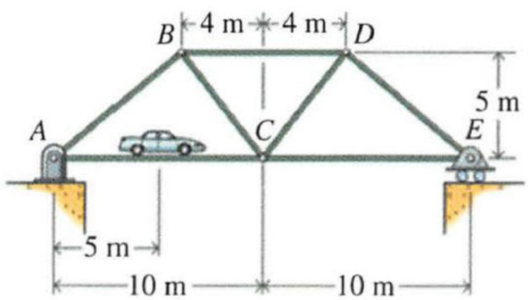
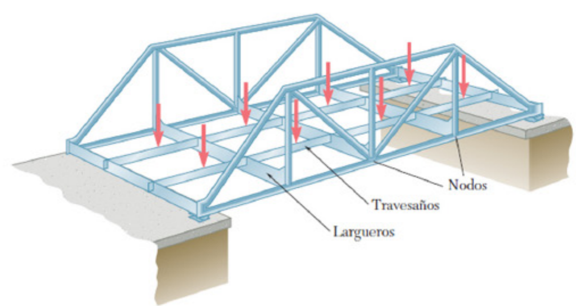
PROBLEMAS RESUELTOS

UNIDAD 4: ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

PROBLEMA 1

Problema: La armadura que muestra un auto detenido representa un lado del puente; otra armadura igual representa el otro lado del puente. Un sistema de piso permite transmitir el peso del auto detenido a los nodos de la armadura. La masa del auto es de 2000 kg. Calcular la fuerza sobre cada barra de la armadura utilizando el método de los nodos.





Observación: Un sistema de piso de armadura utiliza travesaños y largueros para transmitir una carga aplicada a los nodos de dicha armadura.

SOLUCIÓN:

La armadura es simple con $m = 7$ barras y $n = 5$ nodos. Los 5 nodos proveen un total de 10 ecuaciones. Hay $r=3$ condiciones de soporte. Por lo tanto,

$$m = 7 \,,\quad n = 5 \,,\quad r = 3$$

$$\left.\begin{aligned} m + r &= 7 + 3 = 10 \\ 2n &= 10 \end{aligned}\right\} \quad m + r = 2n = 10.$$

A menos que la armadura esté impropiamente restringida, la armadura está completamente restringida y es estáticamente determinada.

<u>Resolución mediante el método de los nodos</u>

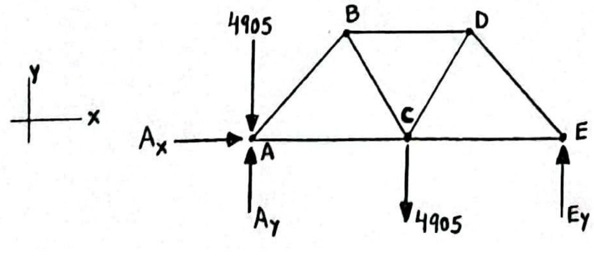
Paso 1: Se divide el peso del auto entre los nodos de la armadura. Tomamos la mitad del peso del auto, ya que la otra mitad la soporta la armadura del otro lado del puente.

$$W = \left(\frac{2000}{2}\right) \text{kg} \times 9.81 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9810 \text{ N}$$

$\therefore$ Como el auto está ubicado en el medio del tramo AC, el peso se reparte en partes iguales entre los nodos A y C.

$$W_A = W_C = \frac{9810}{2} = 4905 \text{ N}$$

Paso 2: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre (DCL) de la armadura completa y se determinan las reacciones mediante las ecuaciones de equilibrio.



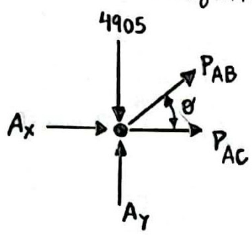
$$\Sigma F_x = 0 : \quad A_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 : \quad A_y - 4905 - 4905 + E_y = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 : \quad 20\, E_y - 10(4905) = 0$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} E_y &= \frac{10(4905)}{20} = 2452.5 \text{ N} \\ A_y &= 4905 + 4905 - 2452.5 = 7357.5 \text{ N} \\ A_x &= 0 \text{ N} \end{aligned}}$$

Paso 3: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del nodo A y se escriben las ecuaciones de equilibrio. Este nodo es ideal para comenzar pues tiene 2 incógnitas que pueden ser resueltas con las 2 ecuaciones de equilibrio:



$$\Sigma F_x = 0 : \quad A_x + P_{AC} + P_{AB}\cos\theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 : \quad A_y - 4905 + P_{AB}\sin\theta = 0$$

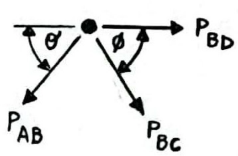
Del cálculo de reacciones sabemos que $A_x = 0$, $A_y = 7357.5$ N.
Por geometría se obtiene θ: $\theta = \operatorname{atan}(5/6)$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} P_{AB} &= \frac{4905 - 7357.5}{\sin(\operatorname{atan}(5/6))} \approx -3831 \text{ N} \\ P_{AC} &= 3831\cos(\operatorname{atan}(5/6)) \approx 2943 \text{ N} \end{aligned}}$$

Paso 4: El nodo B tiene 3 barras, pero en una barra ya se conoce la fuerza ($P_{BA} = P_{AB} = -3831$ N) por lo que la fuerza en las dos barras restantes se obtienen usando las 2 ecuaciones de equilibrio del nodo:

$$\Sigma F_x = 0 : \quad P_{BD} + P_{BC}\cos\phi - P_{AB}\cos\theta = 0$$

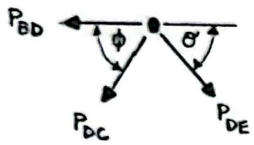
$$\Sigma F_y = 0 : \quad -P_{AB}\sin\theta - P_{BC}\sin\phi = 0$$



Del cálculo en el nodo A se sabe que $P_{AB} = -3831$ N.
Por geometría se obtienen θ y ϕ: $\theta = \operatorname{atan}(5/6)$
$\phi = \operatorname{atan}(5/4)$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} P_{BC} &= \frac{3831\sin(\operatorname{atan}(5/6))}{\sin(\operatorname{atan}(5/4))} \approx 3140.8 \text{ N} \\ P_{BD} &= -3831\cos(\operatorname{atan}(5/6)) - 3140.8\cos(\operatorname{atan}(5/4)) \\ &\approx -4905.1 \text{ N} \end{aligned}}$$

Paso 5: En cada uno de los nodos C, D y E quedan 2 fuerzas que resolver. Por lo tanto, se puede continuar con cualquiera de ellos. Resolvemos el nodo D.



$$\Sigma F_x = 0 : \quad -P_{BD} - P_{DC}\cos\phi + P_{DE}\cos\theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 : \quad -P_{DC}\sin\phi - P_{DE}\sin\theta = 0$$

Del cálculo en el nodo B sabemos que $P_{BD} = -4905.1$ N

Por geometría se obtienen θ y ϕ: $\theta = \operatorname{atan}(5/6)$

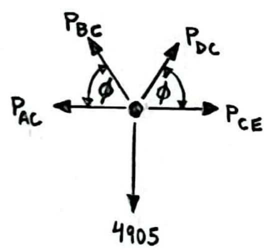
$\phi = \operatorname{atan}(5/4)$

$$\therefore \quad P_{DE} = -P_{DC}\frac{\sin(\operatorname{atan}(5/4))}{\sin(\operatorname{atan}(5/6))}$$

$$4905.1 - P_{DC}\cos(\operatorname{atan}(5/4)) - P_{DC}\frac{\sin(\operatorname{atan}(5/4))}{\sin(\operatorname{atan}(5/6))}\cos(\operatorname{atan}(5/6)) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_{DC} &= \frac{4905.1}{\cos(\operatorname{atan}(5/4)) + \frac{\sin(\operatorname{atan}(5/4))}{\sin(\operatorname{atan}(5/6))}\cos(\operatorname{atan}(5/6))} \\ &\approx 3140.8 \text{ N} \\ P_{DE} &= -3140.8\,\frac{\sin(\operatorname{atan}(5/4))}{\sin(\operatorname{atan}(5/6))} \approx -3831 \text{ N} \end{aligned}}$$

Paso 6 : Continuamos con el diagrama de cuerpo libre del nodo C y escribimos las ecuaciones de equilibrio.



$$\Sigma F_x = 0 : \quad -P_{AC} - P_{BC}\cos\phi + P_{DC}\cos\phi + P_{CE} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 : \quad -4905 + P_{BC}\sin\phi + P_{DC}\sin\phi = 0$$

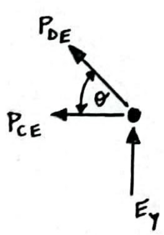
Del cálculo en los nodos A, B y D sabemos que

$$P_{AC} = 2943 \text{ N} \; ; \; P_{BC} = 3140.8 \text{ N} \; ; \; P_{DC} = 3140.8 \text{ N}$$

Por geometría se obtiene $\phi = \text{atan}(5/4)$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} P_{CE} &= 2943 + 3140.8\cos(\text{atan}(5/4)) - 3140.8\cos(\text{atan}(5/4)) \\ &= 2943 \text{ N} \end{aligned}}$$

Paso 7 : Se resuelve el equilibrio en el último nodo que nos queda, el nodo E.



