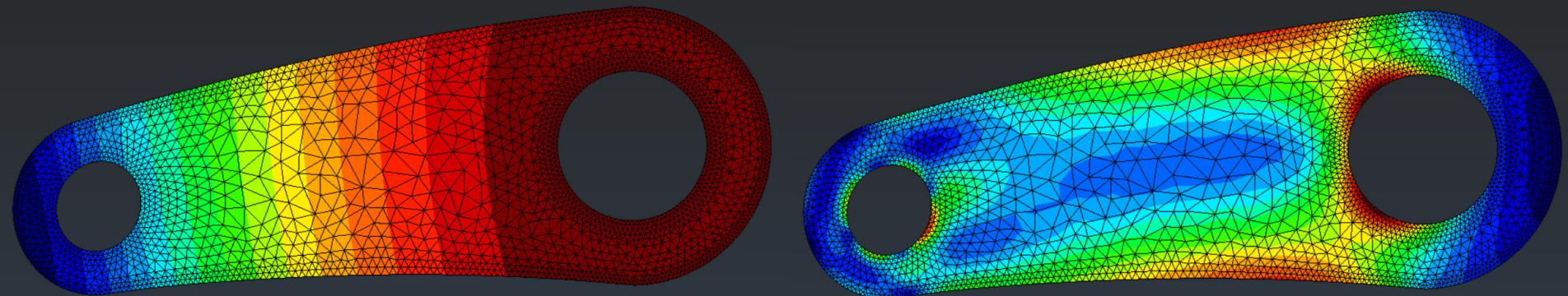


# MECÁNICA ESTÁTICA

## ME3130



Alejandro Ortiz Bernardin

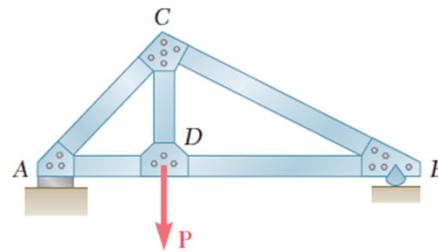
aortizb@uchile.cl

[www.camlab.cl/alejandro](http://www.camlab.cl/alejandro)

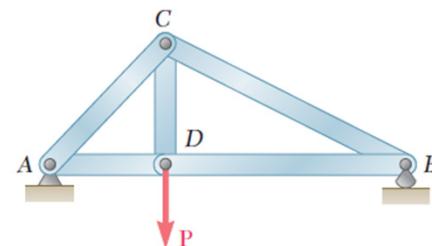
- I. Armaduras Simples
- II. Tipos de Armaduras
- III. Armaduras Compuestas
- IV. Restricción Completa, Parcial e Impropia
- V. Método de los Nodos
- VI. Método de las Secciones
- VII. Armazones y Máquinas

## Armadura

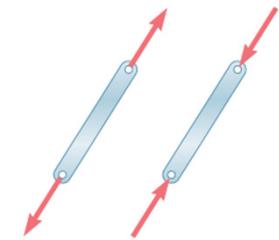
- Elementos/barras/miembros rectos se conectan entre sí por medio de nodos.
- Los nodos representan **pasadores o pernos sin fricción** que idealizan las conexiones reales que son remachadas o soldadas.
- Los pasadores solo pueden transmitir fuerzas. Por lo tanto, cada barra es un elemento sometido a dos fuerzas y se analizan como tal. En otras palabras, cada barra solo puede estar sometida a **cargas axiales de tracción o de compresión**. Como consecuencia, **los apoyos no pueden contener restricciones de rotación**.
- Por lo anterior, las **cargas externas deben aplicarse en los nodos**. Esto incluye el peso propio de las barras (se supone mitad del peso en cada nodo).



Armadura real



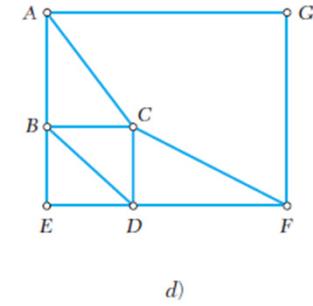
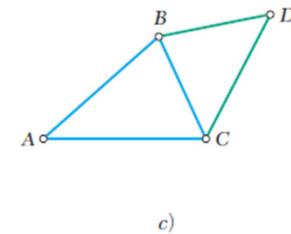
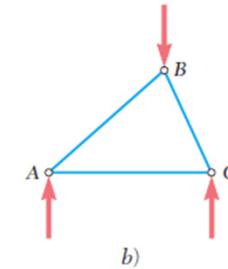
Armadura idealizada



Tracción/Compresión

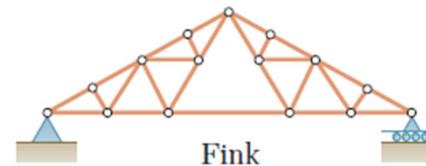
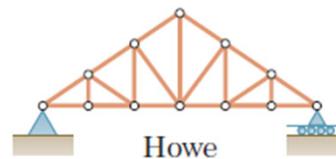
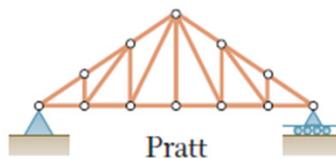
## Armaduras Simples

- Una armadura compuesta por tres barras **formando un triángulo** es una armadura rígida pues esta no colapsará cuando sea cargada.
- Una estructura simple es una estructura que **se forma por expansión de un triángulo base**: se sacan dos nuevas barras desde los nodos B y C del triángulo base, y se unen en D. Luego, desde dos nodos de la armadura existente se sacan dos nuevas barras y se unen en un nuevo nodo. El proceso se repite hasta donde se desee.
- Las **armaduras simples** son automáticamente **armaduras rígidas**.
- Las armaduras que no pueden ser construidas mediante el procedimiento descrito anteriormente no son armaduras simples.

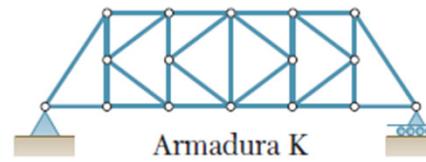
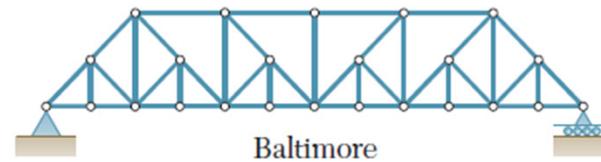
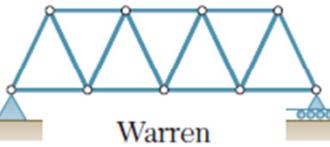
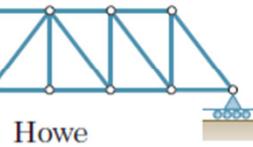
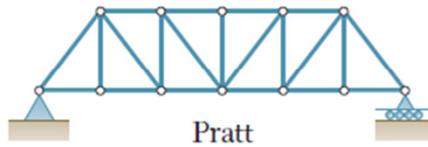


Procedimiento de construcción de armadura simple por expansión de un triángulo base.

# Tipos de Armaduras



Armaduras típicas para techo

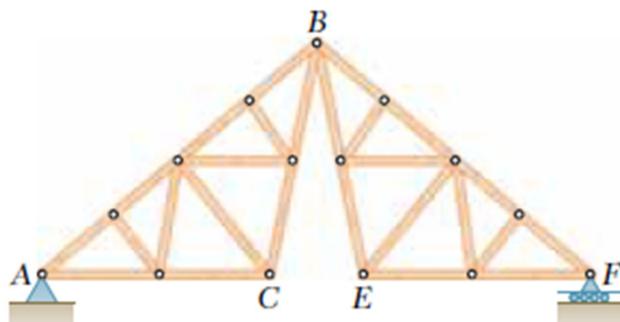


Armaduras típicas para puentes

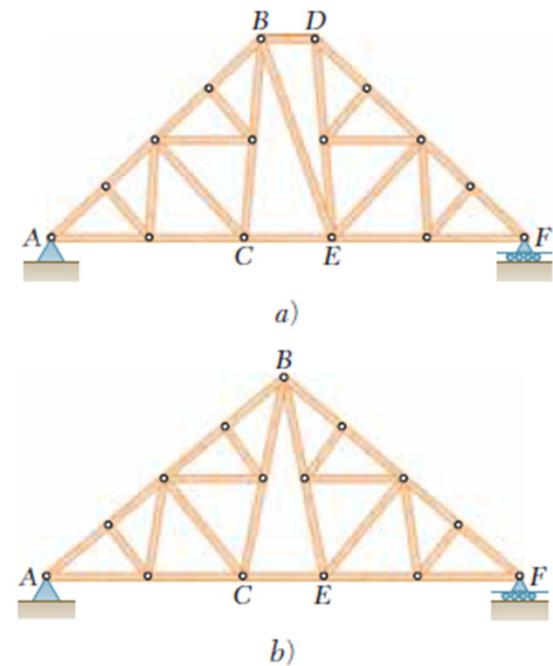
Las armaduras **Baltimore** y **Fink** no son armaduras simples pues no pueden ser obtenidas por el proceso de expansión de un triángulo base. No obstante, son rígidas.

