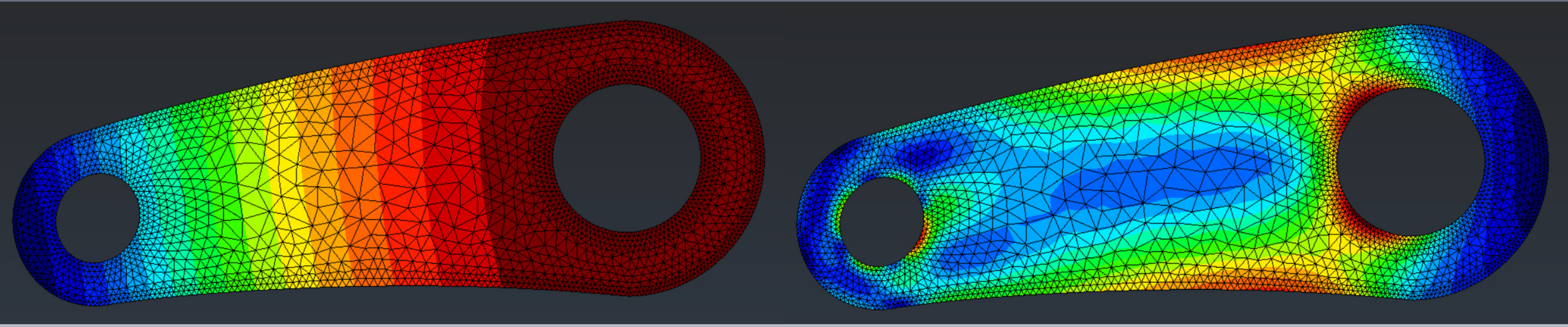
MECÁNICA ESTÁTICA
ME3130



Alejandro Ortiz Bernardin

aortizb@uchile.cl

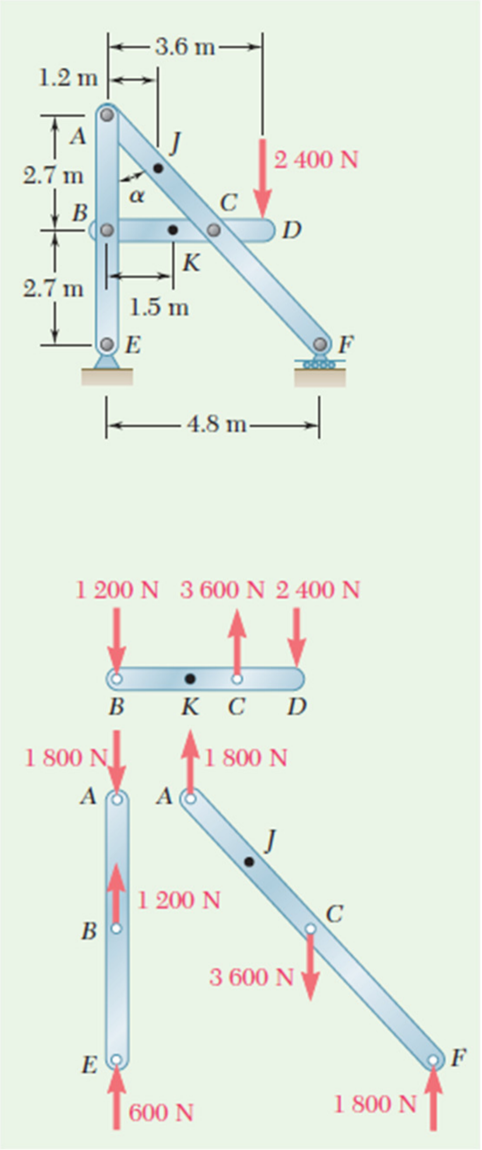
www.camlab.cl/alejandro

DIMEC
INGENIERÍA MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE CHILE

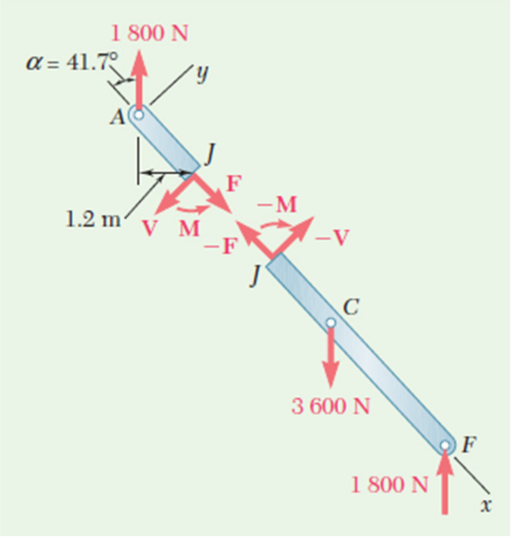
FUERZAS Y MOMENTOS INTERNOS

Contenidos

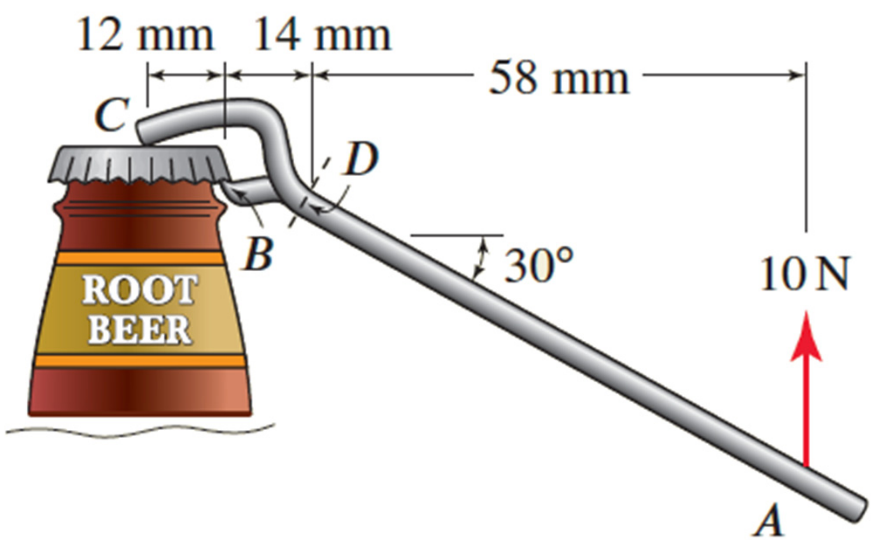
I. Fuerzas y Momentos Internos
II. Vigas
III. Cables
IV. Tarea



