

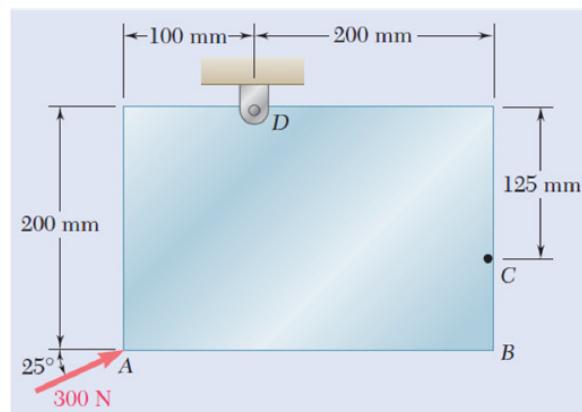
PROBLEMAS RESUELTOS

UNIDAD 2: CUERPOS RÍGIDOS. SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZAS

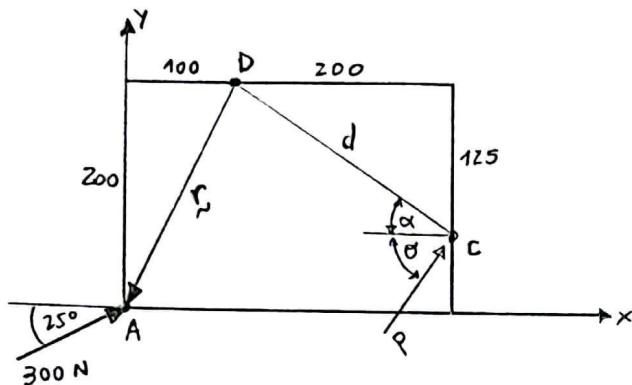
PROBLEMA 1

Problema: Se aplica una fuerza de 300 N en A. Determinar:

- El momento de la fuerza de 300 N con respecto a D.
- La magnitud y sentido de la fuerza horizontal aplicada en C que crea el mismo momento con respecto a D.
- La fuerza mínima aplicada en C que crea el mismo momento con respecto a D.



SOLUCIÓN:



a)

$$\underline{r} = -100 \hat{i} - 200 \hat{j} + 0 \hat{k}$$

$$\underline{F} = 300 \cos(25^\circ) \hat{i} + 300 \sin(25^\circ) \hat{j} + 0 \hat{k}$$

$$M_D = \underline{r} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -100 & -200 & 0 \\ 300 \cos(25^\circ) & 300 \sin(25^\circ) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \hat{i} + 0 \hat{j} + (200(300) \cos(25^\circ) - 100(300) \sin(25^\circ)) \hat{k}$$

$$= (0 \text{ Nmm}) \hat{i} + (0 \text{ Nmm}) \hat{j} + (41700 \text{ Nmm}) \hat{k}$$

b)

$$F_x = \frac{41700}{125} = 333.6 \text{ N en } +x$$

c)

La fuerza mínima está dada por la fuerza perpendicular al trazo \overline{DC} .

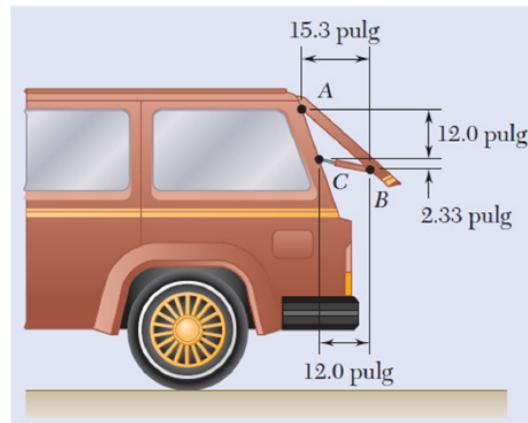
$$\|P\| = \frac{41700}{d} ; \quad d = \sqrt{200^2 + 125^2} ; \quad \alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{125}{200}\right)$$

$$\therefore \|P\| = 176.8 \text{ N} \quad \theta \approx 58^\circ \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \operatorname{atan}\left(\frac{125}{200}\right)$$

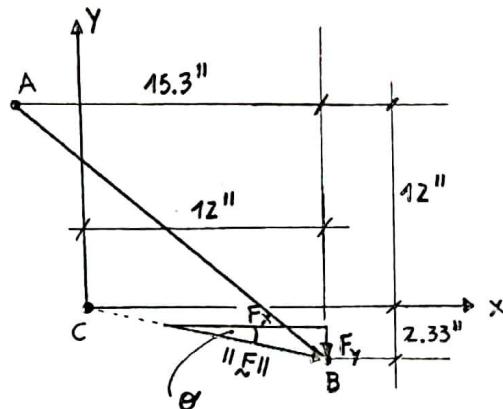
OBTENER CÓDIGO MATLAB: [U2_problema1.m](#)

PROBLEMA 2

Problema: La ventanilla trasera de un automóvil se sostiene mediante el amortiguador hidráulico *BC*. Si para iniciar el levantamiento de la ventanilla se ejerce una fuerza de 125 lbf en la dirección del cilindro hidráulico, determinar el momento de la fuerza con respecto a *A*.



