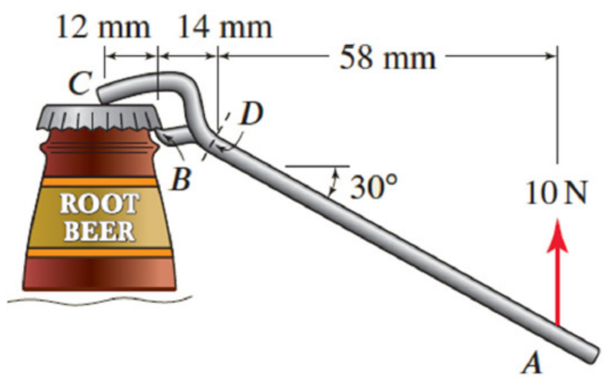
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE CHILE
Profesor: A. Ortiz Bernardin

PROBLEMAS RESUELTOS

UNIDAD 5: FUERZAS Y MOMENTOS INTERNOS

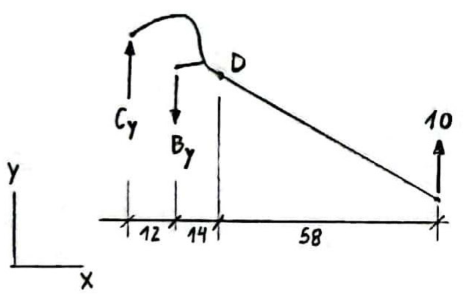
PROBLEMA 1

Problema: Para remover la tapa de la botella se requiere una fuerza vertical de 10 N en el punto *A*. Determinar las fuerzas internas que se desarrollan en la sección transversal *D*.



SOLUCIÓN:

Paso 1: Se aisla el destapador para estudiar su equilibrio. En los puntos de sujeción C y B se especifican reacciones verticales, lo que junto a la fuerza 10 N aplicada en el otro extremo del destapador garantizarán el equilibrio del destapador. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del destapador y se calculan las reacciones.



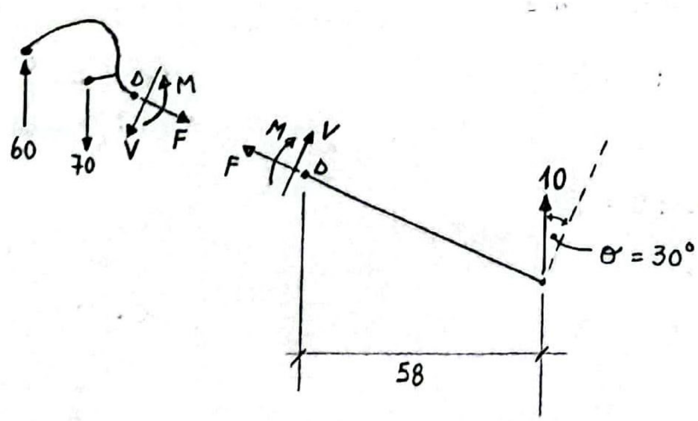
$$\sum M_C = 0: \quad 10(58+14+12) - B_y(12) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B_y = 70\ N}$$

$$\sum F_y = 0: \quad C_y - B_y + 10 = 0$$

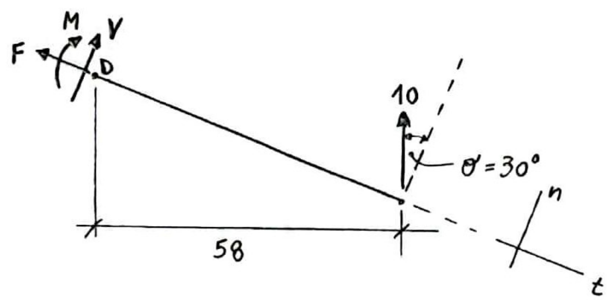
$$\Rightarrow \boxed{C_y = B_y - 10 = 70 - 10 = 60\ N}$$

Paso 2: Para determinar las fuerzas y momento, internos en C, se hace un corte en C para separar el destapador en dos partes. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de cada parte.



En estos diagramas, las fuerzas internas en D están representadas por V (corte) y F (axial). El momento interno está representado por M.

Paso 3: Se determinan las fuerzas y momento interno en D. El cálculo se facilita si se escoge el diagrama de cuerpo libre ubicado a la derecha de D ya que hay menos fuerzas actuando. Para facilitar aún más, se define un sistema de ejes coordenados t-n, donde t se orienta en la dirección axial del mango del destapador y n en la dirección normal al mango.



$$\Sigma F_t = 0: \quad -F - 10\sin 30^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F = -10\sin 30^\circ = -5\ \text{N}}$$

$$\Sigma F_n = 0: \quad V + 10\cos 30^\circ = 0$$

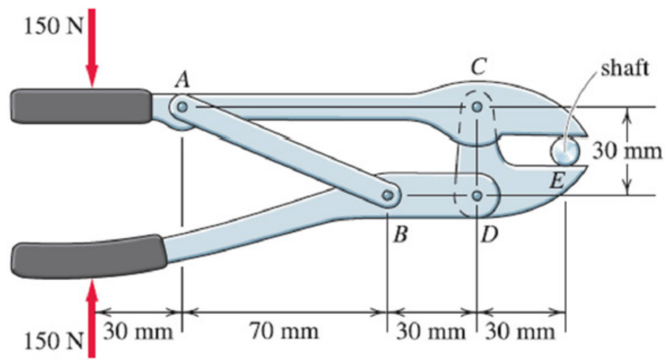
$$\Rightarrow \boxed{V = -10\cos 30^\circ \approx -8.660\ \text{N}}$$

$$\Sigma M_D = 0: \quad -M + 10(58) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M = 580\ \text{Nmm}}$$

