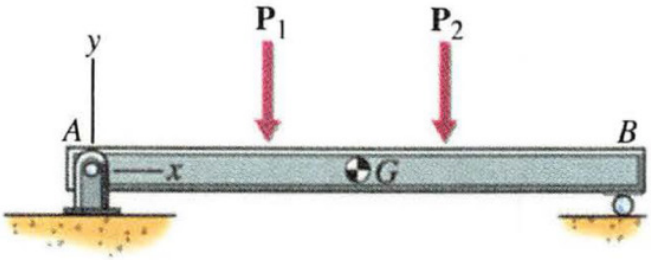
PROBLEMAS RESUELTOS

UNIDAD 3: EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS.

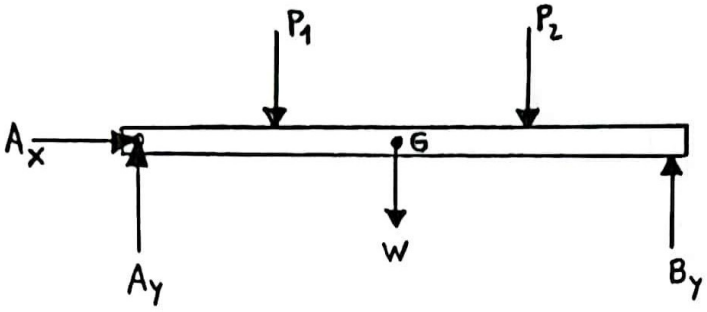
PROBLEMA 1

Problema: Dibujar el diagrama de cuerpo libre de la viga mostrada en la figura. El centro de gravedad de la viga se ubica en G.



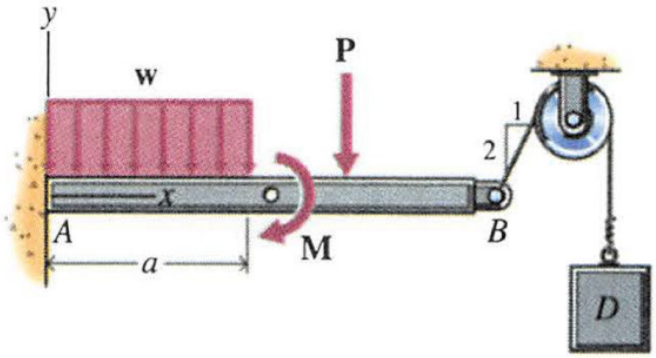
SOLUCIÓN:

Diagrama de cuerpo libre :



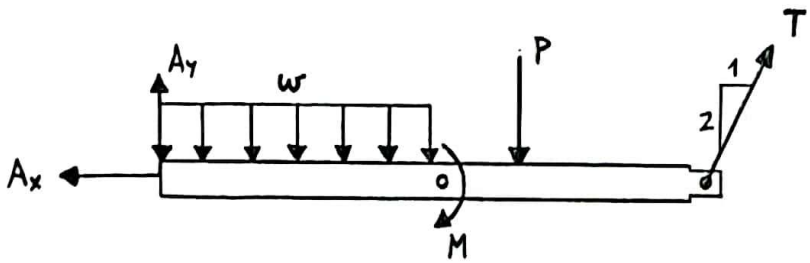
PROBLEMA 2

Problema: Dibujar el diagrama de cuerpo libre de la viga mostrada en la figura. Despreciar el peso propio de la viga.



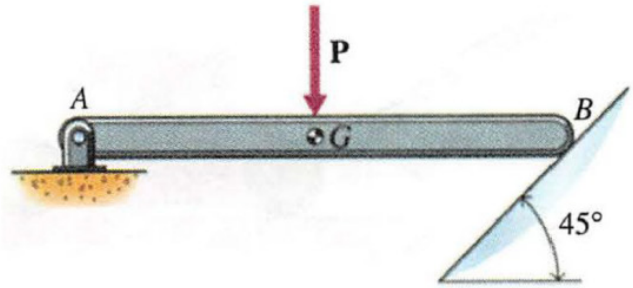
SOLUCIÓN:

Diagrama de cuerpo libre:



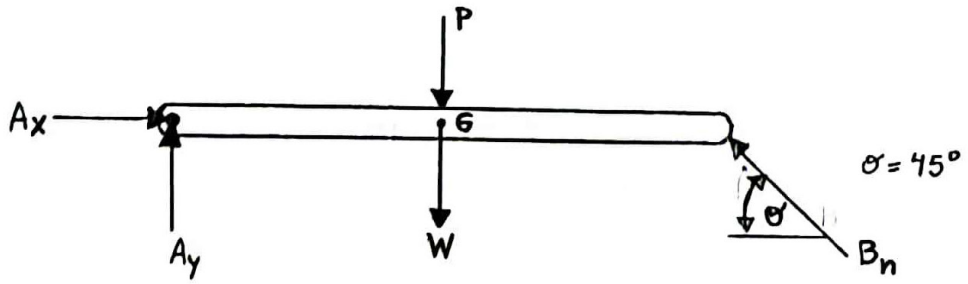
PROBLEMA 3

Problema: Dibujar el diagrama de cuerpo libre de la viga mostrada en la figura. El centro de gravedad de la viga se ubica en G.



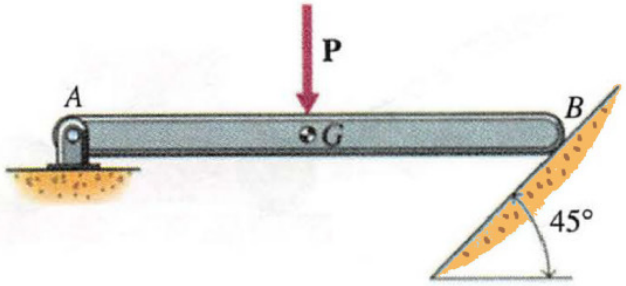
SOLUCIÓN:

Diagrama de cuerpo libre:



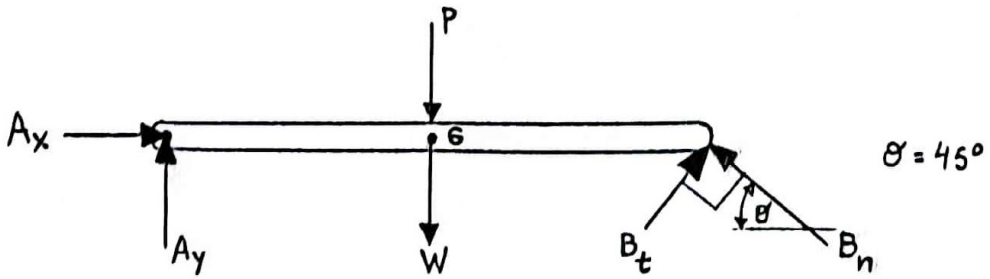
PROBLEMA 4

Problema: Dibujar el diagrama de cuerpo libre de la viga mostrada en la figura. El centro de gravedad de la viga se ubica en G.



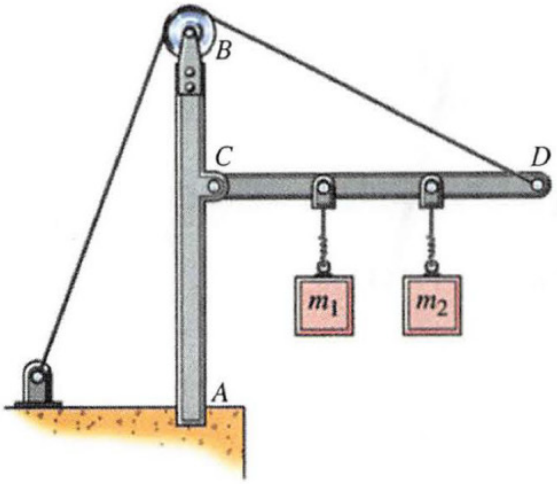
SOLUCIÓN:

Diagrama de cuerpo libre:



PROBLEMA 5

Problema: Dibujar los diagramas de cuerpo libre para (a) la polea, (b) el poste *AB* y (c) la viga *CD* que se muestran en la figura. Despreciar el peso propio de la polea, el poste y la viga.



