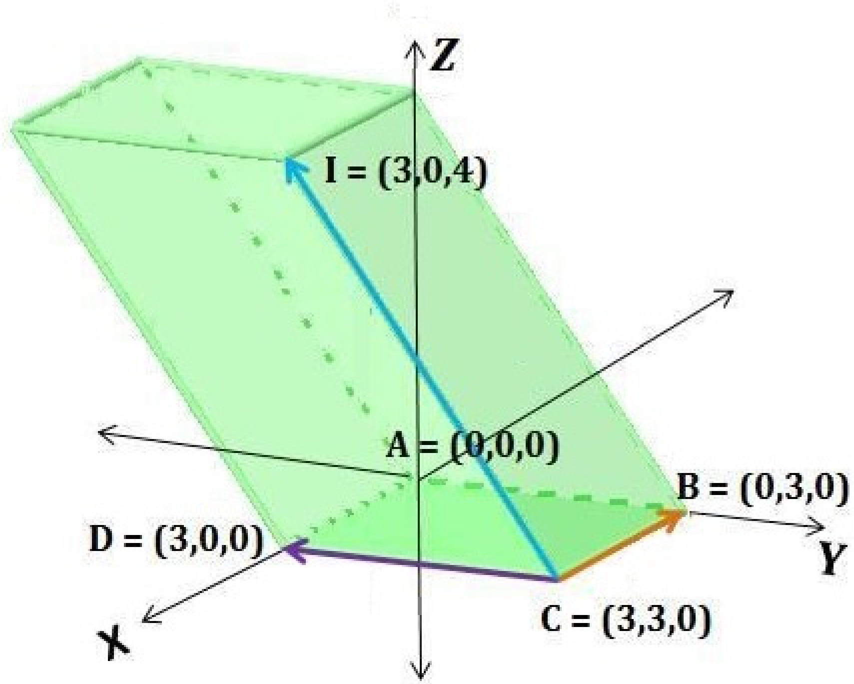
$$\mathrm{Vol} = |\boldsymbol{S} \cdot (\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q})|$$



Propiedades del producto escalar:

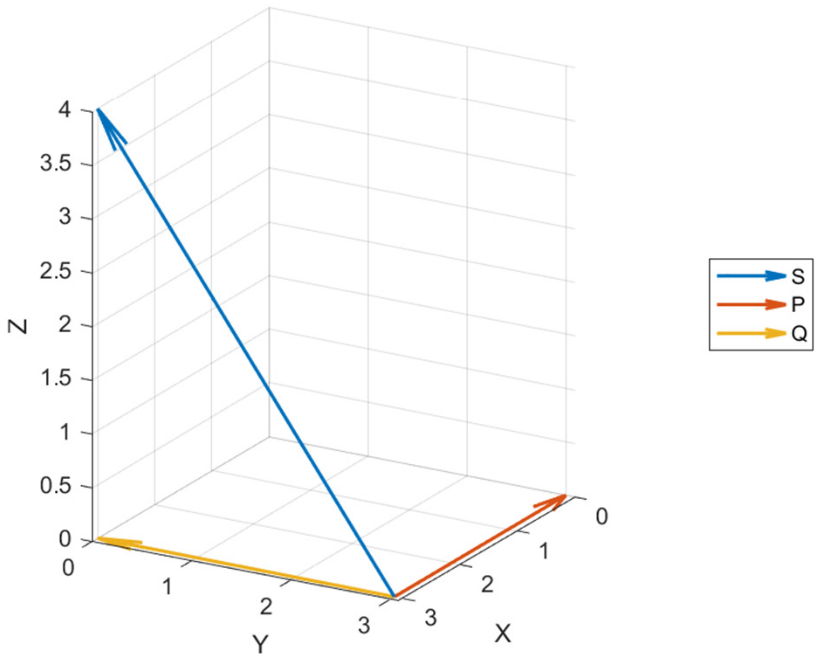
$$\begin{aligned}\boldsymbol{S} \cdot (\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q}) &= \boldsymbol{P} \cdot (\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{S}) = \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{P}) \\ &= -\boldsymbol{S} \cdot (\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{P}) = -\boldsymbol{P} \cdot (\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{Q}) = -\boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{S})\end{aligned}$$

Triple Producto Mixto: Cálculo de Volumen



S = [0,-3,4]; **P** = [-3,0,0]; **Q** = [0,-3,0]