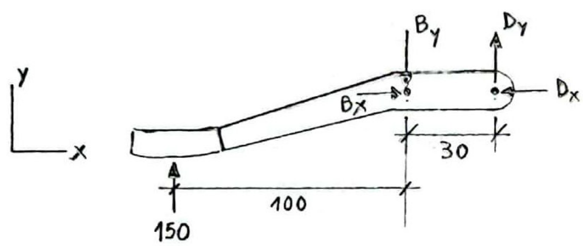
PROBLEMA 2

Problema: Para el alicate que se muestra en la figura, determinar la fuerza axial, fuerza de corte y momento flector que se desarrolla en una sección transversal justo a la izquierda y justo a la derecha del pasador *B*.



SOLUCIÓN:

Paso 1: Se dibuja un diagrama de cuerpo libre del brazo inferior del alicate.



Paso 2: Se determinan las reacciones en B y D mediante ecuaciones de equilibrio. Se tienen 4 incógnitas, por lo que a lo más podríamos determinar 3 incógnitas.

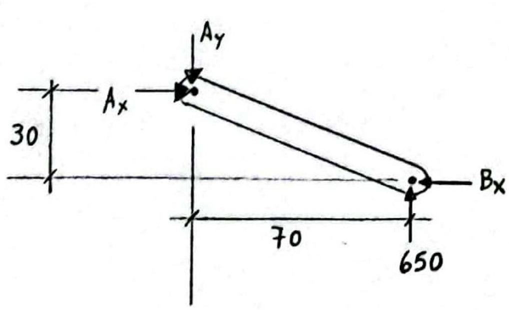
$$\Sigma F_x = 0: \quad B_x - D_x = 0 \Rightarrow B_x = D_x$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad D_y - B_y + 150 = 0 \Rightarrow B_y = D_y + 150$$

$$\Sigma M_B = 0: \quad -150(100) + D_y(30) = 0 \Rightarrow \boxed{D_y = \frac{150(100)}{30} = 500 \text{ N}}$$

$$\therefore \boxed{B_y = 650 \text{ N}}$$

Paso 3: Se dibuja un diagrama de cuerpo libre del miembro AB. Este miembro contiene las incógnitas B_x, B_y, pero además agrega 2 incógnitas adicionales, A_x y A_y, por lo que entre el DCL del brazo inferior y el DCL del miembro AB habrá un total de 6 incógnitas, y 6 ecuaciones disponibles para determinar las 6 incógnitas.



Como solo necesitamos calcular las fuerzas y momento internos al lado derecho e izquierdo de B, basta con determinar B_x con ayuda del DCL del miembro AB.

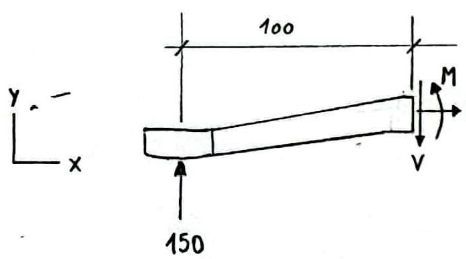
Paso 4: Se determina la reacción B_x del pasador B utilizando el DCL del miembro AB dibujado en el Paso 3. Luego, se determina la reacción D_x en el pasador D utilizando la ecuación encontrada en el Paso 2.

Del DCL miembro AB: $\Sigma M_A = 0: \quad 650(70) - B_x(30) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{B_x = \frac{650(70)}{30} \approx 1517 \text{ N}}$$

Del Paso 2: $\boxed{D_x = B_x = 1517 \text{ N}}$

Paso 5: Se determinan las fuerzas y momento internos a la izquierda del pasador B. Para ello se realiza un corte justo a la izquierda de B y se considera la porción que queda a la izquierda para determinar las fuerzas y momento interno mediante equilibrio.

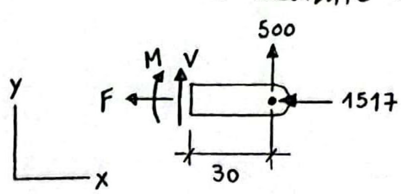


$\Sigma F_x = 0: \quad \boxed{F = 0 \text{ N}}$

$\Sigma F_y = 0: \quad 150 - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = 150 \text{ N}}$

$\Sigma M_B = 0: \quad M - 150(100) = 0 \Rightarrow \boxed{M = 15000 \text{ Nmm}}$

Paso 6: Similarmente, se determinan las fuerzas y momento internos justo a la derecha de B. Para esto, se realiza un corte justo a la derecha de B y con la porción que queda a la derecha se determinan las fuerzas y momento interno mediante equilibrio.



