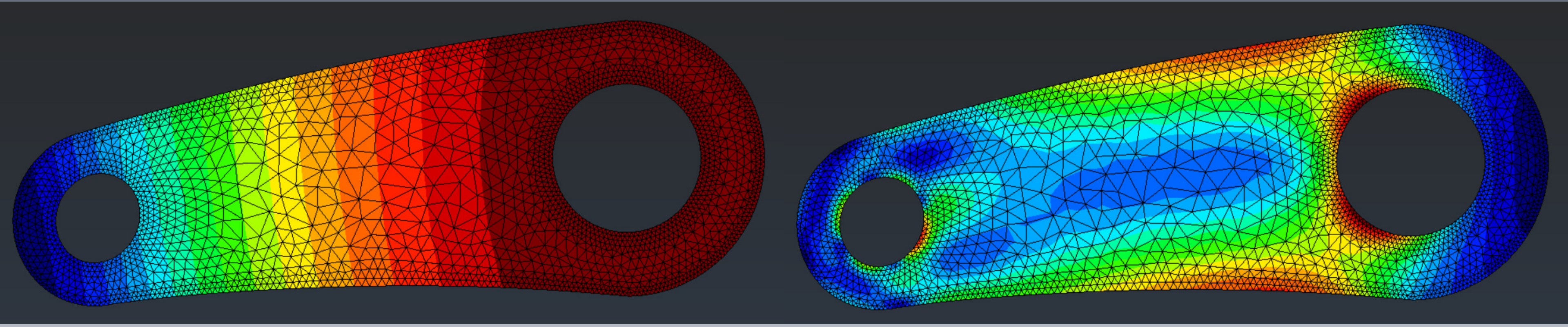
MECÁNICA ESTÁTICA
ME3130



Alejandro Ortiz Bernardin

aortizb@uchile.cl

www.camlab.cl/alejandro

DIMEC
INGENIERÍA MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE CHILE

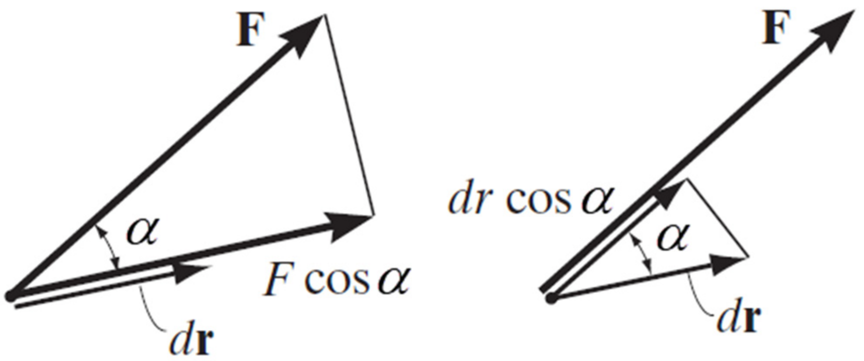
MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL

Contenidos

Trabajo Diferencial de un Fuerza y de un Par

Trabajo diferencial de una fuerza

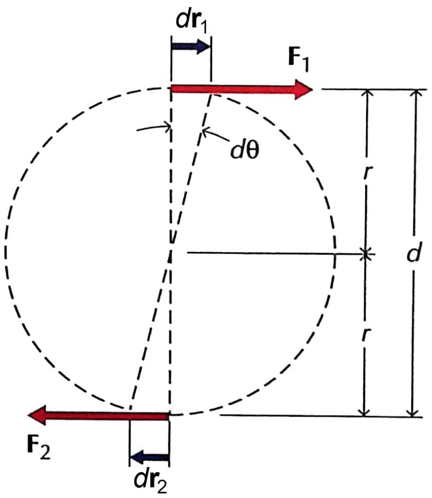
$$\boxed{dU = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \|F\|\,\|dr\|\cos\alpha}$$



- El trabajo será positivo cuando la fuerza proyectada en $d\boldsymbol{r}$ quede dirigida en la misma dirección del desplazamiento ($-90^\circ < \alpha < 90^\circ$).
- El trabajo será negativo cuando la fuerza proyectada en $d\boldsymbol{r}$ quede dirigida en dirección opuesta a la del desplazamiento ($90^\circ < \alpha < 270^\circ$).