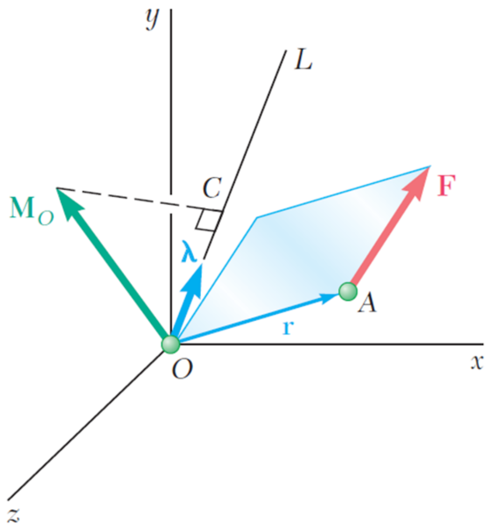
Triple Producto Mixto: Volumen




```
Volumen de un paralelepipedo
----------------------------

S = [0.000000, -3.000000, 4.000000]
P = [-3.000000, 0.000000, 0.000000]
Q = [0.000000, -3.000000, 0.000000]
Vol = abs(S*(P x Q)) =  abs(dot(S,cross(P,Q))) = 36.000000
```

```
%------------------------------------------------------------------------------------------------
%                                   Código MATLAB
%------------------------------------------------------------------------------------------------
fprintf('Volumen de un paralelepipedo\n');
fprintf('----------------------------\n\n');
% define vectores
S = [0, -3, 4];
P = [-3, 0, 0];
Q = [0, -3, 0];
%
fprintf('S = [%f, %f, %f]\n',S); % impresión como arreglo
fprintf('P = [%f, %f, %f]\n',P); % impresión como arreglo
fprintf('Q = [%f, %f, %f]\n',Q); % impresión como arreglo
%
figure; % define una nueva figura
x0 = [3,3,0]; % origen del vector
plotvec3d(x0,S,'LineWidth',1.5,'MaxHeadSize',0.3); % plotea el vector v1 con origen en x0
hold on; % mantiene la figura para seguir ploteando sobre ella
view([120,20]);
plotvec3d(x0,P,'LineWidth',1.5,'MaxHeadSize',0.4); % plotea el vector P con origen en x0
plotvec3d(x0,Q,'LineWidth',1.5,'MaxHeadSize',0.4); % plotea el vector Q con origen en x0
legend('S','P','Q','Location','eastoutside');
fprintf('Vol = abs(S*(P x Q)) = abs(dot(S,cross(P,Q))) = %f\n\n',...
abs(dot(S,cross(P,Q))));
```

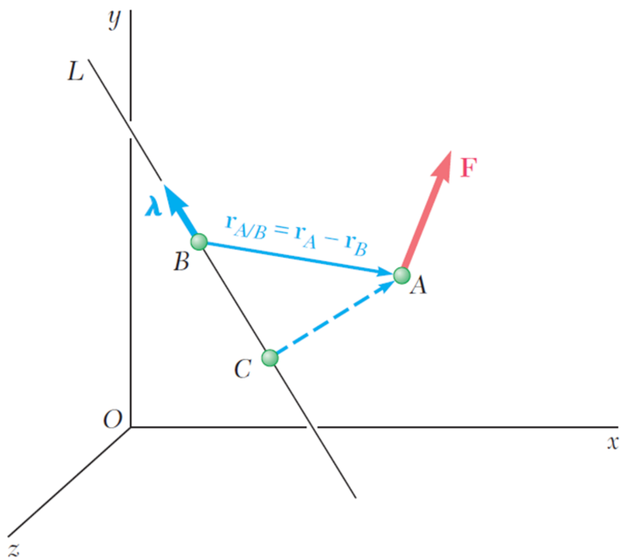
Momento de una Fuerza c/r a un Eje



- Aplicación del triple producto mixto:

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

- M_{OL} de **F** con respecto a OL mide la tendencia de la fuerza **F** a hacer rotar al cuerpo rígido alrededor del eje fijo OL.



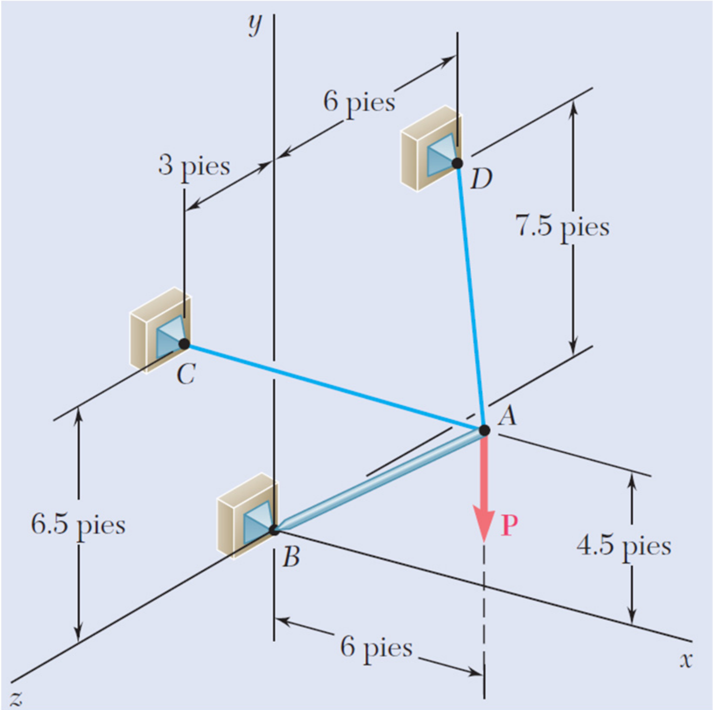
- Con respecto a un eje arbitrario:

$$M_{BL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{M}_B = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\boldsymbol{r}_{A/B} \times \boldsymbol{F})$$
$$= \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