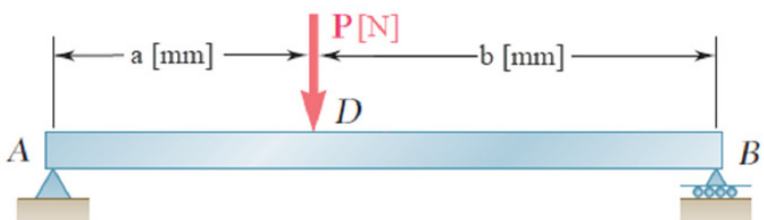
$\Sigma F_x = 0: \quad -F - 1517 = 0 \Rightarrow \boxed{F = -1517 \text{ N}}$

$\Sigma F_y = 0: \quad V + 500 = 0 \Rightarrow \boxed{V = -500 \text{ N}}$

$\Sigma M_B = 0: \quad -M + 500(30) \Rightarrow \boxed{M = 15000 \text{ Nmm}}$

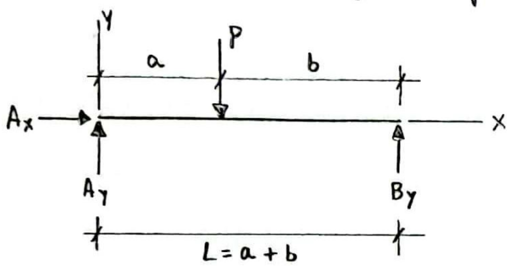
PROBLEMA 3

Problema: Obtener el diagrama de fuerza cortante y de momento flector en la viga simplemente apoyada que se muestra en la figura.



SOLUCIÓN:

Paso 1: Se determinan reacciones mediante un diagrama de cuerpo libre de la viga completa.



$\Sigma F_x = 0$: $\boxed{A_x = 0}$

$\Sigma F_y = 0$: $A_y + B_y - P = 0$

$\Rightarrow A_y = P - B_y$

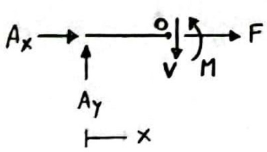
$\Sigma M_A = 0$: $-Pa + B_y(a+b) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{B_y = \frac{Pa}{(a+b)} = \frac{Pa}{L}}$$

$$\therefore \boxed{A_y = P - \frac{Pa}{(a+b)} = \frac{Pb}{(a+b)} = \frac{Pb}{L}}$$

Paso 2: Se determinan la fuerzas y momento internos en el tramo de viga ubicado a la izquierda de P.

$0 \le x < a$:



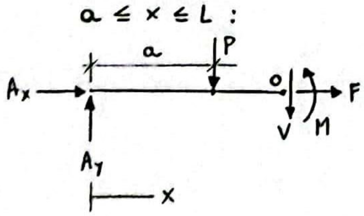
$\Sigma F_x = 0$: $A_x + F = 0 \Rightarrow \boxed{F = -A_x = 0}$

$\Sigma F_y = 0$: $A_y - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = A_y = \frac{Pb}{L}}$

$\Sigma M_O = 0$: $-A_y x + M = 0 \Rightarrow \boxed{M = A_y x = \frac{Pb}{L} x}$

Paso 3: Se determinan las fuerzas y momento internos en el tramo de viga ubicado a la derecha de P.

$a \le x \le L$:



$\Sigma F_x = 0$: $A_x + F = 0 \Rightarrow \boxed{F = -A_x = 0}$

$\Sigma F_y = 0$: $A_y - P - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = A_y - P = \frac{Pb}{(a+b)} - P = -\frac{Pa}{(a+b)} = -\frac{Pa}{L}}$

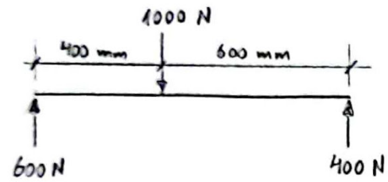
$\Sigma M_O = 0$: $-A_y x + P(x-a) + M = 0$

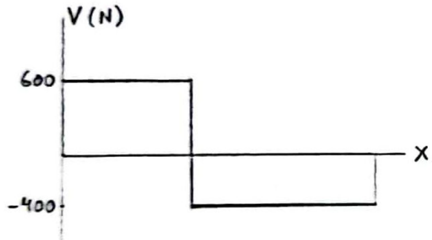
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} M &= A_y x - P(x-a) = \frac{Pb}{L} x - P(x-a) \\ &= P\left(\frac{b}{L} x - x + a\right) \end{aligned}}$$

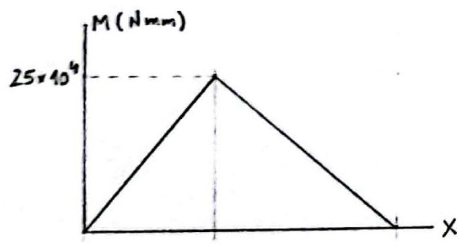
Paso 4: Se grafica $M(x)$ y $V(x)$ a lo largo de la viga.

A modo de ejemplo, se consideran los siguientes datos:

$a = 400$ mm ; $b = 600$ mm ; $P = 1000$ N







Comprobaciones adicionales:

Se sabe que $\dfrac{dM}{dx} = V$. Por lo tanto, podemos comprobar que:

$0 \le x < a$: $\quad M = \dfrac{Pb}{L}x \Rightarrow V = \dfrac{dM}{dx} = \dfrac{Pb}{L}$, que coincide con el resultado del Paso 2.

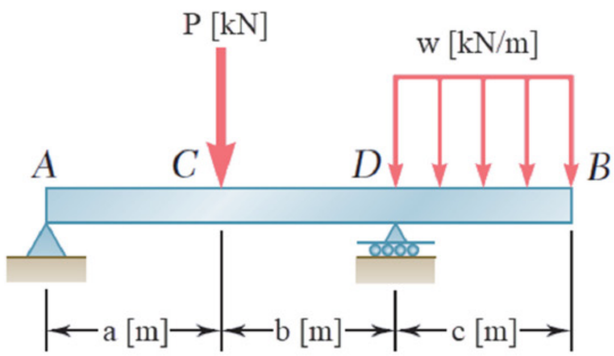
$a \le x < L$: $\quad M = P\left(\dfrac{b}{L}x - x + a\right) \Rightarrow V = \dfrac{dM}{dx} = \dfrac{Pb}{L} - P \underset{L=a+b}{=} \dfrac{Pb}{(a+b)} - P = -\dfrac{Pa}{(a+b)} = -\dfrac{Pa}{L}$,

que coincide con el resultado del Paso 3.