## Armaduras Compuestas

- Se construyen a partir de **conectar dos o más armaduras simples**.
- Se deben construir con precaución pues **no son necesariamente rígidas** (dependerá de cómo se conecten y/o de las condiciones de soporte).
- La armaduras de **Fink** y **Baltimore** son dos ejemplos de **armaduras compuestas**.



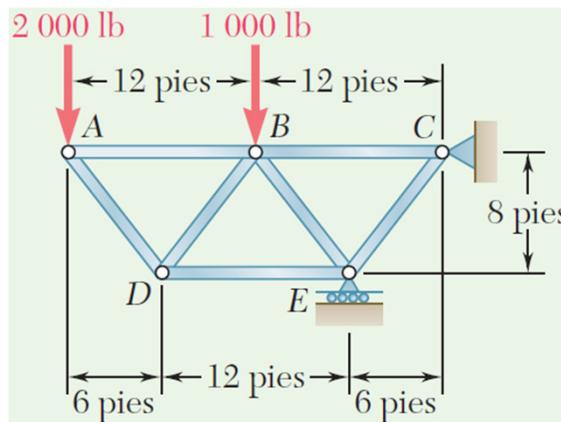
Armadura compuesta que no es rígida



**Figura 6.16** Armaduras compuestas.  
a) Dos armaduras simples ABC y DEF conectadas por tres barras. b) Dos armaduras simples ABC y BEF conectadas por un nodo y una barra (una armadura Fink).

# Restricción Completa, Parcial e Impropia

- Una barra de la armadura al estar sometida solo a dos cargas, aporta solo una incógnita al problema: su carga axial.
- Las armaduras se suelen resolver mediante DCLs de sus nodos (método de los nodos).
- Cada nodo aporta con 2 ecuaciones provenientes de la sumatoria de fuerzas sobre el nodo en los dos ejes coordenados.
- En dos dimensiones, la relación entre número de ecuaciones que aportan los nodos y la cantidad de incógnitas que aportan las barras está dada por:  $m + 3 = 2n$ , donde  $m$  es el número de barras y  $n$  es el número de nodos. El número 3 proviene de las 3 incógnitas que aportan los apoyos.



$$m = 7, n = 5$$

$$m + 3 = 10$$

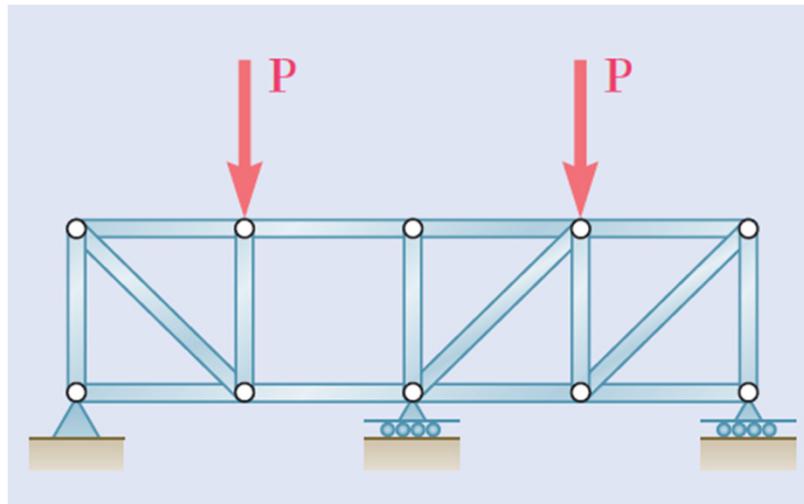
$$2n = 10$$

$$\rightarrow m + 3 = 2n = 10$$

El problema puede ser resuelto por estática (estáticamente determinado).

# Restricción Completa, Parcial e Impropia

- En ocasiones, puede darse la situación en que **una barra de la armadura ha sido eliminada y en reemplazo se ha agregado una incógnita mediante un soporte adicional**. Sea  $r > 3$  la cantidad de incógnitas que aportan los soportes. En dos dimensiones, la relación entre número de ecuaciones que aportan los nodos y la cantidad de incógnitas que aportan las barras está dada por:  **$m + r = 2n$** , donde  **$m$**  es el número de barras y  **$n$**  es el número de nodos.



$$m = 16, n = 10, r = 4$$

$$m + r = 20$$

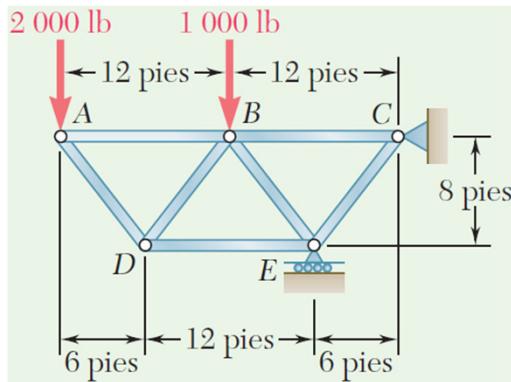
$$2n = 20$$

El problema puede ser resuelto por estática (estáticamente determinado) aún cuando la cantidad de incógnitas aportadas por los apoyos es  $> 3$ .

**Definición:** El problema es **completamente restringido y estáticamente determinado** si todas reacciones en los soportes y fuerzas en las barras pueden determinarse estáticamente para estados de carga generales.

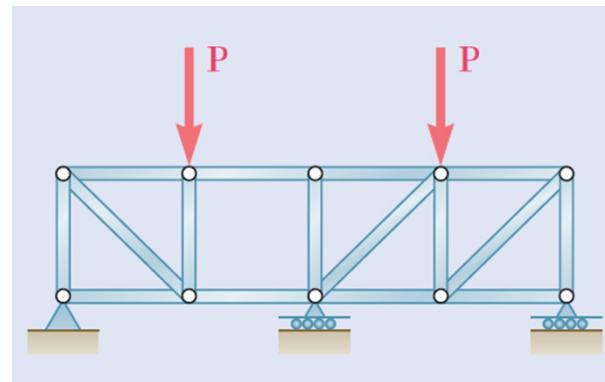
# Restricción Completa, Parcial e Impropia

## Armadura completamente restringida



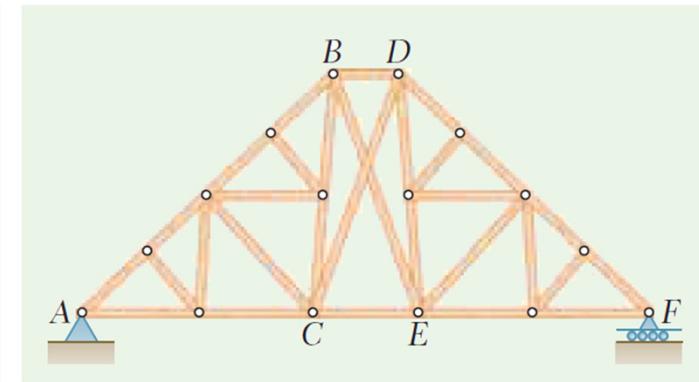
$$\begin{aligned}m &= 7, n = 5, r = 3 \\m + r &= 10 \\2n &= 10 \\-> m + r &= 2n\end{aligned}$$

La armadura está **completamente restringida** y es **estáticamente determinada** (armadura isostática)



$$\begin{aligned}m &= 16, n = 10, r = 4 \\m + r &= 20 \\2n &= 20 \\-> m + r &= 2n\end{aligned}$$

La armadura está **completamente restringida** y es **estáticamente determinada** (armadura isostática).

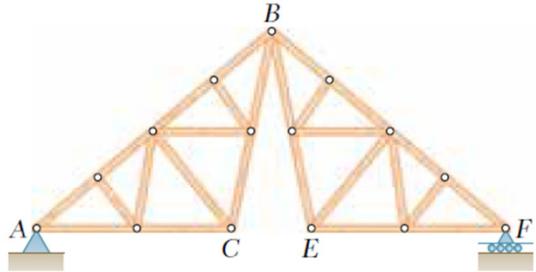


$$\begin{aligned}m &= 30, n = 16, r = 3 \\m + r &= 33 \\2n &= 32 \\-> m + 3 &> 2n\end{aligned}$$

La armadura está **completamente restringida** y es **estáticamente indeterminada** (armadura hiperestática).