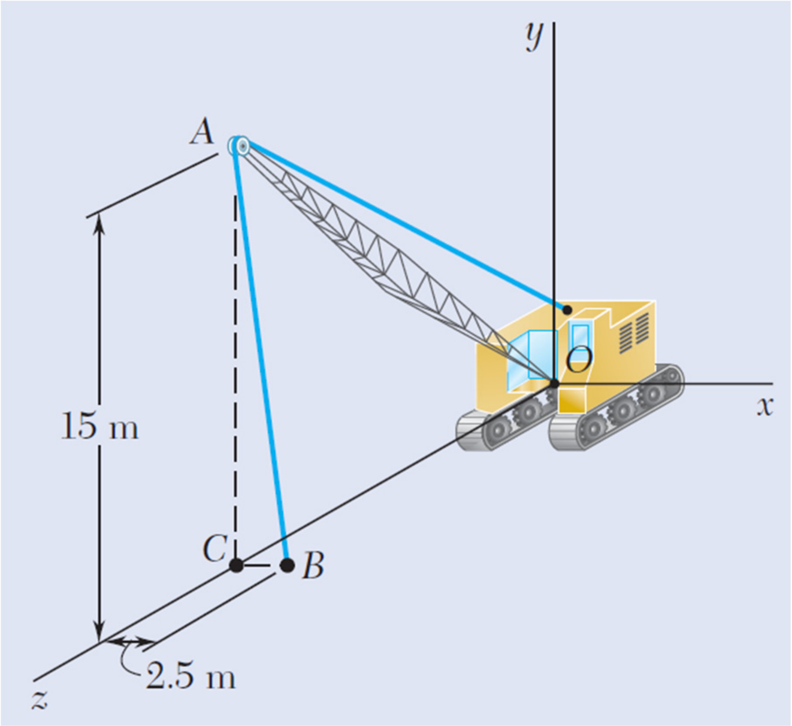
Problema: Si se sabe que la tensión en el cable *AC* es de 280 lbf, determinar:

a) El ángulo entre el cable *AC* y el brazo *AB*.

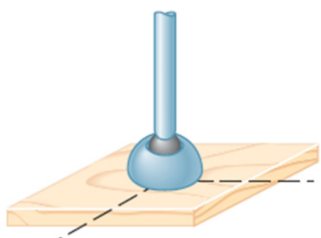
b) La proyección sobre *AB* de la fuerza ejercida por el cable *AC* en el punto *A*.

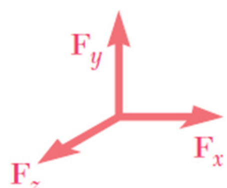


Problema: Una grúa está orientada a fin de que el extremo *AO* del brazo de 25 m esté en el plano *yz*. En el instante que se muestra en la figura, la tensión del cable *AB* es de 4 kN. Determinar el momento con respecto a cada uno de los ejes coordenados de la fuerza ejercida en *A* por el cable *AB*.



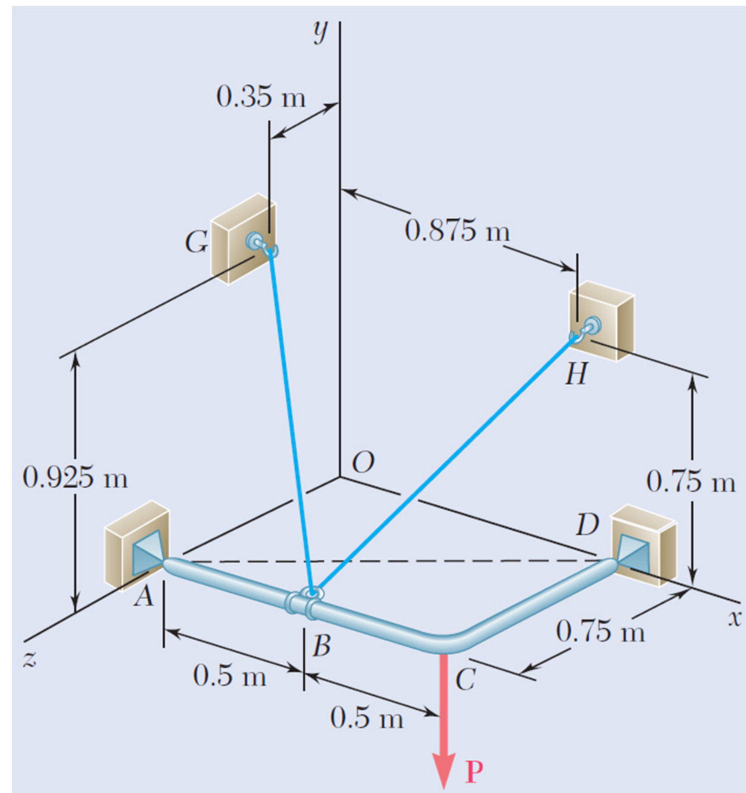
Problema: El marco *ACD* está articulado en *A* y *D;* se sostiene mediante un cable que pasa a través de un anillo en *B* y está unido a los ganchos en *G* y *H*. Si se sabe que la tensión en el cable es de 450 N, determinar el momento con respecto a la diagonal *AD* de la fuerza ejercida sobre el marco por el tramo *BH* del cable.


Rótula (bola y cuenca)

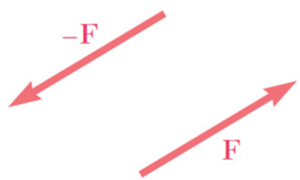


Tres componentes de fuerza, perpendiculares entre sí en el punto de contacto

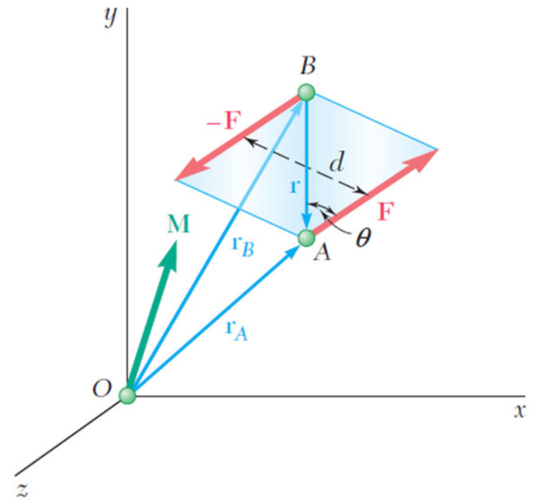
Rótula o articulación



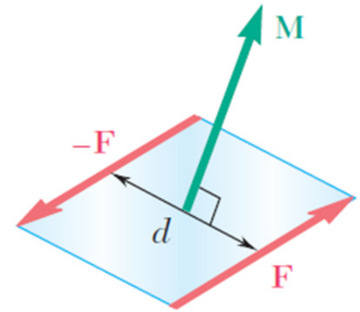
Par y Momento del Par



Par: dos fuerzas igual magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos



