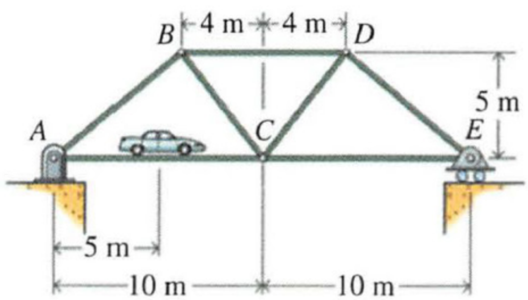
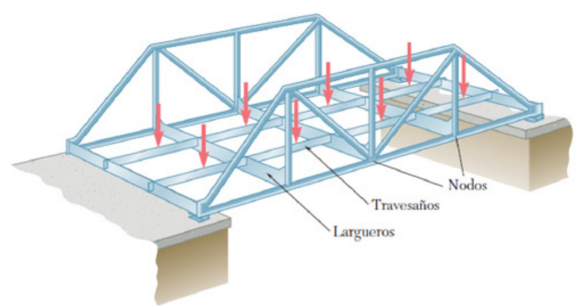
PROBLEMAS RESUELTOS

UNIDAD 4: ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

PROBLEMA 1

Problema: La armadura que muestra un auto detenido representa un lado del puente; otra armadura igual representa el otro lado del puente. Un sistema de piso permite transmitir el peso del auto detenido a los nodos de la armadura. La masa del auto es de 2000 kg. Calcular la fuerza sobre cada barra de la armadura utilizando el método de los nodos.





Observación: Un sistema de piso de armadura utiliza travesaños y largueros para transmitir una carga aplicada a los nodos de dicha armadura.

SOLUCIÓN:

La armadura es simple con $m = 7$ barras y $n = 5$ nodos. Los 5 nodos proveen un total de 10 ecuaciones. Hay $r=3$ condiciones de soporte. Por lo tanto,

$$m = 7, \quad n = 5, \quad r = 3$$

$$\left.\begin{aligned} m + r &= 7 + 3 = 10 \\ 2n &= 10 \end{aligned}\right\} \quad m + r = 2n = 10.$$

A menos que la armadura esté impropiamente restringida, la armadura está completamente restringida y es estáticamente determinada.

<u>Resolución mediante el método de los nodos</u>

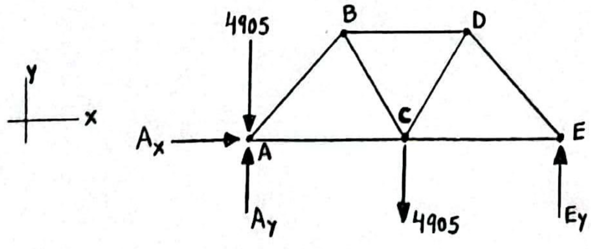
Paso 1: Se divide el peso del auto entre los nodos de la armadura. Tomamos la mitad del peso del auto, ya que la otra mitad la soporta la armadura del otro lado del puente.

$$W = \left(\frac{2000}{2}\right) \text{kg} \times 9.81 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9810 \text{ N}$$

$\therefore$ Como el auto está ubicado en el medio del tramo AC, el peso se reparte en partes iguales entre los nodos A y C.

$$W_A = W_C = \frac{9810}{2} = 4905 \text{ N}$$

Paso 2: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre (DCL) de la armadura completa y se determinan las reacciones mediante las ecuaciones de equilibrio.



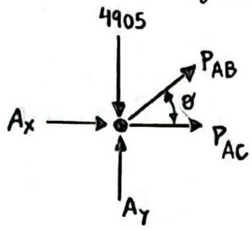
$\Sigma F_x = 0: \quad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0: \quad A_y - 4905 - 4905 + E_y = 0$

$\Sigma M_A = 0: \quad 20\, E_y - 10(4905) = 0$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} E_y &= \frac{10(4905)}{20} = 2452.5 \text{ N} \\ A_y &= 4905 + 4905 - 2452.5 = 7357.5 \text{ N} \\ A_x &= 0 \text{ N} \end{aligned}}$$

Paso 3: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del nodo A y se escriben las ecuaciones de equilibrio. Este nodo es ideal para comenzar pues tiene 2 incógnitas que pueden ser resueltas con las 2 ecuaciones de equilibrio:



$$\Sigma F_x = 0 : \quad A_x + P_{AC} + P_{AB}\cos\theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 : \quad A_y - 4905 + P_{AB}\sin\theta = 0$$

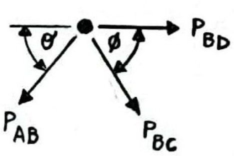
Del cálculo de reacciones sabemos que $A_x = 0$, $A_y = 7357.5$ N.
Por geometría se obtiene θ: $\theta = \operatorname{atan}(5/6)$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} P_{AB} &= \frac{4905 - 7357.5}{\sin(\operatorname{atan}(5/6))} \approx -3831 \text{ N} \\ P_{AC} &= 3831\cos(\operatorname{atan}(5/6)) \approx 2943 \text{ N} \end{aligned}}$$