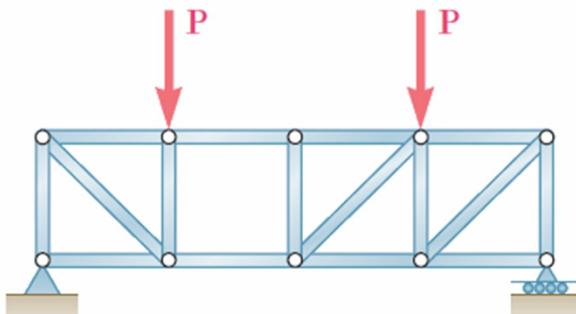
# Restricción Completa, Parcial e Impropia

## Armadura parcialmente restringida



$$\begin{aligned}m &= 26, r = 3, n = 15 \\m + r &= 29 \\2n &= 30 \\-> m + r &< 2n\end{aligned}$$

La armadura colapsará porque **falta una restricción o una barra** que impida que la armadura colapse (**la armadura no es rígida**): **armadura parcialmente restringida**.

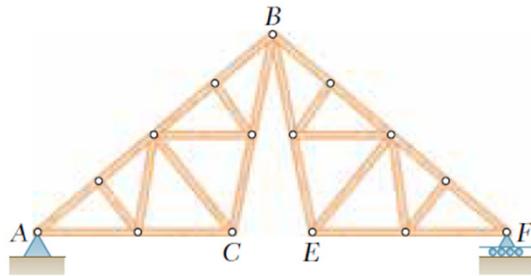


$$\begin{aligned}m &= 16, r = 3, n = 10 \\m + r &= 19 \\2n &= 20 \\-> m + r &< 2n\end{aligned}$$

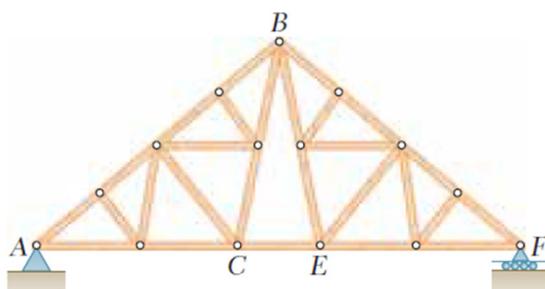
Falta una restricción en la armadura: **armadura parcialmente restringida**. ¿Colapsará?: verificar si es posible calcular las reacciones.

# Restricción Completa, Parcial e Impropia

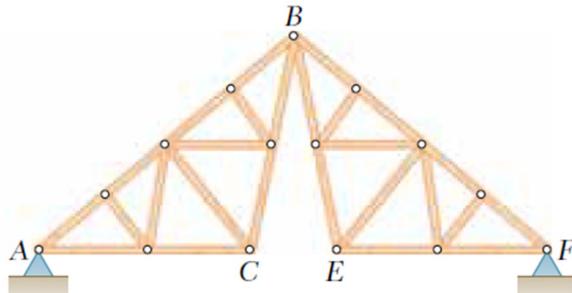
## Rigidizando una armadura que no es rígida



$$\begin{aligned}m &= 26, r = 3, n = 15 \\m + r &= 29 \\2n &= 30 \\&\rightarrow m + r < 2n\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}m &= 27, r = 3, n = 15 \\m + r &= 30 \\2n &= 30 \\&\rightarrow m + r = 2n\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}m &= 26, r = 4, n = 15 \\m + r &= 30 \\2n &= 30 \\&\rightarrow m + r = 2n\end{aligned}$$

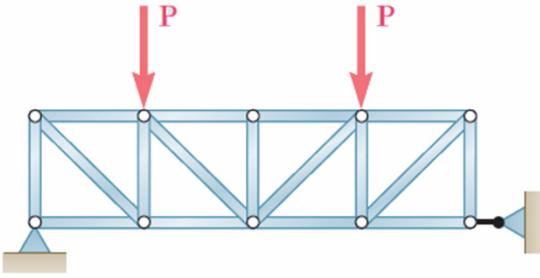
La armadura colapsará porque **falta una restricción o una barra** que impida que la armadura colapse (**la armadura no es rígida**): armadura parcialmente restringida.

**Se agrega la barra CE.**  
Entonces, la armadura queda completamente restringida y estáticamente determinada: **armadura es rígida**.

**La rotación se impide agregando una restricción horizontal en F.** La armadura queda completamente restringida y estáticamente determinada: **armadura es rígida**.

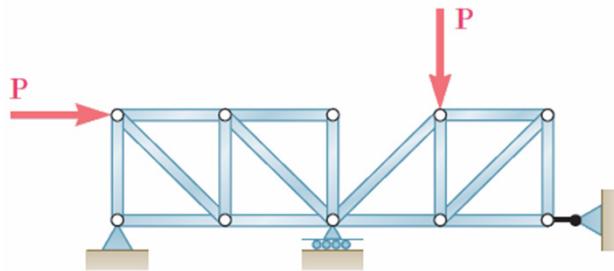
# Restricción Completa, Parcial e Impropia

## Armadura impropriamente restringida



$$\begin{aligned}m &= 17, r = 3, n = 10 \\m + r &= 20 \\2n &= 20 \\-> m + r &= 2n\end{aligned}$$

La reacción del apoyo de eslabón pasa por el punto de apoyo de pasador. **M = 0 no puede satisfacerse en el apoyo del pasador** y la armadura rotará: **armadura impropriamente restringida**.

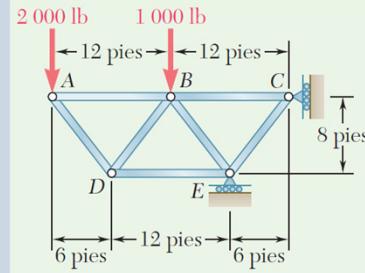
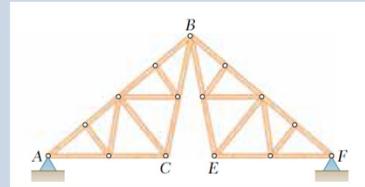


$$\begin{aligned}m &= 16, r = 4, n = 10 \\m + r &= 20 \\2n &= 20 \\-> m + r &= 2n\end{aligned}$$

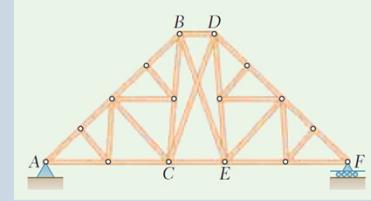
La reacción del apoyo de eslabón pasa por el punto de apoyo de rodillo. **M = 0 no puede satisfacerse en el rodillo** y la armadura de la derecha rotará: **armadura impropriamente restringida**.

# Restricción Completa, Parcial e Impropia

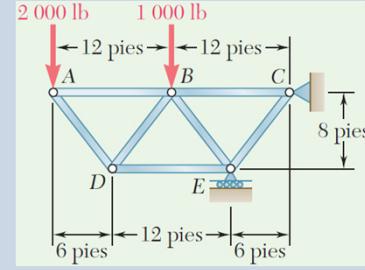
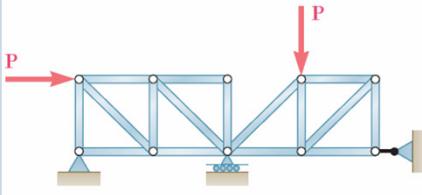
## Resumen

Condición	Análisis	Consecuencias	Ejemplo
$m + r < 2n$	<p>Hay menos incógnitas que ecuaciones. Por lo tanto, algunas de las ecuaciones no se cumplen.</p>	<p>La armadura está <b>parcialmente restringida</b>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Si la armadura es simple, entonces es rígida y la armadura, en ciertos casos, podría incluso poder resolverse.</li> <li>Si la armadura es compuesta, entonces no es rígida y colapsará.</li> </ol>	 <p><math>m = 7, n = 5, r = 2</math>  <math>m + r = 9; 2n = 10</math>  <math>\rightarrow m + r &lt; 2n</math></p>  <p><math>m = 26, r = 3, n = 15</math>  <math>m + r = 29; 2n = 30</math>  <math>\rightarrow m + r &lt; 2n</math></p>