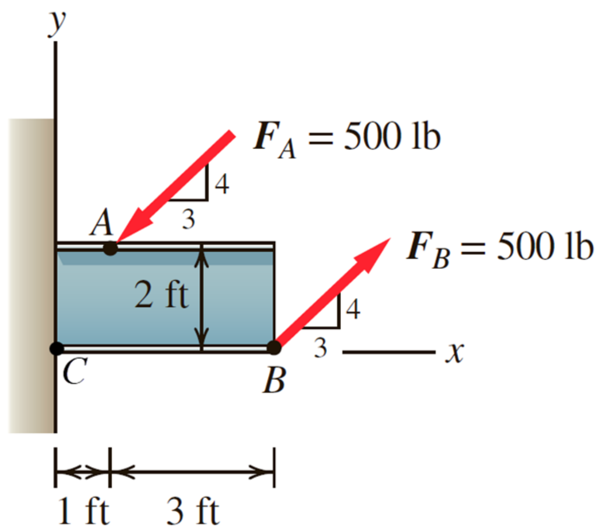
Momento del par

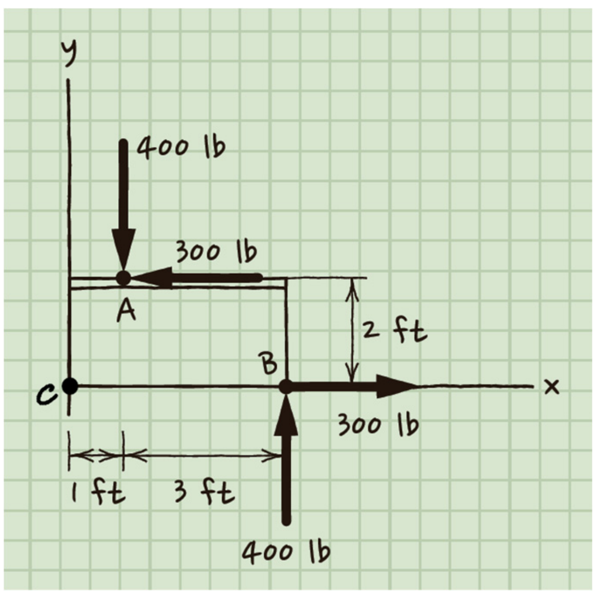


||**M**|| = ||**F**||*d, y como vector **M** es perpendicular al plano del par

- La magnitud del momento del par (||**M**|| = ||**F**||*d) y su dirección se mantienen inalterables si los momentos individuales de las fuerzas **F** del par se calculan con respecto a otro punto O’ distinto de O. Es decir, **el momento del par con respecto a cualquier punto del cuerpo rígido es el mismo**.
- Consecuencia de lo anterior es que el par puede ser trasladado a cualquier punto del cuerpo rígido siempre y cuando la magnitud y dirección de su momento se conserven. En este sentido el momento **M** del par es un **“vector libre”**.

Par y Momento del Par: Vector Libre





Momento del par (vector se supone posicionado en el punto medio del trazo AB apuntando hacia afuera de esta hoja):

$$\boldsymbol{M} = (3(400) + 2(300))\hat{\boldsymbol{k}} = (1800 \text{ lb} \cdot \text{in})\hat{\boldsymbol{k}}$$

Momento del par con respecto a A (vector se posiciona en A apuntando hacia afuera de esta hoja:

$$\boldsymbol{M}_A = (3(400) + 2(300))\hat{\boldsymbol{k}} = (1800 \text{ lb} \cdot \text{in})\hat{\boldsymbol{k}}$$

Momento del par con respecto a C (vector se posiciona en C apuntando hacia afuera de esta hoja:

$$\boldsymbol{M}_C = (-1(400) + 2(300) + 4(400))\hat{\boldsymbol{k}} = (1800 \text{ lb} \cdot \text{in})\hat{\boldsymbol{k}}$$

Conclusión: el vector par se puede mover libremente a cualquier punto de la viga sobre el plano xy. Es decir, el vector par es un **“vector libre”**.

Problema: Una pieza de madera en la que se taladraron de manera sucesiva varios orificios está asegurada a un banco de trabajo mediante dos clavos. Si se sabe que el taladro ejerce un par de 12 Nm sobre la pieza de madera, determine la magnitud de las fuerzas resultantes aplicadas a los clavos si estos se localizan:

a) en *A* y *B*
b) en *B* y *C*
c) en *A* y *C*.