Trabajo diferencial de un par

En 2D el trabajo diferencial de un par puede ser determinado del siguiente modo:



$$dU = \boldsymbol{F}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{F}_2 \cdot d\boldsymbol{r}_2$$

$$\|dr_1\| = \|dr_2\| = r\,d\theta$$

$$\|F_1\| = \|F_2\| = F$$

$$\boxed{\begin{aligned} dU &= \|F_1\|\,\|dr_1\|\cos 0^\circ + \|F_2\|\,\|dr_2\|\cos 0^\circ \\ &= F(r\,d\theta) + F(r\,d\theta) \\ &= F(2r)\,d\theta = Fd\,d\theta = M\,d\theta. \end{aligned}}$$

En 3D, el signo del trabajo diferencial quedará determinado por el producto punto entre el desplazamiento angular infinitesimal $d\boldsymbol{\theta}$ y el par $\boldsymbol{M}$:

$$\boxed{dU = \boldsymbol{M} \cdot d\boldsymbol{\theta} = \|M\|\,\|d\theta\|\cos\alpha}$$

Trabajo virtual: en contraste con el trabajo que una fuerza o un par hace durante un movimiento real expresado por desplazamientos diferenciales de magnitudes dr y $d\theta$, el trabajo virtual es un movimiento imaginario infinitesimal que se aplica a un sistema en equilibrio estático, y por lo tanto es un movimiento que no existe. Estos desplazamientos virtuales operan como un diferencial de primer orden y se denotan por δr y $\delta\theta$.

Trabajo virtual de una fuerza:

$$\delta U = \boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{r} = \|F\| \, \|\delta r\| \cos\alpha$$

Trabajo virtual de un par:

$$dU = \boldsymbol{M} \cdot \delta \boldsymbol{\theta} = \|M\| \, \|\delta\theta\| \cos\alpha$$

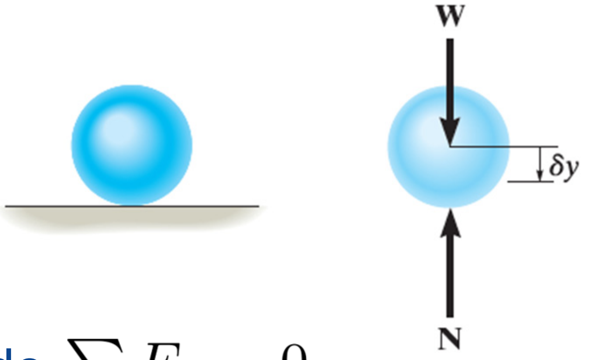
Método del Trabajo Virtual (Cuerpos Rígidos)

Principio del trabajo virtual: “Si un cuerpo rígido está en equilibrio, entonces la suma algebraica del trabajo virtual hecho por todas las fuerzas y momentos que actúan sobre el cuerpo es cero para cualquier desplazamiento virtual del cuerpo”. Es decir, este principio establece que

$$\boxed{\delta U = 0}$$

Ejemplo: La figura muestra una esfera en reposo sobre el suelo. Si “imaginamos” que la esfera se desplaza hacia abajo una cantidad virtual δy, entonces el peso hace trabajo positivo $W\,\delta y$ y la fuerza normal hace trabajo negativo $-N\,\delta y$. Utilizando el principio del trabajo virtual:

$$\delta U = W\,\delta y - N\,\delta y = (W - N)\,\delta y = 0.$$



Como $\delta y \neq 0$, entonces

$$N = W,$$

que es lo mismo que se hubiese obtenido aplicando $\sum F_y = 0.$

Método del Trabajo Virtual (Cuerpos Rígidos)