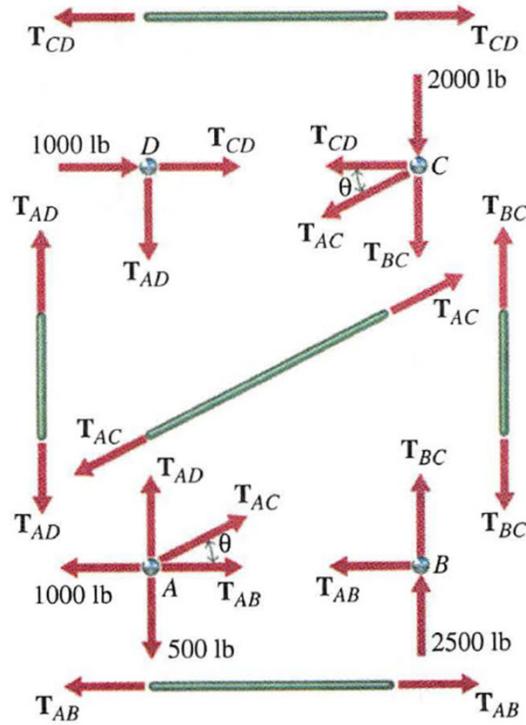
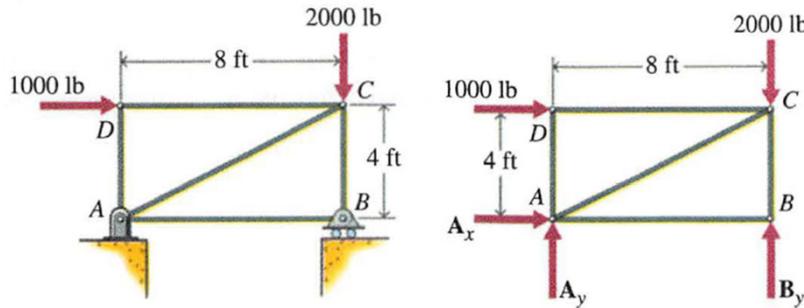
# Restricción Completa, Parcial e Impropia

Condición	Análisis	Consecuencias	Ejemplo
$m + r > 2n$	Hay más incógnitas que ecuaciones. Por lo tanto, no se pueden determinar algunas de las incógnitas.	La armadura está completamente restringida, pero es estáticamente indeterminada (armadura hiperestática).	 <p><math>m = 30, n = 16, r = 3</math> <math>m + r = 33; 2n = 32</math> <math>\rightarrow m + r &gt; 2n</math></p>

# Restricción Completa, Parcial e Impropia

Condición	Análisis	Consecuencias	Ejemplo
$m + r = 2n$	<p>Hay tantas incógnitas como ecuaciones. Sin embargo, esto no significa que pueda determinarse todas las incógnitas y cumplirse todas las ecuaciones, ya que la armadura podría estar impropriamente restringida. Por lo tanto, se debe tratar de determinar las reacciones en los apoyos y las fuerzas en sus elementos.</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Si todas las reacciones y todas las fuerzas en las barras fueron encontradas, entonces la armadura está <b>completamente restringida</b> y es <b>estáticamente determinada</b> (armadura isostática).</li> <li>2) Si alguna reacción o fuerza en alguna barra no pudo ser determinada, entonces la armadura está <b>impropriamente restringida</b>.</li> </ol>	 <p><math>m = 7, n = 5; m + 3 = 10; 2n = 10 \rightarrow m + 3 = 2n</math>. Todas las reacciones y fuerzas en las barras pueden determinarse.</p>  <p><math>m = 16, n = 10, r = 4</math>  <math>m + r = 20; 2n = 20</math>  <math>\rightarrow m + r = 2n</math>  <math>M = 0</math> no puede satisfacerse en el rodillo y la armadura rotará por lo que está impropriamente restringida.</p>

# Método de los Nodos



- La armadura se analiza mediante el equilibrio de cada nodo.
- Para cada nodo se dibuja un diagrama de cuerpo libre.
- Las fuerzas se dibujan saliendo del nodo (barra siente tracción).
- Cada nodo representa un sistema de fuerzas concurrentes por lo que solo intervienen las ecuaciones de equilibrio de fuerzas:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0$$

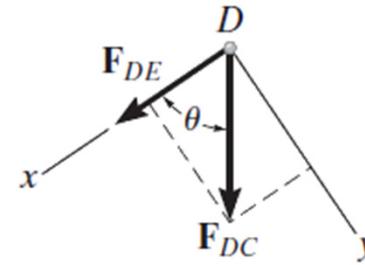
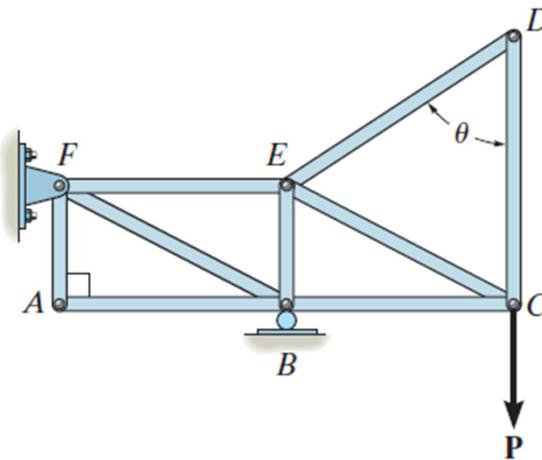
en 2D, y

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$

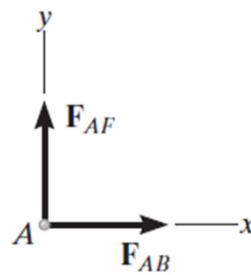
en 3D.

# Método de los Nodos: Miembros de Fuerza Nula

- Cuando en un nodo lleguen 2 barras no colineales, y siempre y cuando no exista soporte o carga sobre el nodo, las 2 barras tendrán fuerza nula.

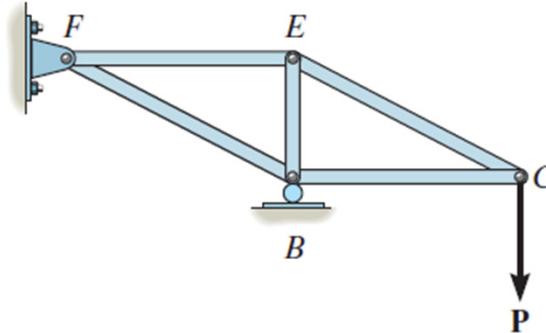


$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0; F_{DC} \sin \theta = 0; \quad F_{DC} = 0 \text{ ya que } \sin \theta \neq 0 \\ \Sigma F_x &= 0; F_{DE} + 0 = 0; \quad F_{DE} = 0\end{aligned}$$



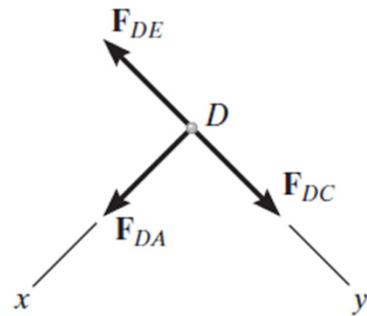
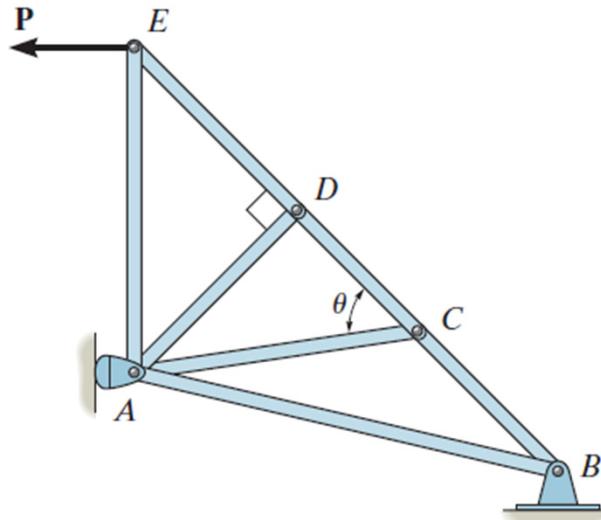
$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0; F_{AB} = 0 \\ \Sigma F_y &= 0; F_{AF} = 0\end{aligned}$$

Barras soportantes



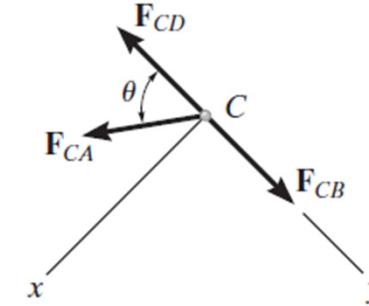
# Método de los Nodos: Miembros de Fuerza Nula

- Cuando en un nodo lleguen 3 barras (2 de ellas colineales), **y siempre y cuando no exista soporte o carga sobre el nodo**, la tercera barra tendrá fuerza nula.