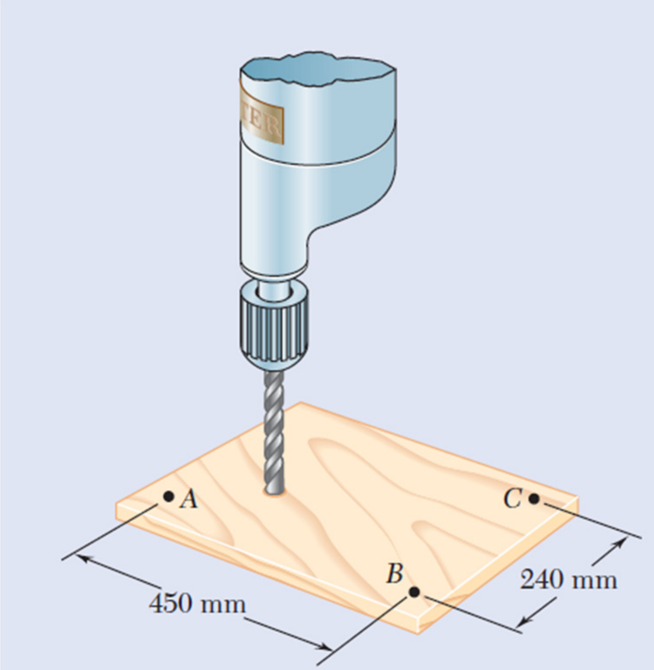
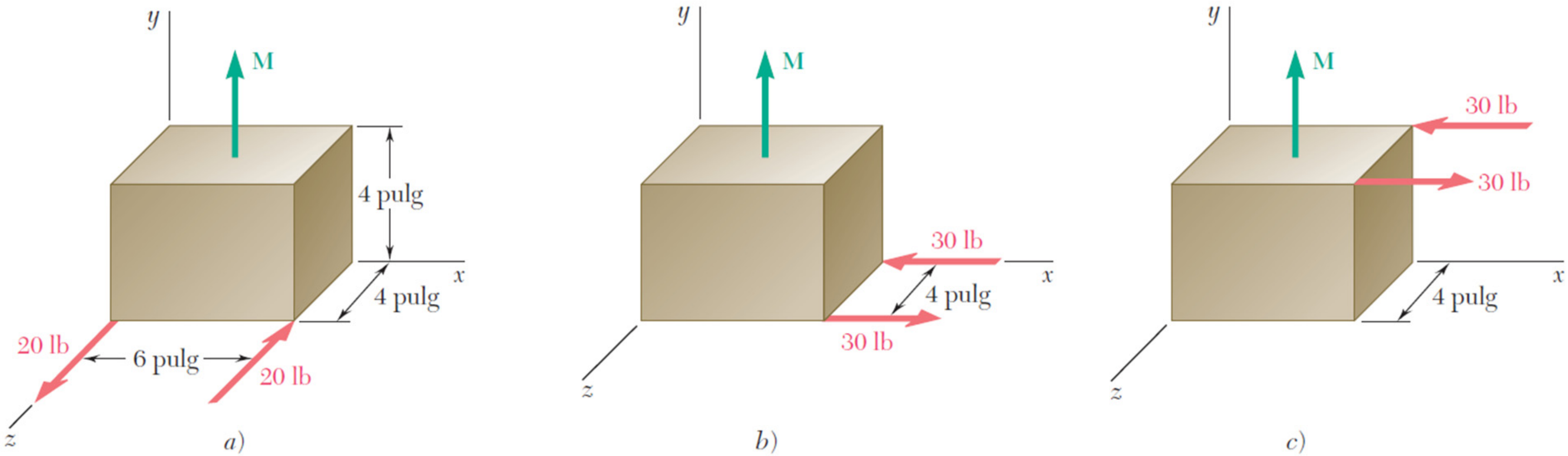
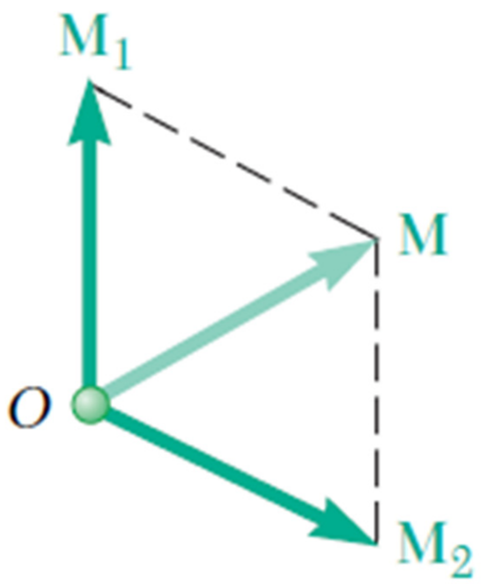


Figura P3.74

Pares Equivalentes



- El ejemplo muestra tres formas de definir un par que produce el mismo momento **M**.
- Los tres pares son equivalentes pues producen el mismo momento **M**.
- Los tres pares producen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido aún cuando las fuerzas de un par pueden diferir de otro par .



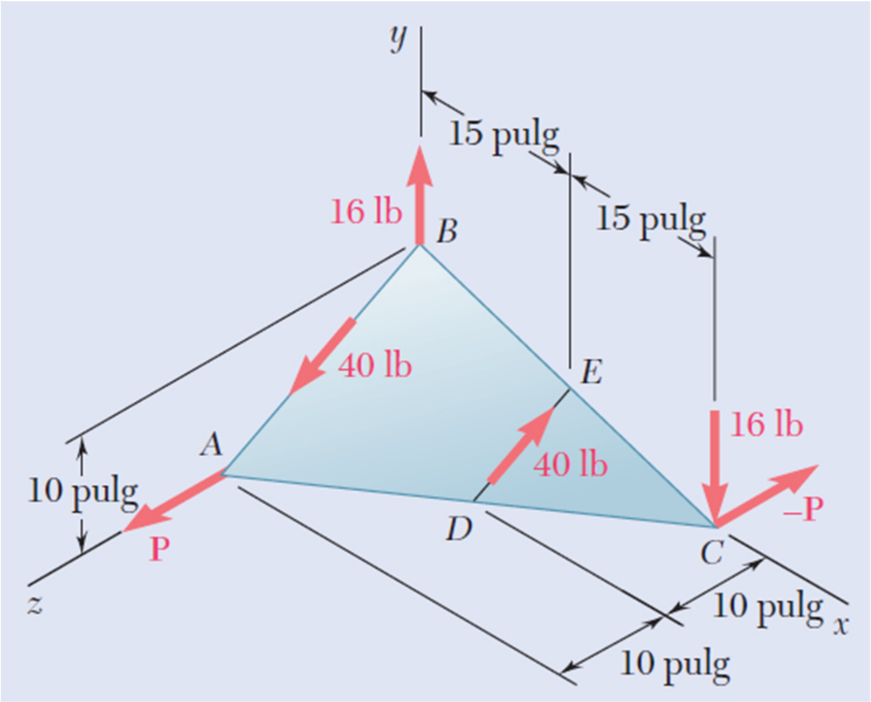
- Si se tienen dos pares **M1** y **M2**, el par resultante es la **suma vectorial** de **M1** y **M2**:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2$$