SOLUCIÓN:

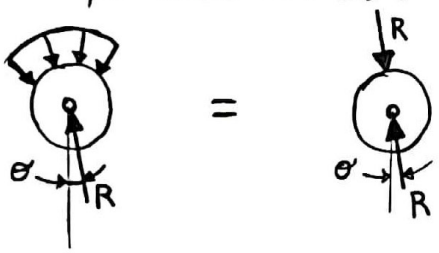
a) Diagrama de cuerpo libre:

El cable ejerce dos tipos de fuerza sobre la polea:

i) Presión sobre la polea

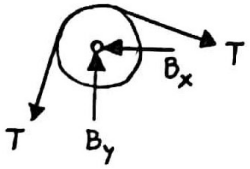
ii) Tensión tangencial

Veamos qué sucede con i):

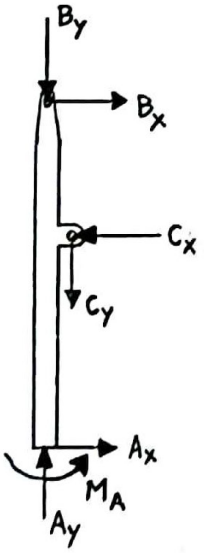


, por lo que es una fuerza interna que no afecta el análisis.

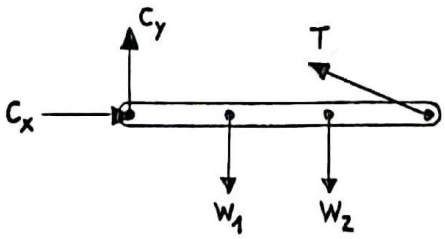
Veamos qué sucede con ii):



b)

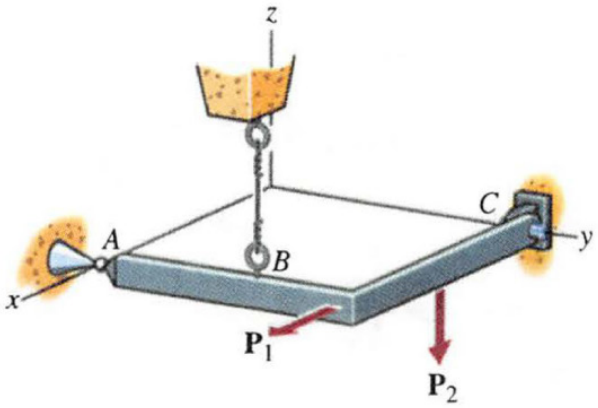


c)

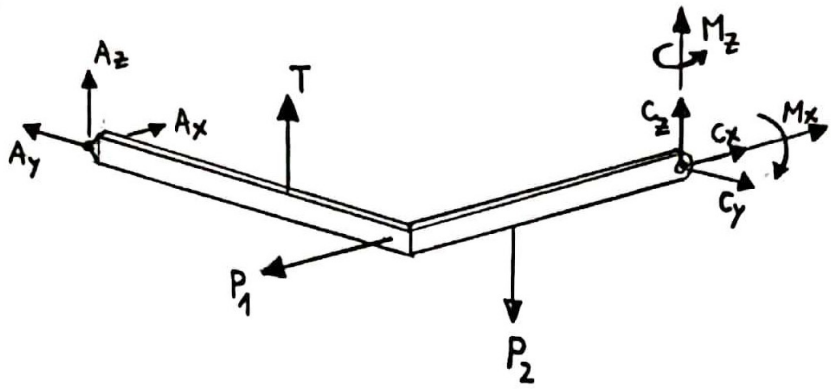


PROBLEMA 6

Problema: Dibujar el diagrama de cuerpo libre de la barra curva *AC* que se muestra en la figura. La barra está soportada por una rótula en *A*, un cable flexible en *B* y una articulación de pasador en *C*. Despreciar el peso propio de la barra.

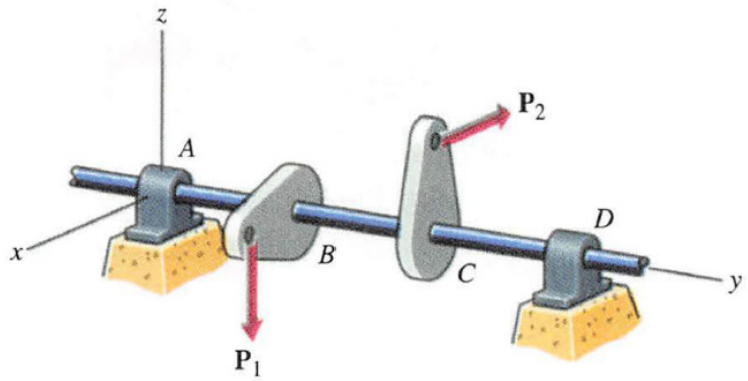


SOLUCIÓN:

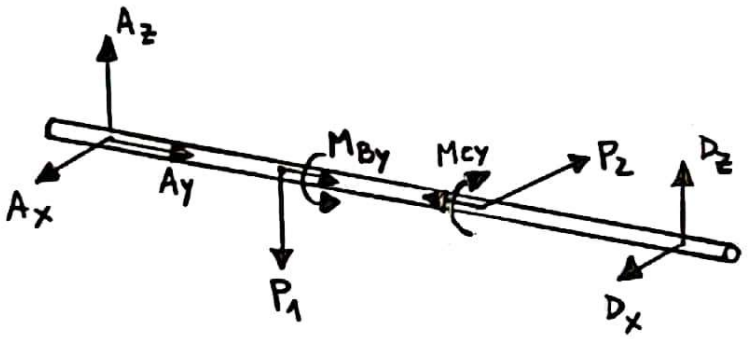


PROBLEMA 7

Problema: Dibujar el diagrama de cuerpo libre del árbol de levas que se muestra en la figura. En *A* hay un cojinete de empuje y el cojinete en *D* es de bolas. Despreciar los pesos propios del árbol y las levas.

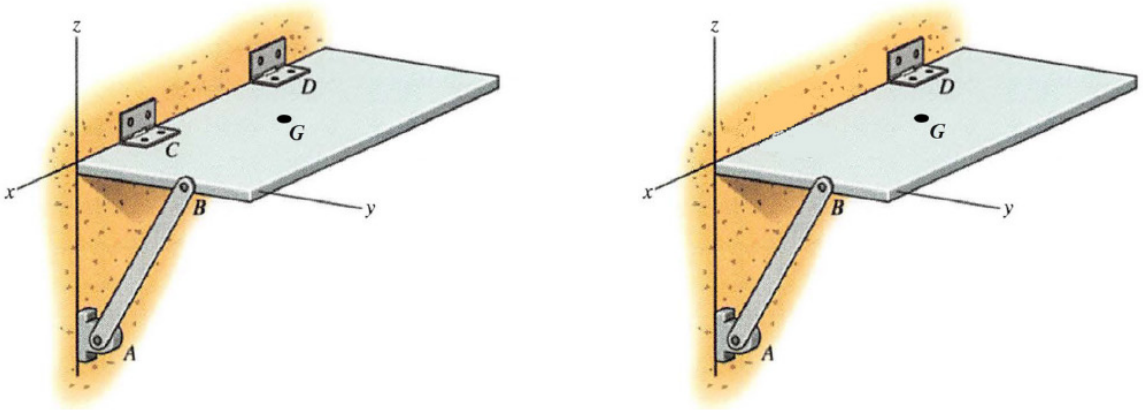


SOLUCIÓN:



PROBLEMA 8

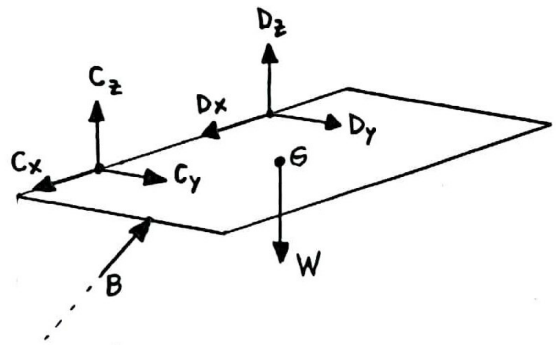
Problema: Dibujar el diagrama de cuerpo libre de los tableros **(a)** y **(b)** mostrados en la figura. El centro de gravedad de cada tablero se ubica en G.