Paso 4: El nodo B tiene 3 barras, pero en una barra ya se conoce la fuerza ($P_{BA} = P_{AB} = -3831$ N) por lo que la fuerza en las dos barras restantes se obtienen usando las 2 ecuaciones de equilibrio del nodo:

$$\Sigma F_x = 0 : \quad P_{BD} + P_{BC}\cos\phi - P_{AB}\cos\theta = 0$$

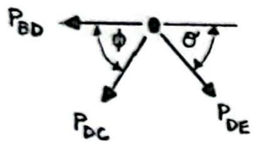
$$\Sigma F_y = 0 : \quad -P_{AB}\sin\theta - P_{BC}\sin\phi = 0$$



Del cálculo en el nodo A se sabe que $P_{AB} = -3831$ N.
Por geometría se obtienen θ y ϕ: $\theta = \operatorname{atan}(5/6)$
$\phi = \operatorname{atan}(5/4)$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} P_{BC} &= \frac{3831\sin(\operatorname{atan}(5/6))}{\sin(\operatorname{atan}(5/4))} \approx 3140.8 \text{ N} \\ P_{BD} &= -3831\cos(\operatorname{atan}(5/6)) - 3140.8\cos(\operatorname{atan}(5/4)) \\ &\approx -4905.1 \text{ N} \end{aligned}}$$

Paso 5: En cada uno de los nodos C, D y E quedan 2 fuerzas que resolver. Por lo tanto, se puede continuar con cualquiera de ellos. Resolvemos el nodo D.



$$\Sigma F_x = 0 : \quad -P_{BD} - P_{DC}\cos\phi + P_{DE}\cos\theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 : \quad -P_{DC}\sin\phi - P_{DE}\sin\theta = 0$$

Del cálculo en el nodo B sabemos que $P_{BD} = -4905.1$ N

Por geometría se obtienen θ y ϕ : $\theta = \operatorname{atan}(5/6)$

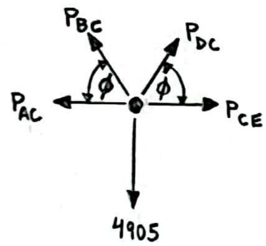
$\phi = \operatorname{atan}(5/4)$

$$\therefore \quad P_{DE} = -P_{DC}\,\frac{\sin(\operatorname{atan}(5/4))}{\sin(\operatorname{atan}(5/6))}$$

$$4905.1 - P_{DC}\cos(\operatorname{atan}(5/4)) - P_{DC}\,\frac{\sin(\operatorname{atan}(5/4))}{\sin(\operatorname{atan}(5/6))}\cos(\operatorname{atan}(5/6)) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} P_{DC} &= \frac{4905.1}{\cos(\operatorname{atan}(5/4)) + \dfrac{\sin(\operatorname{atan}(5/4))}{\sin(\operatorname{atan}(5/6))}\cos(\operatorname{atan}(5/6))} \\ &\approx 3140.8 \text{ N} \\ P_{DE} &= -3140.8\,\frac{\sin(\operatorname{atan}(5/4))}{\sin(\operatorname{atan}(5/6))} \approx -3831 \text{ N} \end{aligned}}$$

Paso 6 : Continuamos con el diagrama de cuerpo libre del nodo C y escribimos las ecuaciones de equilibrio.



$$\Sigma F_x = 0 : \quad -P_{AC} - P_{BC}\cos\phi + P_{DC}\cos\phi + P_{CE} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 : \quad -4905 + P_{BC}\sin\phi + P_{DC}\sin\phi = 0$$

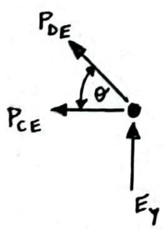
Del cálculo en los nodos A, B y D sabemos que

$P_{AC} = 2943 \text{ N}$; $P_{BC} = 3140.8 \text{ N}$; $P_{DC} = 3140.8 \text{ N}$

Por geometría se obtiene $\phi = \text{atan}(5/4)$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} P_{CE} &= 2943 + 3140.8\cos(\text{atan}(5/4)) - 3140.8\cos(\text{atan}(5/4)) \\ &= 2943 \text{ N} \end{aligned}}$$

Paso 7 : Se resuelve el equilibrio en el último nodo que nos queda, el nodo E.



$$\Sigma F_x = 0 : \quad -P_{CE} - P_{DE}\cos\theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 : \quad E_y + P_{DE}\sin\theta = 0$$

$\theta = \text{atan}(5/6)$

P_{DE} y P_{CE} ya fueron determinadas en los cálculos de los nodos D y C. Por otro lado, E_y fue calculado en las reacciones. Por lo tanto, no hay nada que falte calcular en el nodo E. Las ecuaciones pueden ser usadas para comprobar los cálculos:

$P_{CE} = 2943 \text{ N}$; $P_{DE} = -3831 \text{ N}$; $E_y = 2452.5 \text{ N}$

$$\therefore \quad -2943 + 3831\cos(\text{atan}(5/6)) \approx 0.056 \approx 0$$

$$2452.5 - 3831\sin(\text{atan}(5/6)) \approx -0.046 \approx 0 \quad //$$

Resumen: Utilizando la notación (C) para las fuerzas negativas (compresión) y (T) para las fuerzas positivas (tracción), los resultados obtenidos son los siguientes:

$$P_{AB} = 3831 \text{ N (C)}$$

$$P_{AC} = 2943 \text{ N (T)}$$

$$P_{BC} = 3140.8 \text{ N (T)}$$

$$P_{BD} = 4905.1 \text{ N (C)}$$

$$P_{DC} = 3140.8 \text{ N (T)}$$

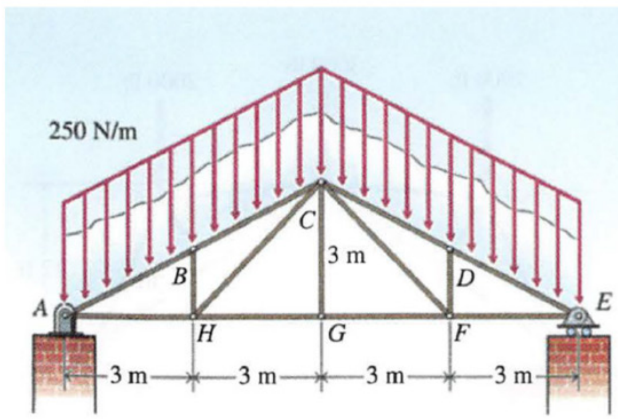
$$P_{DE} = 3831 \text{ N (C)}$$

$$P_{CE} = 2943 \text{ N (T)}$$

OBTENER CÓDIGO MATLAB: U4_problema1.m

PROBLEMA 2

Problema: La armadura Pratt mostrada en la figura soporta una carga de nieve que puede aproximarse a una carga distribuida de 250 N/m. Determinar la fuerza en los miembros *BC*, *CH* y *CG*.



SOLUCIÓN:

Análisis previo: en el soporte A hay 2 reacciones y en el soporte B hay 1 reacción. Por lo tanto, utilizando un diagrama de cuerpo libre de la armadura completa se puede determinar estas 3 reacciones. Luego de determinar las reacciones, haciendo un DCL del nodo A quedarán expuestas 2 incógnitas (fuerza AB y fuerza AH), las que podrán ser determinadas con las 2 ecuaciones de equilibrio que aporta el nodo A. Luego, se puede seguir con el nodo B que expondrá 2 incógnitas (fuerza BC y fuerza BH), las que podrán ser determinadas con las 2 ecuaciones de equilibrio que aporta el nodo B. Luego, seguiremos con el nodo H, que expondrá 2 incógnitas (fuerzas HC y HG), las que podrán ser determinadas con las 2 ecuaciones de equilibrio que aporta el nodo H. Finalmente, la fuerza faltante (GC) podrá ser determinada en el nodo G, que expondrá 2 incógnitas (fuerza GC y fuerza GF), las que podrán ser determinadas con las 2 ecuaciones de equilibrio que aporta el nodo G.

Resolución mediante el método de los nodos

Paso 1: Se determinan las cargas nodales provenientes de la distribución de fuerza sobre la armadura.

Por geometría se tiene que los largos $L_{AB} = L_{BC} = L_{CD} = L_{DE} = \dfrac{\sqrt{6^2+3^2}}{2} \approx 3.354\,m$

$\therefore$ Cargas nodales provenientes de $250\,\frac{N}{m}$:

Nodo A $\longrightarrow$ $-\dfrac{250\,(3.354)}{2} = -419.25\ N$

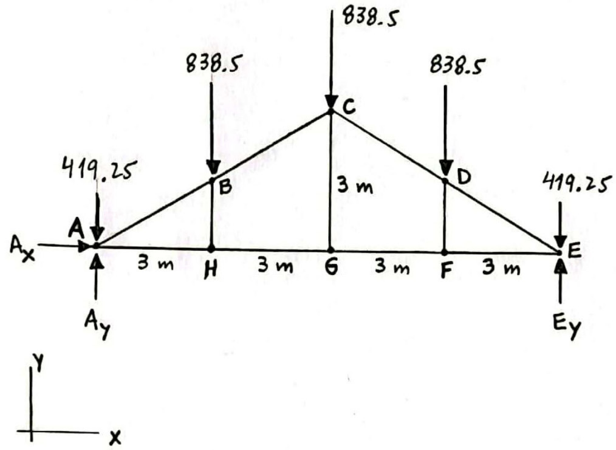
Nodo B $\longrightarrow$ $-\dfrac{250\,(3.354+3.354)}{2} = -838.5\ N$

Nodo C $\longrightarrow$ $-\dfrac{250\,(3.354+3.354)}{2} = -838.5\ N$

Nodo D $\longrightarrow$ $-\dfrac{250\,(3.354+3.354)}{2} = -838.5\ N$

Nodo E $\longrightarrow$ $-\dfrac{250\,(3.354)}{2} = -419.25\ N$

Diagrama de cuerpo libre:



$$\Sigma F_y = 0 : \quad A_y + E_y - 419.25(2) - 838.5(3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_y + E_y = 3354$$

$$\Sigma F_x = 0 : \quad \boxed{A_x = 0}$$

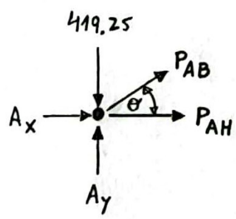
$$\Sigma M_A = 0 : \quad 12 E_y - 12(419.25) - 9(838.5) - 6(838.5) - 3(838.5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_y = 1677 \text{ N}}$$

$$\therefore \quad \boxed{A_y = 3354 - 1677 = 1677 \text{ N}}$$

Paso 2: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del nodo A y se plantean las ecuaciones de equilibrio.

$$\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{6^2+3^2}} = \frac{6}{\sqrt{45}} \; ; \; \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{45}}$$