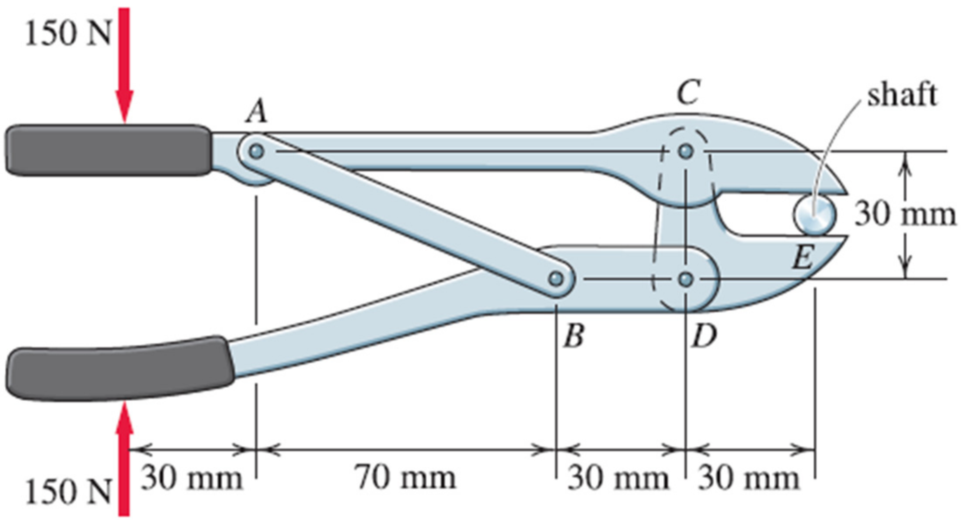
- Las fuerzas y momentos internos cumplen la función de mantener la unión interna de un elemento dado.
- En un elemento sometido solo a dos fuerzas, aparece una fuerza interna axial que puede ser de compresión o de tracción (ver capítulo de armaduras).
- En un elemento genérico, como en un armazón, sometidos a más de dos fuerzas, las fuerzas internas pueden ser de tracción/compresión, corte y flexión, como se aprecia en el siguiente diagrama de cuerpo libre del tramo *AJ* o *JC*:



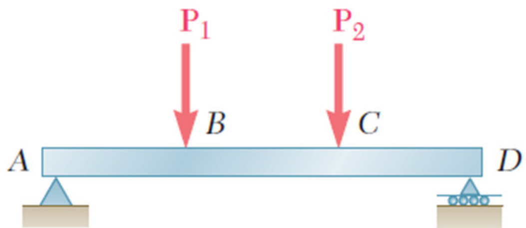
Problema: Para remover la tapa de la botella se requiere una fuerza vertical de 10 N en el punto *A*. Determinar las fuerzas internas que se desarrollan en la sección transversal *D*.



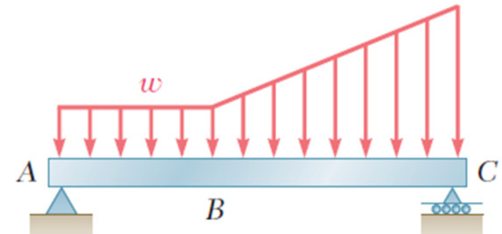
Problema: Para el alicate que se muestra en la figura, determinar la fuerza axial, fuerza de corte y momento flector que se desarrolla en una sección transversal justo a la izquierda y justo a la derecha del pasador *B*.



Cargas y Apoyos en Vigas

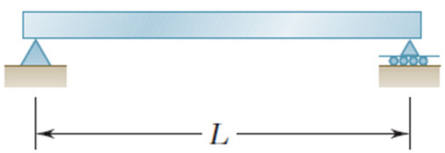


a) Cargas concentradas

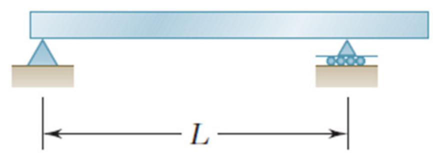


b) Cargas distribuidas

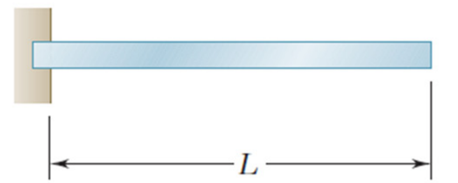
Vigas estáticamente determinadas



a) Viga simplemente apoyada

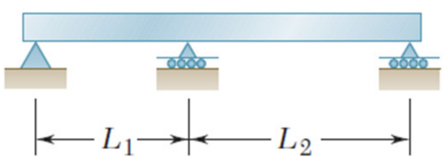


b) Viga con voladizo

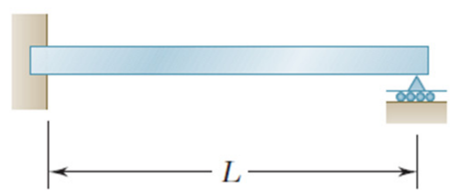


c) Viga en voladizo

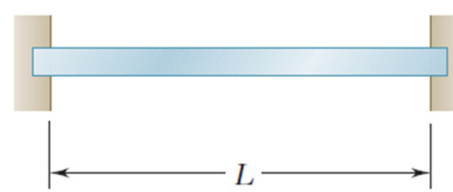
Vigas estáticamente indeterminadas



d) Viga continua

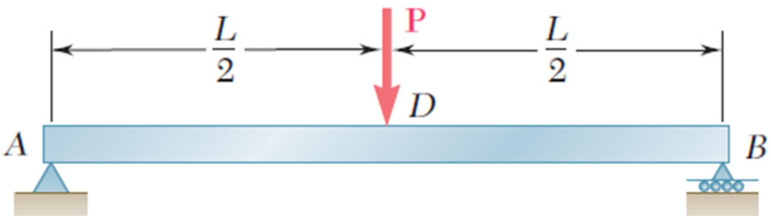


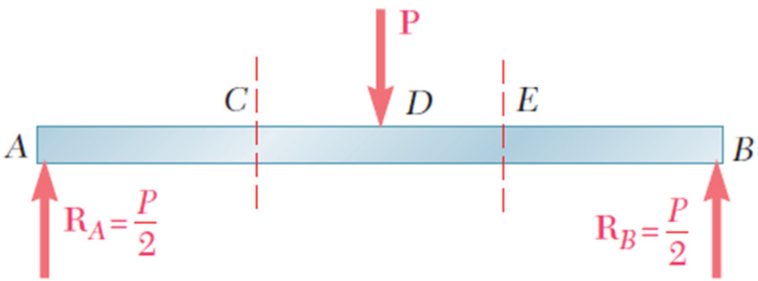
e) Viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro

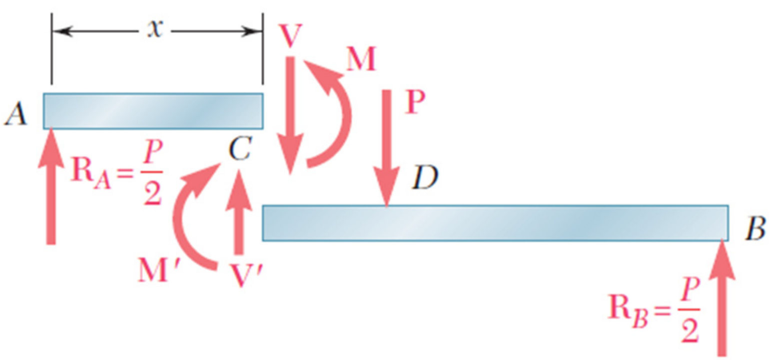


f) Viga empotrada

Diagramas de fuerza cortante y de momento flector





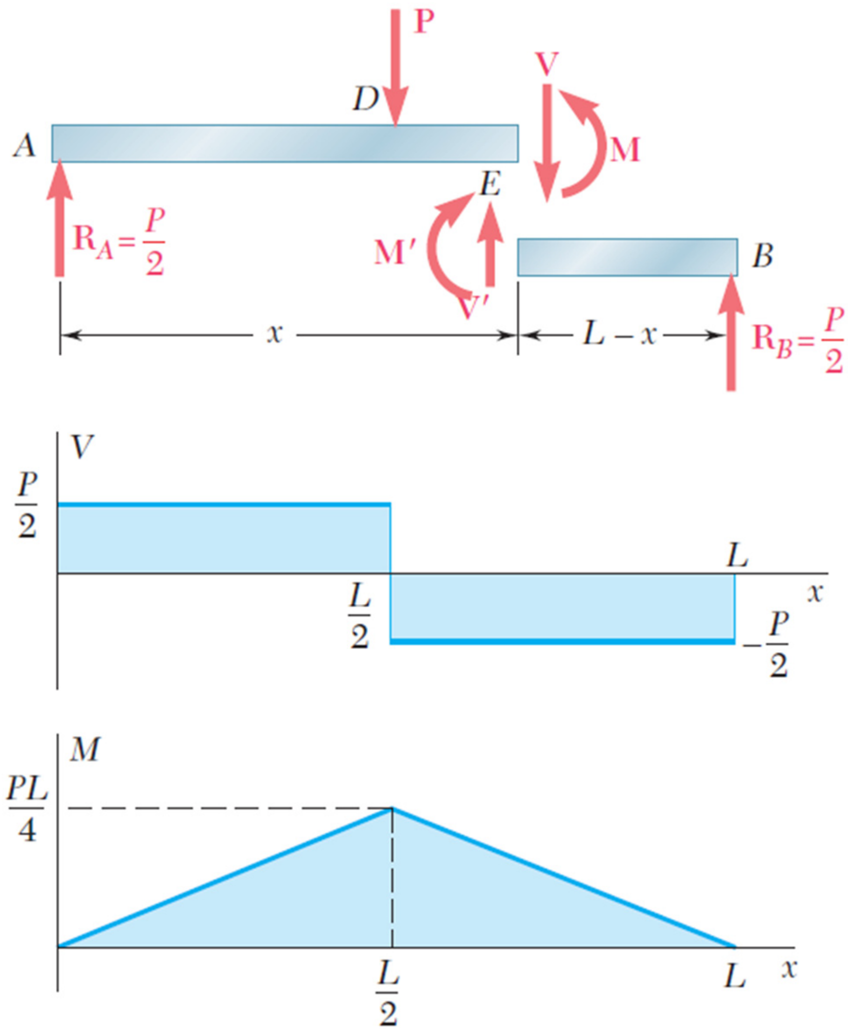


Objetivo: Dado un estado de carga, estudiar cómo varía la fuerza cortante y momento flector a lo largo de la viga. Esto es un requisito necesario para dimensionar la viga, tópico que se estudia en el curso de Mecánica de Materiales.

Paso 1: Determinar las reacciones mediante un diagrama de cuerpo libre completo de la viga. El problema debe ser estáticamente determinado, de otro modo no se podrá determinar dichas reacciones por estática (se requerirán otros conocimientos que se verán en el curso de Mecánica de Materiales).

Paso 2: Se especifica un eje referencia *x* comenzando desde el punto *A* hacia la derecha. Se realiza un corte a la izquierda de la carga P en un punto ubicado a una distancia *x* del punto *A*. Denominamos este punto como *C*. En el punto *C* aparece una fuerza interna V y un momento interno M. Tomamos el tramo *AC*, en el que actúan R_A, V y M, y hacemos el equilibrio de fuerzas verticales y equilibrio de momentos con respecto a *C* para encontrar una expresión para V y M.