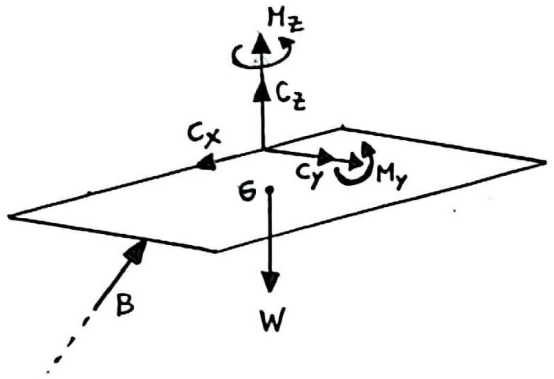
(a) **(b)**

SOLUCIÓN:

a) Diagrama de cuerpo libre :

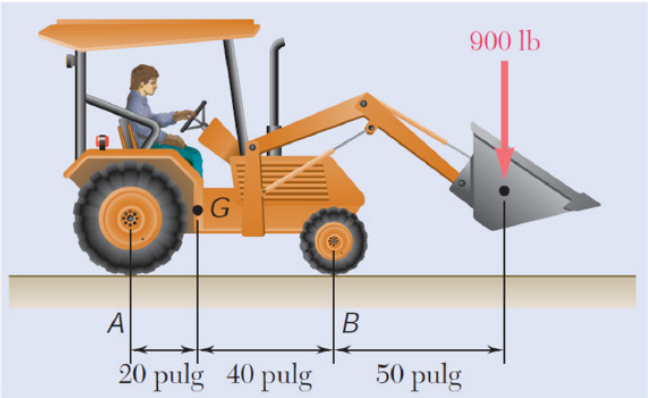


b) Diagrama de cuerpo libre :



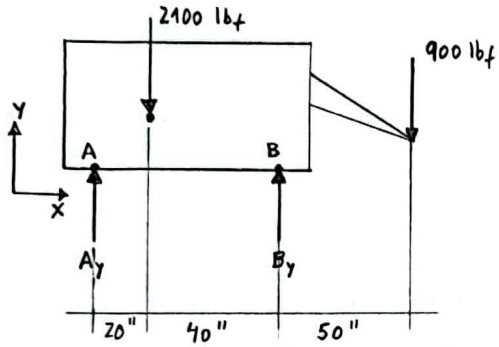
PROBLEMA 9

Problema: Un tractor cuyo peso es de 2100 lbf se usa para levantar 900 lbf de grava. Determinar la reacción en cada una de las dos ruedas traseras y dos ruedas delanteras. El centro de gravedad del tractor se ubica en G.



SOLUCIÓN:

Diagrama de cuerpo libre:



Problema tiene 2 incógnitas, por lo que necesitamos 2 ecuaciones.

Método 1

$\Sigma M_A = 0$: $\quad -2100(20) + B_y 60 - 900(110) = 0$

$$\Rightarrow \quad B_y = \frac{900(110) + 2100(20)}{60} = 2350 \text{ lbf}$$

Como hay 2 ruedas delanteras, la reacción en cada rueda delantera es: $\frac{B_y}{2} = \frac{2350}{2} = 1175$ lbf

$\Sigma M_B = 0$: $\quad -A_y 60 + 2100(40) - 900(50) = 0$

$$\Rightarrow \quad A_y = \frac{2100(40) - 900(50)}{60} = 650 \text{ lbf.}$$

Como hay 2 ruedas traseras, la reacción en cada rueda trasera es: $\frac{A_y}{2} = \frac{650}{2} = 325$ lbf.

Si quisiéramos resolver este problema de manera matricial utilizando un software como MATLAB tendríamos ordenar las ecuaciones anteriores en el sistema matricial siguiente:

$$Ku = f, \text{ donde } \quad K = \begin{bmatrix} -60 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} A_y \\ B_y \end{bmatrix}; \quad f = \begin{bmatrix} 900(50) - 2100(40) \\ 900(110) + 2100(20) \end{bmatrix}.$$

La solución del sistema es: $u = \begin{bmatrix} A_y \\ B_y \end{bmatrix} = K^{-1} f$.

Método 2

$$\Sigma F_y = 0: \quad A_y - 2100 + B_y - 900 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A_y = 2100 + 900 - B_y} \quad (*)$$

$$\Sigma M_A = 0: \quad -2100(20) + B_y 60 - 900(110) = 0$$

$$\Rightarrow B_y = \frac{900(110) + 2100(20)}{60} = 2350 \text{ lbf} \quad (**)$$

Reemplazando (**) en (*):

$$A_y = 2100 + 900 - 2350 = 650 \text{ lbf}$$

Como hay 2 ruedas traseras y 2 ruedas delanteras, la reacción en cada rueda es:

$$\frac{B_y}{2} = \frac{2350}{2} = 1175 \text{ lbf} \quad \text{(rueda delantera)}$$

$$\frac{A_y}{2} = \frac{650}{2} = 325 \text{ lbf} \quad \text{(rueda trasera)}$$

Si quisiéramos resolver este problema de manera matricial utilizando un software como MATLAB tendríamos que ordenar las ecuaciones anteriores en el sistema matricial siguiente:

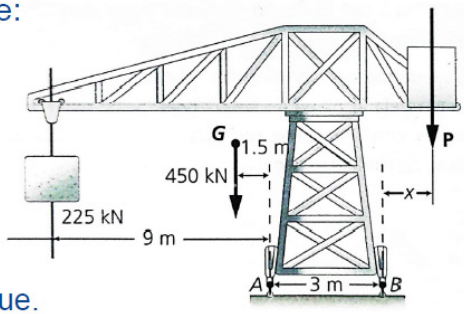
$$Ku = f, \text{ donde } K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 60 \end{bmatrix}; \; u = \begin{bmatrix} A_y \\ B_y \end{bmatrix}; \; f = \begin{bmatrix} 2100 + 900 \\ 2100(20) + 900(110) \end{bmatrix}$$

La solución del sistema es: $u = \begin{bmatrix} A_y \\ B_y \end{bmatrix} = K^{-1} f.$

OBTENER CÓDIGO MATLAB: U3_problema9.m

PROBLEMA 10

Problema: Una grúa móvil que pesa 450 kN (sin considerar el contrapeso) se mueve a lo largo de los rieles A y B que se encuentran separados 3 m entre sí. El centro de gravedad de la grúa se ubica en G. La capacidad de izaje de la grúa es de 225 kN. Para esta capacidad resolver lo siguiente:



a) el mínimo contrapeso P para que la grúa no vuelque.

b) ¿Qué pasaría si P es el doble del valor encontrado en a)?

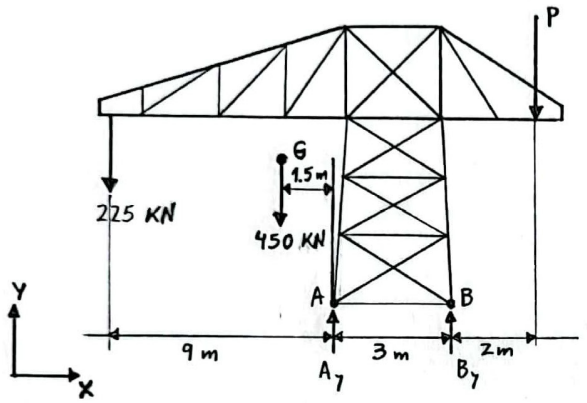
c) el máximo contrapeso P para que la grúa no vuelque en el otro sentido.

d) resolver la letra a) reemplazando las cargas externas por un sistema equivalente fuerza-par en el lugar donde se ubica la carga de 225 kN.

e) determinar el valor del contrapeso P que servirá para mantener el equilibrio de la grúa para cualquier carga a elevar en el rango [0, 225] kN.

SOLUCIÓN:

Diagrama de cuerpo libre:



a) El instante crítico en que la grúa se volcará es cuando la reacción $B_y = 0$. Imponiendo esta condición resultan 2 incógnitas. Para determinarlas necesitamos 2 ecuaciones.

$$\Sigma M_A = 0: \quad 225(9) + 450(1.5) + B_y 3 - 5P = 0$$

Pero $B_y = 0 \Rightarrow P = \dfrac{225(9) + 450(1.5)}{5} = 540 \text{ KN}$

Por lo tanto, se necesitaría un contrapeso de $P = 540$ KN para evitar el volcamiento. El valor de A_y en estas condiciones es:

$$\Sigma F_y = 0: \quad A_y - 225 - 450 - 540 = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 1215 \text{ KN}$$

b) Se debe chequear el equilibrio para $P = 2(540) = 1080$ KN.

$$\Sigma M_A = 0: \quad 225(9) + 450(1.5) + 3B_y - 1080(5) = 0$$

$$\Rightarrow B_y = \frac{1080(5) - 225(9) - 450(1.5)}{3} = 900 \text{ KN}$$

$$\Sigma M_B = 0: \quad 225(12) + 450(4.5) - 3A_y - 1080(2) = 0$$

$$\Rightarrow A_y = \frac{225(12) + 450(4.5) - 1080(2)}{3} = 855 \text{ KN}$$

Por lo tanto, se observa que B_y aumenta y A_y disminuye.