SOLUCIÓN:



$$\|F\| = 125 \text{ lb}_f \quad (\text{dato})$$

$$\cos \theta = \frac{12}{\sqrt{12^2 + 2.33^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{2.33}{\sqrt{12^2 + 2.33^2}}$$

$$\tilde{r}_{B/A} = 15.3 \hat{i} - 14.33 \hat{j} + 0 \hat{k}$$

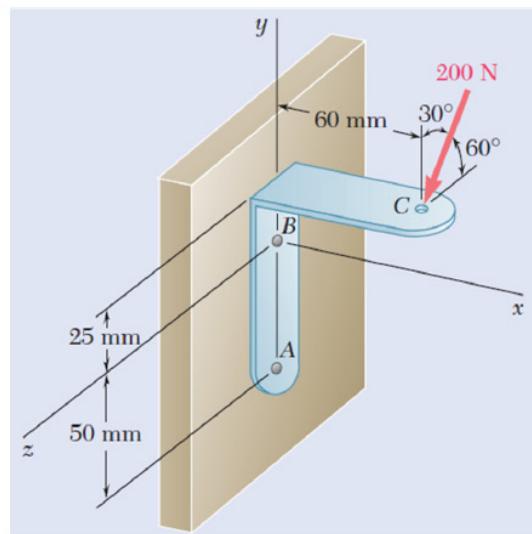
$$\tilde{F} = 125 \cos \theta \hat{i} - 125 \sin \theta \hat{j} + 0 \hat{k} \approx 122.71 \hat{i} - 23.83 \hat{j} + 0 \hat{k}$$

$$\begin{aligned}\tilde{M}_A &= \tilde{r}_{B/A} \times \tilde{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 15.3 & -14.33 & 0 \\ 122.71 & -23.83 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 \hat{i} + 0 \hat{j} + (14.33 \times 122.71 - 15.3 \times 23.83) \hat{k} \\ &= (0 \text{ lb}_f \cdot \text{in}) \hat{i} + (0 \text{ lb}_f \cdot \text{in}) \hat{j} + (1393.84 \text{ lb}_f \cdot \text{in}) \hat{k}\end{aligned}$$

OBTENER CÓDIGO MATLAB: [U2_problema2.m](#)

PROBLEMA 3

Problema: Se aplica una fuerza de 200 N sobre la ménsula ABC. Determinar el momento de la fuerza con respecto a A.



SOLUCIÓN:

$$\tilde{r}_{c/A} = 60 \hat{i} + 75 \hat{j} + 0 \hat{k}$$

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= 0\hat{i} - 200 \cos 30^\circ \hat{j} + 200 \cos 60^\circ \hat{k} \\ &\approx 0\hat{i} - 173.21 \hat{j} + 100 \hat{k}\end{aligned}$$

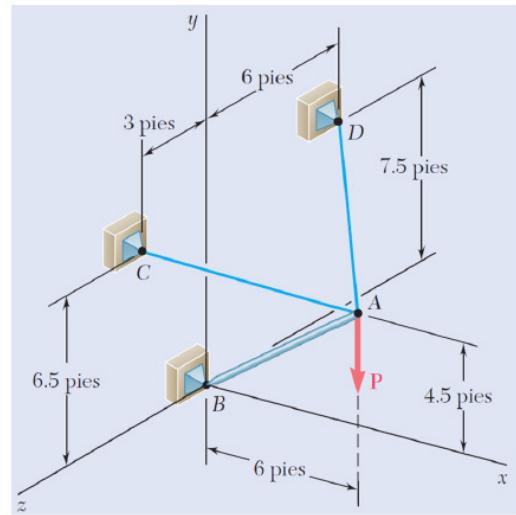
$$\begin{aligned}\tilde{M}_A &= \tilde{r}_{c/A} \times \tilde{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 60 & 75 & 0 \\ 0 & -173.21 & 100 \end{vmatrix} \\ &= (7500 \text{ Nmm})\hat{i} - (6000 \text{ Nmm})\hat{j} - (10392.6 \text{ Nmm})\hat{k}\end{aligned}$$

OBTENER CÓDIGO MATLAB: [U2_problema3.m](#)

PROBLEMA 4

Problema: Si se sabe que la tensión en el cable AC es de 280 lbf, determinar:

- El ángulo entre el cable AC y el brazo AB .
- La proyección sobre AB de la fuerza ejercida por el cable AC en el punto A .



SOLUCIÓN:

a)

$$\underline{d}_{C/A} = -6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\underline{d}_{B/A} = -6\hat{i} - 4.5\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\underline{d}_{C/A} \cdot \underline{d}_{B/A} = (-6) \times (-6) + (2) \times (-4.5) + 3 \times 0 = 27$$

$$\|\underline{d}_{C/A}\| = \sqrt{(-6) \times (-6) + 2 \times 2 + 3 \times 3} = 7$$

$$\|\underline{d}_{B/A}\| = \sqrt{(-6) \times (-6) + (-4.5) \times (-4.5) + 0 \times 0} = 7.5$$

$$\cos \theta = \frac{\underline{d}_{C/A} \cdot \underline{d}_{B/A}}{\|\underline{d}_{C/A}\| \|\underline{d}_{B/A}\|} = \frac{27}{7 \times 7.5}$$

$$\Rightarrow \theta = 3 \cos \left(\frac{27}{7 \times 7.5} \right) \approx 1.031 \text{ rad} \approx 59^\circ$$