Diagramas de fuerza cortante y de momento flector

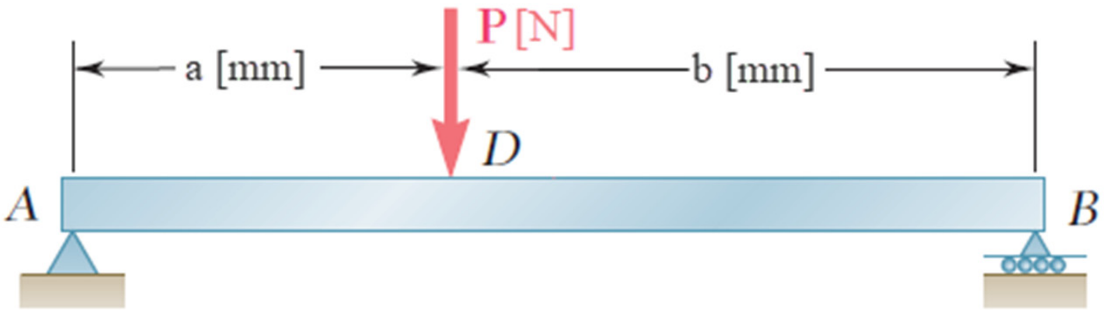


Paso 3: Se realiza un corte a la derecha de la carga P en un punto ubicado a una distancia *x* del punto *A*. Denominamos este punto como *E*. En el punto *E* aparece una fuerza interna V y un momento interno M. Tomamos el tramo *AE*, en el que actúan R_A, P, V y M, y hacemos el equilibrio de fuerzas verticales y equilibrio de momentos con respecto a *E* para encontrar una expresión para V y M.

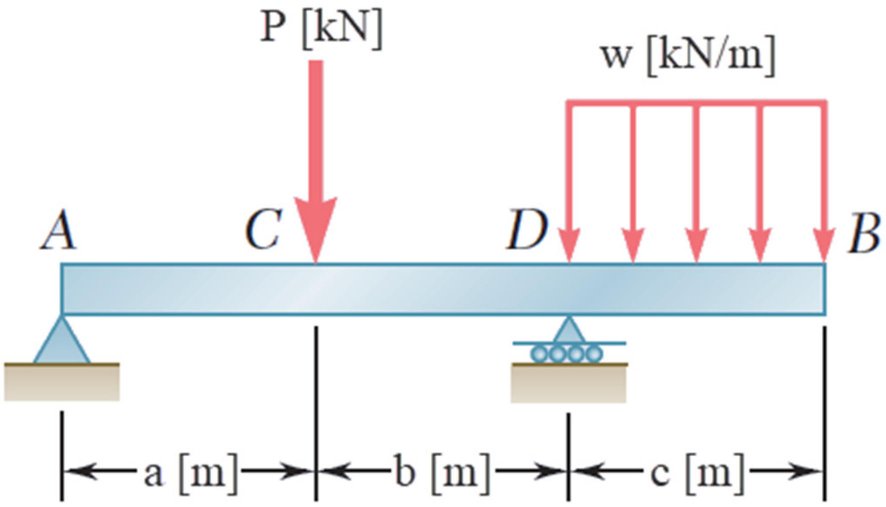
Paso 4: Se grafica, en función de la coordenada x, la expresión encontrada para la fuerza cortante V a la izquierda y a la derecha de la carga P.

Paso 5: Se grafica, en función de la coordenada x, la expresión encontrada para el momento flector M a la izquierda y a la derecha de la carga P.

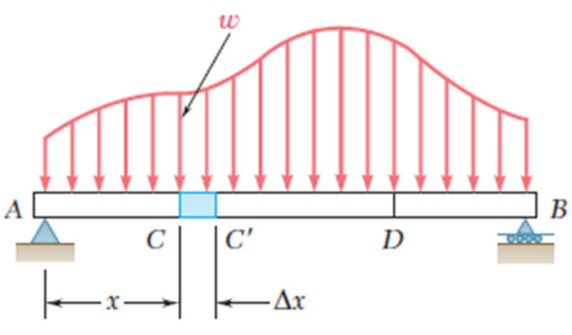
Problema: Obtener el diagrama de fuerza cortante y de momento flector en la viga simplemente apoyada que se muestra en la figura.



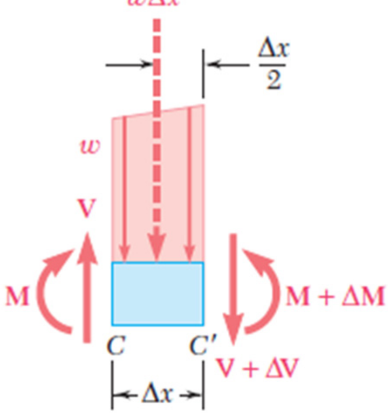
Problema: Obtener el diagrama de fuerza cortante y de momento flector en la viga simplemente apoyada con voladizo que se muestra en la figura.



Relación entre carga y fuerza cortante



a)



b)

Por equilibrio de fuerzas verticales:

$$V - (V + \Delta V) - w\,\Delta x = 0$$

$$\Delta V = -w\,\Delta x$$

Dividiendo por Δx ambos lados de la última ecuación, y haciendo que Δx tienda a cero, se obtiene:

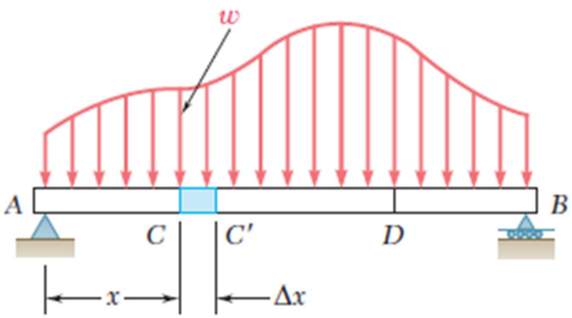
$$\boxed{\frac{dV}{dx} = -w}$$

Integrando entre dos ubicaciones, C y D, a lo largo de la viga:

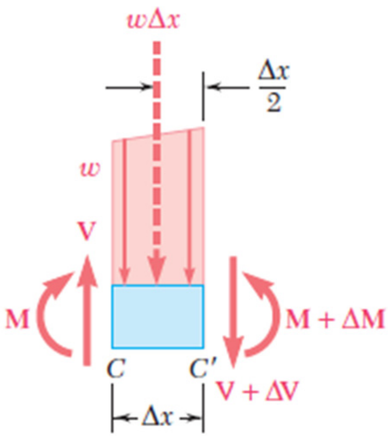
$$V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} w\,dx$$

$$\boxed{V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D)}$$

Relación entre fuerza cortante y momento flector



a)



b)

Por equilibrio de momentos con respecto a *C'*:

$$(M + \Delta M) - M - V\,\Delta x + w\,\Delta x\frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V\,\Delta x - \tfrac{1}{2}w(\Delta x)^2$$