$$\Sigma F_x = 0 : \quad -P_{CE} - P_{DE}\cos\theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 : \quad E_y + P_{DE}\sin\theta = 0$$

$\theta = \text{atan}(5/6)$

P_{DE} y P_{CE} ya fueron determinadas en los cálculos de los nodos D y C. Por otro lado, E_y fue calculado en las reacciones. Por lo tanto, no hay nada que falte calcular en el nodo E. Las ecuaciones pueden ser usadas para comprobar los cálculos:

$$P_{CE} = 2943 \text{ N} \; ; \; P_{DE} = -3831 \text{ N} \; ; \; E_y = 2452.5 \text{ N}$$

$$\therefore \quad -2943 + 3831\cos(\text{atan}(5/6)) \approx 0.056 \approx 0$$

$$2452.5 - 3831\sin(\text{atan}(5/6)) \approx -0.046 \approx 0 \quad //$$

Resumen: Utilizando la notación (C) para las fuerzas negativas (compresión) y (T) para las fuerzas positivas (tracción), los resultados obtenidos son los siguientes:

$P_{AB} = 3831$ N (C)

$P_{AC} = 2943$ N (T)

$P_{BC} = 3140.8$ N (T)

$P_{BD} = 4905.1$ N (C)

$P_{DC} = 3140.8$ N (T)

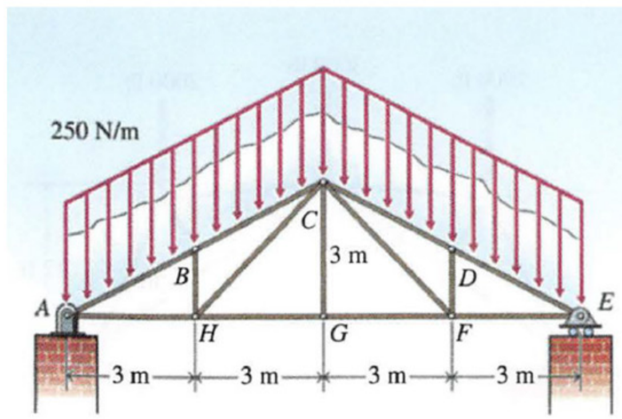
$P_{DE} = 3831$ N (C)

$P_{CE} = 2943$ N (T)

OBTENER CÓDIGO MATLAB: U4_problema1.m

PROBLEMA 2

Problema: La armadura Pratt mostrada en la figura soporta una carga de nieve que puede aproximarse a una carga distribuida de 250 N/m. Determinar la fuerza en los miembros *BC*, *CH* y *CG*.



SOLUCIÓN:

Análisis previo: en el soporte A hay 2 reacciones y en el soporte B hay 1 reacción. Por lo tanto, utilizando un diagrama de cuerpo libre de la armadura completa se puede determinar estas 3 reacciones. Luego de determinar las reacciones, haciendo un DCL del nodo A quedarán expuestas 2 incógnitas (fuerza AB y fuerza AH), las que podrán ser determinadas con las 2 ecuaciones de equilibrio que aporta el nodo A. Luego, se puede seguir con el nodo B que expondrá 2 incógnitas (fuerza BC y fuerza BH), las que podrán ser determinadas con las 2 ecuaciones de equilibrio que aporta el nodo B. Luego, seguiremos con el nodo H, que expondrá 2 incógnitas (fuerzas HC y HG), las que podrán ser determinadas con las 2 ecuaciones de equilibrio que aporta el nodo H. Finalmente, la fuerza faltante (GC) podrá ser determinada en el nodo G, que expondrá 2 incógnitas (fuerza GC y fuerza GF), las que podrán ser determinadas con las 2 ecuaciones de equilibrio que aporta el nodo G.

Resolución mediante el método de los nodos

Paso 1: Se determinan las cargas nodales provenientes de la distribución de fuerza sobre la armadura.

Por geometría se tiene que los largos $L_{AB} = L_{BC} = L_{CD} = L_{DE} = \frac{\sqrt{6^2+3^2}}{2} \approx 3.354\,m$

$\therefore$ Cargas nodales provenientes de $250\ \frac{N}{m}$:

Nodo A $\longrightarrow$ $-\frac{250\,(3.354)}{2} = -419.25\ N$

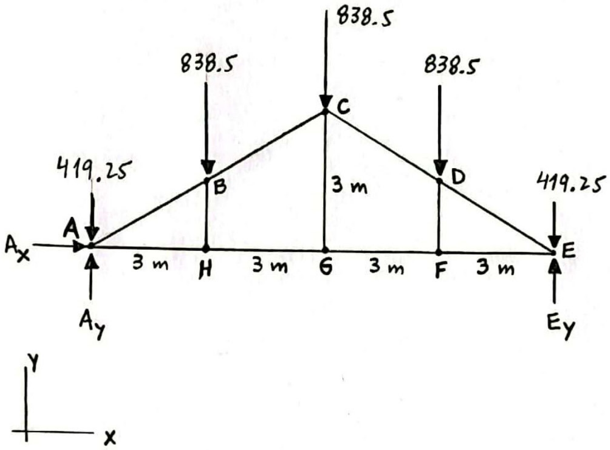
Nodo B $\longrightarrow$ $-\frac{250\,(3.354+3.354)}{2} = -838.5\ N$

Nodo C $\longrightarrow$ $-\frac{250\,(3.354+3.354)}{2} = -838.5\ N$

Nodo D $\longrightarrow$ $-\frac{250\,(3.354+3.354)}{2} = -838.5\ N$

Nodo E $\longrightarrow$ $-\frac{250\,(3.354)}{2} = -419.25\ N$

Diagrama de cuerpo libre:



$$\Sigma F_y = 0: \quad A_y + E_y - 419.25(2) - 838.5(3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_y + E_y = 3354$$

$$\Sigma F_x = 0: \quad \boxed{A_x = 0}$$

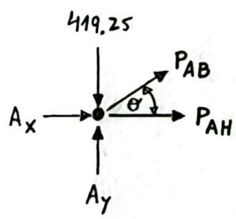
$$\Sigma M_A = 0: \quad 12E_y - 12(419.25) - 9(838.5) - 6(838.5) - 3(838.5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_y = 1677 \text{ N}}$$

$$\therefore \quad \boxed{A_y = 3354 - 1677 = 1677 \text{ N}}$$

Paso 2: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del nodo A y se plantean las ecuaciones de equilibrio.

$$\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{6^2+3^2}} = \frac{6}{\sqrt{45}} \; ; \; \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{45}}$$



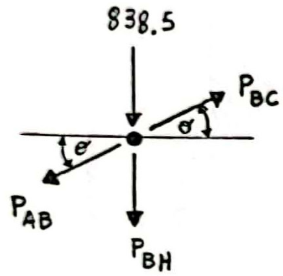
$$\Sigma F_x = 0: \quad P_{AB}\cos\theta + P_{AH} + A_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad A_y - 419.25 + P_{AB}\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_{AB} = \frac{419.25 - A_y}{\sin\theta} = \frac{419.25 - 1677}{\frac{3}{\sqrt{45}}} \approx -2812.41 \text{ N}}$$

$$\therefore \quad \boxed{P_{AH} = -P_{AB}\cos\theta - A_x = 2812.41\left(\frac{6}{\sqrt{45}}\right) - 0 \approx 2515.5 \text{ N}}$$

Paso 3 : Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del nodo B y se plantean las ecuaciones de equilibrio.



$$\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{45}} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{45}}$$

$\Sigma F_x = 0$: $\quad P_{BC}\cos\theta - P_{AB}\cos\theta = 0,$

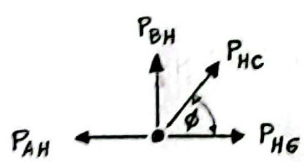
pero $P_{AB} = -2812.41$ N

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_{BC} = P_{AB} = -2812.41 \text{ N}}$$

$\Sigma F_y = 0$: $\quad P_{BC}\sin\theta - P_{AB}\sin\theta - P_{BH} - 838.5 = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_{BH} = -838.5 \text{ N}}$$

Paso 4 : Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del nodo H y se plantean las ecuaciones de equilibrio.



$$\cos\phi = \frac{3}{\sqrt{3^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{18}} \quad ; \quad \sin\phi = \frac{3}{\sqrt{18}}$$

$\Sigma F_x = 0$: $\quad P_{HC}\cos\phi + P_{HG} - P_{AH} = 0$,

pero $P_{AH} = 2515.5$ N

$$\Rightarrow \quad P_{HC}\cos\phi + P_{HG} = 2515.5$$

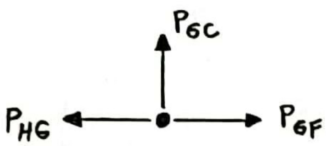
$\Sigma F_y = 0$: $\quad P_{BH} + P_{HC}\sin\phi = 0$,

pero $P_{BH} = -838.5$ N

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_{HC} = -\frac{P_{BH}}{\sin\phi} = \frac{838.5}{\frac{3}{\sqrt{18}}} \approx 1185.82 \text{ N}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\begin{aligned} P_{HG} &= 2515.5 - P_{HC}\cos\phi = 2515.5 - \frac{838.5}{\sin\phi}\cos\phi \\ &= 1677 \text{ N} \end{aligned}}$$

Paso 5: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del nodo G y se plantean las ecuaciones de equilibrio.