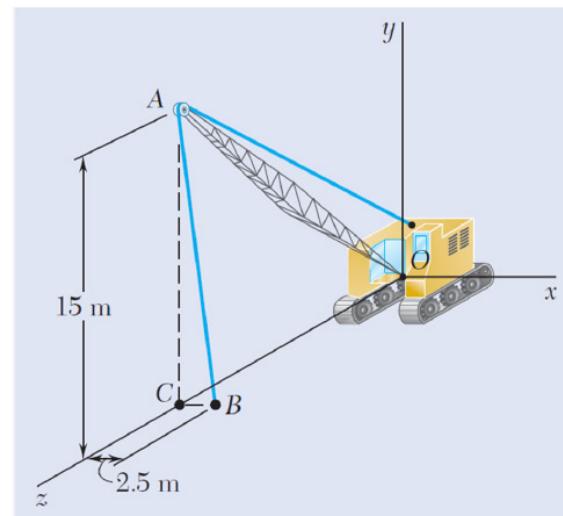
b) Sez $\lambda_{B/A}$ el vector unitario a lo largo de AB. Entonces,

$$\begin{aligned} P_{AB} &= T_{Ac} \cdot \lambda_{B/A} = \|T_{Ac}\| \|\lambda_{B/A}\| \cos \theta \\ &= 280 \times 1 \times \frac{27}{7 \times 7.5} \\ &= 144 \text{ lbf} \end{aligned}$$

OBTENER CÓDIGO MATLAB: [U2_problema4.m](#)

PROBLEMA 5

Problema: Una grúa está orientada a fin de que el extremo AO del brazo de 25 m esté en el plano yz . En el instante que se muestra en la figura, la tensión del cable AB es de 4 kN. Determinar el momento con respecto a cada uno de los ejes coordenados de la fuerza ejercida en A por el cable AB .



SOLUCIÓN:

Vector tensión cable AB

$$\|T_{AB}\| = 4 \text{ kN} \text{ (dato)}$$

$$\cos \theta = \frac{15}{\sqrt{15^2 + 2.5^2}} \approx 0.9864$$

$$\sin \theta = \frac{2.5}{\sqrt{15^2 + 2.5^2}} \approx 0.1644$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \tilde{T}_{AB} &= 4 \sin \theta \hat{i} - 4 \cos \theta \hat{j} + 0 \hat{k} \\ &= 4 \times 0.1644 \hat{i} - 4 \times 0.9864 \hat{j} + 0 \hat{k} \\ &= (0.6576 \text{ kN}) \hat{i} - (3.9456 \text{ kN}) \hat{j} + (0 \text{ kN}) \hat{k} \end{aligned}$$

Vector posición punto A

$$z = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \text{ m}$$

$$\|r\| = 25 \text{ m} \text{ (dato)}$$

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= (0 \text{ m}) \hat{i} + (15 \text{ m}) \hat{j} + (z \text{ m}) \hat{k} \\ &= (0 \text{ m}) \hat{i} + (15 \text{ m}) \hat{j} + (20 \text{ m}) \hat{k} \end{aligned}$$

Momentos con respecto a los ejes coordenados se obtienen como las componentes x, y, z del momento con respecto a el origen O. Por lo tanto,

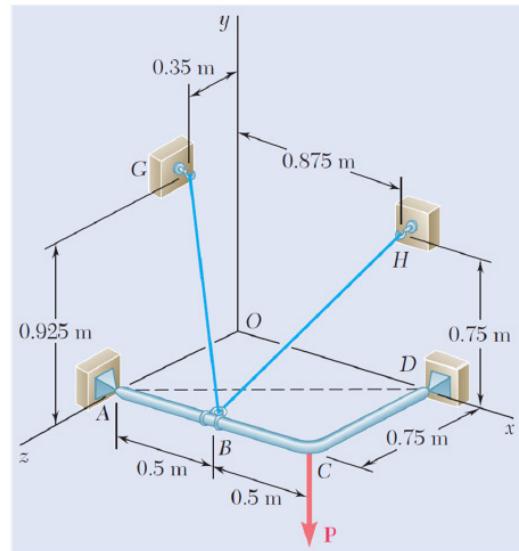
$$\begin{aligned} \tilde{M}_O &= \tilde{r} \times \tilde{T}_{AB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 15 & 20 \\ 0.6576 & -3.9456 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (78.912 \text{ kNm}) \hat{i} + (13.152 \text{ kNm}) \hat{j} - (9.864 \text{ kNm}) \hat{k} \end{aligned}$$

$$\therefore M_x = 78.912 \text{ kNm} ; M_y = 13.152 \text{ kNm} ; M_z = -9.864 \text{ kNm}$$

OBTENER CÓDIGO MATLAB: [U2_problema5.m](#)

PROBLEMA 6

Problema: El marco ACD está articulado en A y D ; se sostiene mediante un cable que pasa a través de un anillo en B y está unido a los ganchos en G y H . Si se sabe que la tensión en el cable es de 450 N, determinar el momento con respecto a la diagonal AD de la fuerza ejercida sobre el marco por el tramo BH del cable.



SOLUCIÓN:

Procedimiento: Primero se calcula el momento con respecto a A (\tilde{M}_A) y luego se proyecta \tilde{M}_A sobre AD. Es decir, es una aplicación del triple producto mixto de tres vectores.