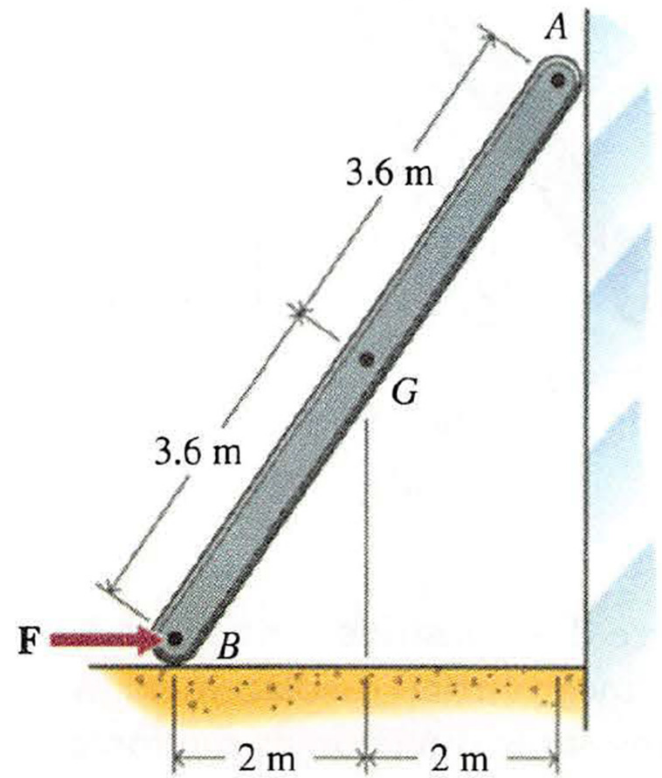
Problema: La barra mostrada en la figura, cuya masa es de 100 kg, está apoyada sobre superficies lisas en *A* y *B*. Desarrollar lo siguiente:

a) Mediante equilibrio de fuerzas, determinar *F*, y las reacciones A_x y B_y en *A* y *B*, respectivamente.

b) Mediante el método del trabajo virtual, determinar el valor de *F* que mantiene a la barra en equilibrio.

c) Mediante el método del trabajo virtual, determinar la reacción B_y.

d) Mediante el método del trabajo virtual, determinar la reacción A_x.

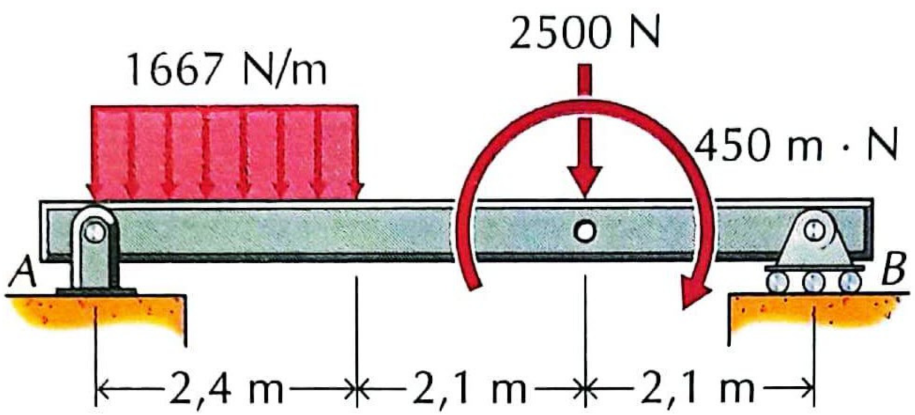


Método del Trabajo Virtual (Cuerpos Rígidos)

Problema: Despreciando el peso propio, calcular la reacción en el apoyo B de la viga utilizando:

a) Equilibrio de fuerzas

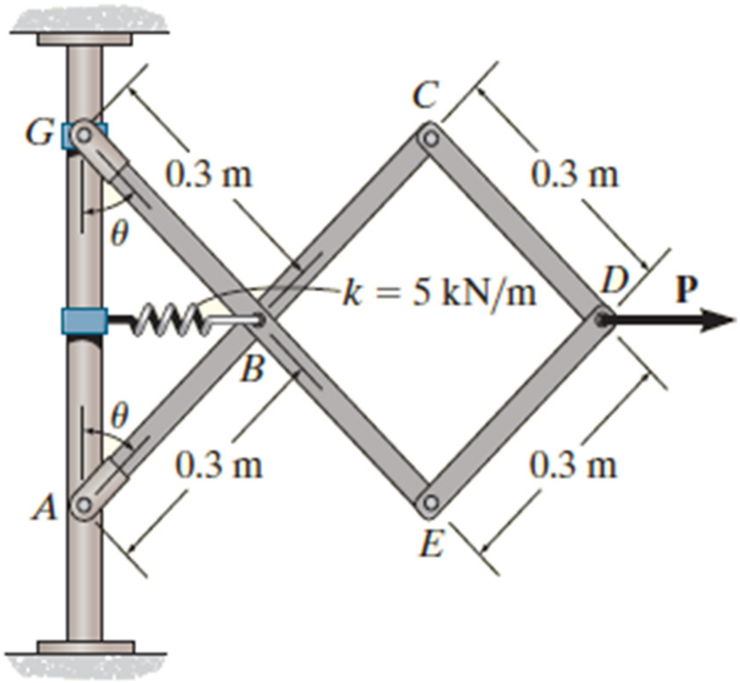
b) Método del trabajo virtual



(a)