$\Sigma F_y = 0$: $\boxed{P_{GC} = 0}$

$\Sigma F_x = 0$: $\boxed{P_{GF} = P_{HG} = 1677\ N}$,

ya que $P_{HG} = 1677\ N$.

Resumen

$P_{BC} = 2812.41\ N\ (C)$

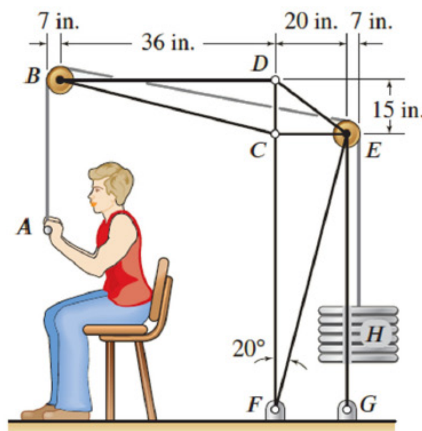
$P_{CH} = 1185.82\ N\ (T)$

$P_{CG} = 0\ N$

OBTENER CÓDIGO MATLAB: U4_problema2.m

PROBLEMA 3

Problema: En la máquina de ejercicios que se muestra en la figura, el peso es de H = 50 lbf. Si el segmento de cable AB es vertical, determinar la fuerza en cada barra de la máquina.

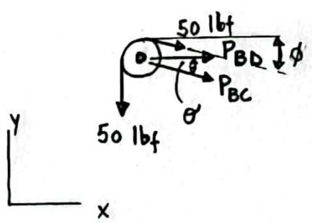


SOLUCIÓN:

Análisis previo: en este problema no es necesario determinar las reacciones para determinar las fuerzas en las barras. Si comenzamos por B quedarán expuestas 2 incógnitas (fuerzas P_{BD} y P_{BC}) que pueden ser determinadas mediante las 2 ecuaciones de equilibrio en B. Luego, seguimos con D dejando expuestas 2 incógnitas (fuerzas P_{DC} y P_{DE}) que pueden ser determinadas mediante las 2 ecuaciones de equilibrio en D. Similarmente, seguiremos con C y finalmente con E.

Resolución mediante el método de los nodos

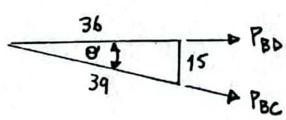
Paso 1: se dibuja el diagrama de cuerpo libre del nodo B y se escriben las ecuaciones de equilibrio.



$$\Sigma F_x = 0: \quad P_{BD} + P_{BC}\cos\theta + 50\cos\phi = 0$$

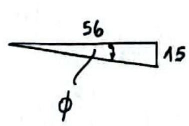
$$\Sigma F_y = 0: \quad -50 - 50\sin\phi - P_{BC}\sin\theta = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{P_{BC} = \frac{-50 - 50\frac{15}{\sqrt{56^2+15^2}}}{\frac{15}{39}} \approx -163.64 \text{ lbf}}$$



$$\cos\theta = \frac{36}{39}$$

$$\sin\theta = \frac{15}{39}$$

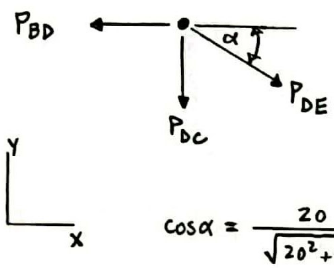


$$\cos\phi = \frac{56}{\sqrt{56^2+15^2}}$$

$$\sin\phi = \frac{15}{\sqrt{56^2+15^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_{BD} &= -50\cos\phi - P_{BC}\cos\theta \\ &= -50\frac{56}{\sqrt{56^2+15^2}} + 163.64\,\frac{36}{39} \\ &\approx 102.75 \text{ lbf} \end{aligned}}$$

Paso 2: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del nodo D y se escriben las ecuaciones de equilibrio.



$$\cos\alpha = \frac{20}{\sqrt{20^2+15^2}} = \frac{20}{25}$$

$$\sin\alpha = \frac{15}{25}$$

$\Sigma F_x = 0: \quad -P_{BD} + P_{DE}\cos\alpha = 0,$

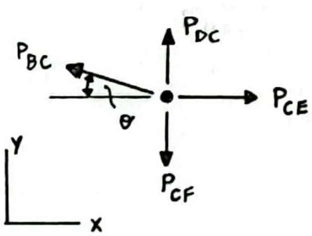
pero $P_{BD} = 102.75$ lbf

$$\Rightarrow \boxed{P_{DE} = \frac{P_{BD}}{\cos\alpha} = \frac{102.75}{\frac{20}{25}} \approx 128.44 \text{ lbf}}$$

$\Sigma F_y = 0: \quad -P_{DC} - P_{DE}\sin\alpha = 0$

$$\Rightarrow \boxed{P_{DC} = -P_{DE}\sin\alpha = -128.44\,\frac{15}{25} \approx -77.06 \text{ lbf}}$$

Paso 3: Se dibuja diagrama de cuerpo libre del nodo C y se escriben las ecuaciones de equilibrio.



$$\cos\theta = \frac{36}{39}$$

$$\sin\theta = \frac{15}{39}$$

$\Sigma F_x = 0: \quad P_{CE} - P_{BC}\cos\theta = 0,$

pero $P_{BC} = -163.64$ lbf

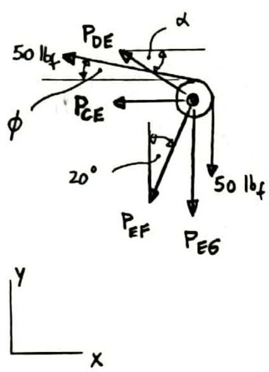
$$\Rightarrow \boxed{P_{CE} = P_{BC}\cos\theta = -163.64\,\frac{36}{39} \approx -151.05 \text{ lbf}}$$

$\Sigma F_y = 0: \quad P_{DC} + P_{BC}\sin\theta - P_{CF} = 0,$

pero $P_{DC} = -77.06$ y $P_{BC} = -163.64$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_{CF} &= P_{DC} + P_{BC}\sin\theta \\ &= -77.06 - 163.64\,\frac{15}{39} \\ &\approx -140 \text{ lbf} \end{aligned}}$$

Paso 4: Se dibuja diagrama de cuerpo libre del nodo E y se escriben las ecuaciones de equilibrio.



$$\cos\phi = \frac{56}{\sqrt{56^2+15^2}}$$

$$\sin\phi = \frac{15}{\sqrt{56^2+15^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{20}{25}$$

$$\sin\alpha = \frac{15}{25}$$

$\Sigma F_x = 0: \; -P_{DE}\cos\alpha - P_{CE} - 50\cos\phi - P_{EF}\sin 20° = 0,$

pero $P_{DE} = 128.44$ lbf , $P_{CE} = -151.05$ lbf

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_{EF} &= \frac{-P_{DE}\cos\alpha - P_{CE} - 50\cos\phi}{\sin 20°} \\ &= \frac{-128.44\,\frac{20}{25} + 151.05 - 50\,\frac{56}{\sqrt{56^2+15^2}}}{\sin 20°} \\ &\approx 0 \text{ lbf} \end{aligned}}$$

$\Sigma F_y = 0: \; -P_{EG} - P_{EF}\cos 20° + P_{DE}\sin\alpha + 50\sin\phi = 0,$

pero $P_{EF} = 0$ lbf, $P_{DE} = 128.44$ lbf

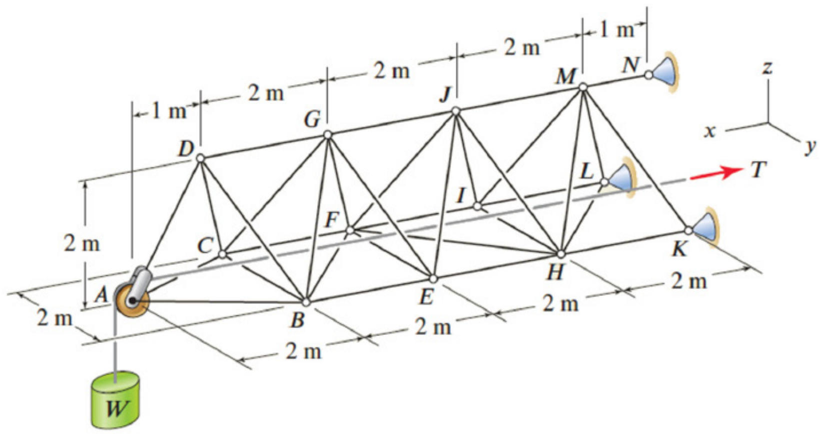
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_{EG} &= -P_{EF}\cos 20° + P_{DE}\,\frac{15}{25} + 50\,\frac{15}{\sqrt{56^2+15^2}} - 50 \\ &= 0 + 128.44\,\frac{15}{25} + 50\,\frac{15}{\sqrt{56^2+15^2}} - 50 \\ &\approx 40 \text{ lbf} \end{aligned}}$$

Resumen:

$P_{BC} = 163.64$ lbf (C)
$P_{BD} = 102.75$ lbf (T)
$P_{DE} = 128.44$ lbf (T)
$P_{DC} = 77.06$ lbf (C)
$P_{CE} = 151.05$ lbf (C)
$P_{CF} = 140$ lbf (C)
$P_{EF} = 0$ lbf
$P_{EG} = 40$ lbf (T)

PROBLEMA 4

Problema: La pluma de una grúa está en una posición horizontal. Si W = 1 kN, determine la fuerza en la barra DG.