Momento con respecto a A

$$\tilde{r}_{B/A} = 0.5\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\|\tilde{T}_{BH}\| = 450 \text{ N (dato)}$$

\tilde{T}_{BH} se calcula escalando el vector unitario a lo largo de BH por la magnitud de la fuerza, $\|\tilde{T}_{BH}\|$:

$$\lambda_{H/B} = (0.375\hat{i} + 0.75\hat{j} - 0.75\hat{k}) / \sqrt{0.375^2 + 0.75^2 + 0.75^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tilde{T}_{BH} &= \|\tilde{T}_{BH}\| \lambda_{H/B} = \frac{450}{\sqrt{0.375^2 + 0.75^2 + 0.75^2}} (0.375\hat{i} + 0.75\hat{j} - 0.75\hat{k}) \\ &= 400 (0.375\hat{i} + 0.75\hat{j} - 0.75\hat{k}) \\ &= (150 \text{ N})\hat{i} + (300 \text{ N})\hat{j} - (300 \text{ N})\hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_A &= \tilde{r}_{B/A} \times \tilde{T}_{BH} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 150 & 300 & -300 \end{vmatrix} \\ &= (0 \text{ Nm})\hat{i} + (150 \text{ Nm})\hat{j} + (150 \text{ Nm})\hat{k} \end{aligned}$$

Momento con respecto a AD

$$\lambda_{D/A} = (1\hat{i} + 0\hat{j} - 0.75\hat{k}) / \sqrt{1^2 + 0.75^2 + 0^2} = 0.8\hat{i} + 0\hat{j} - 0.6\hat{k}$$

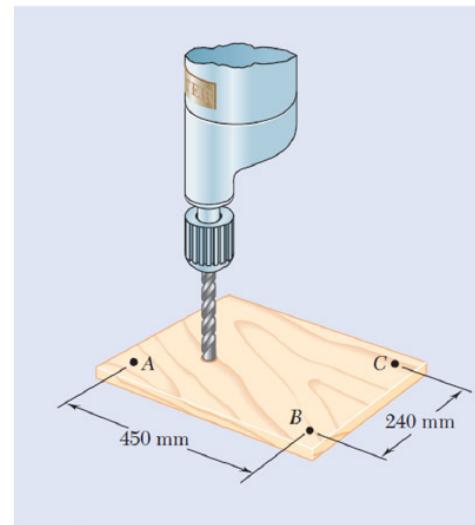
$$\tilde{M}_{AD} = \lambda_{D/A} \cdot \tilde{M}_A = 0 \cdot 0.8(\hat{i} \cdot \hat{i}) + 150 \cdot 0(\hat{j} \cdot \hat{j}) - 150 \cdot 0.6(\hat{k} \cdot \hat{k}) = -90 \text{ Nm}$$

OBTENER CÓDIGO MATLAB: [U2_problema6.m](#)

PROBLEMA 7

Problema: Una pieza de madera en la que se taladraron de manera sucesiva varios orificios está asegurada a un banco de trabajo mediante dos clavos. Si se sabe que el taladro ejerce un par de 12 Nm sobre la pieza de madera, determine la magnitud de las fuerzas resultantes aplicadas a los clavos si estos se localizan:

- a) en A y B
- b) en B y C
- c) en A y C.



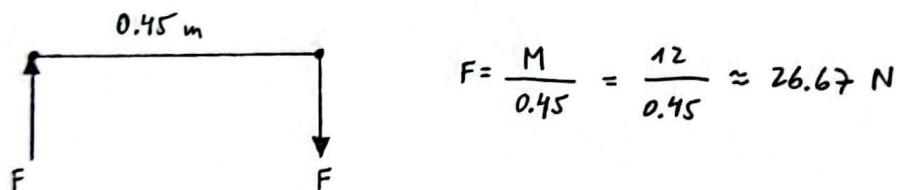
SOLUCIÓN:

La fuerza resultante sobre cada clavo se puede obtener utilizando la mecánica de cuerpos rígidos. Para esto se encontrará un sistema de fuerzas equivalentes al par torotor del taladro. El sistema de fuerzas original consta de:

$$M = 12 \text{ Nm} \quad (\text{par torotor})$$

$$R = 0 \text{ N} \quad (\text{fuerza})$$

- a) La distancia entre A y B es 450 mm. El momento torotor se puede reemplazar por un par separado por la distancia entre los clavos en A y B. Es decir,

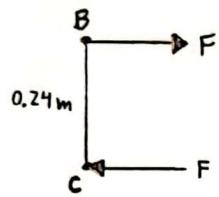


El nuevo sistema de fuerzas es equivalente pues:

$$M' = F \times 0.45 = 26.67 \times 0.45 = 12 \text{ Nm} = M$$

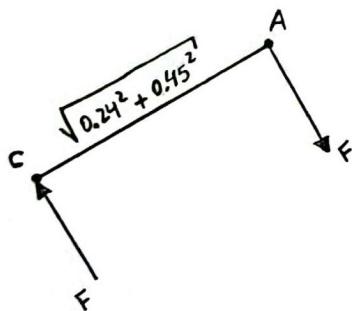
$$F - F = 0 \text{ N} = R$$

b) Similarmente,



$$F = \frac{M}{0.24} = \frac{12}{0.24} = 50 \text{ N}$$

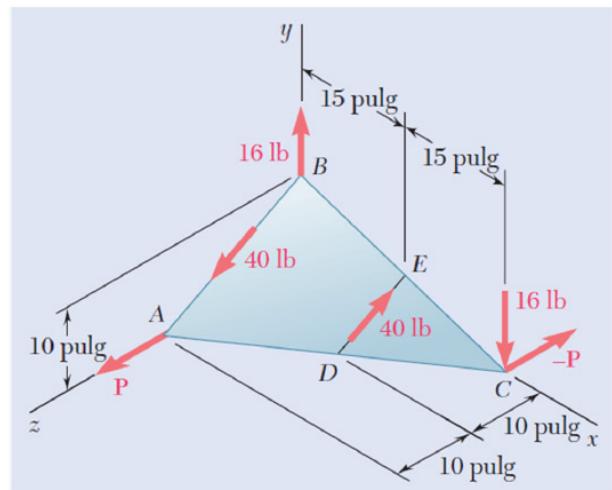
c) Similarmente,



$$F = \frac{11 \text{ M}}{\sqrt{0.24^2 + 0.45^2}} = \frac{12}{\sqrt{0.24^2 + 0.45^2}} \approx 23.53 \text{ N}$$

PROBLEMA 8

Problema: Si $P = 0$ en la figura, reemplace los dos pares restantes con un solo par equivalente, y especifique su magnitud y la dirección de su eje.