OBTENER CÓDIGO MATLAB: U5_problema3.m

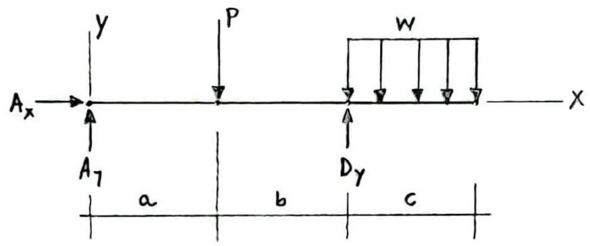
PROBLEMA 4

Problema: Obtener el diagrama de fuerza cortante y de momento flector en la viga simplemente apoyada con voladizo que se muestra en la figura.



SOLUCIÓN:

Paso 1: Se determinan reacciones mediante un diagrama de cuerpo libre de la viga completa.



$\Sigma F_x = 0:\quad \boxed{A_x = 0}$

$\Sigma F_y = 0:\quad A_y + D_y - P - wc = 0$

$\Rightarrow A_y = P + wc - D_y$

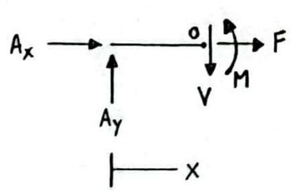
$\Sigma M_A = 0:\quad -Pa + D_y(a+b) - wc(a+b+c/2) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{D_y = \frac{wc(a+b+c/2) + Pa}{(a+b)}}$$

$$\therefore \boxed{A_y = \frac{P(a+b) - \frac{wc^2}{2} + Pa}{(a+b)}}$$

Paso 2: Se determinan las fuerzas y momento internos en el tramo de viga ubicado a la izquierda de P.

$0 \le x < a$:



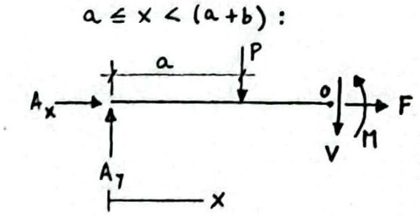
$\Sigma F_x = 0:\quad A_x + F = 0 \Rightarrow \boxed{F = -A_x = 0}$

$$\Sigma F_y = 0:\quad A_y - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = A_y = \frac{P(a+b) - \frac{wc^2}{2} + Pa}{(a+b)}}$$

$$\Sigma M_o = 0:\quad -A_y x + M = 0 \Rightarrow \boxed{M = A_y x = \left(\frac{P(a+b) - \frac{wc^2}{2} + Pa}{(a+b)}\right)x}$$

Paso 3: Se determinan las fuerzas y momento internos en el tramo de viga ubicado a la derecha de P y a la izquierda de w.

$a \le x < (a+b)$:



$\Sigma F_x = 0:\quad A_x + F = 0 \Rightarrow \boxed{F = -A_x = 0}$

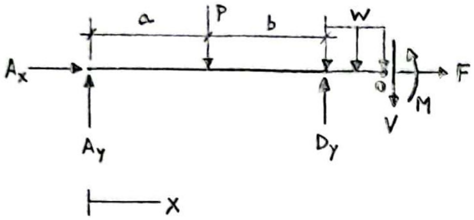
$$\Sigma F_y = 0:\quad A_y - P - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = A_y - P = \frac{Pa - \frac{wc^2}{2}}{(a+b)}}$$

$\Sigma M_o = 0:\quad -A_y x + P(x-a) + M = 0$

$$\Rightarrow \boxed{M = A_y x - P(x-a) = \left(\frac{P(a+b) - \frac{wc^2}{2} + Pa}{(a+b)}\right)x - P(x-a)}$$

Paso 4: Se determinan los fuerzas y momento internos en el tramo de viga ubicado a la derecha del soporte D.

$(a+b) \leq x \leq (a+b+c)$:



$$\Sigma F_x = 0: \quad A_x + F = 0 \Rightarrow \boxed{F = -A_x = 0}$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad A_y - P + D_y - w(x-(a+b)) - V = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} V &= A_y - P + D_y - w(x-(a+b)) \\ &= \frac{Pa - \frac{wc^2}{2}}{(a+b)} + \frac{wc(a+b+c/2) + Pa}{(a+b)} - w(x-(a+b)) \end{aligned}}$$

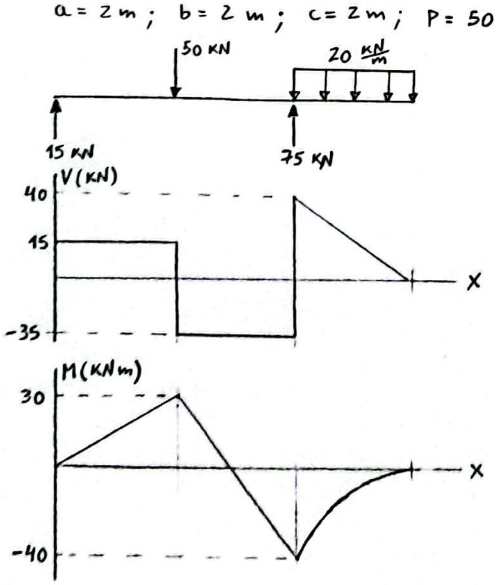
$$\Sigma M_O = 0: \quad -A_y x + P(x-a) + w(x-(a+b))\frac{(x-(a+b))}{2} - D_y(x-(a+b)) + M = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} M = {} & A_y x - P(x-a) - w\frac{(x-(a+b))^2}{2} \\ & + D_y(x-(a+b)) \end{aligned}}$$

Paso 5: Se grafica $M(x)$ y $V(x)$ a lo largo de la viga.