SOLUCIÓN:

La armadura es simple con $m = 33$ barras y $n = 14$ nodos. Los 14 nodos proveen un total de $3 \times 14 = 42$ ecuaciones. Hay $r = 9$ condiciones de soporte. Por lo tanto,

$m = 33, \ n = 14, \ r = 9$

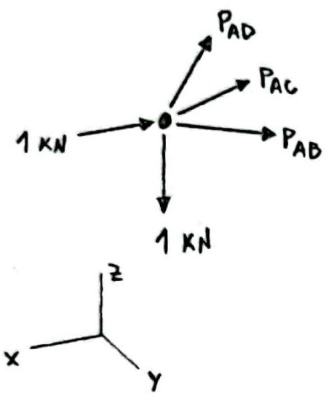
$$\left.\begin{aligned} m + r &= 33 + 9 = 42 \\ 3n &= 42 \end{aligned}\right\} \quad m + r = 3n = 42.$$

A menos que la armadura esté impropiamente restringida, la armadura está completamente restringida y es estáticamente determinada.

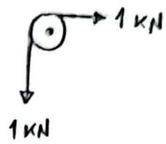
<u>Resolución mediante el método de los nodos</u>

Análisis previo: Para obtener la fuerza en la barra DG podríamos partir contando las incógnitas que necesitaríamos resolver en el nodo D y los cercanos. Por ejemplo, el nodo D tiene 4 barras que resultarían en 4 incógnitas. Sin embargo, solo tenemos 3 ecuaciones disponibles por nodo. Si observamos el nodo A, verificaremos que este nodo aporta con incógnitas que se pueden resolver con las 3 ecuaciones de equilibrio de este nodo. Dentro de este conjunto de incógnitas está la fuerza en la barra AD, que es también una incógnita en el nodo D. Por lo tanto, al resolver el nodo A, resolveremos la fuerza en la barra AD disminuyendo en 1 incógnita el nodo D, que podría resolverse a continuación para obtener la fuerza en la barra DG.

Paso 1: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del nodo A y se plantean las ecuaciones de equilibrio.



Fuerzas en polea:



Notar que para posteriormente resolver el nodo D y así obtener la fuerza en la barra DG, solo necesitamos resolver P_{AD} en el nodo A. Dado que P_{AC} y P_{AB} están en el plano x-y, el equilibrio en el eje z involucrará solo a la incógnita que necesitamos P_{AD}. Los cálculos se facilitan si escribimos las fuerzas en forma vectorial.

$$\underset{\sim}{d}_{D/A} = -1\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 2\hat{k} \quad ; \quad \|\underset{\sim}{d}_{D/A}\| = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}$$

$$\underset{\sim}{\lambda}_{D/A} = \frac{1}{\|\underset{\sim}{d}_{D/A}\|}\underset{\sim}{d}_{D/A} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-1\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right)$$

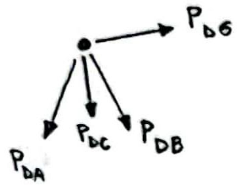
$$\therefore \quad \underset{\sim}{P}_{AD} = P_{AD}\,\underset{\sim}{\lambda}_{D/A} = P_{AD}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-1\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right)$$

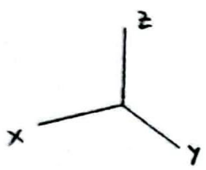
$$\left(P_{AD} = \|\underset{\sim}{P}_{AD}\|\right)$$

$$\sum F_z = 0 : \quad P_{AD}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\,2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{AD} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ \text{kN}}$$

Paso 2: Se dibuja diagrama de cuerpo libre del nodo D y se plantean las ecuaciones de equilibrio.





$$\underset{\sim}{d}_{B/D} = -1\hat{\imath} + 1\hat{\jmath} - 2\hat{k} \;;\; \|\underset{\sim}{d}_{B/D}\| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$$

$$\underset{\sim}{d}_{C/D} = -1\hat{\imath} - 1\hat{\jmath} - 2\hat{k} \;;\; \|\underset{\sim}{d}_{C/D}\| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$$

$$\underset{\sim}{d}_{G/D} = -2\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k} \;;\; \|\underset{\sim}{d}_{G/D}\| = \sqrt{2^2} = 2$$

$$\underset{\sim}{\lambda}_{B/D} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1\hat{\imath} + 1\hat{\jmath} - 2\hat{k})$$

$$\underset{\sim}{\lambda}_{C/D} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1\hat{\imath} - 1\hat{\jmath} - 2\hat{k})$$

$$\underset{\sim}{\lambda}_{G/D} = \frac{1}{2}(-2\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k})$$

$(P_{DA} = \|\underset{\sim}{P}_{DA}\|)$

$(P_{DB} = \|\underset{\sim}{P}_{DB}\|)$

$(P_{DC} = \|\underset{\sim}{P}_{DC}\|)$

$(P_{DG} = \|\underset{\sim}{P}_{DG}\|)$

$$\underset{\sim}{P}_{DA} = -\underset{\sim}{P}_{AD} = \frac{1}{2}(1\hat{\imath} - 0\hat{\jmath} - 2\hat{k})$$

$$\underset{\sim}{P}_{DB} = P_{DB}\,\underset{\sim}{\lambda}_{B/D} = P_{DB}\,\frac{1}{\sqrt{6}}(-1\hat{\imath} + 1\hat{\jmath} - 2\hat{k})$$

$$\underset{\sim}{P}_{DC} = P_{DC}\,\underset{\sim}{\lambda}_{C/D} = P_{DC}\,\frac{1}{\sqrt{6}}(-1\hat{\imath} - 1\hat{\jmath} - 2\hat{k})$$

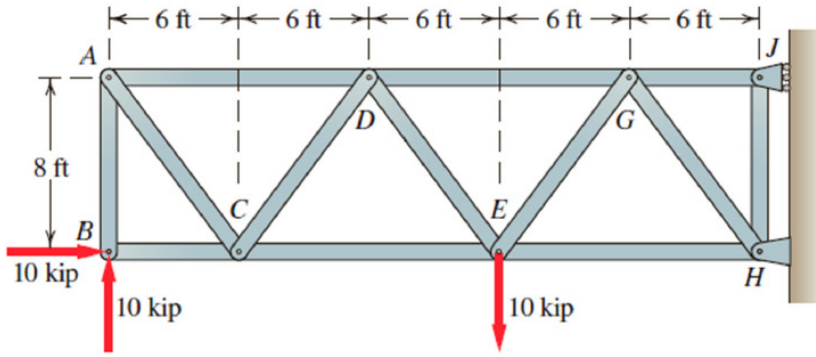
$$\underset{\sim}{P}_{DG} = P_{DG}\,\underset{\sim}{\lambda}_{G/D} = P_{DG}\,\frac{1}{2}(-2\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k})$$

$\Sigma \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{0}$: $\quad \underset{\sim}{P}_{DA} + \underset{\sim}{P}_{DB} + \underset{\sim}{P}_{DC} + \underset{\sim}{P}_{DG} = \underset{\sim}{0}$

$$\left.\begin{array}{ll} \Sigma F_x = 0: & \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}P_{DB} - \frac{1}{\sqrt{6}}P_{DC} - P_{DG} = 0 \\ \Sigma F_y = 0: & \frac{1}{\sqrt{6}}P_{DB} - \frac{1}{\sqrt{6}}P_{DC} = 0 \\ \Sigma F_z = 0: & -1 - \frac{2}{\sqrt{6}}P_{DB} - \frac{2}{\sqrt{6}}P_{DC} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P_{DB} = P_{DC} = -0.6124 \text{ kN} \\ \boxed{P_{DG} = 1 \text{ kN}} \end{array}$$

PROBLEMA 5

Problema: Usar el método de las secciones para encontrar las fuerzas en las barras *DE* y *DG*.



SOLUCIÓN:

La armadura es simple con $m = 13$ barras y $n = 8$ nodos. Los 8 nodos proveen un total de 16 ecuaciones. Hay $r = 3$ condiciones de soporte. Por lo tanto,

$$m = 13, \quad n = 8, \quad r = 3$$

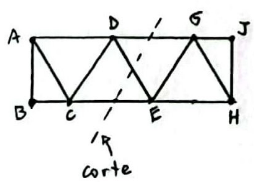
$$\left.\begin{array}{l} m + r = 13 + 3 = 16 \\ 2n = 16 \end{array}\right\} \quad m + r = 2n = 16.$$

A menos que la armadura esté impropiamente restringida, la armadura está completamente restringida y es estáticamente determinada.

Resolución mediante el método de las secciones

Como las barras DE y DG están alejadas de los soportes, no es necesario determinar las reacciones.

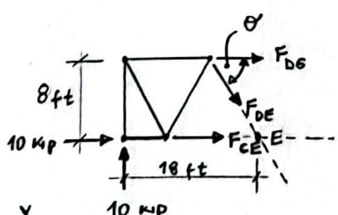
Método de las secciones: hacemos un corte que involucre a lo más 3 barras y dentro de estas debe estar DE o DG, o ambas.