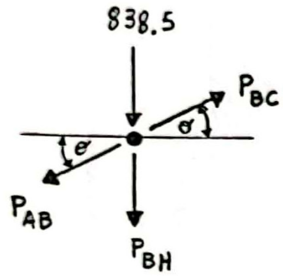
$$\Sigma F_x = 0 : \quad P_{AB}\cos\theta + P_{AH} + A_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 : \quad A_y - 419.25 + P_{AB}\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_{AB} = \frac{419.25 - A_y}{\sin\theta} = \frac{419.25 - 1677}{\frac{3}{\sqrt{45}}} \approx -2812.41 \text{ N}}$$

$$\therefore \quad \boxed{P_{AH} = -P_{AB}\cos\theta - A_x = 2812.41\left(\frac{6}{\sqrt{45}}\right) - 0 \approx 2515.5 \text{ N}}$$

Paso 3 : Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del nodo B y se plantean las ecuaciones de equilibrio.



$$\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{45}} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{45}}$$

$\Sigma F_x = 0$: $P_{BC}\cos\theta - P_{AB}\cos\theta = 0$,

pero $P_{AB} = -2812.41$ N

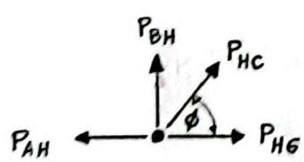
$\Rightarrow$

$$\boxed{P_{BC} = P_{AB} = -2812.41 \text{ N}}$$

$\Sigma F_y = 0$: $P_{BC}\sin\theta - P_{AB}\sin\theta - P_{BH} - 838.5 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{P_{BH} = -838.5 \text{ N}}$$

Paso 4 : Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del nodo H y se plantean las ecuaciones de equilibrio.



$$\cos\phi = \frac{3}{\sqrt{3^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{18}} \quad ; \quad \sin\phi = \frac{3}{\sqrt{18}}$$

$\Sigma F_x = 0$: $P_{HC}\cos\phi + P_{HG} - P_{AH} = 0$,

pero $P_{AH} = 2515.5$ N

$$\Rightarrow \quad P_{HC}\cos\phi + P_{HG} = 2515.5$$

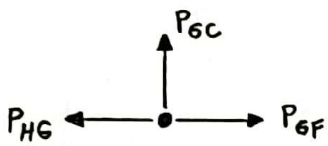
$\Sigma F_y = 0$: $P_{BH} + P_{HC}\sin\phi = 0$,

pero $P_{BH} = -838.5$ N

$$\Rightarrow \boxed{P_{HC} = -\frac{P_{BH}}{\sin\phi} = \frac{838.5}{\frac{3}{\sqrt{18}}} \approx 1185.82 \text{ N}}$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} P_{HG} &= 2515.5 - P_{HC}\cos\phi = 2515.5 - \frac{838.5}{\sin\phi}\cos\phi \\ &= 1677 \text{ N} \end{aligned}}$$

Paso 5: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del nodo G y se plantean las ecuaciones de equilibrio.



$\Sigma F_y = 0$: $\boxed{P_{GC} = 0}$

$\Sigma F_x = 0$: $\boxed{P_{GF} = P_{HG} = 1677 \text{ N}}$,

ya que $P_{HG} = 1677$ N.

<u>Resumen</u>

$P_{BC} = 2812.41$ N (C)

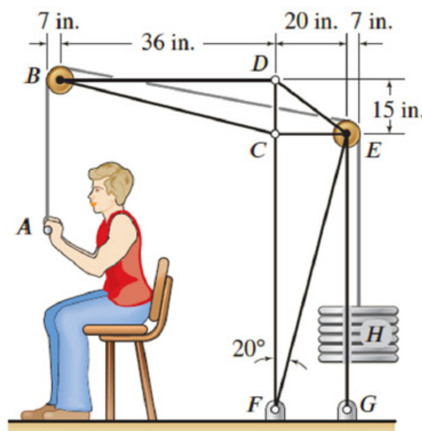
$P_{CH} = 1185.82$ N (T)

$P_{CG} = 0$ N

OBTENER CÓDIGO MATLAB: U4_problema2.m

PROBLEMA 3

Problema: En la máquina de ejercicios que se muestra en la figura, el peso es de H = 50 lbf. Si el segmento de cable AB es vertical, determinar la fuerza en cada barra de la máquina.

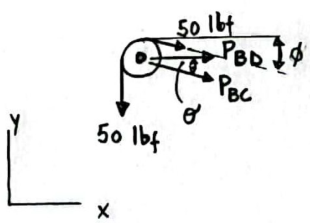


SOLUCIÓN:

Análisis previo: en este problema no es necesario determinar las reacciones para determinar las fuerzas en las barras. Si comenzamos por B quedarán expuestas 2 incógnitas (fuerzas P_{BD} y P_{BC}) que pueden ser determinadas mediante las 2 ecuaciones de equilibrio en B. Luego, seguimos con D dejando expuestas 2 incógnitas (fuerzas P_{DC} y P_{DE}) que pueden ser determinadas mediante las 2 ecuaciones de equilibrio en D. Similarmente, seguiremos con C y finalmente con E.