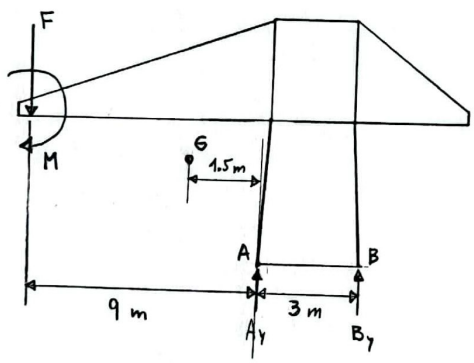
c) Obviamente, para levantar 225 kN el contrapeso tiene un límite antes de que la grúa se vuelque en el otro sentido. El instante crítico en que sucede el volcamiento en el otro sentido es cuando $A_y = 0$.

$$\Sigma M_B = 0 : \quad 225(12) + 450(4.5) - 3A_y - 2P = 0$$

Pero $A_y = 0 \Rightarrow$ $$P = \frac{225(12) + 450(4.5)}{2} = 2362.5 \text{ kN}$$

Por lo tanto, la grúa volcará en el otro sentido cuando el contrapeso instalado tenga un peso $P \geq 2362.5$ kN.

d)



$$F = -(450 + P + 225)\,\hat{j}$$
$$M = -(450(9-1.5) + 14P)\,\hat{k}$$

$$\Sigma M_A = 0 : \quad (-9)\hat{i} \times (-450 - P - 225)\hat{j} - (450(9-1.5) + 14P)\hat{k} + (3)\hat{i} \times B_y\hat{j} = 0\hat{k}$$

$$(9(450) + 9P + 9(225))\,\hat{i}\times\hat{j} - (450(9-1.5) + 14P)\hat{k} + (3B_y)\,\hat{i}\times\hat{j} = 0\hat{k}$$

$$(6075 + 9P)\hat{k} - (3375 + 14P)\hat{k} + (3B_y)\hat{k} = 0\hat{k}$$

$$(6075 + 9P - 3375 - 14P + 3B_y)\hat{k} = 0\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad 2700 - 5P + 3B_y = 0$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{2700 + 3B_y}{5}$$

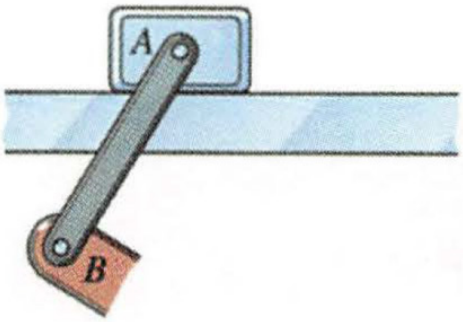
Pero $B_y = 0 \Rightarrow$ $$\boxed{P = \frac{2700}{5} = 540 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_y = 0 : \quad (A_y - (450 + 540 + 225))\hat{j} = 0\hat{j} \Rightarrow \boxed{A_y = 1215 \text{ kN}}$$

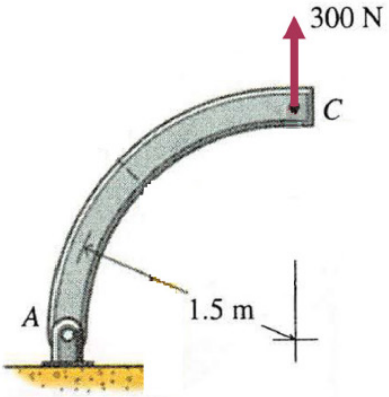
OBTENER CÓDIGO MATLAB: U3_problema10.m

PROBLEMA 11

Problema: Equilibrio de un cuerpo sometido a dos fuerzas. Demostrar que el equilibrio en **(a)** el eslabón *AB* requiere que existan dos fuerzas de igual módulo, pero opuestas, y alineadas a lo largo del eslabón; **(b)** suponiendo que la carga de 300 N siempre se mantiene perpendicular al suelo, ¿cuál será la posición de equilibrio de la barra curva *AC*?



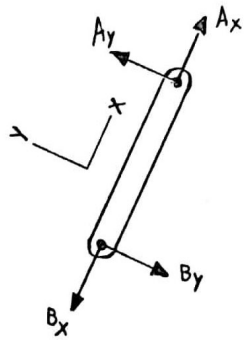
(a)



(b)

SOLUCIÓN:

a) Diagrama de cuerpo libre:



Equilibrio del cuerpo rígido:

$\Sigma F_x = 0: \quad A_x - B_x = 0 \Rightarrow A_x = B_x \quad (*)$

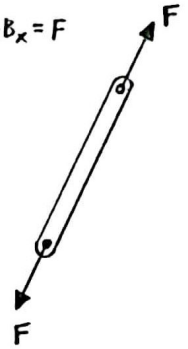
$\Sigma F_y = 0: \quad A_y - B_y = 0 \Rightarrow A_y = B_y \quad (**)$

$\Sigma M_B = 0: \quad A_y L = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 0}$

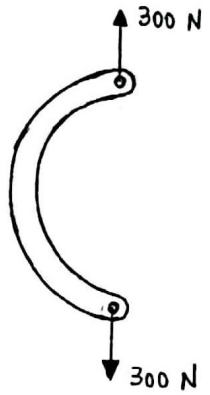
Reemplazando $A_y = 0$ en $(**)$:

$\boxed{B_y = A_y = 0}$

$\therefore$ De $(*)$: $A_x = B_x = F$

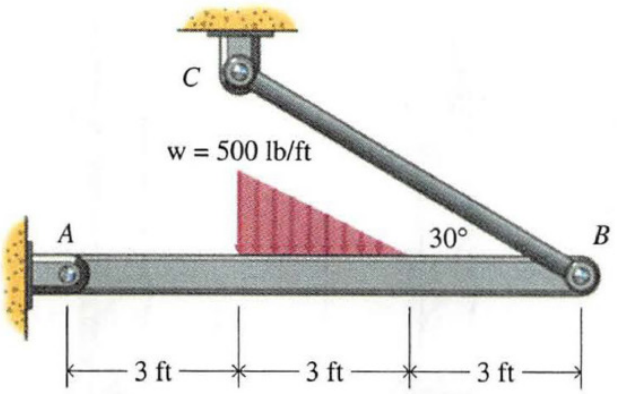


b) Del resultado de la letra a) se concluye que el equilibrio se logra cuando la carga y la reacción en A estén alineados pero en direcciones opuestas. Esto ocurrirá cuando la barra curva haya girado 45° con respecto a la posición mostrada en la figura. Es decir,



PROBLEMA 12

Problema: Equilibrio de un cuerpo sometido a tres fuerzas. Determinar la fuerza en la barra BC y la reacción en el soporte A.



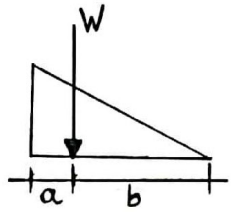
SOLUCIÓN:

La barra BC es un elemento sometido a dos fuerzas, por lo que la fuerza en la barra BC debe estar dirigida a lo largo de BC. Por otro lado, la viga AB es un elemento sometido a tres fuerzas, por lo que la fuerza resultante de la carga distribuida w, la reacción resultante en A y la fuerza en la barra BC deben concurrir a un punto. Entonces, el problema puede ser resuelto partiendo por el diagrama de cuerpo libre de la viga AB.