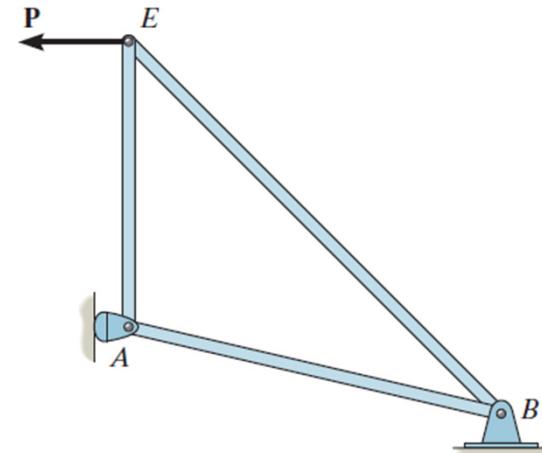


$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0; \quad F_{DA} = 0 \\ \sum F_y &= 0; \quad F_{DC} = F_{DE}\end{aligned}$$

Barras soportantes

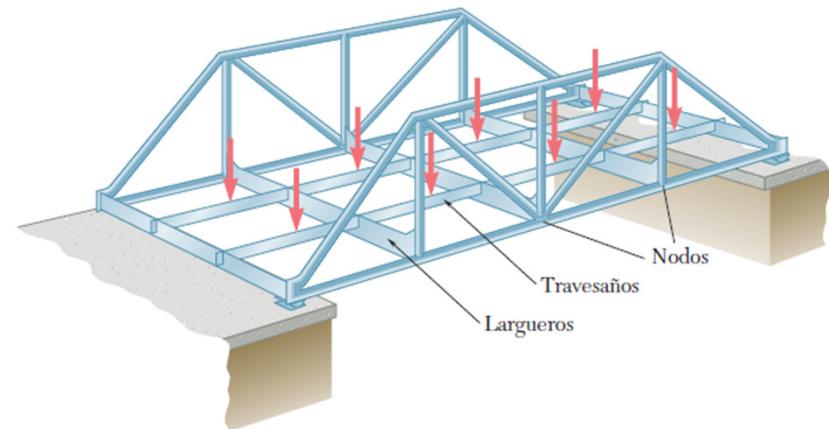
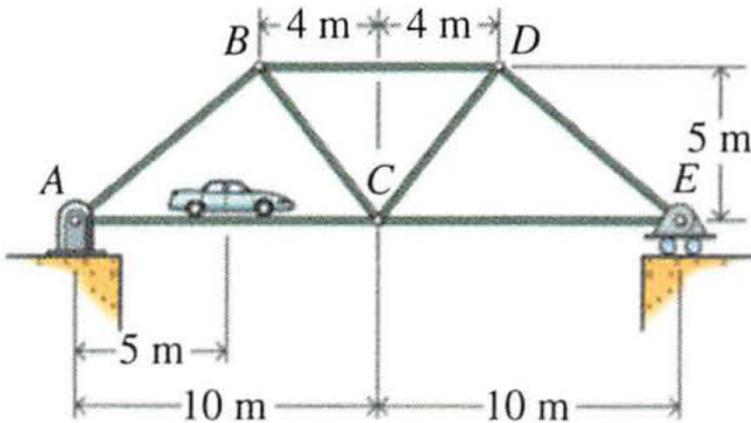


$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0; \quad F_{CA} \sin \theta = 0; \quad F_{CA} = 0 \text{ ya que } \sin \theta \neq 0; \\ \sum F_y &= 0; \quad F_{CB} = F_{CD}\end{aligned}$$



# Método de los Nodos

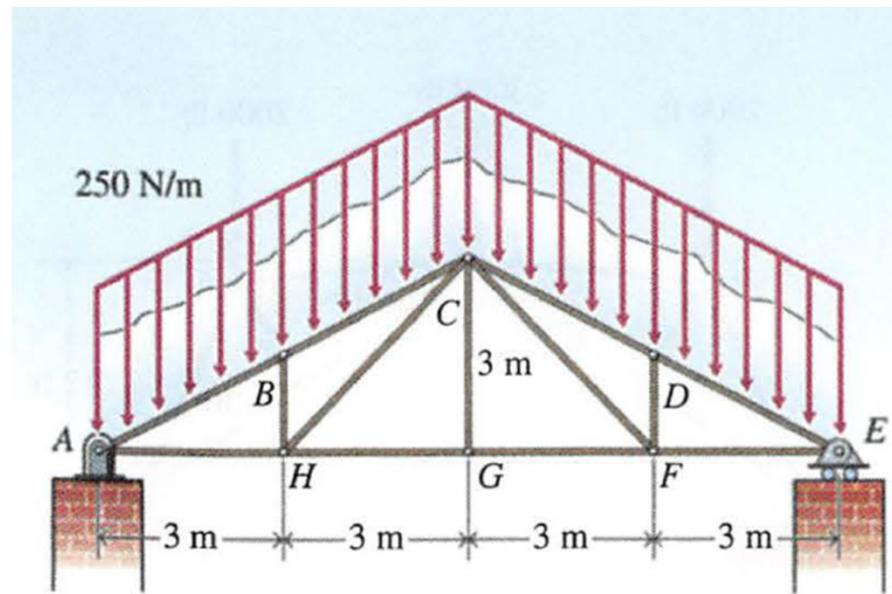
**Problema:** La armadura que muestra un auto detenido representa un lado del puente; otra armadura igual representa el otro lado del puente. Un sistema de piso permite transmitir el peso del auto detenido a los nodos de la armadura. La masa del auto es de 2000 kg. Calcular la fuerza sobre cada barra de la armadura utilizando el método de los nodos.



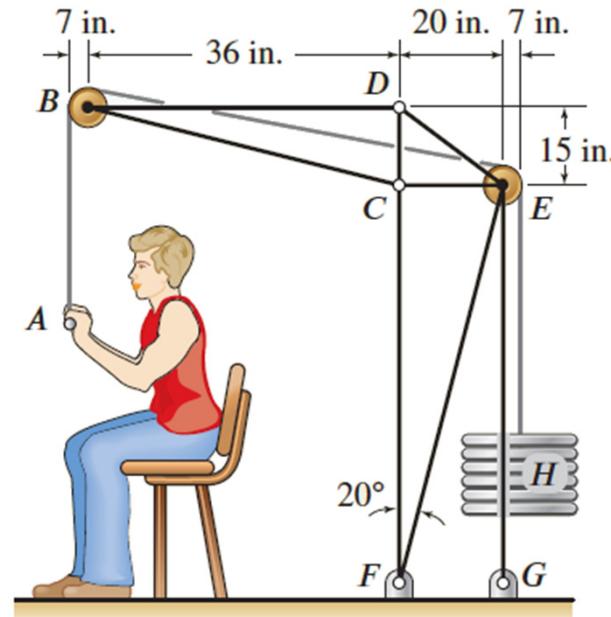
**Observación:** Un sistema de piso de armadura utiliza travesaños y largueros para transmitir una carga aplicada a los nodos de dicha armadura.

# Método de los Nodos

**Problema:** La armadura Pratt mostrada en la figura soporta una carga de nieve que puede aproximarse a una carga distribuida de 250 N/m. Determinar la fuerza en los miembros *BC*, *CH* y *CG*.

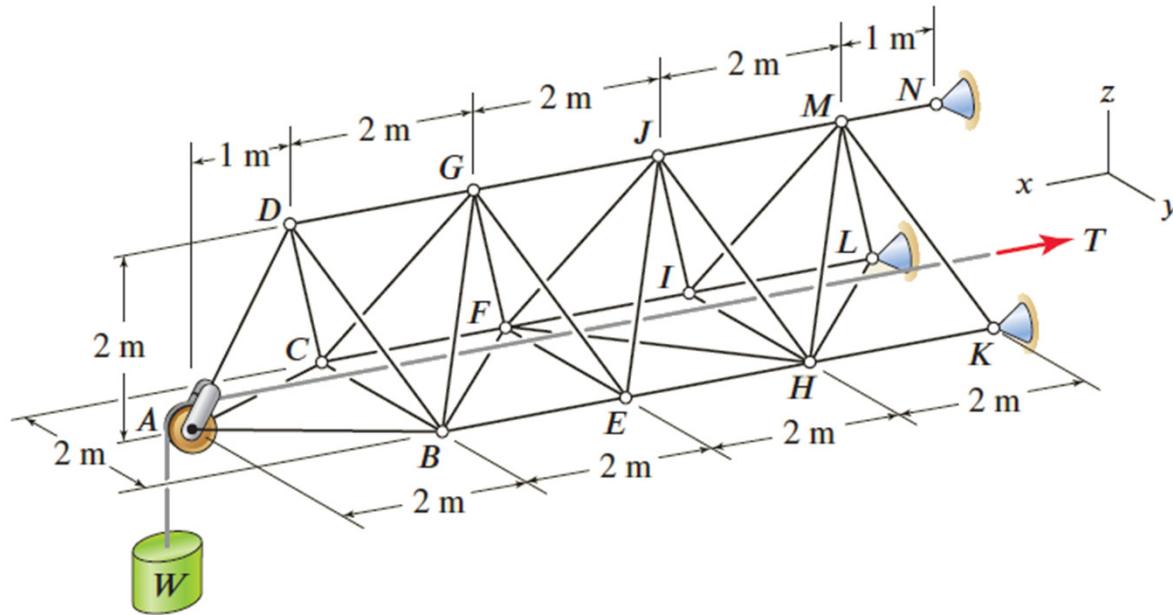


**Problema:** En la máquina de ejercicios que se muestra en la figura, el peso es de  $H = 50$  lbf. Si el segmento de cable  $AB$  es vertical, determinar la fuerza en cada barra de la máquina.