Resolución mediante el método de los nodos

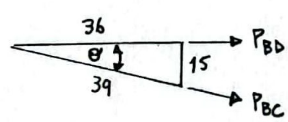
Paso 1: se dibuja el diagrama de cuerpo libre del nodo B y se escriben las ecuaciones de equilibrio.



$$\Sigma F_x = 0: \quad P_{BD} + P_{BC}\cos\theta + 50\cos\phi = 0$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad -50 - 50\sin\phi - P_{BC}\sin\theta = 0$$

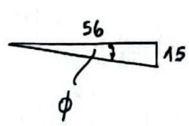
$$\Rightarrow \boxed{P_{BC} = \frac{-50 - 50\frac{15}{\sqrt{56^2+15^2}}}{\frac{15}{39}} \approx -163.64 \text{ lbf}}$$



$$\cos\theta = \frac{36}{39}$$

$$\sin\theta = \frac{15}{39}$$

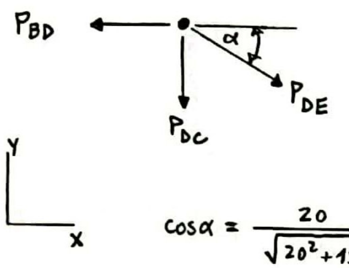
$$\boxed{\begin{aligned} P_{BD} &= -50\cos\phi - P_{BC}\cos\theta \\ &= -50\frac{56}{\sqrt{56^2+15^2}} + 163.64\,\frac{36}{39} \\ &\approx 102.75 \text{ lbf} \end{aligned}}$$



$$\cos\phi = \frac{56}{\sqrt{56^2+15^2}}$$

$$\sin\phi = \frac{15}{\sqrt{56^2+15^2}}$$

Paso 2: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del nodo D y se escriben las ecuaciones de equilibrio.



$$\cos\alpha = \frac{20}{\sqrt{20^2+15^2}} = \frac{20}{25}$$

$$\sin\alpha = \frac{15}{25}$$

$\sum F_x = 0 :\quad -P_{BD} + P_{DE}\cos\alpha = 0,$

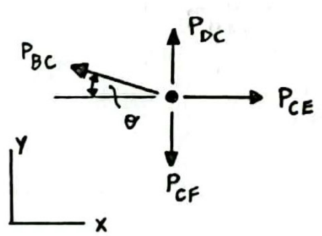
pero $P_{BD} = 102.75 \text{ lbf}$

$$\Rightarrow \boxed{P_{DE} = \frac{P_{BD}}{\cos\alpha} = \frac{102.75}{\frac{20}{25}} \approx 128.44 \text{ lbf}}$$

$\sum F_y = 0 :\quad -P_{DC} - P_{DE}\sin\alpha = 0$

$$\Rightarrow \boxed{P_{DC} = -P_{DE}\sin\alpha = -128.44\,\frac{15}{25} \approx -77.06 \text{ lbf}}$$

Paso 3: Se dibuja diagrama de cuerpo libre del nodo C y se escriben las ecuaciones de equilibrio.



$$\cos\theta = \frac{36}{39}$$

$$\sin\theta = \frac{15}{39}$$

$\sum F_x = 0 :\quad P_{CE} - P_{BC}\cos\theta = 0,$

pero $P_{BC} = -163.64 \text{ lbf}$

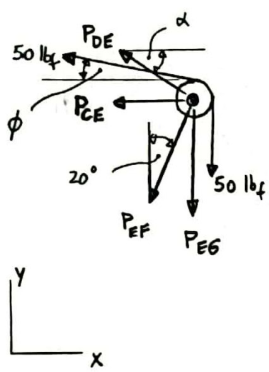
$$\Rightarrow \boxed{P_{CE} = P_{BC}\cos\theta = -163.64\,\frac{36}{39} \approx -151.05 \text{ lbf}}$$

$\sum F_y = 0 :\quad P_{DC} + P_{BC}\sin\theta - P_{CF} = 0,$

pero $P_{DC} = -77.06$ y $P_{BC} = -163.64$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_{CF} &= P_{DC} + P_{BC}\sin\theta \\ &= -77.06 - 163.64\,\frac{15}{39} \\ &\approx -140 \text{ lbf}\end{aligned}}$$

Paso 4: Se dibuja diagrama de cuerpo libre del nodo E y se escriben las ecuaciones de equilibrio.



$$\cos\phi = \frac{56}{\sqrt{56^2+15^2}}$$

$$\sin\phi = \frac{15}{\sqrt{56^2+15^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{20}{25}$$

$$\sin\alpha = \frac{15}{25}$$

$\Sigma F_x = 0: \; -P_{DE}\cos\alpha - P_{CE} - 50\cos\phi - P_{EF}\sin 20° = 0,$

pero $P_{DE} = 128.44$ lbf , $P_{CE} = -151.05$ lbf

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_{EF} &= \frac{-P_{DE}\cos\alpha - P_{CE} - 50\cos\phi}{\sin 20°} \\ &= \frac{-128.44\,\frac{20}{25} + 151.05 - 50\,\frac{56}{\sqrt{56^2+15^2}}}{\sin 20°} \\ &\approx 0 \text{ lbf} \end{aligned}}$$