La fuerza resultante de la carga distribuida es:

$$W = \frac{w\,l}{2} = \frac{500\,(3)}{2} = 750 \text{ lb}_f$$

y su ubicación es

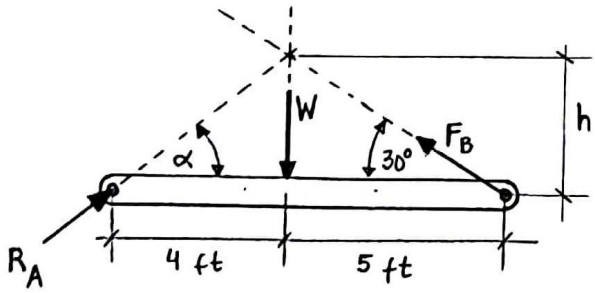


$l = a + b = 3$ ft

$a = \frac{1}{3} l = 1$ ft

$b = \frac{2}{3} l = 2$ ft

Diagrama de cuerpo libre de AB:

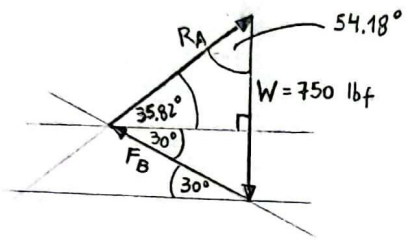


$$h = 5\tan(30°)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{4} = \frac{5\tan(30°)}{4} \Rightarrow \alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{5\tan(30°)}{4}\right) \approx 35.82°$$

R_A y F_B se pueden determinar mediante (a) método gráfico (ley del polígono) o (b) suma de momentos en A y B.

Método gráfico



Altura del polígono medida desde R_A:

$$h = W\sin(54.18°) = F_B\sin(30° + 35.82°)$$

$$\Rightarrow \quad F_B = \frac{W\sin(54.18°)}{\sin(65.82°)} = \frac{750\sin(54.18°)}{\sin(65.82°)}$$

$$\approx 667 \text{ lbf}$$

Altura del polígono desde W:

$$h = R_A\sin(54.18°) = F_B\cos(30°)$$

$$\Rightarrow \quad R_A = \frac{F_B\cos(30°)}{\sin(54.18°)} = \frac{667\cos(30°)}{\sin(54.18°)}$$

$$\approx 712 \text{ lbf}$$

Método de la suma de momentos

$$\Sigma M_A = 0: \quad 9F_B\sin(30°) - 4W = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_B = \frac{4W}{9\sin(30°)} = \frac{4(750)}{9\sin(30°)} \approx 667 \text{ lbf}$$

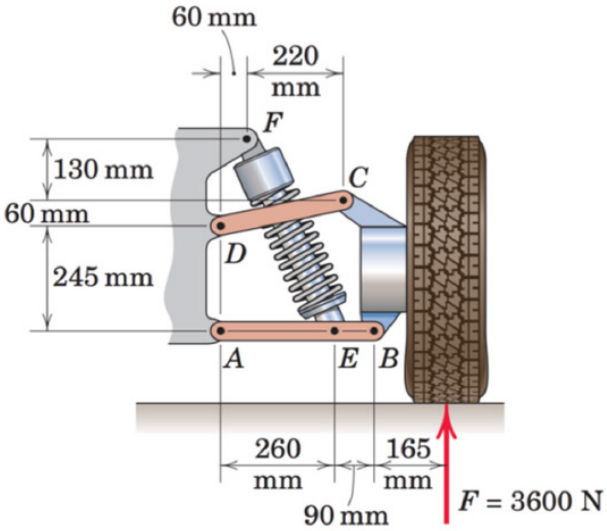
$$\Sigma M_B = 0: \quad -9R_A\sin(35.82°) + 5W = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_A = \frac{5W}{9\sin(35.82°)} = \frac{5(750)}{9\sin(35.82°)} \approx 712 \text{ lbf}$$

OBTENER CÓDIGO MATLAB: U3_problema12.m

PROBLEMA 13

Problema: La figura muestra un sistema de suspensión de una rueda de automóvil. Determinar la magnitud de (**a**) la fuerza en el elemento *DC* y (**b**) la fuerza de suspensión en el amortiguador *FE* si la fuerza normal *F* ejercida sobre la rueda es de 3600 N.

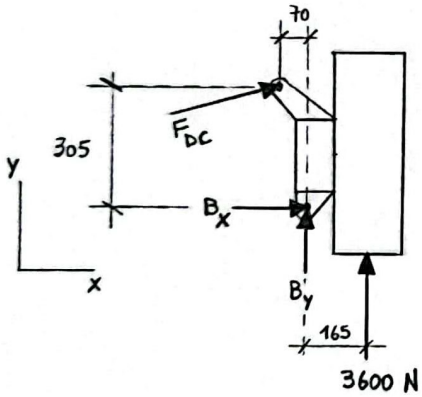


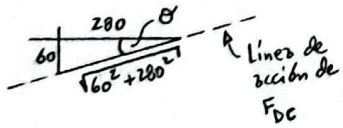
SOLUCIÓN:

a) Fuerza en el elemento DC.

Análisis previo:
- El elemento DC está sometido a dos fuerzas resultantes (en D y en C). Por lo tanto, el elemento DC estará en equilibrio solo si la fuerza resultante en D es igual en magnitud que la fuerza resultante en C, ambas están alineadas a lo largo de DC, y son opuestas.
- La unión B traspasa fuerzas en dirección vertical y horizontal.
- Si se separa la rueda del conjunto desde las uniones C y D, y luego tomamos momento con respecto a B, solo quedará expuesto como incógnita la fuerza en el elemento DC, por lo que podremos determinarla.

DCL rueda





$$\cos\theta = \frac{280}{\sqrt{60^2+280^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{60}{\sqrt{60^2+280^2}}$$

Momento con respecto a B

$$\underset{\sim}{r}_{C/B} = -70\hat{\imath} + 305\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{F}_{DC} = \underbrace{F_{DC}\frac{280}{\sqrt{60^2+280^2}}}_{t_1}\hat{\imath} + \underbrace{F_{DC}\frac{60}{\sqrt{60^2+280^2}}}_{t_2}\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$\Sigma M_B = 0$:

$$\underset{\sim}{r}_{C/B} \times \underset{\sim}{F}_{DC} + 165\hat{\imath} \times 3600\hat{\jmath}$$

$$= \underset{\sim}{r}_{C/D} \times \underset{\sim}{F}_{DC} + 594000\,\hat{k} = \underset{\sim}{0} \quad (*)$$

$$\underset{\sim}{r}_{C/D} \times \underset{\sim}{F}_{DC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -70 & 305 & 0 \\ t_1 & t_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-70t_2 - 305t_1)\hat{k}$$

∴ (*) se simplifica como:

$$-70t_2 - 305t_1 + 594000$$

$$= -F_{DC}\left(\frac{70(60)+305(280)}{\sqrt{60^2+280^2}}\right) + 594000 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{DC} = 1898.4\ N}$$

b) Fuerza de suspensión en el amortiguador.

Análisis previo:
- Si hacemos el diagrama de cuerpo libre del elemento AB tendremos expuestas las reacciones en A, B y la fuerza en el amortiguador FE.
- Si tomamos los momentos con respecto a A, sólo tendremos expuestos la fuerza en FE y la componente de reacción vertical B_y en B. La componente B_y la podemos obtener del DCL de la rueda en a), por lo que la fuerza en el amortiguador podrá ser determinada haciendo cero la sumatoria de momentos en A en el DCL del elemento AB.

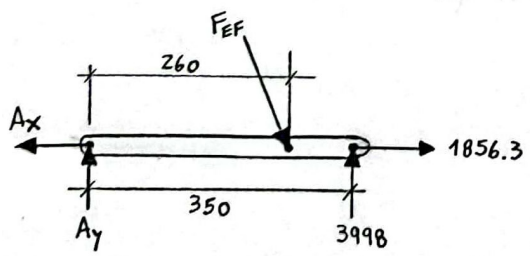
Del DCL de la rueda: $\Sigma F_y = 0$: $B_y + 3600 + F_{DC}\dfrac{60}{\sqrt{60^2+280^2}} = 0$

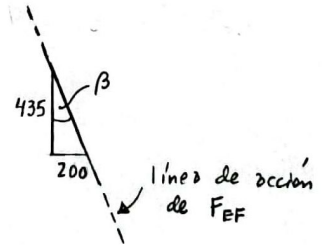
$$\Rightarrow B_y = -3600 - 1898.4\,\frac{60}{\sqrt{60^2+280^2}} \approx -3998\ N$$