A modo de ejemplo, se consideraron los siguientes datos:

$a = 2\,m$; $b = 2\,m$; $c = 2\,m$; $P = 50\,kN$; $w = 20\,\frac{kN}{m}$



OBTENER CÓDIGO MATLAB: U5_problema4.m

PROBLEMA 5

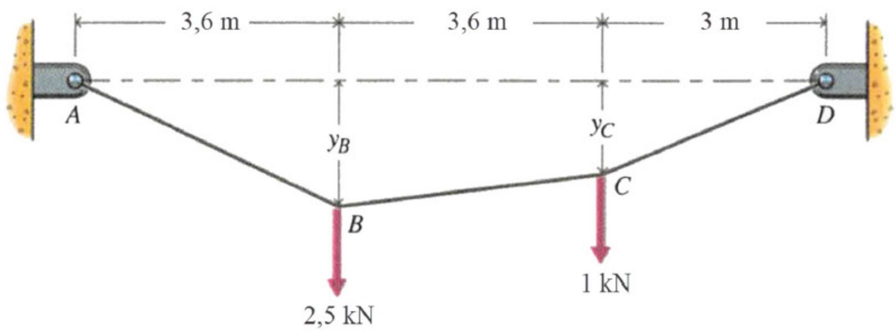
Problema: Un cable está sometido a las cargas concentradas que se muestran en la figura. Si la máxima tensión que desarrolla el cable en estas condiciones es de 5 kN, determinar:

a) Las reacciones en los apoyos A_x, A_y, D_x, D_y.

b) Las tensiones en los tres segmentos del cable.

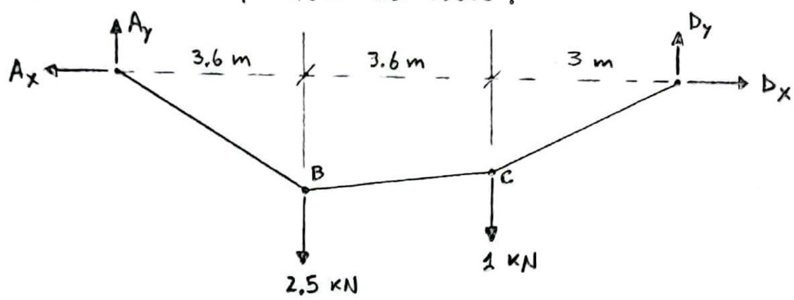
c) Las distancias y_B e y_C.

d) La longitud del cable.



SOLUCIÓN:

Diagrama de cuerpo libre del cable:



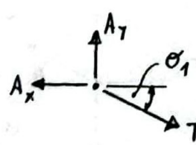
a) En el DCL del cable completo hay 4 incógnitas. Como tenemos 3 ecuaciones disponibles no podremos determinar todas las incógnitas por equilibrio en el mencionado DCL. A_y y D_y se pueden determinar desde el equilibrio en el DCL del siguiente modo:

$$\sum M_A = 0: \quad -2.5(3.6) - 1(7.2) + D_y(10.2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_y = 1.588 \text{ KN}}$$

$$\sum F_y = 0: \quad A_y - 2.5 - 1 + D_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_y = 3.5 - D_y = 3.5 - 1.588 = 1.912 \text{ KN}}$$

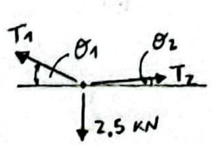
Haciendo el equilibrio de fuerzas en la dirección x llegamos a que $A_x = D_x$, pero no podemos determinar sus valores. Sin embargo, podemos obtener algo más de información haciendo el equilibrio en cada punto similarmente a como se procede en el método de los nodos.

Punto A:



$$\sum F_x = 0: \quad T_1 \cos\theta_1 - A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = T_1 \cos\theta_1$$

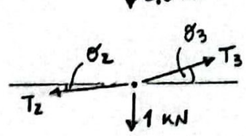
Punto B:



$$\sum F_x = 0: \quad -T_1 \cos\theta_1 + T_2 \cos\theta_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad T_2 \cos\theta_2 = T_1 \cos\theta_1 = A_x$$

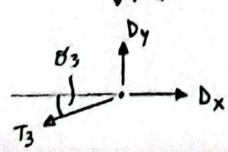
Punto C:



$$\sum F_x = 0: \quad -T_2 \cos\theta_2 + T_3 \cos\theta_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad T_3 \cos\theta_3 = T_2 \cos\theta_2 = T_1 \cos\theta_1 = A_x$$

Punto D:



$$\sum F_x = 0: \quad -T_3 \cos\theta_3 + D_x = 0$$

$$\Rightarrow \quad D_x = T_3 \cos\theta_3 = T_2 \cos\theta_2 = T_1 \cos\theta_1 = A_x \quad (*)$$

De la ecuación marcada con (*) se puede deducir que el mayor valor entre T_1, T_2 y T_3 será aquel que lo acompañe el menor valor entre $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$ y $\cos\theta_3$. Es decir, en aquel cuyo ángulo sea mayor. Esto ocurre en el apoyo A. Por lo tanto, como se sabe que la tensión máxima en el cable bajo las condiciones de carga dada es 5 kN, entonces:

Punto A : $\Sigma F_x = 0$: $A_x = T_1\cos\theta_1$; $\boxed{T_1 = 5\ kN}$ (Tensión máxima)

$\Sigma F_y = 0$: $A_y = T_1 \sin\theta_1$; $A_y = 1.912\ kN$ (calculada anteriormente)

$$\Rightarrow \quad \theta_1 = a\sin\left(\frac{A_y}{T_1}\right) = a\sin\left(\frac{1.912}{5}\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{A_x = 5\cos\left(a\sin\left(\frac{1.912}{5}\right)\right) \approx 4.62\ kN}$$

$$\therefore \quad \boxed{D_x = A_x = 4.62\ kN}$$

b) Del DCL del punto B y usando que $T_1 = 5\ kN$:

$\Sigma F_x = 0$: $\boxed{T_{2x} = T_2\cos\theta_2 = T_1\cos\theta_1 = A_x = 4.62\ kN}$

$\Sigma F_y = 0$: $T_2 \sin\theta_2 + T_1\sin\theta_1 - 2.5 = 0 \Rightarrow T_2\sin\theta_2 = T_{2y} = 2.5 - T_1\sin\theta_1$,

pero $T_1 \sin\theta_1 = A_y = 1.912\ kN$

$$\therefore \quad \boxed{T_{2y} = T_2\sin\theta_2 = 2.5 - 1.912 = 0.588\ kN} \quad (**)$$

$$\therefore \quad \boxed{T_2 = \sqrt{T_{2x}^2 + T_{2y}^2} \approx 4.66\ kN}$$

Del DCL del punto C :

$\Sigma F_x = 0$: $T_{3x} = T_3\cos\theta_3 = A_x = 4.62\ kN$

$\Sigma F_y = 0$: $-T_2\sin\theta_2 + T_3\sin\theta_3 - 1 = 0 \Rightarrow T_3\sin\theta_3 = T_2\sin\theta_2 + 1$,

pero de (**) $T_2 \sin\theta_2 = 0.588\ kN$

$$\therefore \quad T_{3y} = T_3\sin\theta_3 = 0.588 + 1 = 1.588\ kN$$

$$\therefore \quad \boxed{T_3 = \sqrt{T_{3x}^2 + T_{3y}^2} \approx 4.89\ kN}$$

c) Del DCL del punto A:

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{A_x}{T_1}\right) = \arccos\left(\frac{4.62}{5}\right) \approx 0.392 \text{ rad} \approx 22.48^\circ$$

$$\therefore \boxed{y_B = 3.6 \tan\theta_1 = 3.6 \tan(22.48^\circ) \approx 1.490 \text{ m}}$$

Del DCL del punto D:

$$\theta_3 = \arccos\left(\frac{D_x}{T_3}\right) = \arccos\left(\frac{4.62}{4.89}\right) \approx 0.334 \text{ rad} \approx 19.13^\circ$$

$$\therefore \boxed{y_C = 3 \tan\theta_3 = 3 \tan(19.13^\circ) \approx 1.040 \text{ m}}$$

d)

$$\boxed{L = \sqrt{3.6^2 + 1.49^2} + \sqrt{3.6^2 + (1.490 - 1.040)^2} + \sqrt{3^2 + 1.040^2} \approx 10.7 \text{ m}}$$

PROBLEMA 6

Problema: Cada cable del puente colgante (un cable por lado) soporta 30 kN por metro de longitud horizontal. La luz del vano es de 300 m y la flecha del cable en su punto medio es de 30 m. Determinar:

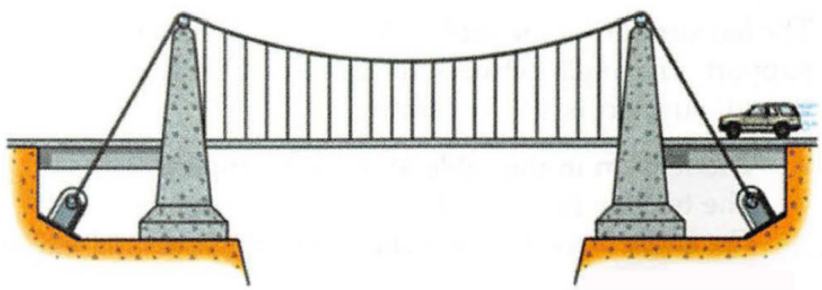
a) La forma del cable.

b) La tensión máxima en el cable

c) La tensión del cable en su punto medio.

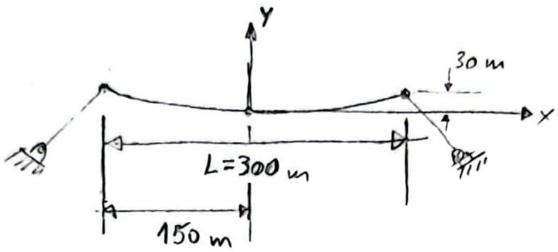
d) La tensión del cable en los pilares y el ángulo que forma con la horizontal.

e) La longitud del cable.