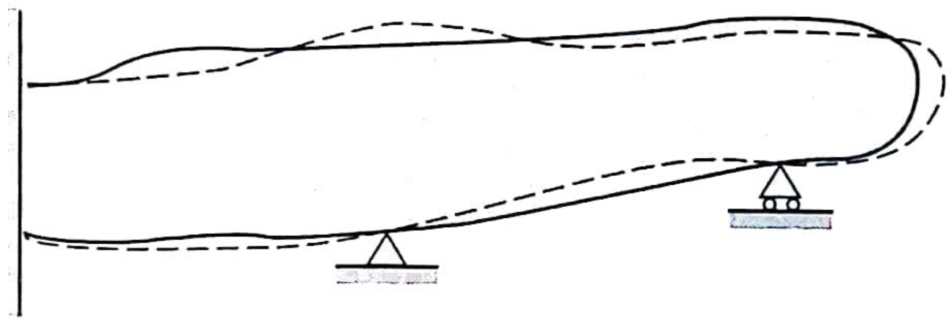
Método del Trabajo Virtual (Cuerpos Rígidos)

Problema: Despreciando el peso propio, utilizar el método del trabajo virtual para determinar la fuerza *P* que se requiere para mantener el mecanismo de tijeras en equilibrio cuando $\theta = 60^\circ$. El largo natural del resorte ocurre cuando $\theta = 30^\circ$.



Método del Trabajo Virtual (Sólidos Deformables)

- En contraste con un cuerpo rígido, un sólido deformable presentará deformaciones internas (partículas que componen el sólido tienen movimientos relativos entre ellas). La figura muestra un ejemplo de sólido deformable.



- En consecuencia, y desde el punto de vista del trabajo virtual, en un sólido deformable existirá un trabajo virtual interno. Por lo tanto, debemos distinguir entre trabajo virtual externo e interno.

Método del Trabajo Virtual (Sólidos Deformables)

Trabajo virtual externo: suponiendo que el cuerpo tiene una distribución de fuerza de cuerpo $\boldsymbol{B}(x,y,z)$ y una fuerza de tracción distribuida $\boldsymbol{T}(x,y,z)$ en parte del contorno. El trabajo virtual externo en términos de un desplazamiento virtual $\delta\boldsymbol{u}$ está dado por:

$$\delta U_{\text{ext}} = \int_V \boldsymbol{B}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dV + \int_{\partial V}\boldsymbol{T}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dS.$$

Trabajo virtual interno: es el trabajo virtual elástico que realiza el esfuerzo durante una deformación virtual del sólido, y está dado por:

$$\delta U_{\text{int}} = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}\,dV.$$

Método del Trabajo Virtual (Sólidos Deformables)

Principio del trabajo virtual para un sólido deformable: "Si un sólido deformable está en equilibrio, entonces la suma algebraica del trabajo virtual hecho por todas las fuerzas externas sobre el sólido es igual al trabajo virtual interno que el sólido realiza al deformarse". Es decir, este principio establece que:

$$\delta U_{\text{ext}} = \delta U_{\text{int}}$$

$$\delta U_{\text{ext}} = \int_V \boldsymbol{B} \cdot \delta \boldsymbol{u} \, dV + \int_{\partial V} \boldsymbol{T} \cdot \delta \boldsymbol{u} \, dS$$