SOLUCIÓN:

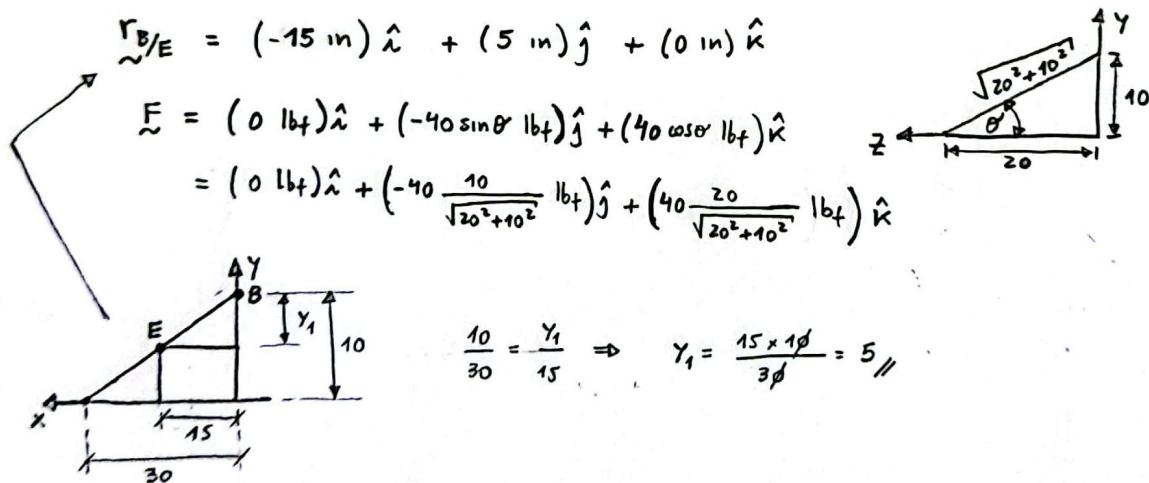
Momento de los pares individuales:

$$\tilde{r}_{B/C} = (-30 \text{ in}) \hat{i} + (10 \text{ in}) \hat{j} + (0 \text{ in}) \hat{k}$$

$$\tilde{F} = (0 \text{ lb}_f) \hat{i} + (16 \text{ lb}_f) \hat{j} + (0 \text{ lb}_f) \hat{k}$$

$$\therefore \tilde{M}_1 = \tilde{r}_{B/C} \times \tilde{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -30 & 10 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \end{vmatrix} = (0 \text{ lb}_f \cdot \text{in}) \hat{i} - (0 \text{ lb}_f \cdot \text{in}) \hat{j} + (-30 \times 16 - 0) \hat{k}$$

$$= (0 \text{ lb}_f \cdot \text{in}) \hat{i} + (0 \text{ lb}_f \cdot \text{in}) \hat{j} + (-480 \text{ lb}_f \cdot \text{in}) \hat{k}$$



$$\therefore \tilde{M}_2 = \tilde{r}_{B/E} \times \tilde{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -15 & 5 & 0 \\ 0 & -40 \frac{10}{\sqrt{20^2+10^2}} & 40 \frac{20}{\sqrt{20^2+10^2}} \end{vmatrix}$$

$$= (178.84 \text{ lb}_f \cdot \text{in}) \hat{i} + (536.66 \text{ lb}_f \cdot \text{in}) \hat{j} + (260.33 \text{ lb}_f \cdot \text{in}) \hat{k}$$

$$\therefore \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}_1 + \underline{\underline{M}}_2 = (178.89 \text{ lbf}\cdot\text{in})\hat{i} + (536.66 \text{ lbf}\cdot\text{in})\hat{j} - (211.67 \text{ lbf}\cdot\text{in})\hat{k}$$

$$\|\underline{\underline{M}}\| = \sqrt{178.89^2 + 536.66^2 + (-211.67)^2} \approx 604 \text{ lbf}\cdot\text{in}$$

Orientación con respecto al sistema de ejes Cartesianos:

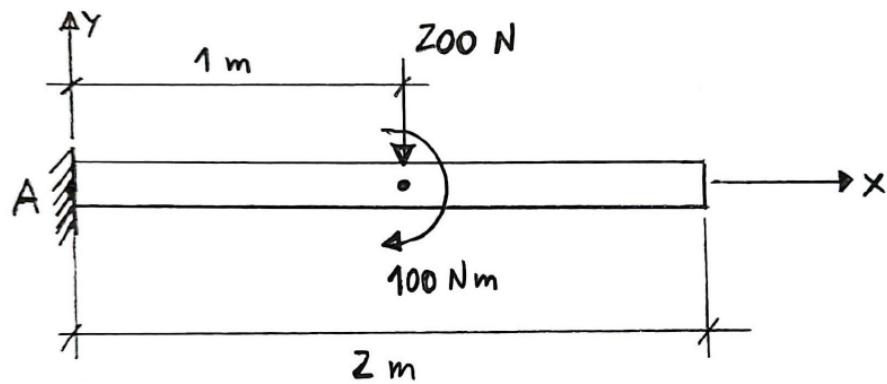
$$\theta_x = \arccos\left(\frac{178.89}{604}\right) = 72.77^\circ$$

$$\theta_y = \arccos\left(\frac{536.66}{604}\right) = 27.31^\circ$$

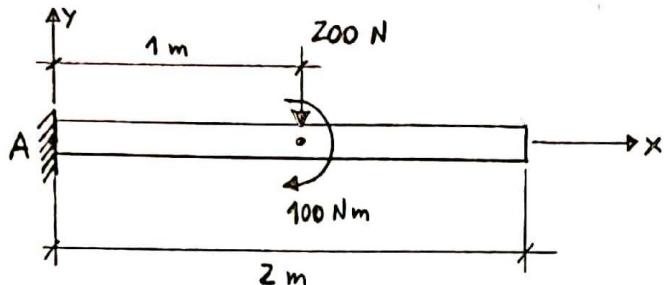
$$\theta_z = \arccos\left(\frac{-211.67}{604}\right) = 110.51^\circ$$

PROBLEMA 9

Problema: Reemplazar el sistema fuerza-par mostrado en la figura por una sola fuerza equivalente.

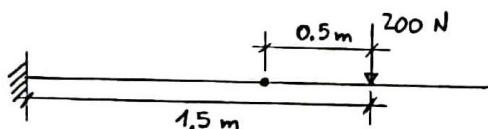


SOLUCIÓN:

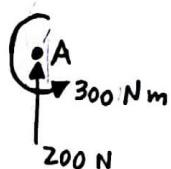


Reemplazar el par y fuerza mostrados por una sola fuerza equivalente.

Se desplaza la fuerza de 200 N hacia la derecha de modo tal que su momento con respecto a la posición original sea 100 Nm:



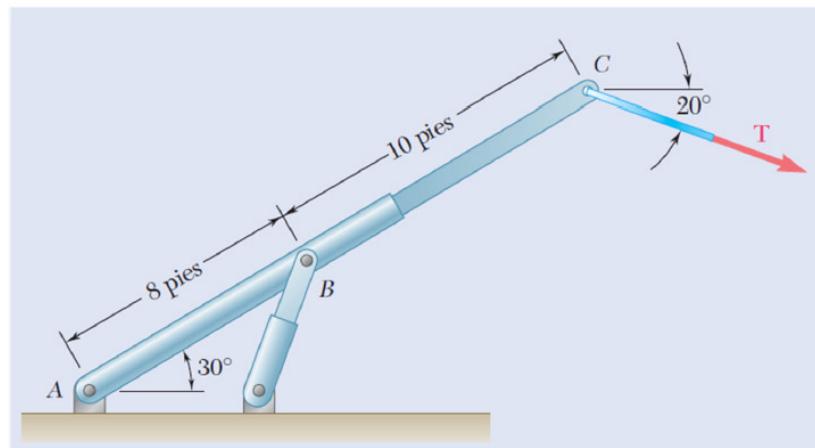
Observación: Se debe notar que ambos sistemas entregan las mismas reacciones en el lado empotrado. De hecho, ambos son:



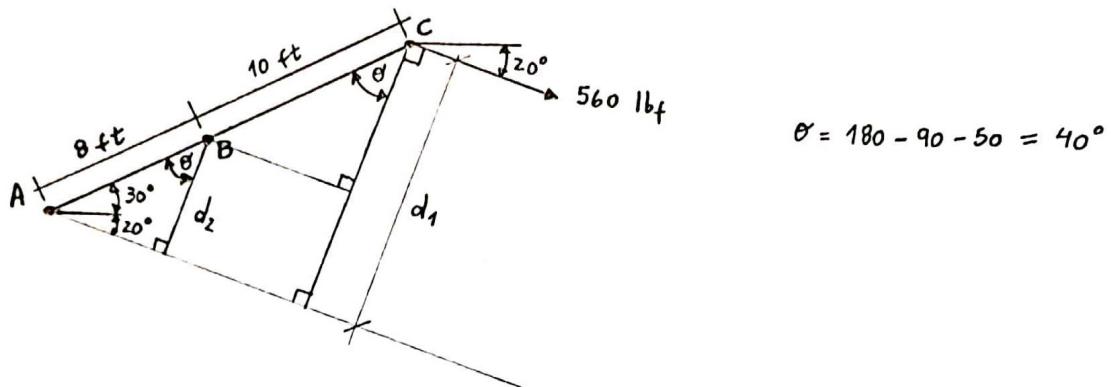
No obstante, es evidente que para estudiar las deflexiones a lo largo de la viga, los sistemas de fuerzas equivalentes no son válidos pues conducen a resultados diferentes. Por lo tanto, los sistemas de fuerzas equivalentes son útiles cuando el cuerpo se supone rígido o cuando se desea simplificar las fuerzas para efectos de obtener las reacciones.

PROBLEMA 10

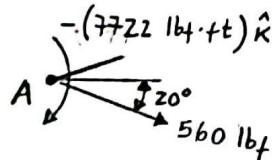
Problema: La tensión en el cable unido al extremo C de un aguilón ajustable ABC es de 560 lbf. Reemplace la fuerza ejercida por el cable en C por un sistema fuerza-par equivalente a) en A y b) en B.