# Método de los Nodos

**Problema:** La pluma de una grúa está en una posición horizontal. Si  $W = 1$  kN, determine la fuerza en la barra  $DG$ .



# Método de las Secciones

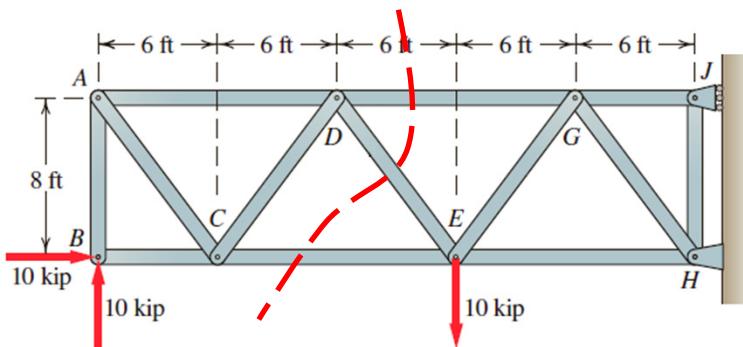


Fig. 1: Determinar fuerza en barra *DE*. Se introduce línea de corte (línea segmentada) para determinar la fuerza en la barra *DE* mediante equilibrio de la parte izquierda de la armadura separada.

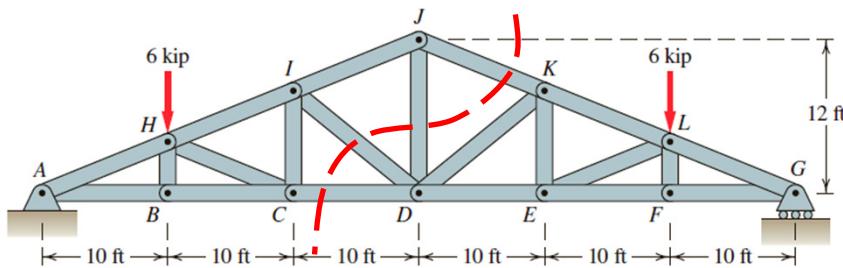
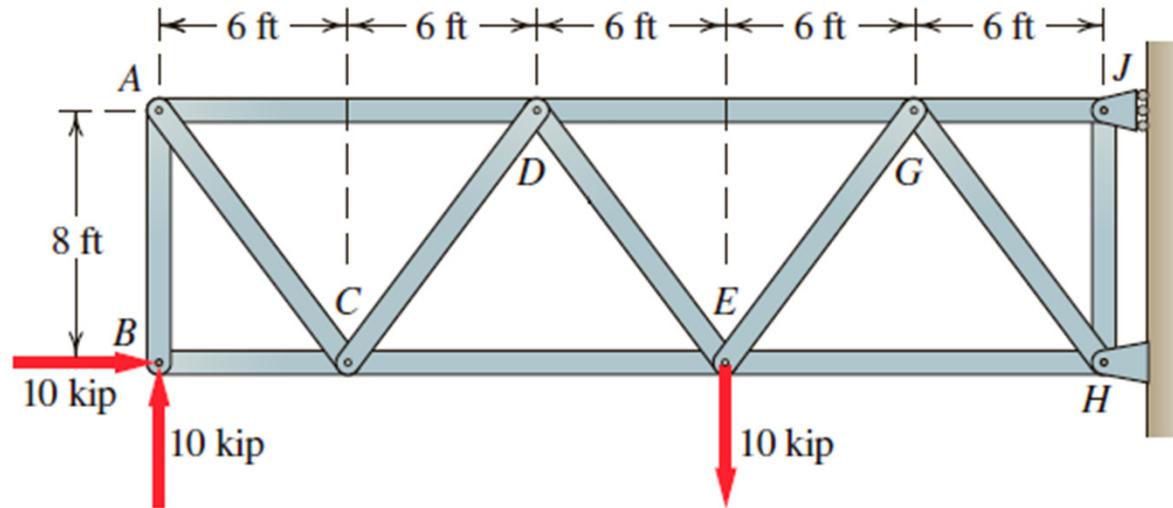


Fig. 2: Determinar fuerza en barra *JD*. Se introduce línea de corte (línea segmentada) para determinar la fuerza en la barra *JK* mediante equilibrio de la parte izquierda de la armadura separada. Luego, mediante método de los nodos en nodo *J*, se determina la fuerza en la barra *JD*.

- Útil cuando se requiere determinar la fuerza en unas pocas barras.
- Consiste en separar una sección de la armadura para, mediante un DCL local, obtener la fuerza en alguna barra.
- **Criterio de separación:** se introduce un corte (Fig. 1) que separa por completo la armadura pasando por un máximo de 3 barras en 2D / 6 barras en 3D (la barra cuya fuerza se quiere determinar debe estar incluida). La fuerza se determina mediante equilibrio de una de las partes separadas.
- **Si no es posible cortar 3 o menos barras,** se puede combinar el método de las secciones con el método de los nodos (Fig. 2).

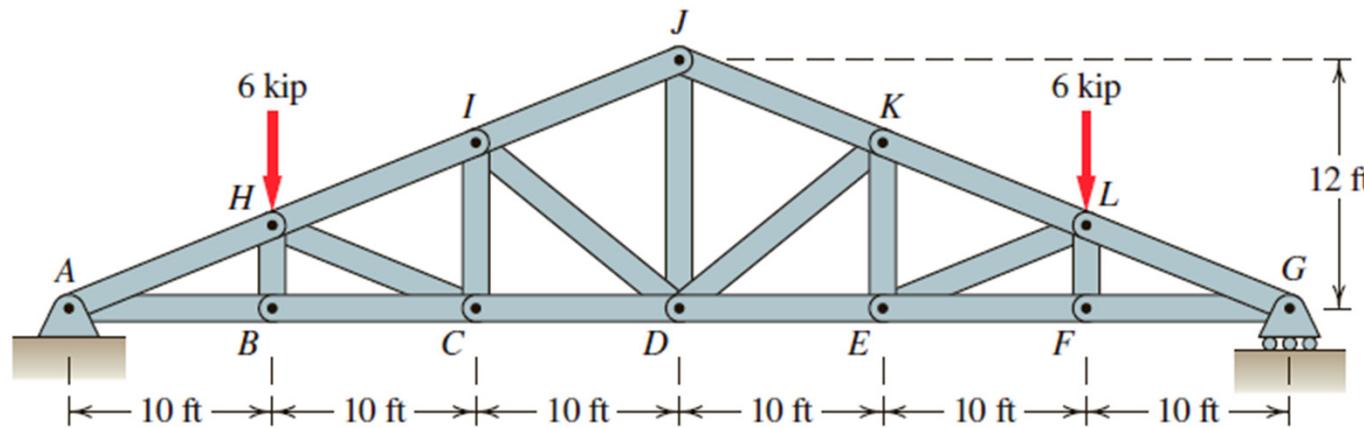
# Método de las Secciones

**Problema:** Usar el método de las secciones para encontrar las fuerzas en las barras *DE* y *DG*.



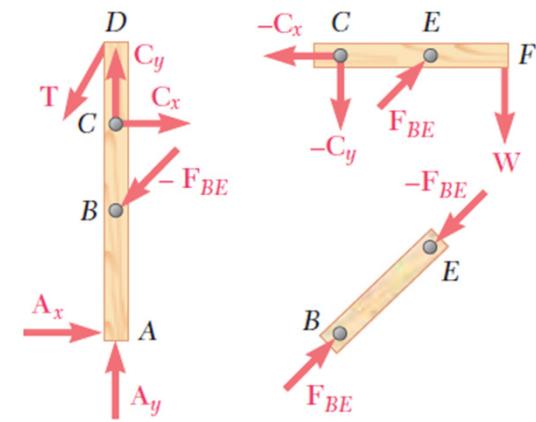
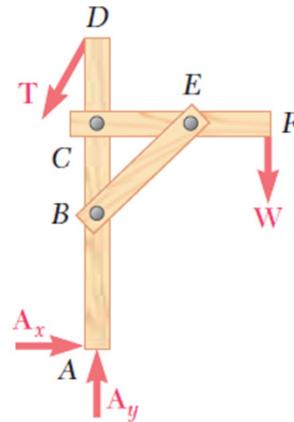
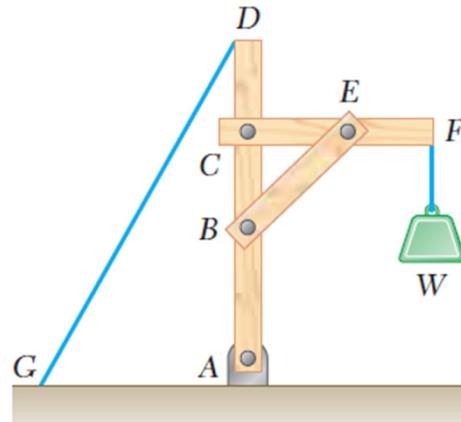
# Método de las Secciones

**Problema:** Usar una combinación del método de los nodos y método de las secciones para encontrar la fuerza en la barra *JD*.