$\Sigma F_x = 0$: $B_x + F_{DC}\dfrac{280}{\sqrt{60^2+280^2}} = 0 \Rightarrow B_x = -1898.4\,\dfrac{280}{\sqrt{60^2+280^2}}$

$$\approx -1856.3\ N$$

DCL elemento AB





$$\cos\beta = \frac{435}{\sqrt{435^2+200^2}}$$

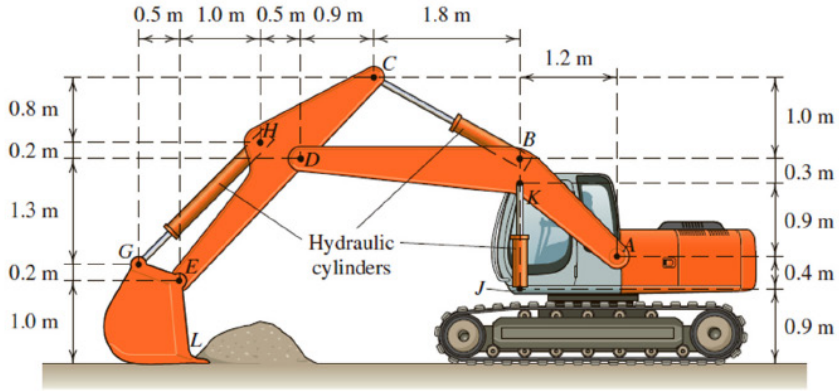
$$\sin\beta = \frac{260}{\sqrt{435^2+200^2}}$$

$\Sigma M_A = 0$: $-260\,F_{EF}\dfrac{435}{\sqrt{435^2+200^2}} + 350(3998) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{F_{EF} \approx 5924\ N}$$

PROBLEMA 14

Problema: Dos cilindros hidráulicos controlan el movimiento del brazo y cangilón de la retroexcavadora que se muestra en la figura. En la posición mostrada, se aplica una carga horizontal de 14 kN en el cangilón en el punto *L* (la superficie inferior del cangilón está en la posición justo antes de tocar el suelo). Suponiendo que el peso del brazo y del cangilón son despreciables en comparación con las fuerzas de operación, encontrar las fuerzas en los pasadores *A* y *G*.



SOLUCIÓN:

En este tipo de problemas donde el cuerpo se compone de varias partes debemos hacer un análisis previo para determinar como se realizará el DCL: ¿necesitaremos hacer un DCL del cuerpo completo o tendremos que preparar DCLs individuales de las partes que componen al cuerpo? Para responder esta pregunta debemos tener en mente cuántas incógnitas podemos determinar con las ecuaciones de equilibrio. Analizemos la retroexcavadora:

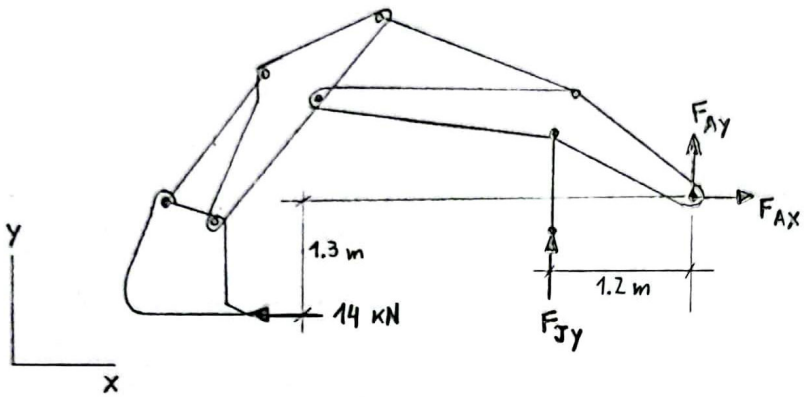
1) Debemos determinar la fuerzas en los pasadores A y G.

2) El pasador A aporta con 2 incógnitas si lo aislamos.

3) El pasador G aporta con 2 incógnitas si lo aislamos

Claramente, no podemos hacer un DCL que involucre las reacciones en A y G al mismo tiempo pues tendríamos que agregar 2 incógnitas más en E (6 en total). Entonces, debemos pensar en más de un DCL. Por ejemplo, podemos pensar en un DCL que involucre al pasador A y otro apoyo que involucre a lo más 1 incógnita para poder resolverlo (en 2D podemos resolver hasta 3 incógnitas). El elemento JK está sometido solo a 2 cargas resultantes (1 en cada extremo) y por lo tanto si utilizamos la reacción en J esta estará dirigida a lo largo de JK aportando 1 sola incógnita. Por otro lado en L conocemos la carga aplicada. Es decir, si hacemos un DCL que involucre a todo el brazo de la retroexcavadora tomando como apoyos los puntos A y J, podremos determinar las fuerzas en A.

DCL del brazo



Tomando momentos con respecto al punto A podemos determinar F_{Jy}:

$$\sum M_A = 0: \quad -1.3(14) - 1.2 F_{Jy} = 0 \Rightarrow F_{Jy} = \frac{-1.3(14)}{1.2} \approx -15.17 \text{ kN}$$

Para determinar F_{Ay}:

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Jy} + F_{Ay} = 0 \Rightarrow \boxed{F_{Ay} = -F_{Jy} = 15.17 \text{ kN}}$$

Para determinar F_{Ax}:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - 14 = 0 \Rightarrow \boxed{F_{Ax} = 14 \text{ kN}}$$

$\therefore$ La fuerza que actúa en el pasador A es:

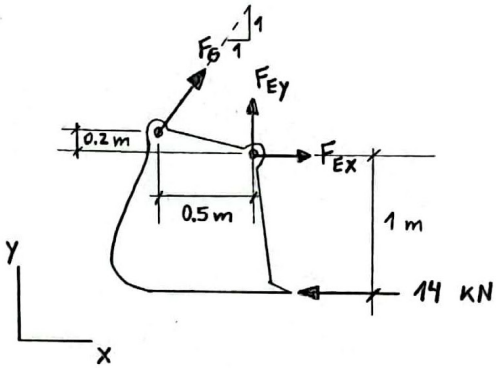
$$\boxed{\|\underset{\sim}{F_A}\| = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{14^2 + 15.17^2} \approx 20.64 \text{ kN}}$$

ó

$$\boxed{\underset{\sim}{F_A} = (14 \text{ kN})\hat{\imath} + (15.17 \text{ kN})\hat{\jmath}}$$

Similarmente, podemos determinar la fuerza en el pasador G mediante un DCL del cangilón. Esto porque GH es un elemento sujeto a dos fuerzas (la reacción en G debe estar en la dirección GH), aportando 1 incógnita y el pasador en E aporta 2 incógnitas, lo que hace un total de 3 incógnitas.

DCL del cangilón



Tomando momentos con respecto al punto E podemos determinar F_G:

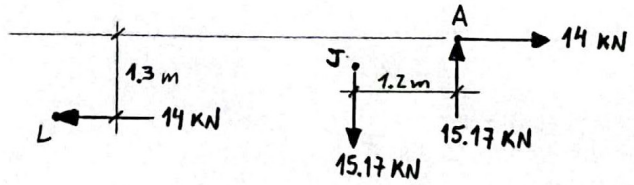
$$\sum M_E = 0: \quad -0.5\,F_G \sin 45° - 0.2\,F_G \cos 45° - 1(14) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_G = \frac{-1(14)}{(0.5\sin 45° + 0.2\cos 45°)} \approx -28.28 \text{ kN} = \|\underset{\sim}{F_G}\|}$$

o

$$\boxed{\underset{\sim}{F_G} = -(28.28\cos 45° \text{ kN})\hat{\imath} - (28.28\sin 45° \text{ kN})\hat{\jmath}}$$