$\Sigma F_y = 0: \; -P_{EG} - P_{EF}\cos 20° + P_{DE}\sin\alpha + 50\sin\phi = 0,$

pero $P_{EF} = 0$ lbf, $P_{DE} = 128.44$ lbf

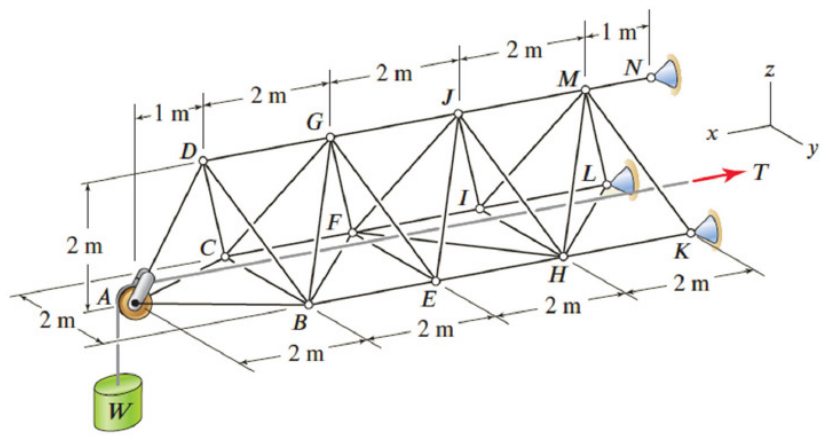
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_{EG} &= -P_{EF}\cos 20° + P_{DE}\,\frac{15}{25} + 50\,\frac{15}{\sqrt{56^2+15^2}} - 50 \\ &= 0 + 128.44\,\frac{15}{25} + 50\,\frac{15}{\sqrt{56^2+15^2}} - 50 \\ &\approx 40 \text{ lbf} \end{aligned}}$$

Resumen:

$P_{BC} = 163.64$ lbf (C)
$P_{BD} = 102.75$ lbf (T)
$P_{DE} = 128.44$ lbf (T)
$P_{DC} = 77.06$ lbf (C)
$P_{CE} = 151.05$ lbf (C)
$P_{CF} = 140$ lbf (C)
$P_{EF} = 0$ lbf
$P_{EG} = 40$ lbf (T)

PROBLEMA 4

Problema: La pluma de una grúa está en una posición horizontal. Si W = 1 kN, determine la fuerza en la barra DG.



SOLUCIÓN:

La armadura es simple con $m = 33$ barras y $n = 14$ nodos. Los 14 nodos proveen un total de $3 \times 14 = 42$ ecuaciones. Hay $r = 9$ condiciones de soporte. Por lo tanto,

$m = 33, \; n = 14, \; r = 9$

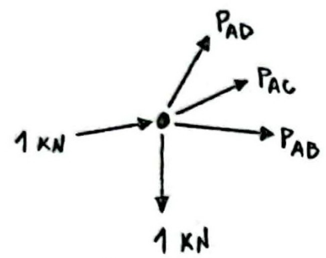
$$\left.\begin{aligned} m + r &= 33 + 9 = 42 \\ 3n &= 42 \end{aligned}\right\} \; m + r = 3n = 42.$$

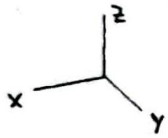
A menos que la armadura esté impropiamente restringida, la armadura está completamente restringida y es estáticamente determinada.

<u>Resolución mediante el método de los nodos</u>

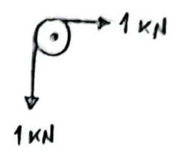
Análisis previo: Para obtener la fuerza en la barra DG podríamos partir contando las incógnitas que necesitaríamos resolver en el nodo D y los cercanos. Por ejemplo, el nodo D tiene 4 barras que resultarían en 4 incógnitas. Sin embargo, solo tenemos 3 ecuaciones disponibles por nodo. Si observamos el nodo A, verificaremos que este nodo aporta con incógnitas que se pueden resolver con las 3 ecuaciones de equilibrio de este nodo. Dentro de este conjunto de incógnitas está la fuerza en la barra AD, que es también una incógnita en el nodo D. Por lo tanto, al resolver el nodo A, resolveremos la fuerza en la barra AD disminuyendo en 1 incógnita el nodo D, que podría resolverse a continuación para obtener la fuerza en la barra DG.

Paso 1: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del nodo A y se plantean las ecuaciones de equilibrio.





Fuerzas en polea:



Notar que para posteriormente resolver el nodo D y así obtener la fuerza en la barra DG, solo necesitamos resolver P_{AD} en el nodo A. Dado que P_{AC} y P_{AB} están en el plano x-y, el equilibrio en el eje z involucrará solo a la incógnita que necesitamos P_{AD}. Los cálculos se facilitan si escribimos las fuerzas en forma vectorial.

$$\underset{\sim}{d}_{D/A} = -1\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 2\hat{k} \quad ; \quad \|\underset{\sim}{d}_{D/A}\| = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}$$

$$\underset{\sim}{\lambda}_{D/A} = \frac{1}{\|\underset{\sim}{d}_{D/A}\|}\underset{\sim}{d}_{D/A} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-1\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right)$$

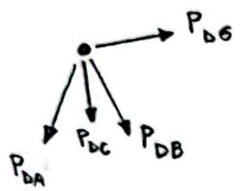
$$\therefore \quad \underset{\sim}{P}_{AD} = P_{AD}\,\underset{\sim}{\lambda}_{D/A} = P_{AD}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-1\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right)$$

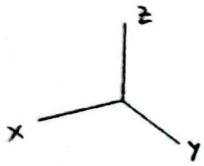
$$\left(P_{AD} = \|\underset{\sim}{P}_{AD}\|\right)$$

$$\Sigma F_z = 0 : \quad P_{AD}\frac{1}{\sqrt{5}}2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{AD} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ \text{kN}}$$