SOLUCIÓN:



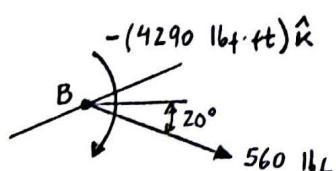
a)



Se traslada fuerza $\|F\| = 560 \text{ lb}_f$ al punto A y se agrega un par dado por:

$$\begin{aligned} M_A &= -(d_1 \|F\|) \hat{k} = -(18 \cos 40^\circ \times 560) \hat{k} \\ &\approx -(7722 \text{ lb}_f \cdot \text{ft}) \hat{k} \end{aligned}$$

b)



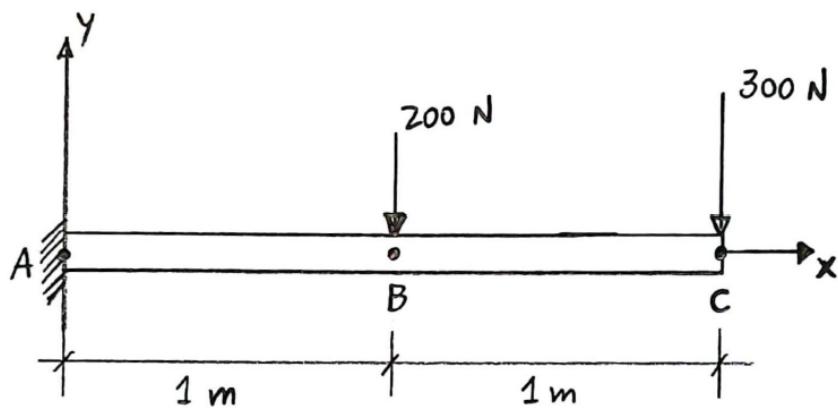
Tomando el sistema fuerza-par encontrado en A, se busca un sistema fuerza-par equivalente en B.: Se traslada fuerza $\|F\| = 560 \text{ lb}_f$ al punto B y se agrega un par dado por:

$$\begin{aligned} M_B &= M_A + (d_2 \|F\|) \hat{k} \\ &= -(7722 \text{ lb}_f \cdot \text{ft}) \hat{k} + (8 \cos 40^\circ \times 560) \hat{k} \\ &= -(7722 \text{ lb}_f \cdot \text{ft}) \hat{k} + (3432 \text{ lb}_f \cdot \text{ft}) \hat{k} \\ &= -(4290 \text{ lb}_f \cdot \text{ft}) \hat{k} \end{aligned}$$

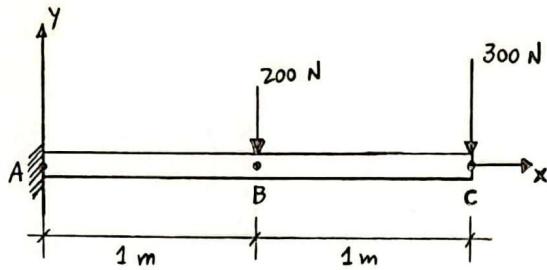
PROBLEMA 11

Problema: Reducir el sistema de fuerzas mostrado en la figura a:

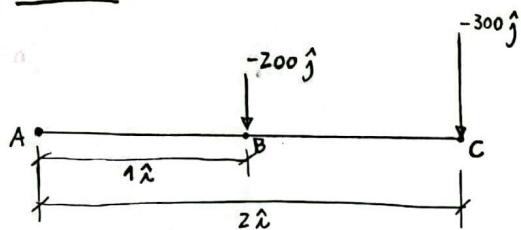
- a) un sistema equivalente fuerza-par en A.
- b) un sistema equivalente fuerza-par en C.
- c) una sola fuerza.



SOLUCIÓN:



Solución



Reducir el sistema de fuerzas dado a:

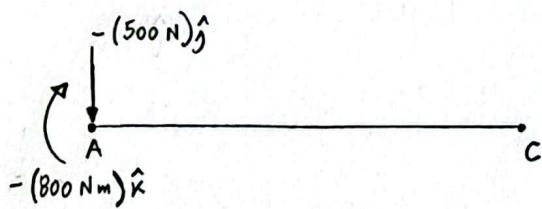
- Un sistema equivalente fuerza-por en A.
- Un sistema equivalente fuerza-por en C.
- Una sola fuerza.

obs: como las reacciones en el lado empotrado no están incluidas en el sistema de fuerzas dado, el sistema no está en equilibrio.

- a) El sistema fuerza-por en A equivalente al sistema de fuerzas dado consta de una fuerza R y de un par M_A^R definidos como sigue:

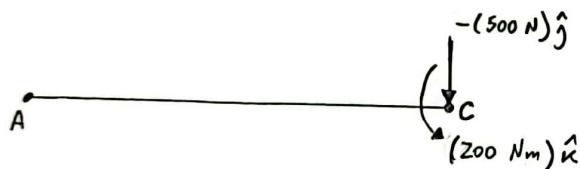
$$R = \sum F = -(200 N) \hat{j} - (300 N) \hat{j} = -(500 N) \hat{j}$$

$$\begin{aligned} M_A^R &= \sum (r \times F) = (1 m) \hat{i} \times (-200 N) \hat{j} + (2 m) \hat{i} \times (-300 N) \hat{j} \\ &= -(200 Nm) (\hat{i} \times \hat{j}) - (600 Nm) (\hat{i} \times \hat{j}) \\ &= -(200 Nm) \hat{k} - (600 Nm) \hat{k} \\ &= -(800 Nm) \hat{k} \end{aligned}$$