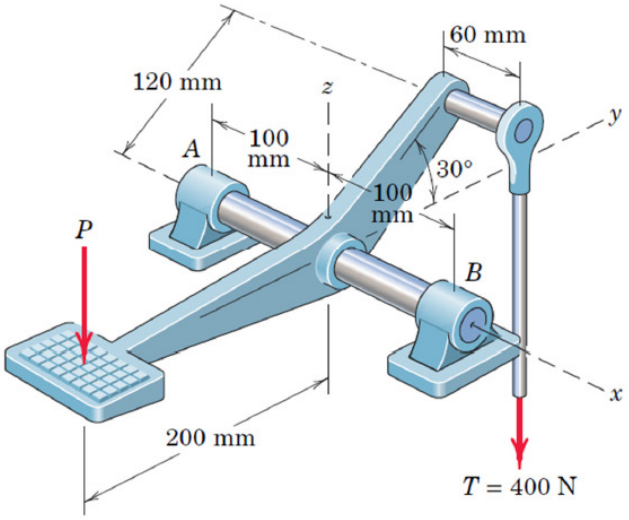
Si dibujamos la fuerzas obtenidas en L, J y K podemos ver que el par generado por las fuerzas horizontales en L y A coinciden con el par generado por las fuerzas verticales en J y A verificando el equilibrio:



$$-1.3(14) + 1.2(15.17) = 0$$

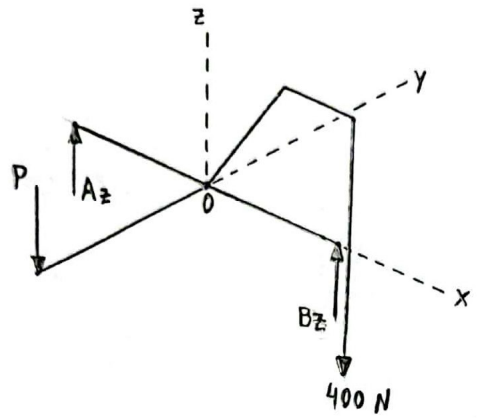
PROBLEMA 15

Problema: La figura muestra un pedal de freno mecánico para una manivela. El freno se acciona mediante una fuerza vertical *P* sobre el pedal produciendo una tensión *T* = 400 N en la varilla de control. Determinar las reacciones en los cojinetes *A* y *B*.



SOLUCIÓN:

Diagrama de cuerpo libre:



Vectores fuerza:

$$\underset{\sim}{P} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} - P\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{R}_A = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{R}_B = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{T} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} - 400\hat{k}$$

Vectores distancia desde punto O a fuerzas:

$$\underset{\sim}{r}_P = 0\hat{\imath} - 200\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{r}_A = -100\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{r}_B = 100\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{r}_T = 60\hat{\imath} + 120\cos 30\,\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

Ecuaciones de equilibrio tridimensional:

$$\underset{\sim}{R} = \sum_i \underset{\sim}{F}_i = \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{R}_A + \underset{\sim}{R}_B + \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \boxed{-P + A_z + B_z - 400 = 0} \quad (*)$$

$$\underset{\sim}{M}_O^R = \sum_i \underset{\sim}{r}_i \times \underset{\sim}{F}_i = \underset{\sim}{r}_P \times \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{r}_A \times \underset{\sim}{R}_A + \underset{\sim}{r}_B \times \underset{\sim}{R}_B + \underset{\sim}{r}_T \times \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{0}$$

$$\underset{\sim}{r}_P \times \underset{\sim}{P} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix} = 200\,P\,\hat{\imath} - 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{r}_A \times \underset{\sim}{R}_A = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = 0\,\hat{\imath} + 100\,A_z\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{r}_B \times \underset{\sim}{R}_B = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = 0\,\hat{\imath} - 100\,B_z\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{r}_T \times \underset{\sim}{T} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 60 & 120\cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & -400 \end{vmatrix} = -120\cos 30\,(400)\,\hat{\imath} + 24000\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

$$\therefore \quad M_0^R = \left(200\,P - 120\cos 30\,(400)\right)\hat{\imath} + \left(100\,A_z - 100\,B_z + 24000\right)\hat{\jmath} + 0\,\hat{k} = \underset{\sim}{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} 200\,P - 41569.22 &= 0 \\ 100\,A_z - 100\,B_z + 24000 &= 0 \end{aligned}} \quad (**)$$

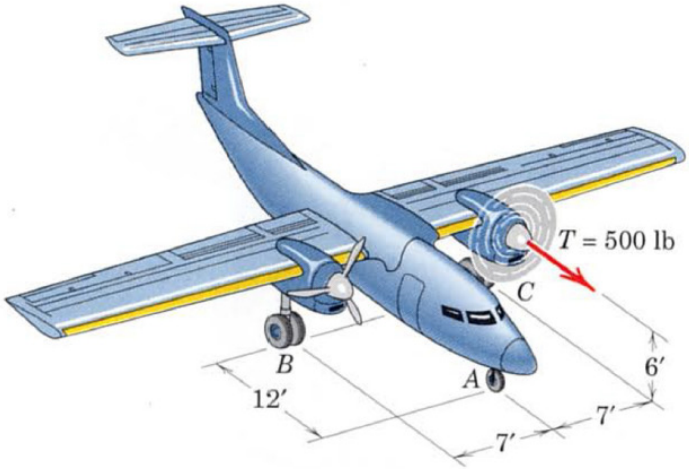
Sistema de ecuaciones a resolver: Se obtiene juntando y ordenando (*) y (**).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 200 \\ 100 & -100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_z \\ B_z \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 41569.22 \\ -24000 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_z \\ B_z \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 200 \\ 100 & -100 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 400 \\ 41569.22 \\ -24000 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema en MATLAB se obtiene: $A_z = 183.92$ N
$B_z = 423.92$ N
$P = 207.85$ N

PROBLEMA 16

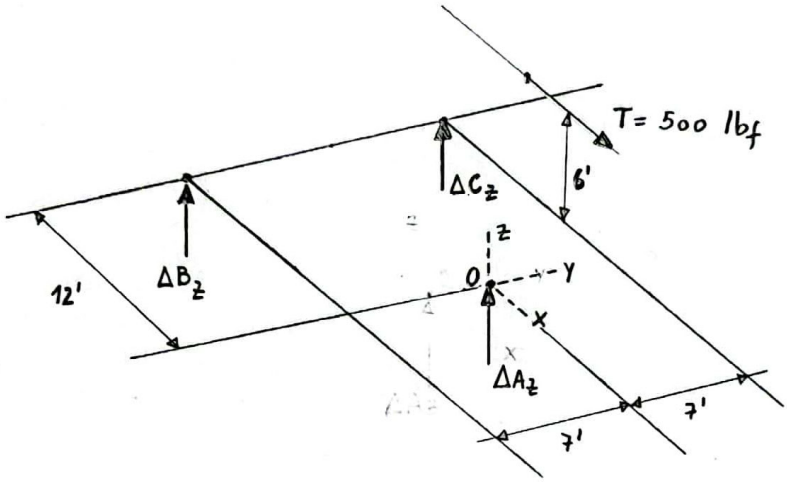
Problema: Durante una prueba, el motor izquierdo del avión es acelerado generando una fuerza de empuje de 500 lbf. Las ruedas principales en *B* y *C* están frenadas para evitar el movimiento. Determinar el cambio (comparado con los valores nominales cuando los dos motores están apagados) en las fuerzas de reacción normales en *A*, *B* y *C*.



SOLUCIÓN:

El problema es equivalente a calcular las reacciones verticales producto solo de la fuerza de empuje $T = 500$ lbf.

Diagrama de cuerpo libre:



Vectores fuerza:

$$\underset{\sim}{T} = 500\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

$$\Delta \underset{\sim}{B} = 0\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + \Delta B_z\,\hat{k}$$

$$\Delta \underset{\sim}{C} = 0\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + \Delta C_z\,\hat{k}$$

$$\Delta \underset{\sim}{A} = 0\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + \Delta A_z\,\hat{k}$$

Vectores distancia desde O a fuerzas:

$$\underset{\sim}{r}_{\Delta B_z} = -12\,\hat{\imath} - 7\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{r}_{\Delta C_z} = -12\,\hat{\imath} + 7\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{r}_{T} = 0\,\hat{\imath} + 7\,\hat{\jmath} + 6\,\hat{k}$$

Ecuaciones de equilibrio tridimensional:

$$\underset{\sim}{R} = \sum_i \underset{\sim}{F}_i = \underset{\sim}{T} + \Delta \underset{\sim}{B} + \Delta \underset{\sim}{C} + \Delta \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{0}$$

$$\Rightarrow 500\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + (\Delta B_z + \Delta C_z + \Delta A_z)\,\hat{k} = 0\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta B_z + \Delta C_z + \Delta A_z = 0} \quad (*)$$

obs: El hecho que se obtenga $500\,\hat{\imath} = 0\,\hat{\imath}$ revela que en A, B y C, se requiere incorporar reacciones en la dirección x de modo que $500\,\hat{\imath}$ debería ser reemplazado por

$$(500 - \Delta B_x - \Delta C_x - \Delta A_x)\,\hat{\imath}.$$

Sin embargo, esta modificación no influye en los cálculos de las reacciones verticales.