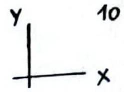


Para determinar F_{DG} podemos sumar momentos con respecto a un punto conveniente (punto E) de modo que sólo quede expuesta F_{DG}:

$$\Sigma M_E = 0 : \quad -8F_{DG} + 18(10) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{DG} = -22.5 \text{ kip}} \quad (F_{DG} = 22.5 \text{ kip (C)})$$





$$\sin\theta = \frac{8}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{8}{10}$$

F_{DE} se puede determinar sumando fuerzas en la dirección y:

$$\Sigma F_y = 0 : \quad -F_{DE}\sin\theta + 10 = 0$$

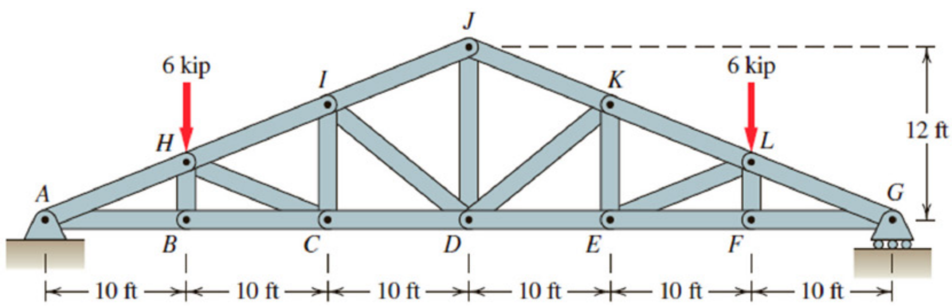
$$\Rightarrow \boxed{F_{DE} = \frac{10}{\sin\theta} = \frac{10(10)}{8} = 12.5 \text{ kip}}$$

$$(F_{DE} = 12.5 \text{ kip (T)})$$

OBTENER CÓDIGO MATLAB: U4_problema5.m

PROBLEMA 6

Problema: Usar una combinación del método de los nodos y método de las secciones para encontrar la fuerza en las barra *JD*.



SOLUCIÓN:

La armadura es simple con $m = 21$ barras y $n = 12$ nodos. Los 12 nodos proveen un total de 24 ecuaciones. Hay $r = 3$ condiciones de soporte. Por lo tanto,

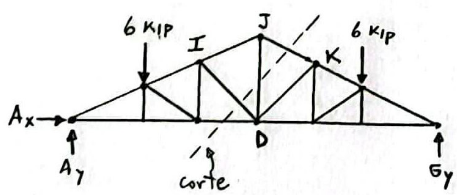
$$m = 21, \quad n = 12, \quad r = 3$$

$$\left.\begin{aligned} m + r &= 21 + 3 = 24 \\ 2n &= 24 \end{aligned}\right\} \quad m + r = 2n = 24.$$

A menos que la armadura esté impropiamente restringida, la armadura está completamente restringida y es estáticamente determinada.

Resolución mediante método de los nodos y método de las secciones

En este problema no es posible introducir un corte que involucre solo a 3 barras. En estas situaciones tendremos que combinar el método de los nodos con el de las secciones.



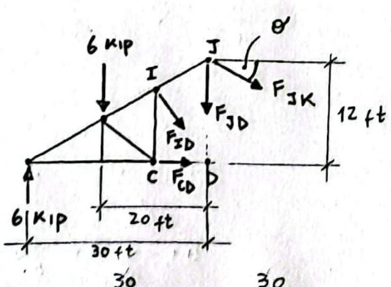
Reacciones:

$\Sigma F_x = 0 : \quad \boxed{A_x = 0}$

$\Sigma F_y = 0 : \quad A_y + G_y = 12$

$\Sigma M_A = 0 : \quad -10(6) - 50(6) + 60(G_y) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} G_y &= 6 \text{ kip} \\ A_y &= 6 \text{ kip} \end{aligned}}$$



Método de las secciones: para determinar F_{JK}

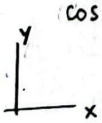
$$\Sigma M_D = 0 : \quad -12 F_{JK} \cos\theta + 20(6) - 30(6) = 0$$

$$\Rightarrow F_{JK} = \frac{20(6) - 30(6)}{12 \cos\theta} = \left(\frac{20(6) - 30(6)}{12(30)} \right) \sqrt{1044}$$

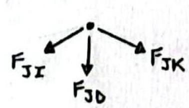
$$\approx -5.39 \text{ kip}$$

$$\cos\theta = \frac{30}{\sqrt{30^2 + 12^2}} = \frac{30}{\sqrt{1044}}$$

$$\sin\theta = \frac{12}{\sqrt{1044}}$$



Método de los nodos: en el nodo J para determinar F_{JD}.



$$\Sigma F_x = 0 : \quad F_{JK} \cos\theta - F_{JI} \cos\theta = 0$$

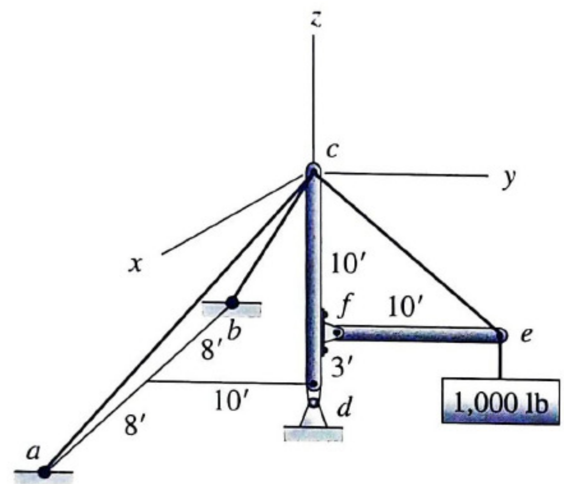
$$\Rightarrow \boxed{F_{JI} = F_{JK} = -5.39 \text{ kip}}$$

$$\Sigma F_y = 0 : \quad -F_{JD} - F_{JI} \sin\theta - F_{JK} \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{JD} = 5.39 \left(\frac{12}{\sqrt{1044}} \right) + 5.39 \left(\frac{12}{\sqrt{1044}} \right) \approx 4 \text{ kip}}$$

PROBLEMA 7

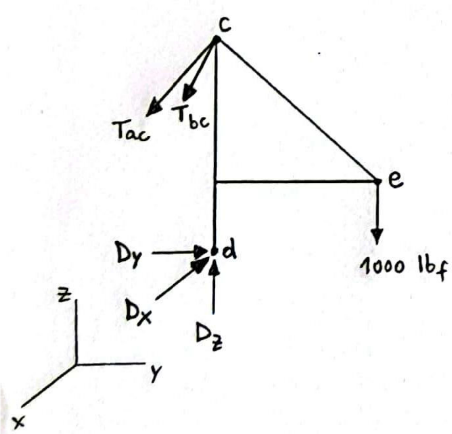
Problema: El poste grúa que se muestra en la figura se encuentra soportando una carga de 1000 lbf. El poste tiene rótula de conexión al suelo en el punto *d* y se sostiene mediante los cables *ac* y *bc*. Despreciando el peso propio de los miembros y cables, encontrar las tensiones en los cables *ac*, *bc* y *ce*.



SOLUCIÓN:

Si hacemos un DCL de la estructura completa tendremos las tensiones de los cables ac y bc expuestas (2 incógnitas) y las reacciones en la rótula d (3 incógnitas) alcanzando 5 incógnitas. En 3D podemos resolver hasta 6 incógnitas con las ecuaciones de equilibrio de la estática, por lo que podemos resolver el problema por estática. Si tomamos momentos con respecto a d solo tendremos expuestas las tensiones de los cables ac y bc (2 incógnitas) dado que las reacciones en d no pueden hacer momentos en su mismo punto. Observando que las tensiones en los cables ac y bc solo tendrán componentes x e y del momento con respecto a d (componente de momento en eje z es nulo pues el brazo es nulo) tendremos 2 ecuaciones para determinar las 2 tensiones.

DCL para determinar T_{ac}, T_{bc}



Largos:

$$\overline{ac} = \sqrt{10^2 + 8^2 + 13^2} = \sqrt{333}$$

$$\overline{bc} = \overline{ac} = \sqrt{333}$$

vectores unitarios:

$$\underset{\sim}{\lambda}_{ac} = \frac{1}{\sqrt{333}}\left(8\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} - 13\hat{k}\right)$$

$$\underset{\sim}{\lambda}_{bc} = \frac{1}{\sqrt{333}}\left(-8\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} - 13\hat{k}\right)$$

$\therefore$

$$\underset{\sim}{T}_{ac} = \|\underset{\sim}{T}_{ac}\| \frac{1}{\sqrt{333}}\left(8\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} - 13\hat{k}\right)$$

$$\underset{\sim}{T}_{bc} = \|\underset{\sim}{T}_{bc}\| \frac{1}{\sqrt{333}}\left(-8\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} - 13\hat{k}\right)$$

brazos:

$$\underset{\sim}{r}_{c/d} = 13\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{r}_{e/d} = 10\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