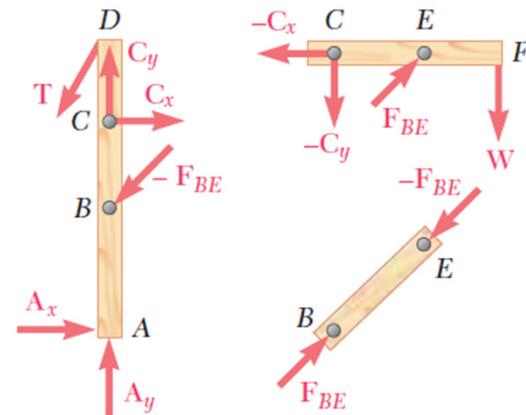
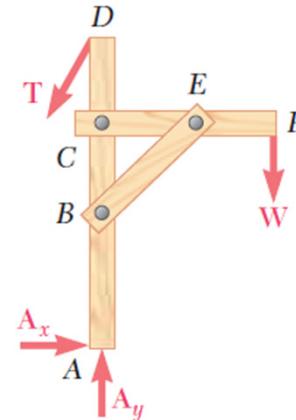
## Armazones

- Estructuras que poseen **al menos un elemento sometido a tres o más fuerzas** (fuerzas múltiples).
- Las fuerzas múltiples, en general, **no estarán dirigidas a lo largo del elemento**.
- Son estructuras **estacionarias totalmente restringidas** y diseñadas para **soportar cargas**.



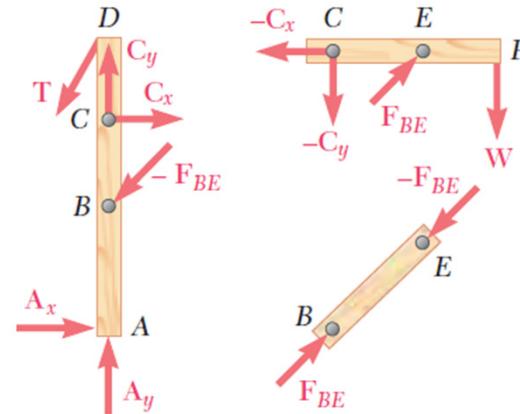
## Resolución de armazones: cálculo de reacciones

- Se supone al armazón como **cuerpo rígido** y se determinan las reacciones.
- Si el número de ecuaciones proporcionadas por el equilibrio de cuerpo rígido (3 en 2D) **son suficientes para determinar las reacciones**, el cálculo termina.
- Si el número de ecuaciones proporcionadas por el equilibrio de cuerpo rígido (3 en 2D) **no son suficientes para determinar las reacciones**, se determinan las reacciones posibles y las reacciones restantes se resuelven mediante **equilibrio local de las partes del armazón**.



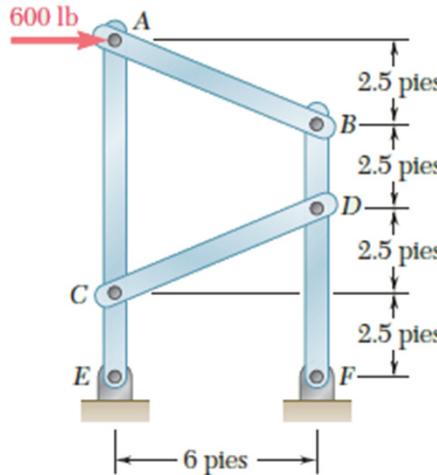
## Resolución de armazones: cálculo de fuerzas en los elementos

- Se calculan las reacciones como se indicó anteriormente.
- Las fuerzas en los elementos se resuelven mediante **equilibrio local de las partes del armazón**.

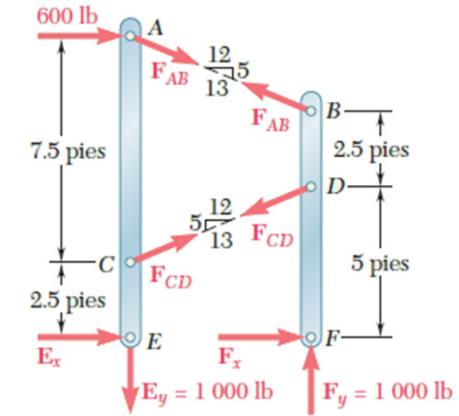
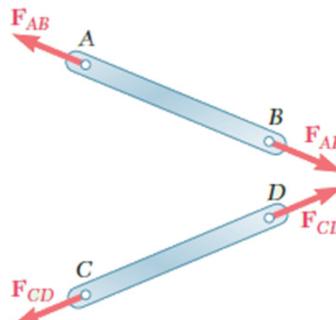


## Análisis especiales

- Cuando un pasador conecta a tres o más elementos, o cuando un pasador conecta a un apoyo y a dos o más elementos o cuando se aplica una carga en un pasador, debe tomarse una decisión clara con relación al elemento seleccionado al cual se supondrá que pertenece el pasador.

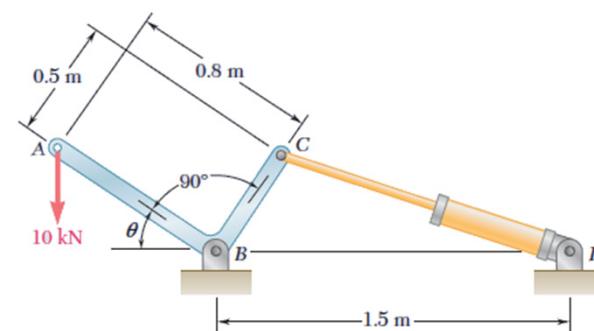
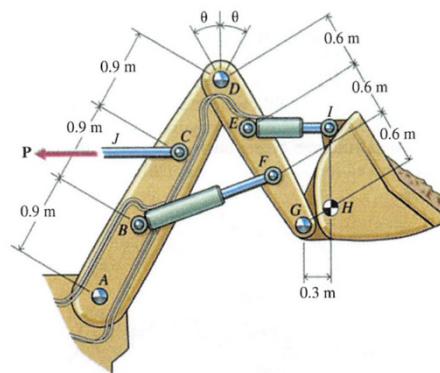
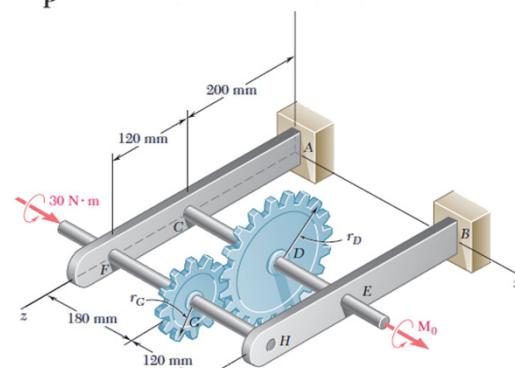
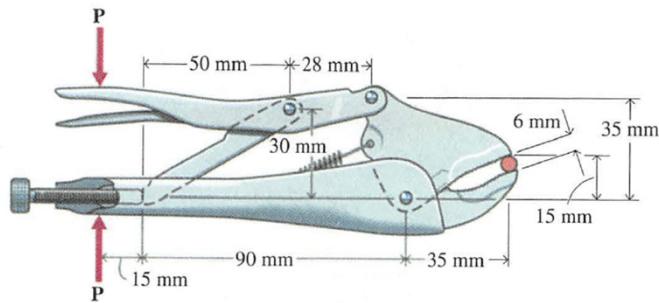


Decisión: se supone que el pasador A pertenece al elemento AE. Por lo tanto, la fuerza en el pasador A actúa sobre el elemento AE.