SOLUCIÓN:

Carga distribuida constante: $w(x) = 30 \ \frac{kN}{m}$



a) Forma del cable

$$y(x) = \frac{1}{H}\int\left(\int 30\,dx\right)dx + C_1 x + C_2$$

$$= \frac{1}{H}\int 30\,x\,dx + C_1 x + C_2 = \frac{1}{H}\,30\,\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 = \frac{1}{H}\,15x^2 + C_1 x + C_2$$

Las constantes C_1 y C_2 se determinan imponiendo condiciones de borde:

1) Pendiente del cable nula en $x=0$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{H}30x + C_1\right)_{x=0} = \frac{1}{H}\cancel{30(0)} + C_1 = 0 \quad \therefore \boxed{C_1 = 0}$$

2) $y(x=0) = 0 \Rightarrow y(0) = \frac{1}{H}\cancel{15(0)^2} + C_2 = 0 \quad \therefore \boxed{C_2 = 0}$

Por lo tanto, la forma del cable se reduce a

$$y(x) = \frac{1}{H}\,15\,x^2.$$

Para determinar H usamos la información de la flecha del cable:

$$y\left(x = \frac{L}{2} = 150\right) = \frac{1}{H}\,15\,(150)^2 = 30 \Rightarrow \boxed{H = \frac{15(150)^2}{30} = 11250 \text{ kN}}$$

$\therefore$ Forma del cable:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{11250}\,15x^2 = \frac{1}{750}\,x^2}$$

b) Tensión máxima en el cable

En la letra a) se determinó que $H = 11250$ kN. De las derivaciones teóricas de la forma del cable sabemos que H es la componente horizontal de la tensión en el cable en cualquier punto de este.

$$H = T\cos\theta \quad \therefore \quad \boxed{T = \frac{H}{\cos\theta} = \frac{11250}{\cos\theta}}$$

De esta última ecuación, T será máximo cuando $\cos\theta$ sea mínimo. Esto ocurre donde θ sea mayor, es decir, en los pilares del puente, donde $x = \frac{L}{2} = 150$ o $x = -\frac{L}{2} = -150$. Utilizando la ecuación de la pendiente del cable,

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{750}x = \frac{1}{375}x,$$

calculamos el ángulo máximo como

$$\theta_{máx} = \operatorname{atan}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=150} = \operatorname{atan}\left(\frac{1}{375}150\right) = \operatorname{atan}(0.4) \approx 21.8°$$

$\therefore$ La tensión máxima en el cable es: $\boxed{T_{máx} = \dfrac{11250}{\cos(21.8°)} \approx 12117 \text{ kN}}$

c) Tensión en el punto medio del cable

En el punto medio del cable $(x=0)$, la tensión coincide con H dado que $\theta = 0°$ $(\cos 0° = 1)$:

$$\boxed{T\big|_{x=0} = \frac{H}{\cos 0°} = \frac{11250}{1} = 11250 \text{ kN}}$$

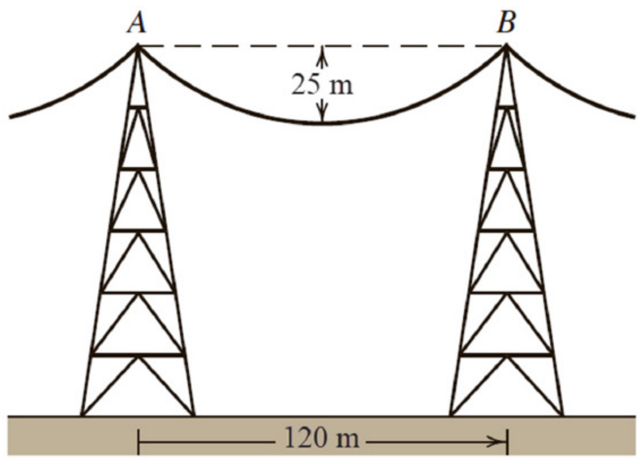
PROBLEMA 7

Problema: Una línea de transmisión eléctrica pesa 15 N/m y se ancla a torres de la misma altura. Determinar:

a) La forma del cable.

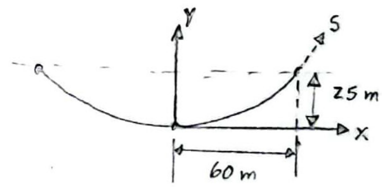
b) La tensión máxima en el cable

c) La longitud del cable.



SOLUCIÓN:

a) Forma del cable



$$w(s) = 15 \text{ N/m}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{H}\int 15\, ds + C_1 = \frac{15}{H}\int ds + C_1 = \frac{15}{H} s + C_1$$

Condición de borde de pendiente: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$: $\frac{15}{H} 0 + C_1 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$, ya que en $x=0$, $s=0$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{15}{H} s}$$

Para obtener una expresión $s(x)$ comenzamos por la fórmula de x:

$$x = \int \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{15}{H}\right)^2 s^2}}\, ds + C_2 = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{15}{H}\right)^2 \left(\frac{1}{\left(\frac{15}{H}\right)^2} + s^2\right)}}\, ds + C_2$$

$$= \frac{H}{15}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{H}{15}\right)^2 + s^2}}\, ds + C_2$$

Usando fórmula de integración $\int \frac{ds}{\sqrt{a^2+s^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{s}{a}\right)$

$$\boxed{x = \frac{H}{15}\sinh^{-1}\left(\frac{s(15)}{H}\right) + C_2}$$

Determinamos constante C_2: En $x=0$, $s=0$.

$$0 = \frac{H}{15}\sinh^{-1}(0) + C_2 = 0 + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{H}{15}\sinh^{-1}\left(\frac{s(15)}{H}\right)}$$

Despejando s en la ecuación anterior: $\boxed{s = \frac{H}{15}\sinh\left(\frac{15x}{H}\right)}$

Reescribimos $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15}{H} s = \frac{\cancel{15}}{\cancel{H}} \frac{\cancel{H}}{\cancel{15}} \sinh\left(\frac{15x}{H}\right) = \sinh\left(\frac{15x}{H}\right)$$