- b) Se podría proceder como se hizo en a) para en el punto C, o bien buscar un sistema fuerza-por en C que es equivalente al sistema fuerza-por encontrado en A. Utilizando el último enfoque se obtiene lo siguiente:

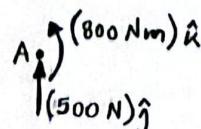
$$\begin{aligned}
 M_C^R &= M_A^R + \vec{r}_{C/A} \times R \\
 &= -(800 \text{ Nm}) \hat{x} + (-2 \text{ m}) \hat{x} \times (-500 \text{ N}) \hat{j} \\
 &= -(800 \text{ Nm}) \hat{x} + (1000 \text{ Nm}) \hat{x} \times \hat{j} \\
 &= -(800 \text{ Nm}) \hat{x} + (1000 \text{ Nm}) \hat{x} \\
 &= (200 \text{ Nm}) \hat{x}
 \end{aligned}$$



- c) Se puede escoger el sistema equivalente fuerza-por obtenido en a) o b) para desplazar R a una distancia que produce el por M_A^R o M_C^R , respectivamente. Tomando el sistema equivalente obtenido en a) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 (d\hat{x}) \times (-500\hat{j}) &= (-800)\hat{x} \\
 (-500d)\hat{x} &= (-800)\hat{x} \\
 \Rightarrow d &= \frac{800}{500} = 1.6 \text{ m}
 \end{aligned}$$

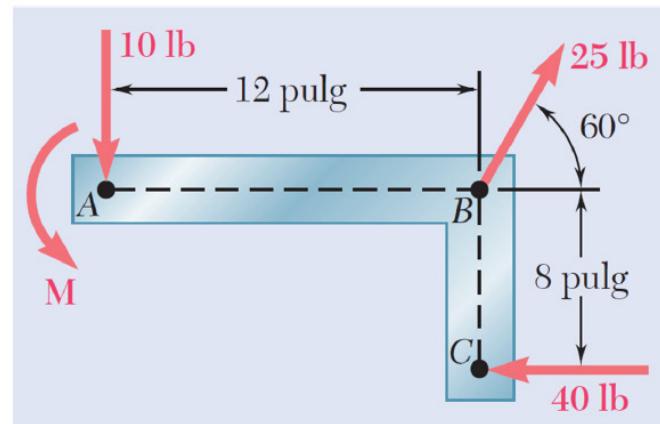
Observación: Es evidente que para que el sistema esté en equilibrio, las reacciones en el lado empotrado de la viga se deben oponer al sistema fuerza-por obtenido en A en la letra a). Esto es, reacciones equilibrantes en A:



PROBLEMA 12

Problema: Se aplican un par de magnitud $M = 80 \text{ lbf-in}$ y las tres fuerzas mostradas en la figura a una ménsula angular.

- Encuentre la resultante de este sistema de fuerzas.
- Localice los puntos donde la línea de acción de la resultante interseca la línea AB y la línea BC .



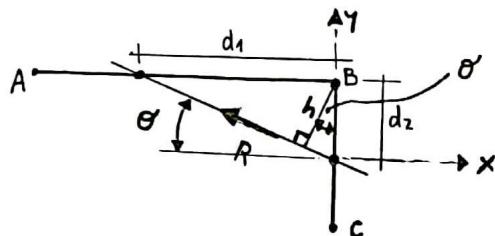
SOLUCIÓN:

a)

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \sum \mathbf{F} &= (25 \cos 60^\circ - 40) \hat{i} + (25 \sin 60^\circ - 10) \hat{j} + 0 \hat{k} \\ &= -(27.5 \text{ lb}_f) \hat{i} + (11.65 \text{ lb}_f) \hat{j} + (0 \text{ lb}_f) \hat{k} \end{aligned}$$

b)

Se indica que la fuerza resultante debe intersectar los líneas AB y las líneas AC.



$$\theta = \arccos\left(\frac{27.5}{\sqrt{27.5^2 + 11.65^2}}\right) \approx 23^\circ$$

Para encontrar d_1 y d_2 hacemos uso de la definición de sistemas equivalentes de fuerzas: Sea el sistema de fuerzas y para el sistema de fuerzas resultante R el sistema equivalente. Entonces, los dos sistemas son equivalentes si:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{R} \quad y \quad \sum \mathbf{M}_B = -(\|\mathbf{R}\| h) \hat{k}$$

$\sum \mathbf{F} = \mathbf{R}$ ya fue calculado en a). Para los momentos,

$$\sum \mathbf{M}_B = (80 + 12 \times 10 - 8 \times 40) \hat{k} = -(120 \text{ lb}_f \cdot \text{in}) \hat{k}.$$

Igualando los momentos, se obtiene:

$$\|\mathbf{R}\| h = 120 \Rightarrow h = \frac{120}{\|\mathbf{R}\|} = \frac{120}{\sqrt{27.5^2 + 11.65^2}} \approx 4.018 \text{ in}$$

$$\therefore d_1 = \frac{h}{\sin \theta} = \frac{4.018}{\sin 23^\circ} \approx 10.28 \text{ in}$$

$$d_2 = \frac{h}{\cos \theta} = \frac{4.018}{\cos 23^\circ} \approx 4.365 \text{ in}$$