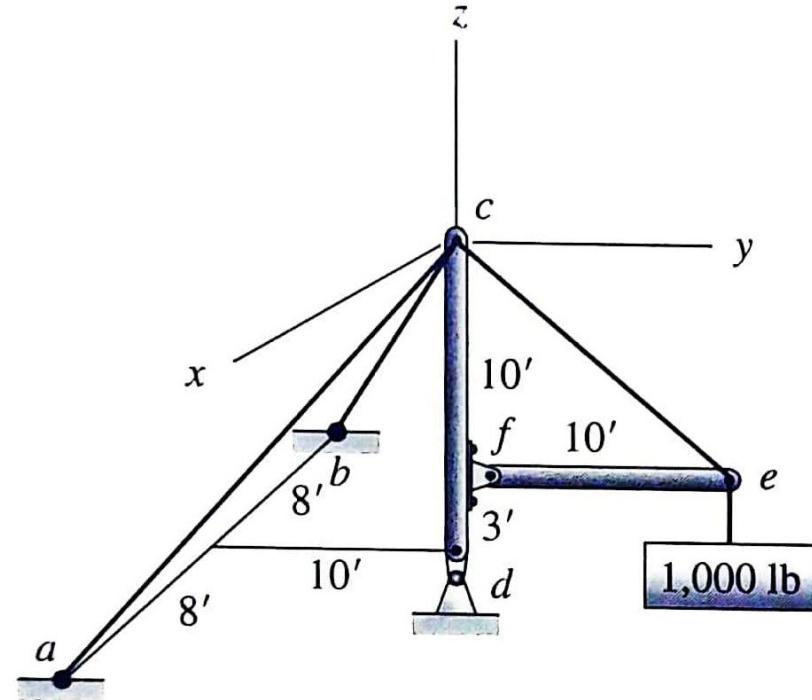


## Máquinas

- Estructuras con elementos **sometidos a fuerzas múltiples**, pero están diseñadas para **transmitir y modificar fuerzas**.
- Pueden ser o no estacionarias y **siempre tendrán partes móviles**.
- Para resolver reacciones y fuerzas en los elementos de las máquinas **se procede como en los armazones**.

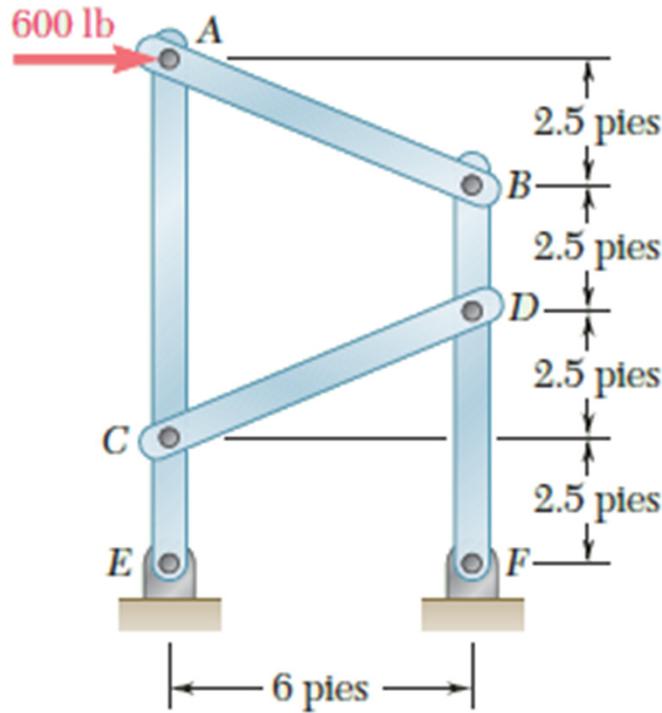


**Problema:** El poste grúa que se muestra en la figura se encuentra soportando una carga de 1000 lbf. El poste tiene rótula de conexión al suelo en el punto *d* y se sostiene mediante los cables *ac* y *bc*. Despreciando el peso propio de los miembros y cables, encontrar las tensiones en los cables *ac*, *bc* y *ce*.



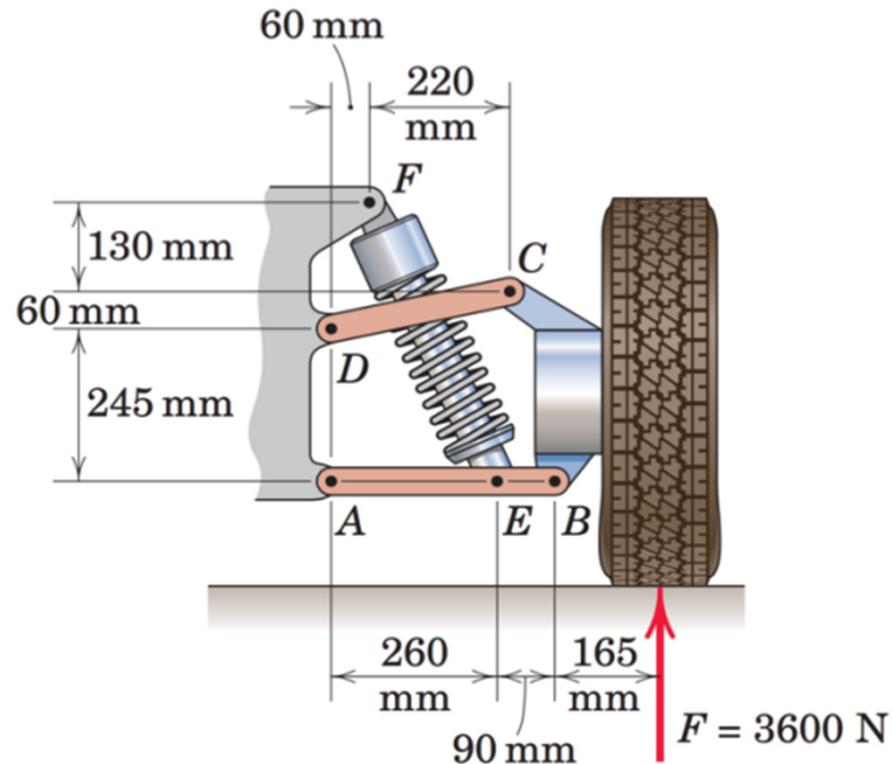
# Armazones y Máquinas

**Problema:** Una fuerza horizontal de 600 lb se aplica sobre el pasador A del armazón. Determinar las fuerzas que actúan sobre los dos elementos verticales del armazón.



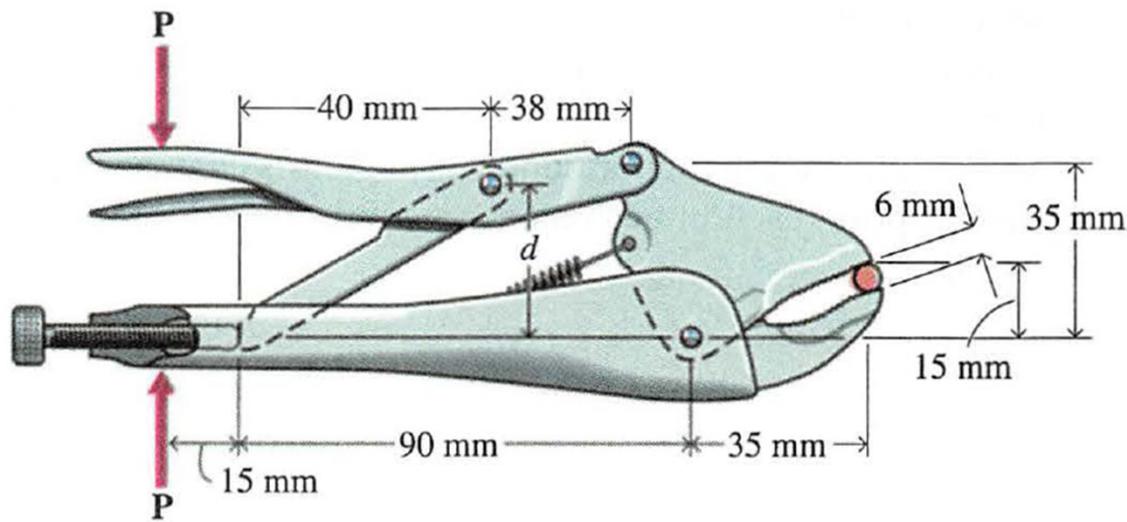
# Armazones y Máquinas

**Problema:** La figura muestra un sistema de suspensión de una rueda de automóvil. Determinar la magnitud de (a) la fuerza en el elemento *DC* y (b) la fuerza de suspensión en el amortiguador *FE* si la fuerza normal *F* ejercida sobre la rueda es de 3600 N.



# Armazones y Máquinas

**Problema:** En los mangos del alicate caimán que se muestra en la figura se aplican fuerzas  $P = 100$  N. Graficar la fuerza aplicada por las mandíbulas al objeto en función de la distancia  $d$  ( $20 \leq d \leq 30$  mm). La fuerza ejercida por el resorte es despreciable.



**Problema:** Dos cilindros hidráulicos controlan el movimiento del brazo y cangilón de la retroexcavadora que se muestra en la figura. En la posición mostrada, se aplica una carga horizontal de 14 kN en el cangilón en el punto *L* (la superficie inferior del cangilón está en la posición justo antes de tocar el suelo). Suponiendo que el peso del brazo y del cangilón son despreciables en comparación con las fuerzas de operación, encontrar las fuerzas en los pasadores *A* y *G*.