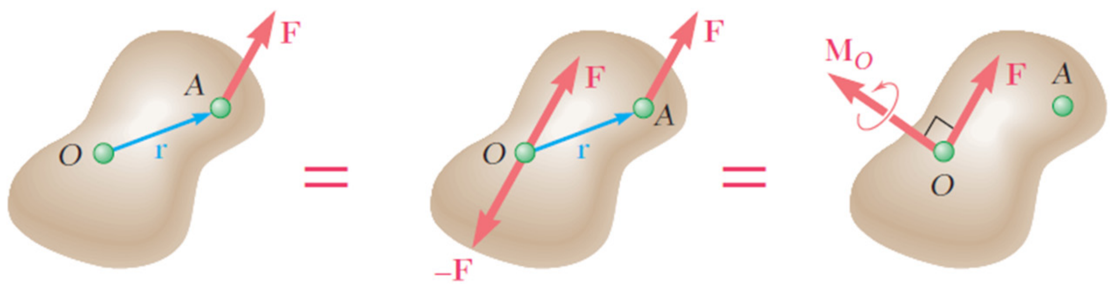
- Se puede generalizar para *n* pares actuando sobre el cuerpo rígido:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \cdots + \boldsymbol{M}_n$$

Problema: Si P = 0 en la figura, reemplace los dos pares restantes con un solo par equivalente, y especifique su magnitud y la dirección de su eje.



Reemplazar una fuerza dada por una fuerza y un par (sistema fuerza-par) en un punto *O* (**sistemas equivalentes**):

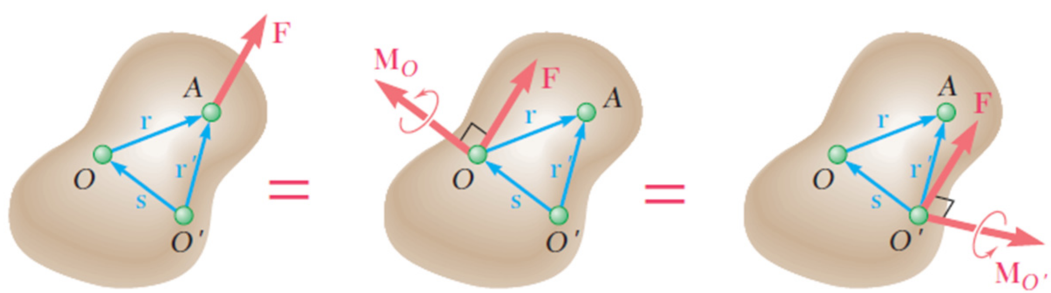


Sistema fuerza-par en *O*:

$$\boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

Reemplazar el sistema fuerza-par en *O* por un sistema fuerza par en el punto *O’* (**sistemas equivalentes**):



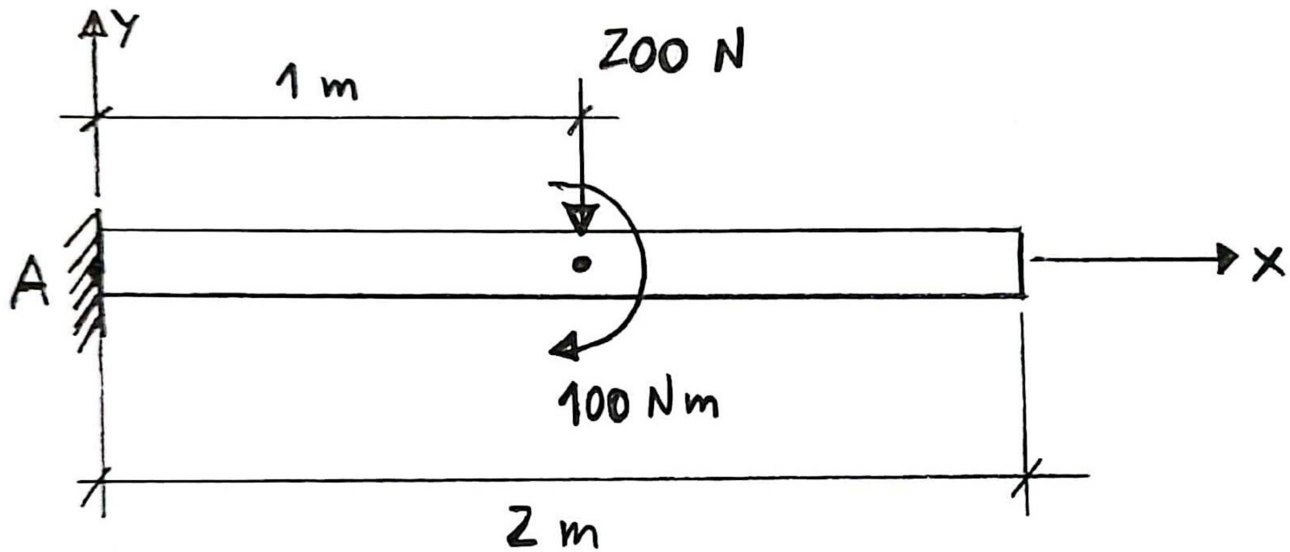
Sistema fuerza-par en *O’*:

$$\boldsymbol{F}$$

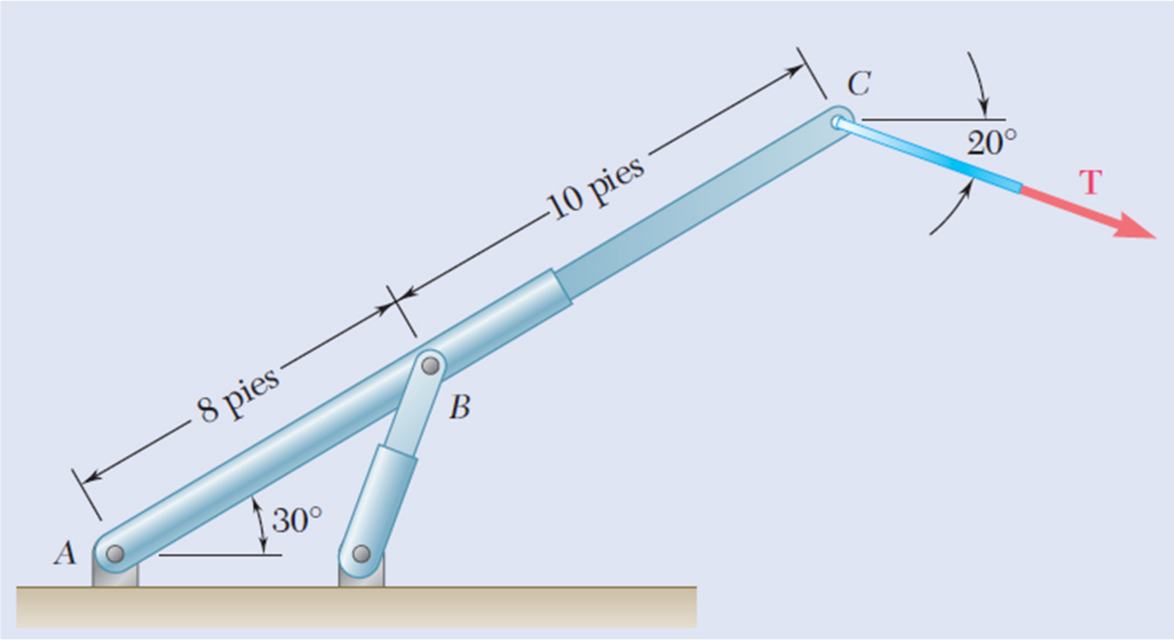
$$\boldsymbol{M}'_O = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{F}$$

Conclusión: la fuerza **F** en A es equivalente al sistema fuerza-par en *O* y es equivalente al sistema fuerza-par en *O’*.

Problema: Reemplazar el sistema fuerza-par mostrado en la figura por una sola fuerza equivalente.



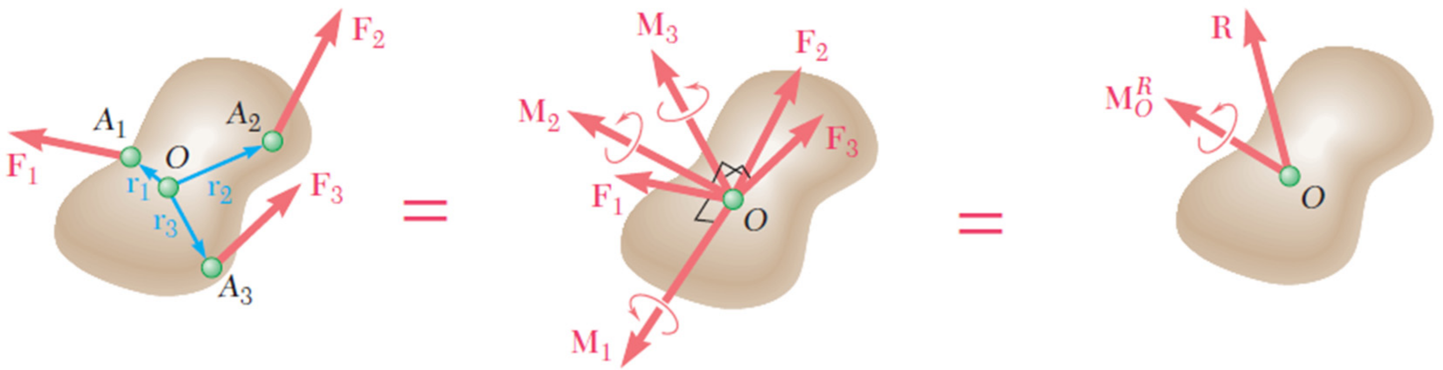
Problema: La tensión en el cable unido al extremo *C* de un aguilón ajustable *ABC* es de 560 lbf. Reemplace la fuerza ejercida por el cable en *C* por un sistema fuerza-par equivalente a) en *A* y b) en *B*.