$\Sigma M_d = 0:$ $\quad \underset{\sim}{r}_{c/d} \times \underset{\sim}{T}_{ac} + \underset{\sim}{r}_{c/d} \times \underset{\sim}{T}_{bc} + \underset{\sim}{r}_{e/d} \times (-1000)\hat{k} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 13\hat{k} \times \|\underset{\sim}{T}_{ac}\| \frac{1}{\sqrt{333}}(8\hat{i} - 10\hat{j} - 13\hat{k})$$

$$+ 13\hat{k} \times \|\underset{\sim}{T}_{bc}\| \frac{1}{\sqrt{333}}(-8\hat{i} - 10\hat{j} - 13\hat{k})$$

$$+ \underbrace{(10\hat{j} - 3\hat{k}) \times (-1000)\hat{k}}_{\underbrace{-10000\,(\hat{j} \times \hat{k})}_{-10000\,\hat{i}}} = 0$$

obs: $\hat{k} \times \hat{k} = \underset{\sim}{0}$
$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$
$\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$

Sea $\quad t_1 = \frac{1}{\sqrt{333}} \|\underset{\sim}{T}_{ac}\| \quad , \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{333}} \|\underset{\sim}{T}_{bc}\|$

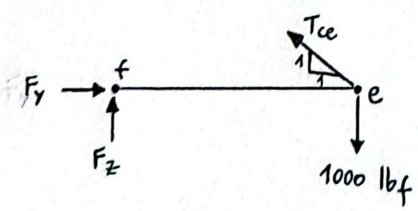
$$\Leftrightarrow \quad (104\, t_1 \hat{j} + 130\, t_1 \hat{i}) + (-104\, t_2 \hat{j} + 130\, t_2 \hat{i}) - 10000\,\hat{i} = \underset{\sim}{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (130(t_1 + t_2) - 10000)\hat{i} + 104(t_1 - t_2)\hat{j} = \underset{\sim}{0}$$

$$\therefore \quad \begin{array}{l} 130(t_1 + t_2) - 10000 = 0 \\ 104(t_1 - t_2) = 0 \end{array} \Rightarrow t_1 = t_2 = 38.5 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \|\underset{\sim}{T}_{ac}\| = 38.5\sqrt{333} \\ \qquad = 702 \text{ lbf} \\ \|\underset{\sim}{T}_{bc}\| = 38.5\sqrt{333} \\ \qquad = 702 \text{ lbf} \end{array}}$$

Para determinar la tensión en el cable ce hacemos un DCL de fe dejando expuesta la tension en el cable ce y dos reacciones en f. Si tomamos momentos con respecto a f podemos dejar expuesta solo la tensión en el cable ce.

DCL para determinar T_{ce}

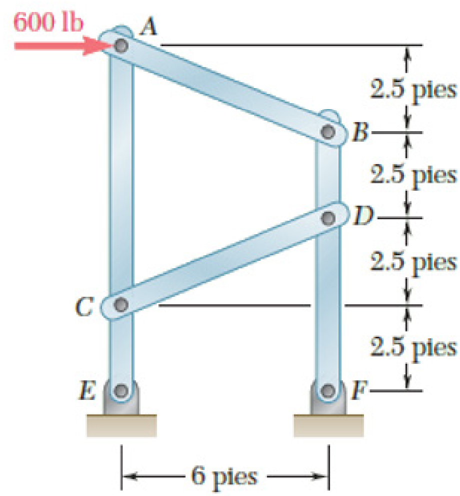


$\Sigma M_f = 0:$ $\quad 10\, T_{ce} \sin 45° - 10(10000) = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{ce} = \frac{10(10000)}{10 \sin 45°} \approx 1414 \text{ lbf} = \|\underset{\sim}{T}_{ce}\|}$$

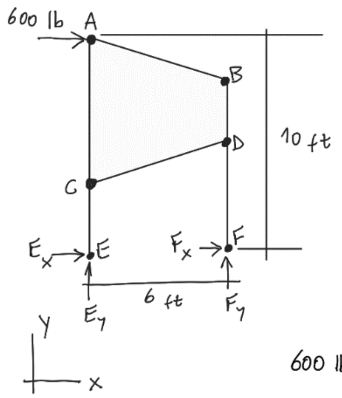
PROBLEMA 8

Problema: Una fuerza horizontal de 600 lb se aplica sobre el pasador *A* del armazón. Determinar las fuerzas que actúan sobre los dos elementos verticales del armazón.



SOLUCIÓN:

DCL armazón completo:

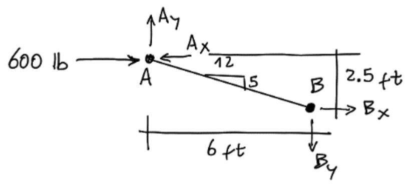


No se puede determinar todas las reacciones dado que hay más de 3 incógnitas. Por lo tanto, determinaremos las que sean posibles. El resto las determinaremos haciendo DCLs locales en los elementos.

$$\Sigma M_E = 0: \quad -600(10) + F_y(6) = 0 \Rightarrow \boxed{F_y = 1000 \text{ lb}}$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad E_y + F_y = 0 \Rightarrow \boxed{E_y = -F_y = -1000 \text{ lb}}$$

DCL elemento AB:



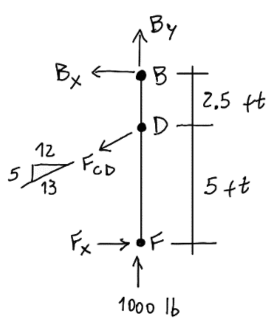
Suponemos que el pasador A está unido al elemento AB. Por lo tanto, la fuerza externa en A se aplica a dicho elemento.

$$\Sigma F_x = 0: \quad 600 - A_x + B_x = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma M_A = 0: \quad B_x(2.5) - B_y(6) = 0 \Rightarrow B_y = B_x\left(\frac{2.5}{6}\right) \qquad (2)$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad A_y - B_y = 0 \qquad (3)$$

DCL elemento BDF:



$$\Sigma F_x = 0: \quad F_x - B_x - F_{CD}\frac{12}{13} = 0 \qquad (4)$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad B_y - F_{CD}\frac{5}{13} + 1000 = 0 \qquad (5)$$

$$\Sigma M_D = 0: \quad B_x(2.5) + F_x(5) = 0 \qquad (6)$$

(6) en (4): $-B_x(0.5) - B_x - F_{CD}\frac{12}{13} = 0$

$$\Rightarrow F_{CD} = -B_x(1.5)\frac{13}{12} \qquad (7)$$

(7) y (2) en (5):

$$B_x\left(\frac{2.5}{6}\right) + B_x(1.5)\frac{5}{12} + 1000 = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = -960 \text{ lb}} \quad (8)$$

(8) en (2): $\boxed{B_y = -960\left(\frac{2.5}{6}\right) = -400 \text{ lb}} \quad (9)$

(8) en (6): $\boxed{F_x = -B_x\left(\frac{2.5}{5}\right) = 960\left(\frac{2.5}{5}\right) = 480 \text{ lb}} \quad (10)$

(9) en (5): $\boxed{F_{CD} = (B_y + 1000)\frac{13}{5} = (-400 + 1000)\frac{13}{5} = 1560 \text{ lb}} \quad (11)$

(8) en (1): $\boxed{A_x = 600 + B_x = 600 - 960 = -360 \text{ lb}}$

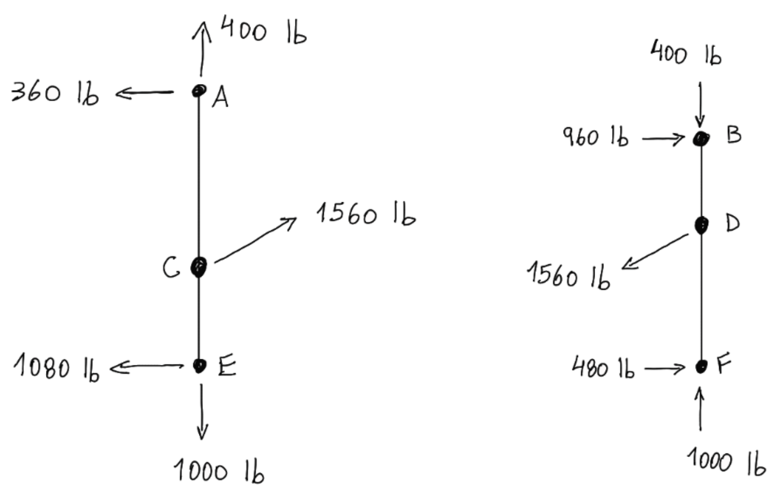
(9) en (3): $\boxed{A_y = B_y = -400 \text{ lb}}$

Del DCL del armazón completo:

$\Sigma F_x = 0: \quad E_x + F_x + 600 = 0 \quad (12)$

(10) en (12): $\boxed{E_x = -F_x - 600 = -480 - 600 = -1080 \text{ lb}}$

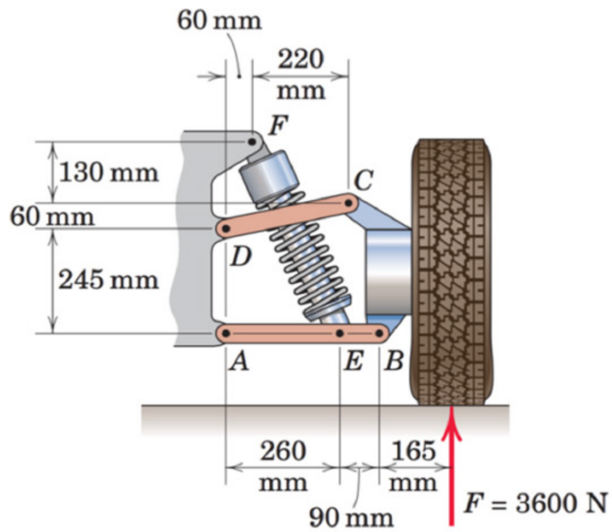
Resumen de fuerzas en elementos verticales:



Comentario: Este problema se encuentra resuelto en el "Problema resuelto 6.6" del libro "Mecánica vectorial para Ingenieros: Estática", Undécima Edición, Beer, Johnston y Mazurek. Sin embargo, en dicha resolución se ha supuesto que el pasador A se encuentra unido al elemento ACE. Se puede verificar que el resultado es el mismo obtenido en la resolución del presente ejemplo, donde el pasador A se ha supuesto unido al elemento AB. Se concluye que el resultado no depende de esta suposición.