Dividiendo por Δx ambos lados de la última ecuación, y haciendo que Δx tienda a cero, se obtiene:

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = V}$$

Integrando entre dos ubicaciones, C y D, a lo largo de la viga:

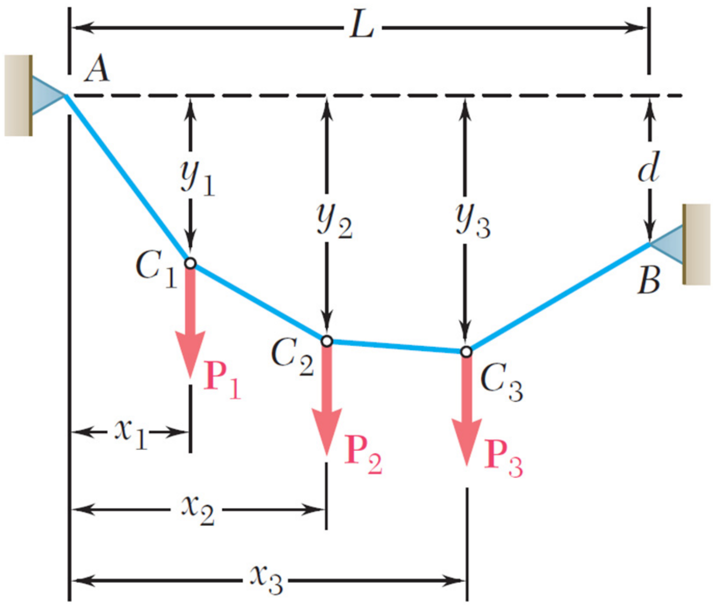
$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V\,dx$$

$$\boxed{M_D - M_C = \text{área bajo la curva de fuerza cortante entre } C \text{ y } D}$$

Suposiciones:

a) Cable es flexible.

b) Peso del cable despreciable frente a las cargas concentradas.



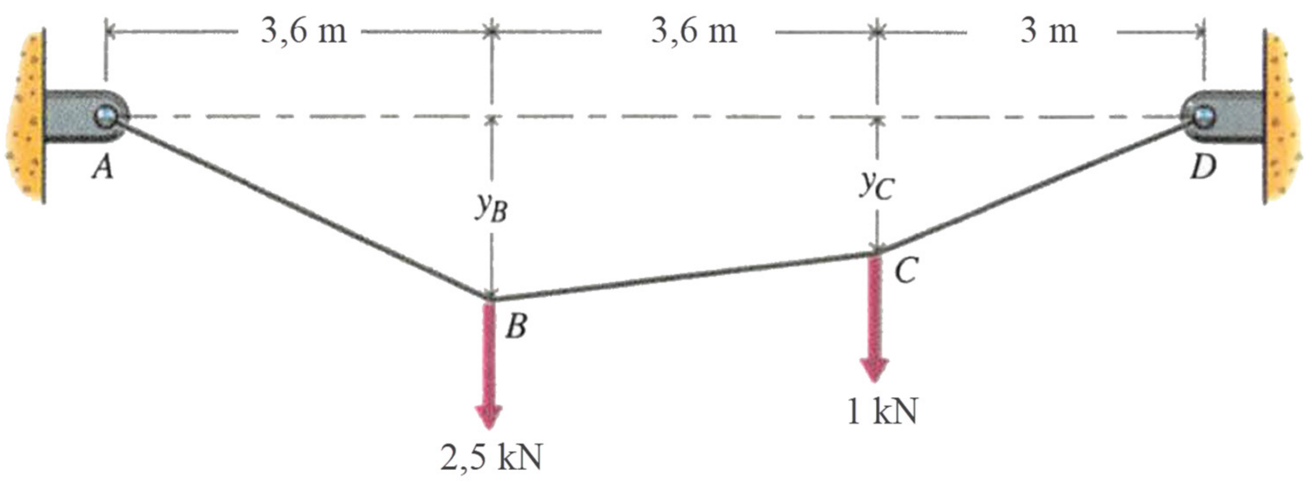
Problema: Un cable está sometido a las cargas concentradas que se muestran en la figura. Si la máxima tensión que desarrolla el cable en estas condiciones es de 5 kN, determinar:

a) Las reacciones en los apoyos A_x, A_y, D_x, D_y.

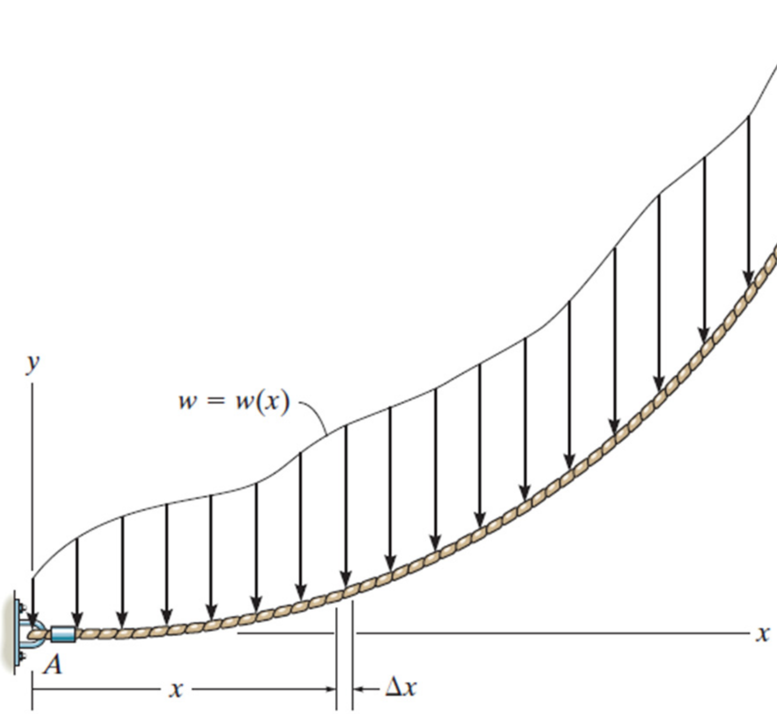
b) Las tensiones en los tres segmentos del cable.

c) Las distancias y_B e y_C.