Simplificación de Sistemas de Fuerzas

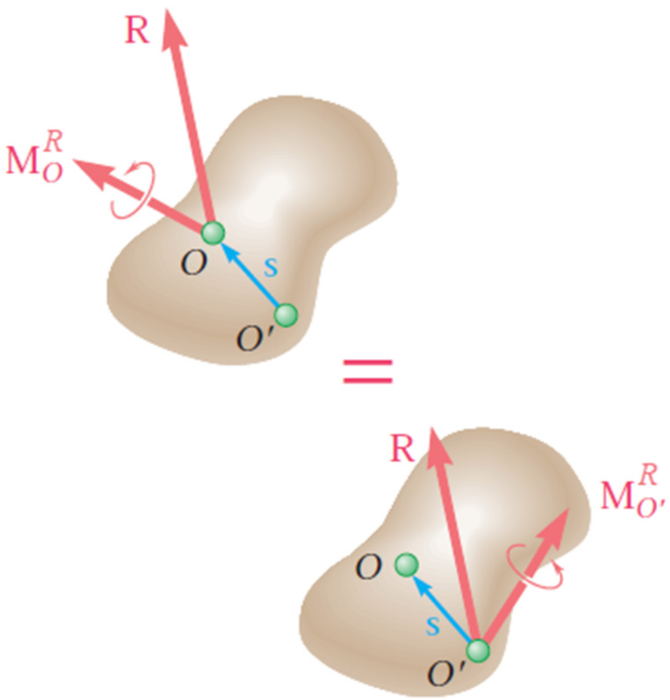
Los conceptos vistos anteriormente también aplican a sistemas más complejos de fuerzas.

Cualquier sistema de fuerzas, sin importar que tan complejo sea, puede ser reducido a un sistema fuerza-par.



El sistema fuerza-par equivalente en O está definido por:

$$\boldsymbol{R} = \sum_i \boldsymbol{F}_i \quad ; \quad \boldsymbol{M}_O^R = \sum_i \boldsymbol{M}_{iO} = \sum_i (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i)$$



Una vez que el sistema se ha reducido a un sistema fuerza-par en *O*, dicho sistema se puede reducir a un sistema fuerza-par actuando en cualquier otro punto *O'*:

$$\boldsymbol{R}$$

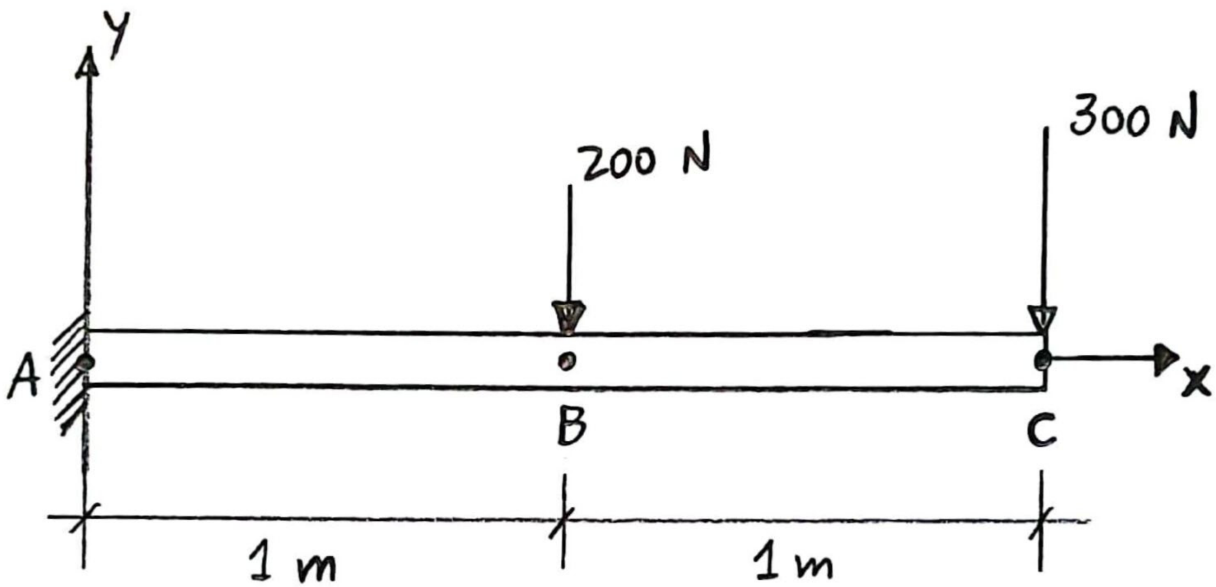
$$\boldsymbol{M}_{O'}^R = \boldsymbol{M}_O^R + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{R}$$

Problema: Reducir el sistema de fuerzas mostrado en la figura a:

a) un sistema equivalente fuerza-par en A.

b) un sistema equivalente fuerza-par en C.

c) una sola fuerza.



Sistemas de Fuerzas Equivalentes

Dos sistemas de fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, …, y $\mathbf{F}_1'$, $\mathbf{F}_2'$, $\mathbf{F}_3'$, …, que actúan sobre el mismo cuerpo rígido son equivalentes si y solo si la suma de las fuerzas del primer sistema es igual a las suma de las fuerzas del segundo sistema, es decir,

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i'$$

y la suma de los momentos de las fuerzas del primer sistema con respecto a un punto dado *O* es igual a la suma de los momentos de las fuerzas del segundo sistema con respecto al mismo punto dado *O*:

$$\sum_i \boldsymbol{M}_{iO} = \sum_i \boldsymbol{M}_{iO}'$$

Problema: Se aplican un par de magnitud *M* = 80 lbf-in y las tres fuerzas mostradas en la figura a una ménsula angular.

a) Encuentre la resultante de este sistema de fuerzas.

b) Localice los puntos donde la línea de acción de la resultante interseca la línea *AB* y la línea *BC*.