PROBLEMA 9

Problema: La figura muestra un sistema de suspensión de una rueda de automóvil. Determinar la magnitud de (**a**) la fuerza en el elemento *DC* y (**b**) la fuerza de suspensión en el amortiguador *FE* si la fuerza normal *F* ejercida sobre la rueda es de 3600 N.



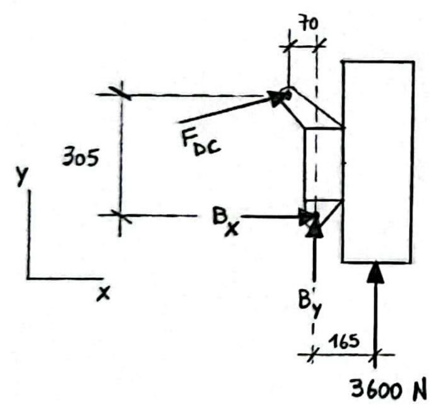
SOLUCIÓN:

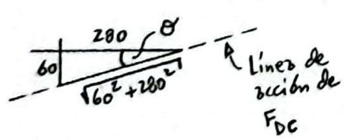
a) Fuerza en el elemento DC.

Análisis previo:

- El elemento DC está sometido a dos fuerzas resultantes (en D y en C). Por lo tanto, el elemento DC estará en equilibrio solo si la fuerza resultante en D es igual en magnitud que la fuerza resultante en C, ambas están alineadas a lo largo de DC, y son opuestas.
- La unión B traspasa fuerzas en dirección vertical y horizontal.
- Si se separa la rueda del conjunto desde las uniones C y D, y luego tomamos momento con respecto a B, solo quedará expuesto como incógnita la fuerza en el elemento DC, por lo que podremos determinarla.

DCL rueda





$$\cos\theta = \frac{280}{\sqrt{60^2+280^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{60}{\sqrt{60^2+280^2}}$$

Momento con respecto a B

$$\underset{\sim}{r}_{C/B} = -70\hat{\imath} + 305\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{F}_{DC} = \underbrace{F_{DC}\frac{280}{\sqrt{60^2+280^2}}}_{t_1}\hat{\imath} + \underbrace{F_{DC}\frac{60}{\sqrt{60^2+280^2}}}_{t_2}\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$\Sigma M_B = 0$:

$$\underset{\sim}{r}_{C/B} \times \underset{\sim}{F}_{DC} + 165\hat{\imath} \times 3600\hat{\jmath}$$

$$= \underset{\sim}{r}_{C/D} \times \underset{\sim}{F}_{DC} + 594000\hat{k} = \underset{\sim}{0} \quad (*)$$

$$\underset{\sim}{r}_{C/D} \times \underset{\sim}{F}_{DC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -70 & 305 & 0 \\ t_1 & t_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-70t_2 - 305t_1)\hat{k}$$

∴ (*) se simplifica como:

$$-70t_2 - 305t_1 + 594000$$

$$= -F_{DC}\left(\frac{70(60) + 305(280)}{\sqrt{60^2+280^2}}\right) + 594000 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{DC} = 1898.4 \text{ N}}$$

b) Fuerza de suspensión en el amortiguador.

Análisis previo:

- Si hacemos el diagrama de cuerpo libre del elemento AB tendremos expuestas las reacciones en A, B y la fuerza en el amortiguador FE.
- Si tomamos los momentos con respecto a A, solo tendremos expuestos la fuerza en FE y la componente de reacción vertical B_y en B. La componente B_y la podemos obtener del DCL de la rueda en a), por lo que la fuerza en el amortiguador podrá ser determinada haciendo cero la sumatoria de momentos en A en el DCL del elemento AB.

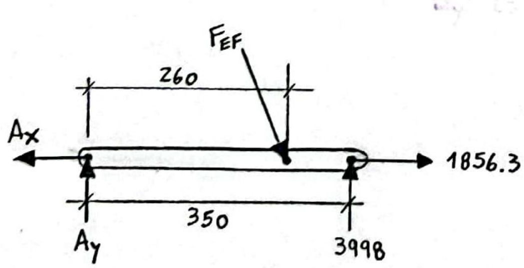
Del DCL de la rueda: $\Sigma F_y = 0: \quad B_y + 3600 + F_{DC}\dfrac{60}{\sqrt{60^2+280^2}} = 0$

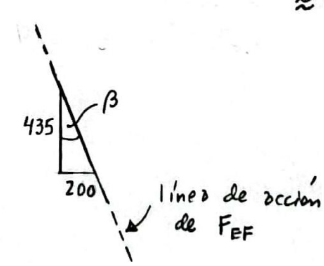
$$\Rightarrow B_y = -3600 - 1898.4\,\frac{60}{\sqrt{60^2+280^2}} \approx -3998 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = 0: \quad B_x + F_{DC}\frac{280}{\sqrt{60^2+280^2}} = 0 \Rightarrow B_x = -1898.4\,\frac{280}{\sqrt{60^2+280^2}}$$

$$\approx -1856.3 \text{ N}$$

DCL elemento AB





$$\cos\beta = \frac{435}{\sqrt{435^2+200^2}}$$

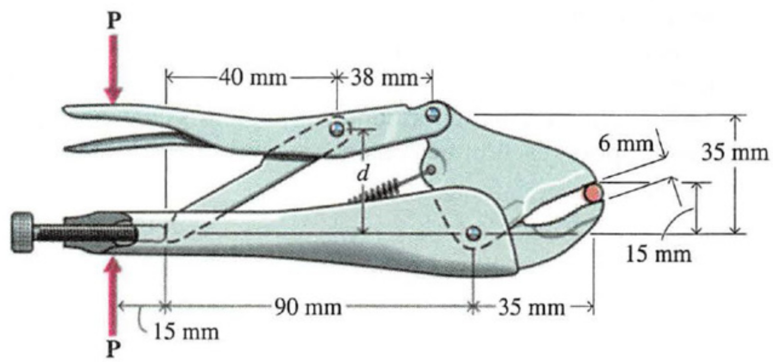
$$\sin\beta = \frac{260}{\sqrt{435^2+200^2}}$$

$$\Sigma M_A = 0: \quad -260\,F_{EF}\frac{435}{\sqrt{435^2+200^2}} + 350\,(3998) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{EF} \approx 5924 \text{ N}}$$

PROBLEMA 10

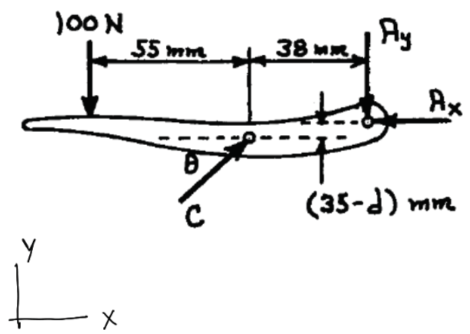
Problema: En los mangos del alicate caimán que se muestra en la figura se aplican fuerzas P = 100 N. Graficar la fuerza aplicada por las mandíbulas al objeto en función de la distancia d (20 ≤ d ≤ 30 mm). La fuerza ejercida por el resorte es despreciable.



SOLUCIÓN:

Análisis previo: tenemos que relacionar la fuerza P, que se aplica en el mango superior, y la distancia d con la fuerza que la mandíbula superior le aplica al objeto. Por lo tanto, tendremos que considerar, en principio, el mango superior y la mandíbula superior en el DCL. Si consideramos el DCL independiente del mango superior tendremos 3 incógnitas que podremos resolver con las 3 ecuaciones de la estática. En particular, trataremos de calcular las fuerzas del pasador que une el mango con la mandíbula en función de la distancia d. Luego, relacionaremos estas fuerzas con la fuerza en el objeto utilizando un DCL de la mandíbula.