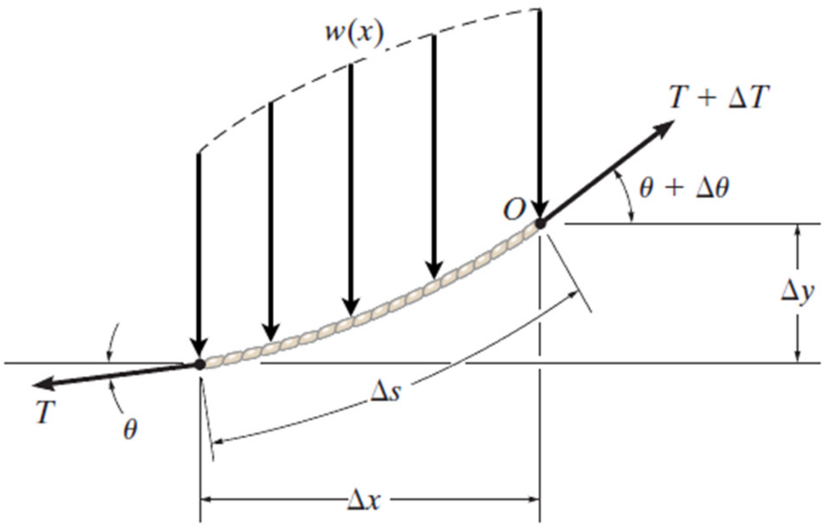
d) La longitud del cable.



Cables con Cargas Distribuidas en Función de x



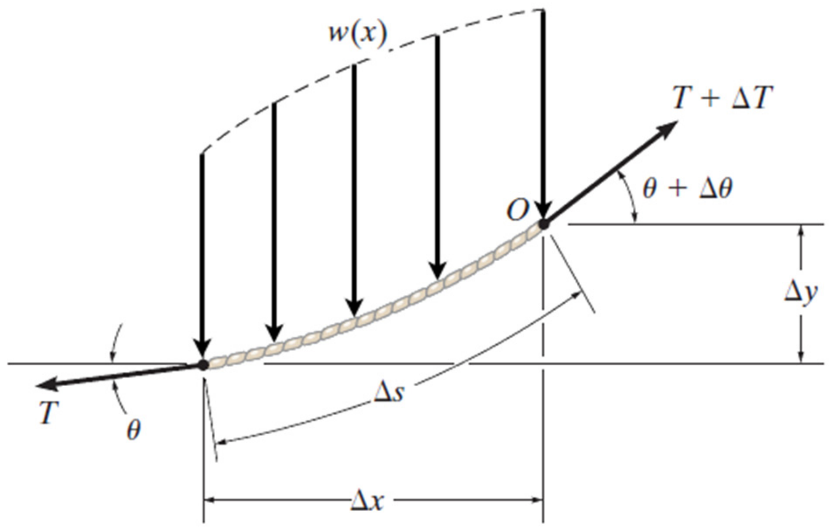
Carga distribuida (arbitraria) por unidad de longitud



Elemento diferencial de cable

Puente colgante, w(x) = cte.

Cables con Cargas Distribuidas en Función de x



Elemento diferencial de cable

$$\sum F_x = 0 : \quad -T\cos\theta + (T + \Delta T)\cos(\theta + \Delta\theta) = 0$$

$$\sum F_y = 0 : \quad -T\sin\theta + (T + \Delta T)\sin(\theta + \Delta\theta) - \bar{w}\Delta x = 0$$

donde

$\bar{w} =$ valor promedio de $w(x)$ en el intervalo Δx

Cables con Cargas Distribuidas en Función de x

- Reordenando las dos ecuaciones anteriores y dividiendo ambas por Δx se obtiene lo siguiente:

$$\frac{(T+\Delta T)\cos(\theta+\Delta\theta)-T\cos\theta}{\Delta x}=0$$

$$\frac{(T+\Delta T)\sin(\theta+\Delta\theta)-T\sin\theta}{\Delta x}=\bar{w}$$

- Tomando el límite de estas expresiones cuando $\Delta x \to 0$, por lo que $\Delta T \to 0$ y $\Delta\theta \to 0$, se obtiene:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(T+\Delta T)\cos(\theta+\Delta\theta)-T\cos\theta}{\Delta x}=\frac{d(T\cos\theta)}{dx}=0$$

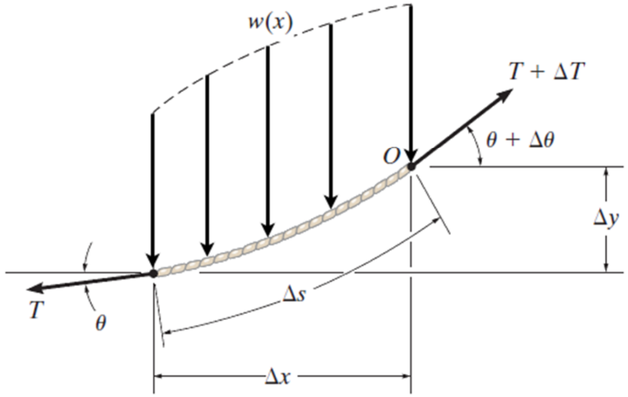
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(T+\Delta T)\sin(\theta+\Delta\theta)-T\sin\theta}{\Delta x}=\frac{d(T\sin\theta)}{dx}=w(x)$$

Cables con Cargas Distribuidas en Función de x

- Trabajando sobre la primera de las derivadas anteriores, se infiere que

$$\frac{d(T\cos\theta)}{dx} = 0 \implies T\cos\theta = \text{constante} = H,$$

que indica que $T\cos\theta$ es la componente horizontal de T en cualquier punto del cable y se mantiene constante a lo largo de este.