$$\underset{\sim}{M}_O^R = \sum_i \underset{\sim}{r}_i \times \underset{\sim}{F}_i = \underset{\sim}{r}_{\Delta B_z} \times \Delta \underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{r}_{\Delta C_z} \times \Delta \underset{\sim}{C} + \underset{\sim}{r}_T \times \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{0}$$

$$\underset{\sim}{r}_{\Delta B_z} \times \Delta \underset{\sim}{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -12 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta B_z \end{vmatrix} = -7\Delta B_z\,\hat{\imath} + 12\Delta B_z\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{r}_{\Delta C_z} \times \Delta \underset{\sim}{C} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -12 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta C_z \end{vmatrix} = 7\Delta C_z\,\hat{\imath} + 12\Delta C_z\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{r}_T \times \underset{\sim}{T} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 7 & 6 \\ 500 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,\hat{\imath} + 3000\,\hat{\jmath} - 3500\,\hat{k}$$

$$\therefore \quad \underset{\sim}{M}_O^R = (7\Delta C_z - 7\Delta B_z)\hat{\imath} + (12\Delta B_z + 12\Delta C_z + 3000)\hat{\jmath} - 3500\,\hat{k} = \underset{\sim}{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} 7\Delta C_z - 7\Delta B_z &= 0 \\ 12\Delta B_z + 12\Delta C_z + 3000 &= 0 \end{aligned}} \qquad (**)$$

Sistema de ecuaciones a resolver: se obtiene juntando y ordenando (*) y (**).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 12 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A_z \\ \Delta B_z \\ \Delta C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3000 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta A_z \\ \Delta B_z \\ \Delta C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 12 & 12 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3000 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema en MATLAB se obtiene:

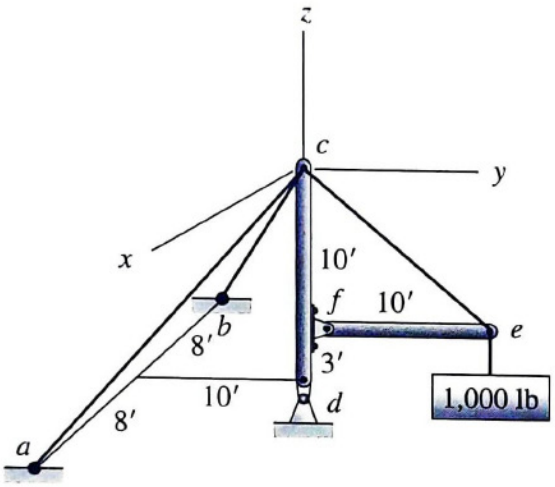
$\Delta A_z = 250$ lbf

$\Delta B_z = -125$ lbf

$\Delta C_z = -125$ lbf

PROBLEMA 17

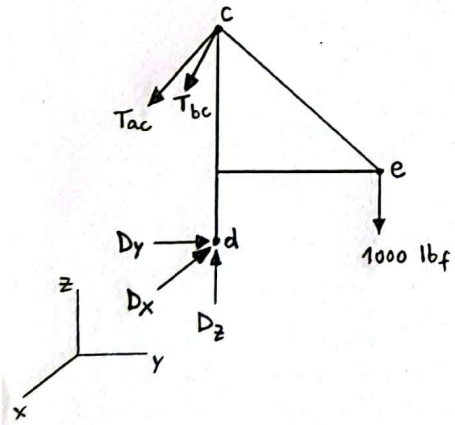
Problema: El poste grúa que se muestra en la figura se encuentra soportando una carga de 1000 lbf. El poste tiene rótula de conexión al suelo en el punto *d* y se sostiene mediante los cables *ac* y *bc*. Despreciando el peso propio de los miembros y cables, encontrar las tensiones en los cables *ac*, *bc* y *ce*.



SOLUCIÓN:

Si hacemos un DCL de la estructura completa tendremos las tensiones de los cables ac y bc expuestas (2 incógnitas) y las reacciones en la rótula d (3 incógnitas) alcanzando 5 incógnitas. En 3D podemos resolver hasta 6 incógnitas con las ecuaciones de equilibrio de la estática, por lo que podemos resolver el problema por estática. Si tomamos momentos con respecto a d solo tendremos expuestas las tensiones de los cables ac y bc (2 incógnitas) dado que las reacciones en d no pueden hacer momentos en su mismo punto. Observando que las tensiones en los cables ac y bc solo tendrán componentes x e y del momento con respecto a d (componente de momento en eje z es nula pues el brazo es nulo) tendremos 2 ecuaciones para determinar las 2 tensiones.

DCL para determinar T_{ac}, T_{bc}



Largos: $\overline{ac} = \sqrt{10^2 + 8^2 + 13^2} = \sqrt{333}$

$\overline{bc} = \overline{ac} = \sqrt{333}$

Vectores unitarios:

$$\underset{\sim}{\lambda}_{ac} = \frac{1}{\sqrt{333}}(8\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} - 13\hat{k})$$

$$\underset{\sim}{\lambda}_{bc} = \frac{1}{\sqrt{333}}(-8\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} - 13\hat{k})$$

$\therefore$

$$\underset{\sim}{T}_{ac} = \|\underset{\sim}{T}_{ac}\| \frac{1}{\sqrt{333}}(8\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} - 13\hat{k})$$

$$\underset{\sim}{T}_{bc} = \|\underset{\sim}{T}_{bc}\| \frac{1}{\sqrt{333}}(-8\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} - 13\hat{k})$$

brazos:

$$\underset{\sim}{r}_{c/d} = 13\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{r}_{e/d} = 10\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

$$\Sigma M_d = 0: \quad \underset{\sim}{r}_{c/d} \times \underset{\sim}{T}_{ac} + \underset{\sim}{r}_{c/d} \times \underset{\sim}{T}_{bc} + \underset{\sim}{r}_{e/d} \times (-1000)\hat{k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 13\,\hat{k} \times \|\underset{\sim}{T}_{ac}\| \frac{1}{\sqrt{333}}(8\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} - 13\hat{k})$$

$$+ 13\hat{k} \times \|\underset{\sim}{T}_{bc}\| \frac{1}{\sqrt{333}}(-8\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} - 13\hat{k})$$

$$+ \underbrace{\underbrace{(10\hat{\jmath} - 3\hat{k}) \times (-1000)\hat{k}}_{-10000\,(\hat{\jmath} \times \hat{k})}}_{-10000\,\hat{\imath}} = 0$$

obs: $\hat{k} \times \hat{k} = \underset{\sim}{0}$
$\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$
$\hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$

Sea $t_1 = \frac{1}{\sqrt{333}}\|\underset{\sim}{T}_{ac}\|$, $t_2 = \frac{1}{\sqrt{333}}\|\underset{\sim}{T}_{bc}\|$

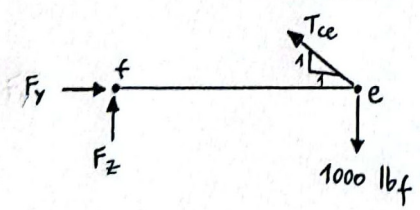
$$\Leftrightarrow \quad (104\,t_1\hat{\jmath} + 130\,t_1\hat{\imath}) + (-104\,t_2\hat{\jmath} + 130\,t_2\hat{\imath}) - 10000\,\hat{\imath} = \underset{\sim}{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (130(t_1 + t_2) - 10000)\hat{\imath} + 104(t_1 - t_2)\hat{\jmath} = \underset{\sim}{0}$$

$$\therefore \quad \boxed{\begin{aligned} 130(t_1 + t_2) - 10000 &= 0 \\ 104(t_1 - t_2) &= 0 \end{aligned}} \Rightarrow t_1 = t_2 = 38.5 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \|\underset{\sim}{T}_{ac}\| &= 38.5\sqrt{333} = 702 \text{ lbf} \\ \|\underset{\sim}{T}_{bc}\| &= 38.5\sqrt{333} = 702 \text{ lbf} \end{aligned}}$$

Para determinar la tensión en el cable ce hacemos un DCL de fe dejando expuesta la tensión en el cable ce y dos reacciones en f. Si tomamos momentos con respecto a f podemos dejar expuesta solo la tensión en el cable ce.

DCL para determinar Tce



$$\Sigma M_f = 0: \quad 10\,T_{ce}\sin 45^\circ - 10(10000) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{ce} = \frac{10(10000)}{10\sin 45^\circ} \approx 1414 \text{ lbf} = \|\underset{\sim}{T}_{ce}\|}$$