Paso 2: Se dibuja diagrama de cuerpo libre del nodo D y se plantean las ecuaciones de equilibrio.





$$\underset{\sim}{d}_{B/D} = -1\hat{i} + 1\hat{j} - 2\hat{k} \; ; \; \|\underset{\sim}{d}_{B/D}\| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$$

$$\underset{\sim}{d}_{C/D} = -1\hat{i} - 1\hat{j} - 2\hat{k} \; ; \; \|\underset{\sim}{d}_{C/D}\| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$$

$$\underset{\sim}{d}_{G/D} = -2\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} \; ; \; \|\underset{\sim}{d}_{G/D}\| = \sqrt{2^2} = 2$$

$$\underset{\sim}{\lambda}_{B/D} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1\hat{i} + 1\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$\underset{\sim}{\lambda}_{C/D} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1\hat{i} - 1\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$\underset{\sim}{\lambda}_{G/D} = \frac{1}{2}(-2\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k})$$

$(P_{DA} = \|\underset{\sim}{P}_{DA}\|)$

$(P_{DB} = \|\underset{\sim}{P}_{DB}\|)$

$(P_{DC} = \|\underset{\sim}{P}_{DC}\|)$

$(P_{DG} = \|\underset{\sim}{P}_{DG}\|)$

$$\underset{\sim}{P}_{DA} = -\underset{\sim}{P}_{AD} = \frac{1}{2}(1\hat{i} - 0\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$\underset{\sim}{P}_{DB} = P_{DB}\,\underset{\sim}{\lambda}_{B/D} = P_{DB}\,\frac{1}{\sqrt{6}}(-1\hat{i} + 1\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$\underset{\sim}{P}_{DC} = P_{DC}\,\underset{\sim}{\lambda}_{C/D} = P_{DC}\,\frac{1}{\sqrt{6}}(-1\hat{i} - 1\hat{j} - 2\hat{k})$$

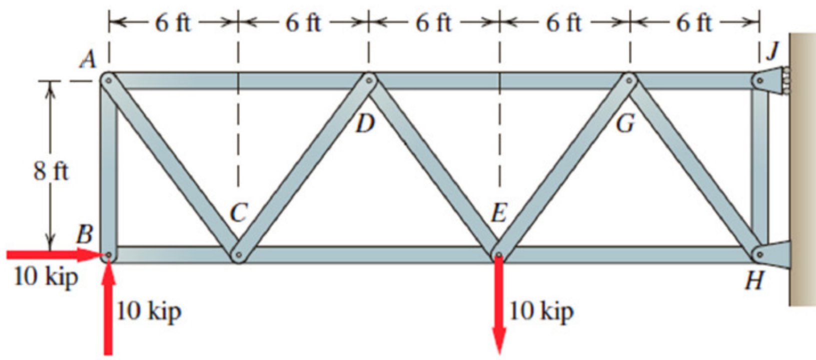
$$\underset{\sim}{P}_{DG} = P_{DG}\,\underset{\sim}{\lambda}_{G/D} = P_{DG}\,\frac{1}{2}(-2\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k})$$

$$\Sigma \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{0} : \quad \underset{\sim}{P}_{DA} + \underset{\sim}{P}_{DB} + \underset{\sim}{P}_{DC} + \underset{\sim}{P}_{DG} = \underset{\sim}{0}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma F_x = 0 &: \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}P_{DB} - \frac{1}{\sqrt{6}}P_{DC} - P_{DG} = 0 \\
\Sigma F_y = 0 &: \quad \frac{1}{\sqrt{6}}P_{DB} - \frac{1}{\sqrt{6}}P_{DC} = 0 \\
\Sigma F_z = 0 &: \quad -1 - \frac{2}{\sqrt{6}}P_{DB} - \frac{2}{\sqrt{6}}P_{DC} = 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &P_{DB} = P_{DC} = -0.6124 \text{ kN} \\ &\boxed{P_{DG} = 1 \text{ kN}} \end{aligned}$$

PROBLEMA 5

Problema: Usar el método de las secciones para encontrar las fuerzas en las barras *DE* y *DG*.



SOLUCIÓN:

La armadura es simple con $m = 13$ barras y $n = 8$ nodos. Los 8 nodos proveen un total de 16 ecuaciones. Hay $r = 3$ condiciones de soporte. Por lo tanto,

$$m = 13, \quad n = 8, \quad r = 3$$

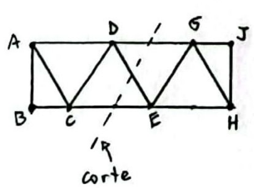
$$\left.\begin{aligned} m + r &= 13 + 3 = 16 \\ 2n &= 16 \end{aligned}\right\} \quad m + r = 2n = 16.$$

A menos que la armadura esté impropiamente restringida, la armadura está completamente restringida y es estáticamente determinada.

<u>Resolución mediante el método de las secciones</u>

Como las barras DE y DG están alejadas de los soportes, no es necesario determinar las reacciones.

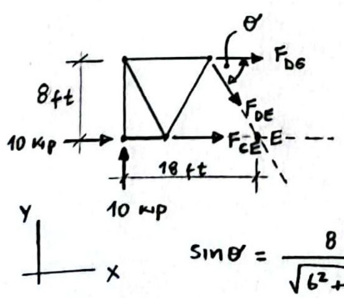
Método de las secciones: hacemos un corte que involucre a lo más 3 barras y dentro de estas debe estar DE o DG, o ambas.