- Integrando la segunda de las derivadas anteriores, se obtiene

$$T\sin\theta = \int w(x)dx + C_1', \ \ \text{donde} \ \ C_1' = \text{cte.}$$

Reemplazando $T\cos\theta = H$ en esta ecuación, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{H}\int w(x)dx + C_1 = \tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

Cables con Cargas Distribuidas en Función de x

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{H}\int w(x)dx + C_1 = \tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

- Integrando esta ecuación se obtiene la curva de deflexión del cable en función de H, $w(x)$ y las constantes de integración C_1 y C_2:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{H}\int\left(\int w(x)dx\right)dx + C_1 x + C_2,}$$

donde las constantes de integración se deben determinar mediante condiciones de borde. Si $w(x) = w = \text{cte.}$, la ecuación $y(x)$ es parabólica y se conoce como ecuación de cable parabólico:

$$y(x) = \frac{1}{2H}wx^2 + C_1 x + C_2,$$

Cables con Cargas Distribuidas en Función de x

Problema: Cada cable del puente colgante (un cable por lado) soporta 30 kN por metro de longitud horizontal. La luz del vano es de 300 m y la flecha del cable en su punto medio es de 30 m. Determinar:

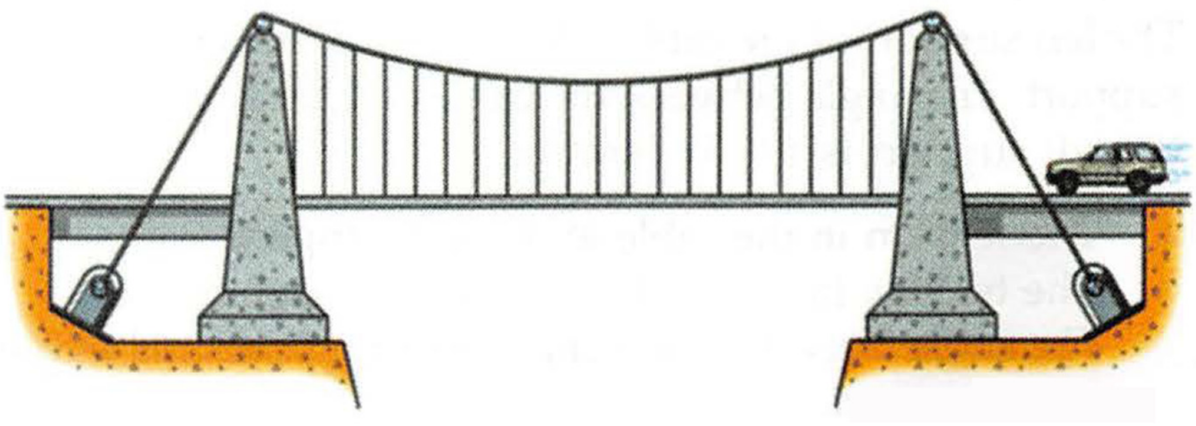
a) La forma del cable.

b) La tensión máxima en el cable

c) La tensión del cable en su punto medio.

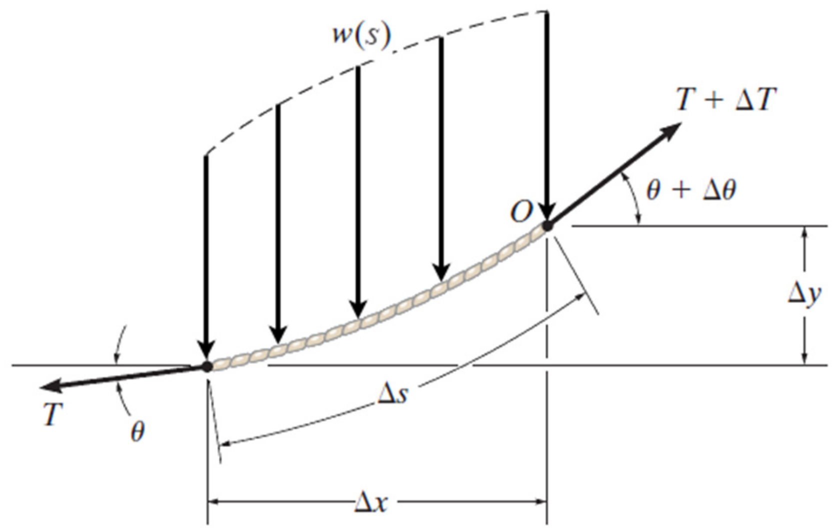
d) La tensión del cable en los pilares y el ángulo que forma con la horizontal.

e) La longitud del cable.



Cables con Cargas Distribuidas en Función de s

- La carga se distribuye a lo largo de la dirección del cable (dirección *s*).
- Es el caso cuando la carga es el peso del mismo cable y conduce a la ecuación del cable en catenaria.



Cables con Cargas Distribuidas en Función de s

- Es el caso cuando la carga es el peso del mismo cable y conduce a la ecuación del cable en catenaria.

- Las ecuaciones del cable sometido a carga distribuida en función de x son válidas, pero debemos reemplazar Δx por Δs. Por lo tanto,

$$\frac{d(T\cos\theta)}{ds} = 0 \implies T\cos\theta = \text{constante} = H,$$

$$\frac{d(T\sin\theta)}{ds} = w(s),$$ que al integrarla resulta

$$T\sin\theta = \int w(s)ds + C_1', \ \text{ donde } \ C_1' = \text{cte.}$$

Reemplazando $T\cos\theta = H$ en esta ecuación, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{H}\int w(s)ds + C_1 = \tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

Cables con Cargas Distribuidas en Función de s

- Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$dy = \sqrt{ds^2 - dx^2} \implies \frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1}$$

y reescribimos

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1} = \frac{1}{H}\int w(s)ds + C_1} \quad \textbf{(*)}$$

y despejamos ds/dx

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{H}\int w(s)ds + C_1\right)^2}$$

Cables con Cargas Distribuidas en Función de s

- Integrando la ecuación anterior obtenemos

$$\boxed{x=\int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}ds+C_2=\int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{H}\int w(s)ds+C_1\right)^2}}ds+C_2} \quad \textbf{(**)}$$

- Pasos para obtener la curva catenaria del cable $y(x)$:
  - Si es posible, determinar constante C_1 aplicando condición de borde de pendiente a la ecuación **(*)**.
  - Usar la ecuación **(**)** para encontrar la función $s(x)$.
  - Sustituir $s(x)$ en la ecuación **(*)** e integrarla para obtener $y(x)$.
  - Aplicar condiciones de borde a $y(x)$ para obtener H y la constante de integración restante.