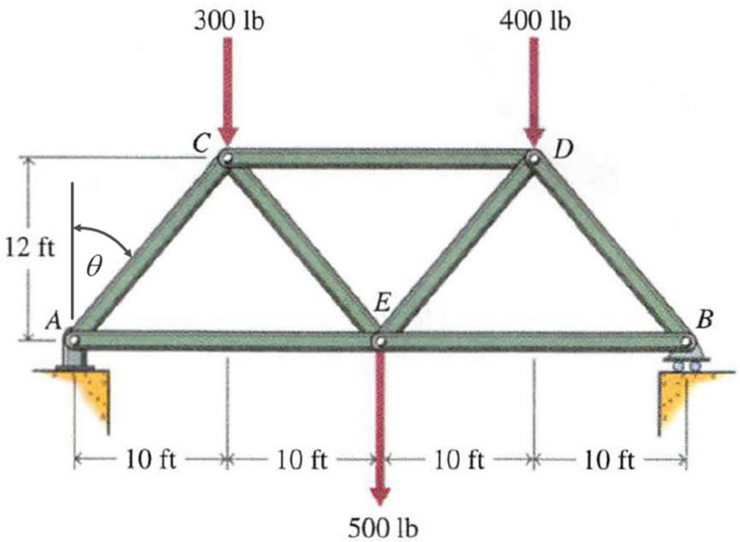
$$\delta U_{\text{int}} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \, dV$$

Este principio es la base desde donde se formula el **método del elemento finito para sólidos deformables**.

Si el sólido es un cuerpo rígido, entonces $\delta U_{\text{int}} = 0$ y se recupera el principio del trabajo virtual para un cuerpo rígido:

$$\delta U = \delta U_{\text{ext}} = 0$$

Problema 1

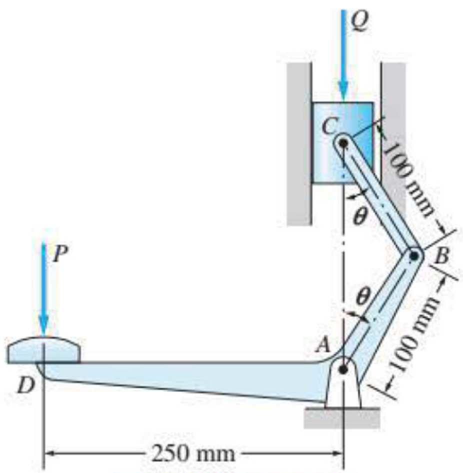


Determinar la fuerza en la barra CD utilizando el método del trabajo virtual. *Hint:* Relacionar los desplazamientos virtuales con el grado de libertad θ.

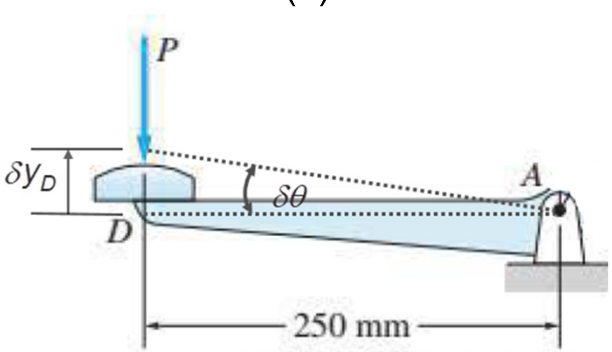
Instrucciones:

- Presentar el desarollo de este problema en un archivo de MATLAB Live. Utilizar como base alguno de los archivos MATLAB Live (*.mlx) que se encuentran en Material Docente (u-cursos).
- Tarea en grupos de máximo 3 integrantes.
- Enviar el archivo *.mlx por sistema de tareas de u-cursos.

Problema 2



(a)



(b)

La Fig. (a) muestra un sistema de freno hidráulico. Desarrollar lo siguiente:

a) Utilizando el método del trabajo virtual, determinar el ángulo θ con el cual la fuerza en el cilindro hidráulico es $Q = 4P$. *Hint*: Relacionar los desplazamientos virtuales con el grado de libertad θ suponiendo que los desplazamientos virtuales se inician imponiendo una rotación $\delta\theta$ sobre el pedal como se muestra en la Fig. (b).

b) Repetir la letra a) mediante equilibrio de fuerzas. *Hint:* Trabajar con un DCL del pedal *DAB*. El resultado debe coincidir con el de la letra a).

Instrucciones:

- Presentar el desarollo de este problema en un archivo de MATLAB Live. Utilizar como base alguno de los archivos MATLAB Live (*.mlx) que se encuentran en Material Docente (u-cursos).
- Tarea en grupos de máximo 3 integrantes.
- Enviar el archivo *.mlx por sistema de tareas de u-cursos.