$\therefore \quad dy = \sinh\left(\frac{15x}{H}\right) dx$. Integrando esta ecuación se obtiene:

$$y = \int \sinh\left(\frac{15x}{H}\right) dx + C_3$$

Usando fórmula de integración $\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u$. Sea $u = \frac{15x}{H} \Rightarrow du = \frac{15}{H} dx$

$\therefore \; dx = \frac{H}{15} du$

$$y = \frac{H}{15} \cosh u + C_3 = \frac{H}{15} \cosh\left(\frac{15x}{H}\right) + C_3$$

Para determinar C_3 imponemos la condición $y(0) = 0$:

$$0 = \frac{H}{15} \underbrace{\cosh(0)}_{1} + C_3 = \frac{H}{15} + C_3 = 0 \Rightarrow \boxed{C_3 = -\frac{H}{15}}$$

$$\therefore \quad \boxed{y = \frac{H}{15} \cosh\left(\frac{15x}{H}\right) - \frac{H}{15} = \frac{H}{15}\left(\cosh\left(\frac{15x}{H}\right) - 1\right)}$$

"Curva catenaria"

Podemos determinar H imponiendo la condición $y(60) = 25$:

$$25 = \frac{H}{15} \cosh\left(\frac{15(60)}{H}\right) - \frac{H}{15} \Rightarrow \boxed{H = 15\left(\frac{H}{15} \cosh\left(\frac{15(60)}{H}\right) - 25\right)}$$

Resolvemos H por iteración:

H_i [N]	$H_{i+1} = 15\left(\frac{H_i}{15}\cosh\left(\frac{15(60)}{H_i}\right) - 25\right)$ [N]
2000	1830.94
1830.94	1681.63
1681.63	1553.27
1553.77	1446.39
1446.39	1360.55
1360.55	1294.24
1294.84	1244.98
1244.98	1209.70

H_i	H_{i+1}
1209.7	1185.22
1185.22	1168.67
1168.67	1157.69
1157.69	1150.5
1150.5	1145.84
1145.84	1142.84
1142.84	1140.92
1140.92	1139.69
1139.69	1138.91
1138.91	1138.41

H_i	H_{i+1}
1138.41	1138.1

$$\therefore \quad \boxed{H \approx 1138 \text{ N}}$$

$\therefore$ Curva catenaria:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \frac{1138}{15}\left(\cosh\left(\frac{15\,x}{1138}\right)-1\right) \\ &\approx 75.87\left(\cosh\left(\frac{x}{75.87}\right)-1\right) \end{aligned}}$$

b) <u>Tensión máxima en el cable</u>

$$T\cos\theta = H = 1138$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1138}{\cos\theta}$$

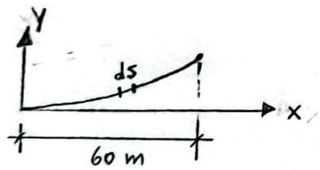
T es máximo cuando θ es máximo. Por lo tanto, T es máximo en $x = 60$ m (en soportes A o B de las torres).

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=60} = \sinh\left(\frac{15\,(60)}{1138}\right) = \tan\theta_{máx}$$

$$\Rightarrow \quad \theta_{máx} = \operatorname{atan}\left(\sinh\left(\frac{15(60)}{1138}\right)\right) \approx 41.22°$$

$$\therefore \quad \boxed{T_{máx} = \frac{1138}{\cos\left(\operatorname{atan}\left(\sinh\left(\frac{15(60)}{1138}\right)\right)\right)} \approx 1513\ N}$$

c) Longitud del cable



$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$L = 2\int_0^{S_{máx}} ds = 2\int_0^{x=60} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{15x}{1138}\right)$$

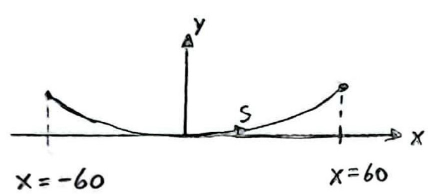
$$\therefore \quad L = 2\int_0^{60} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{15x}{1138}\right)}\, dx = 2\int_0^{60} \sqrt{\cosh^2\left(\frac{15x}{1138}\right)}\, dx = 2\int_0^{60} \cosh\left(\frac{15x}{1138}\right) dx$$

Utilizando la fórmula de integración $\int \cosh u \, du = \sinh u$. Sea $u = \frac{15x}{1138} \Rightarrow dx = \frac{1138}{15} du$

$$\therefore \quad \boxed{L = 2\left(\frac{1138}{15}\right)\int_0^{\frac{15(60)}{1138}} \cosh u \, du = 2\left(\frac{1138}{15}\right)\left[\sinh\left(\frac{15(60)}{1138}\right) - \cancelto{0}{\sinh(0)}\right] \approx 132.9 \text{ m}}$$

Alternativamente, podemos calcular el largo del cable utilizando la expresión de $S(x)$ encontrada en la letra a):

$$S(x) = \frac{H}{15}\sinh\left(\frac{15x}{H}\right) = \frac{1138}{15}\sinh\left(\frac{15x}{1138}\right)$$



$$\therefore \quad S(-60) = \frac{1138}{15}\sinh\left(\frac{15(-60)}{1138}\right) \approx -66.45$$

$$S(60) = \frac{1138}{15}\sinh\left(\frac{15(60)}{1138}\right) \approx 66.45$$

$$\therefore \quad \boxed{L = S(60) - S(-60) = 132.9 \text{ m}}$$