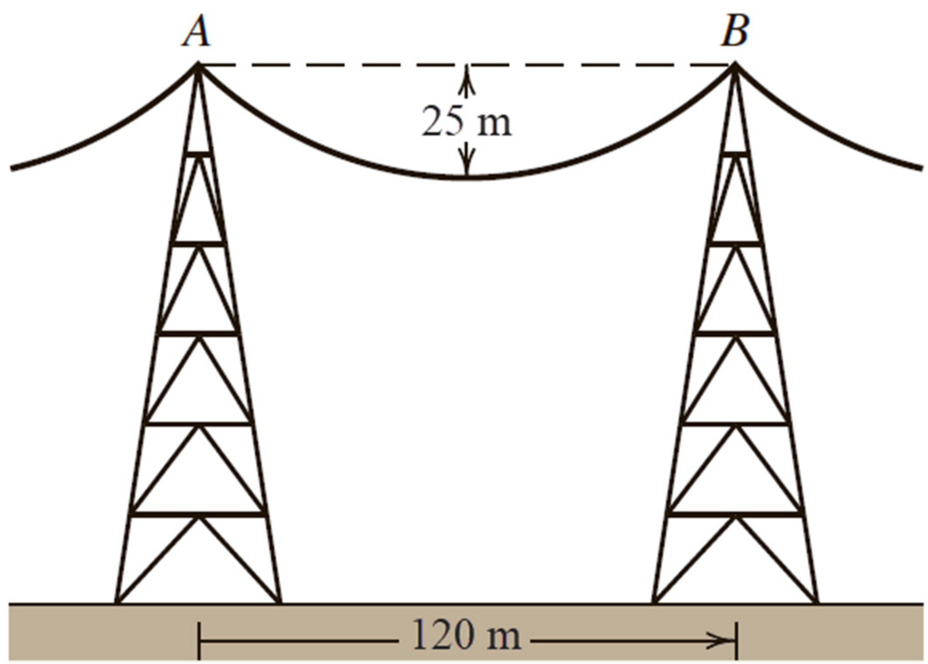
Cables con Cargas Distribuidas en Función de s

Problema: Una línea de transmisión eléctrica pesa 15 N/m y se ancla a torres de la misma altura. Determinar:

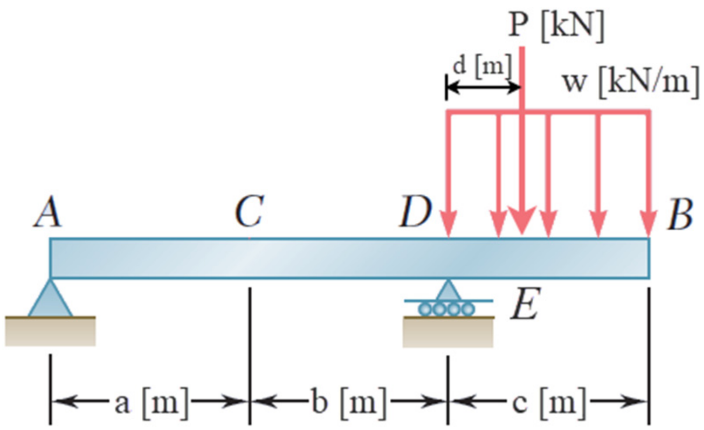
a) La forma del cable.

b) La tensión máxima en el cable

c) La longitud del cable.



Problema 1

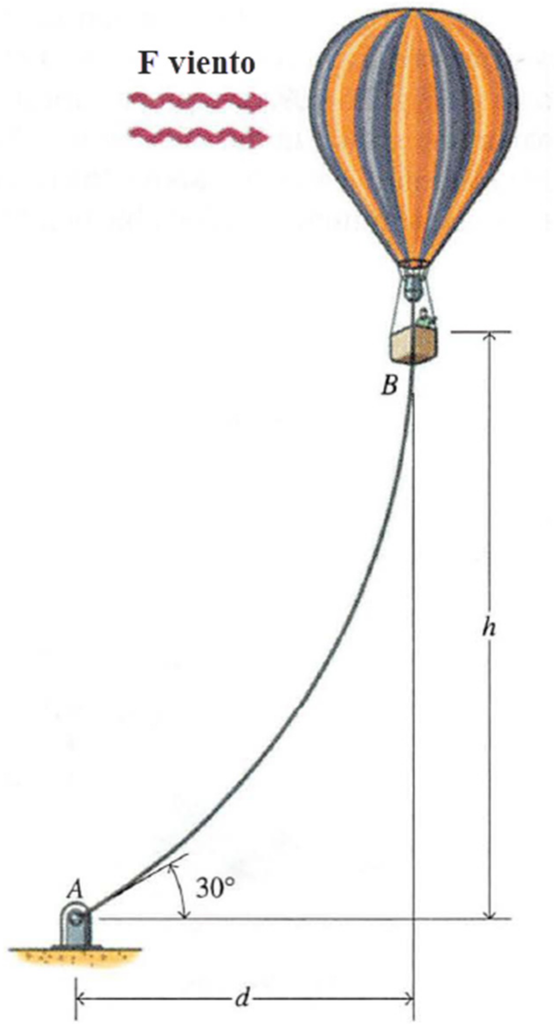


Obtener el diagrama de fuerza cortante V(x) y de momento flector M(x) en la viga simplemente apoyada con voladizo que se muestra en la figura. Plotear los diagramas V(x) y M(x) utilizando MATLAB.

Instrucciones:

- Para plotear en MATLAB utilizar la función que se encuentra en la sección “Material Docente” de u-cursos.
- La resolución se puede presentar en slides de Power Point o PDF, o bien mediante un informe convencional.
- Tarea en grupos de máximo 3 integrantes.
- Enviar por sistema de tareas de u-cursos.

Problema 2



El cable del globo pesa 7 N/m y su longitud es de 100 m. Sobre el extremo B del cable, el globo ejerce una fuerza vertical flotante de 2000 N. Determinar: **a)** la forma del cable (*), **b)** F viento, **c)** la altura *h*, y **d)** la distancia *d*. (*) Plotear la forma del cable utilizando MATLAB.

Instrucciones:

- Para plotear en MATLAB utilizar la función que se encuentra en la sección “Material Docente” de u-cursos.
- La resolución se puede presentar en slides de Power Point o PDF, o bien mediante un informe convencional.
- Tarea en grupos de máximo 3 integrantes.
- Enviar por sistema de tareas de u-cursos.