Para determinar F_{DG} podemos sumar momentos con respecto a un punto conveniente (punto E) de modo que solo quede expuesta F_{DG}:

$$\Sigma M_E = 0: \quad -8F_{DG} + 18(10) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{DG} = -22.5 \text{ kip}} \quad (F_{DG} = 22.5 \text{ kip (C)})$$



$$\sin\theta = \frac{8}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{8}{10}$$

F_{DE} se puede determinar sumando fuerzas en la dirección y:

$$\Sigma F_y = 0: \quad -F_{DE}\sin\theta + 10 = 0$$

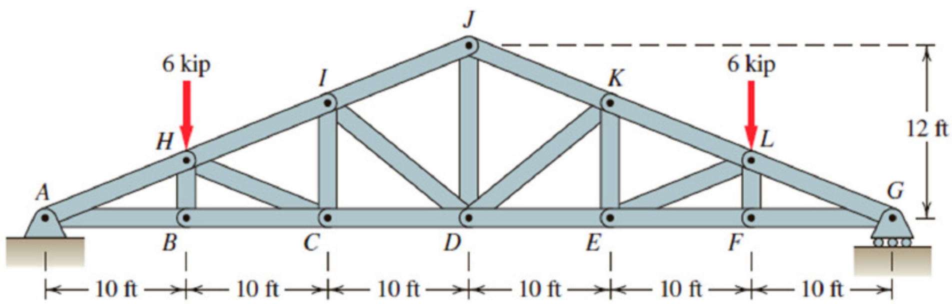
$$\Rightarrow \boxed{F_{DE} = \frac{10}{\sin\theta} = \frac{10(10)}{8} = 12.5 \text{ kip}}$$

$$(F_{DE} = 12.5 \text{ kip (T)})$$

OBTENER CÓDIGO MATLAB: U4_problema5.m

PROBLEMA 6

Problema: Usar una combinación del método de los nodos y método de las secciones para encontrar la fuerza en las barra *JD*.



SOLUCIÓN:

La armadura es simple con $m = 21$ barras y $n = 12$ nodos. Los 12 nodos proveen un total de 24 ecuaciones. Hay $r = 3$ condiciones de soporte. Por lo tanto,

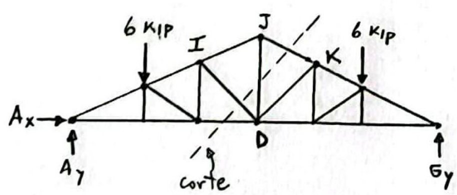
$$m = 21, \quad n = 12, \quad r = 3$$

$$\left.\begin{aligned} m + r &= 21 + 3 = 24 \\ 2n &= 24 \end{aligned}\right\} \quad m + r = 2n = 24.$$

A menos que la armadura esté impropiamente restringida, la armadura está completamente restringida y es estáticamente determinada.

Resolución mediante método de los nodos y método de las secciones

En este problema no es posible introducir un corte que involucre solo a 3 barras. En estas situaciones tendremos que combinar el método de los nodos con el de las secciones.



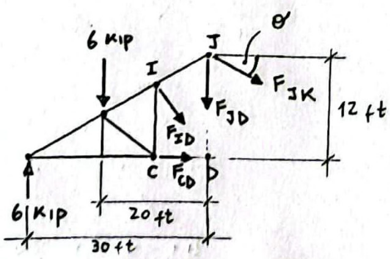
Reacciones:

$\Sigma F_x = 0: \quad \boxed{A_x = 0}$

$\Sigma F_y = 0: \quad A_y + G_y = 12$

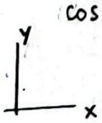
$\Sigma M_A = 0: \quad -10(6) - 50(6) + 60(G_y) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} G_y &= 6 \text{ kip} \\ A_y &= 6 \text{ kip} \end{aligned}}$$



$$\cos\theta = \frac{30}{\sqrt{30^2 + 12^2}} = \frac{30}{\sqrt{1044}}$$

$$\sin\theta = \frac{12}{\sqrt{1044}}$$



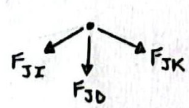
Método de las secciones: para determinar F_{JK}

$\Sigma M_D = 0: \quad -12 F_{JK} \cos\theta + 20(6) - 30(6) = 0$

$$\Rightarrow F_{JK} = \frac{20(6) - 30(6)}{12\cos\theta} = \left(\frac{20(6) - 30(6)}{12(30)}\right)\sqrt{1044}$$

$$\approx -5.39 \text{ kip}$$

Método de los nodos: en el nodo J para determinar F_{JD}.



$\Sigma F_x = 0: \quad F_{JK}\cos\theta - F_{JI}\cos\theta = 0$

$$\Rightarrow \boxed{F_{JI} = F_{JK} = -5.39 \text{ kip}}$$

$\Sigma F_y = 0: \quad -F_{JD} - F_{JI}\sin\theta - F_{JK}\sin\theta = 0$

$$\Rightarrow \boxed{F_{JD} = 5.39\left(\frac{12}{\sqrt{1044}}\right) + 5.39\left(\frac{12}{\sqrt{1044}}\right) \approx 4 \text{ kip}}$$