DCL mango superior:



$$tg\,\theta = \frac{d}{40} \Rightarrow \theta = arctg\left(\frac{d}{40}\right)$$

$$\Sigma M_A = 0: \quad 100\,(55+38) - C\sin\theta\,(38) + C\cos\theta\,(35-d) = 0$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{9300}{\sin\theta\,(38) - \cos\theta\,(35-d)}$$

dado que $d = 40\,tg\,\theta$,

$$\boxed{C = \frac{9300}{38\sin\theta - 35\cos\theta + 40\sin\theta} = \frac{9300}{78\sin\theta - 35\cos\theta}}$$

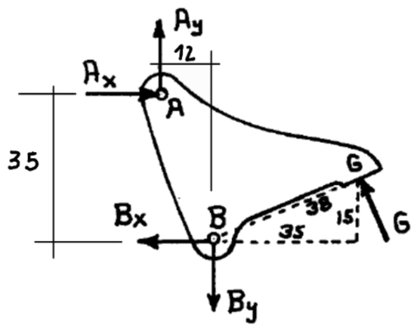
$$\Sigma F_x = 0: \quad C\cos\theta - A_x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A_x = C\cos\theta}$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad C\sin\theta - A_y - 100 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A_y = C\sin\theta - 100}$$

DCL mandíbula:



$$\Sigma M_B = 0: \quad 38\,G - 35 A_x - 12 A_y = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{G = \frac{35 A_x + 12 A_y}{38}} \quad (*)$$

donde

$$A_x = C\cos\theta$$

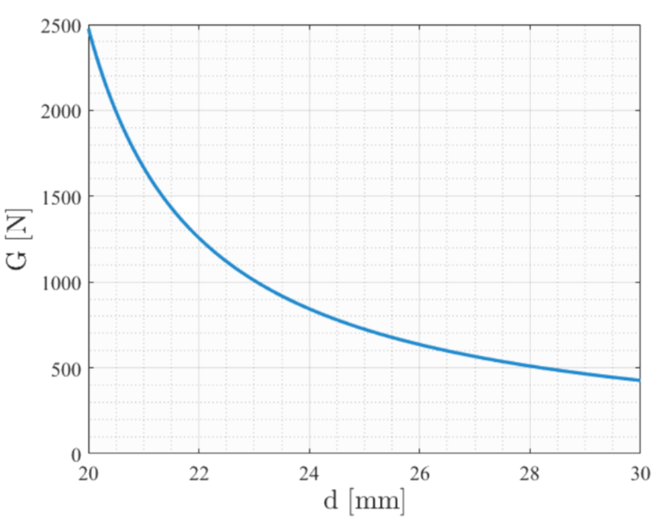
$$A_y = C\sin\theta - 100$$

$$C = \frac{9300}{78\sin\theta - 35\cos\theta}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{d}{40}\right)$$

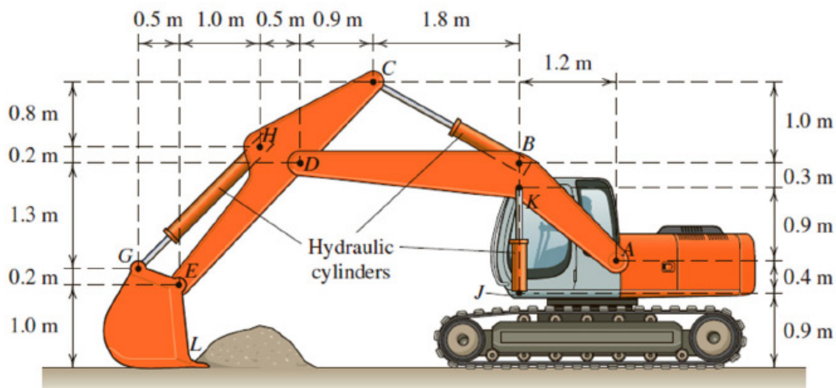
Gráfico $G(20 \le d \le 30)$:

Se grafica la expresión G dada en $(*)$:



PROBLEMA 11

Problema: Dos cilindros hidráulicos controlan el movimiento del brazo y cangilón de la retroexcavadora que se muestra en la figura. En la posición mostrada, se aplica una carga horizontal de 14 kN en el cangilón en el punto *L* (la superficie inferior del cangilón está en la posición justo antes de tocar el suelo). Suponiendo que el peso del brazo y del cangilón son despreciables en comparación con las fuerzas de operación, encontrar las fuerzas en los pasadores *A* y *G*.



SOLUCIÓN:

En este tipo de problemas donde el cuerpo se compone de varias partes debemos hacer un análisis previo para determinar como se realizará el DCL: ¿necesitaremos hacer un DCL del cuerpo completo o tendremos que preparar DCLs individuales de las partes que componen al cuerpo? Para responder esta pregunta debemos tener en mente cuántas incógnitas podemos determinar con las ecuaciones de equilibrio. Analizemos la retroexcavadora:

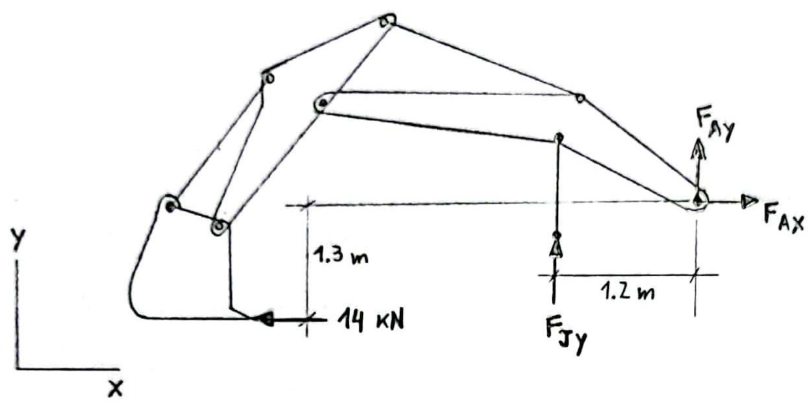
1) Debemos determinar la fuerzas en los pasadores A y G.

2) El pasador A aporta con 2 incógnitas si lo aislamos.

3) El pasador G aporta con 2 incógnitas si lo aislamos

Claramente, no podemos hacer un DCL que involucre las reacciones en A y G al mismo tiempo, pues tendríamos que agregar 2 incógnitas más en E (6 en total). Entonces, debemos pensar en más de un DCL. Por ejemplo, podemos pensar en un DCL que involucre al pasador A y otro apoyo que involucre a lo más 1 incógnita para poder resolverlo (en 2D podemos resolver hasta 3 incógnitas). El elemento JK está sometido solo a 2 cargas resultantes (1 en cada extremo) y por lo tanto si utilizamos la reacción en J esta estará dirigida a lo largo de JK aportando 1 sola incógnita. Por otro lado en L conocemos la carga aplicada. Es decir, si hacemos un DCL que involucre a todo el brazo de la retroexcavadora tomando como apoyos los puntos A y J, podremos determinar las fuerzas en A.

DCL del brazo



Tomando momentos con respecto al punto A podemos determinar F_{Jy}:

$$\sum M_A = 0: \quad -1.3(14) - 1.2F_{Jy} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Jy} = \frac{-1.3(14)}{1.2} \approx -15.17 \text{ kN}$$

Para determinar F_{Ay}:

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Jy} + F_{Ay} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{Ay} = -F_{Jy} = 15.17 \text{ kN}}$$

Para determinar F_{Ax}:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{Ax} = 14 \text{ kN}}$$

$\therefore$ La fuerza que actúa en el pasador A es:

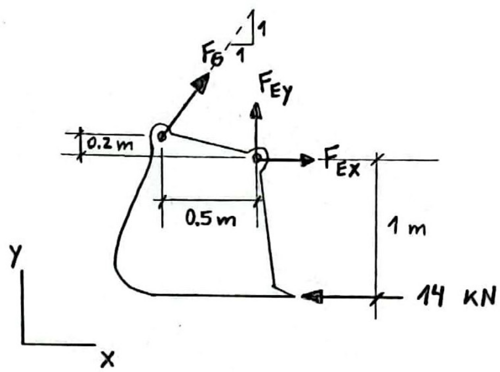
$$\boxed{\|\underset{\sim}{F_A}\| = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{14^2 + 15.17^2} \approx 20.64 \text{ kN}}$$

o

$$\boxed{\underset{\sim}{F_A} = (14 \text{ kN})\hat{\imath} + (15.17 \text{ kN})\hat{\jmath}}$$

Similarmente, podemos determinar la fuerza en el pasador G mediante un DCL del cangilón. Esto porque GH es un elemento sujeto a dos fuerzas (la reacción en G debe estar en la dirección GH), aportando 1 incógnita y el pasador en E aporta 2 incógnitas, lo que hace un total de 3 incógnitas.

DCL del cangilón



Tomando momentos con respecto al punto E podemos determinar F_G:

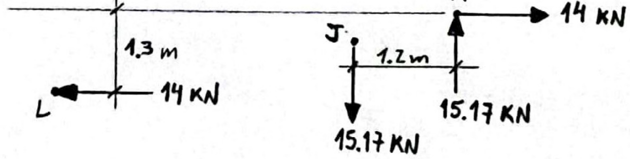
$$\sum M_E = 0: \quad -0.5\,F_G \sin 45° - 0.2\,F_G \cos 45° - 1(14) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_G = \frac{-1(14)}{(0.5 \sin 45° + 0.2 \cos 45°)} \approx -28.28 \text{ kN} = \|\underset{\sim}{F_G}\|}$$

o

$$\boxed{\underset{\sim}{F_G} = -(28.28 \cos 45° \text{ kN})\hat{\imath} - (28.28 \sin 45° \text{ kN})\hat{\jmath}}$$

Si dibujamos la fuerzas obtenidas en L, J y K podemos ver que el par generado por las fuerzas horizontales en L y A coinciden con el par generado por las fuerzas verticales en J y A verificando el equilibrio:



$$-1.3(14) + 1.2(15.17) = 0$$