



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

TRABAJO TERMINAL

**“Modelo para representar comportamientos
gravitacionales con dos cuerpos”**

PRESENTAN:

**José Emiliano Carrillo Barreiro
José Ángel Robles Otero**

DIRECTORES:

**Dr. Cesar Hernández Vasquez
Dr. Mauricio Olguín Carbajal**



Ciudad de México
4 de abril de 2025



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA



No. de TT: 2025-B065

4 de abril de 2025

Documento técnico

“Modelo para representar comportamientos gravitacionales con dos cuerpos”

Presentan:

José Emiliano Carrillo Barreiro.¹
José Ángel Robles Otero.²

DIRECTORES:

Dr. Cesar Hernández Vasquez
Dr. Mauricio Olguín Carbajal

Resumen:

En los últimos años, la elaboración de entornos virtuales complejos, como *REBOUND*, *Universe sandbox*, *Stellarium* y *Celestia*, han experimentado un crecimiento exponencial en sus capacidades. Más, cuando se habla de implementar mejoras en la precisión y escalabilidad dentro de sistemas de n -cuerpos celestes, por ejemplo, la simulación de nacimientos de galaxias, todavía existen dificultades, ya que, actualmente, los modelos que los simulan no permiten introducir cambios en los parámetros de los cuerpos durante su ejecución, parámetros como la velocidad, posición y masa del cuerpo, lo que impide contar con escenarios más fidedignos a los comportamientos físicos dentro de sistemas de n -cuerpos atípicos. En este proyecto, se propone solucionar este problema mediante la construcción de un modelo que permita realizar cambios al parámetro más significativo del sistema, compuesto por dos cuerpos, en tiempo de ejecución, implementando técnicas como el método multipolar rápido (FMM, por sus siglas en inglés, *Fast Multipole Method*), el *algoritmo de Barnes-Hut* y algoritmos bioinspirados. La solución que se desarrolle podría usarse para simular comportamientos físicos dentro de entornos virtuales.

Palabras clave: Modelado y Simulación de sistemas, problema de los n -cuerpos, Mecánica Celeste, y Algoritmos Bioinspirados.

Fecha: 4 de abril de 2025

¹carrillobarjosee@gmail.com

²robles.otero.jose.angel@gmail.com

Advertencia

“Este documento contiene información desarrollada por la Escuela Superior de Cómputo del Instituto Politécnico Nacional, a partir de datos y documentos con derecho de propiedad y por lo tanto, su uso quedará restringido a las aplicaciones que explícitamente se convengan.”

La aplicación no convenida exime a la escuela su responsabilidad técnica y da lugar a las consecuencias legales que para tal efecto se determinen.

Información adicional sobre este reporte técnico podrá obtenerse en:

La Subdirección Académica de la Escuela Superior de Cómputo del Instituto Politécnico Nacional, situada en Av. Juan de Dios Bátiz s/n Teléfono: 57296000, extensión 52000.

Resumen.

En los últimos años, la elaboración de entornos virtuales complejos, como *REBOUND*, *Universe sandbox*, *Stellarium* y *Celestia*, han experimentado un crecimiento exponencial en sus capacidades. Más, cuando se habla de implementar mejoras en la precisión y escalabilidad dentro de sistemas de n -cuerpos celestes, por ejemplo, la simulación de nacimientos de galaxias, todavía existen dificultades, ya que, actualmente, los modelos que los simulan no permiten introducir cambios en los parámetros de los cuerpos durante su ejecución, parámetros como la velocidad, posición y masa del cuerpo, lo que impide contar con escenarios más fidedignos a los comportamientos físicos dentro de sistemas de n -cuerpos atípicos. En este proyecto, se propone solucionar este problema mediante la construcción de un modelo que permita realizar cambios al parámetro más significativo del sistema, compuesto por dos cuerpos, en tiempo de ejecución, implementando técnicas como el método multipolar rápido (FMM, por sus siglas en inglés, *Fast Multipole Method*), el *algoritmo de Barnes-Hut* y algoritmos bioinspirados. La solución que se desarrolle podría usarse para simular comportamientos físicos dentro de entornos virtuales.

Abstract.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Agradecimientos.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Índice general

Resumen.	iii
Abstract.	iv
Agradecimientos.	v
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Planteamiento del problema	2
1.3. Propuesta de solución	3
1.4. Objetivo general	3
1.4.1. Objetivos específicos	3
1.5. Justificación	4
2. Estado del Arte	5
2.1. Producto 01: <i>Framework ode_num_int</i>	5
2.1.1. Descripción y Arquitectura Técnica	5
2.1.2. Características y Aplicaciones Prácticas	6
2.1.3. Ventajas y Desventajas	6
2.1.4. Relevancia para el Proyecto de Simulación Gravitacional	6
2.2. Producto 02: Representación de Objetos	7
2.2.1. Descripción y Arquitectura Técnica	7
2.2.2. Características y Aplicaciones Prácticas	8
2.2.3. Ventajas y Desventajas	8
2.2.4. Relevancia para el Proyecto de Simulación Gravitacional	8
2.2.5. Experiencia Personal y Opinión	8
2.3. Método n-NNN	9
2.3.1. Descripción y Arquitectura Técnica	9
2.3.2. Características y Aplicaciones Prácticas	9
2.3.3. Ventajas y Desventajas	10
2.3.4. Relevancia para el Proyecto de Simulación Gravitacional	10
2.3.5. Experiencia Personal y Opinión	10
2.4. Métodos Hidrodinámicos Sin Malla	11
2.4.1. Descripción y Arquitectura Técnica	11
2.4.2. Características y Aplicaciones Prácticas	11
2.4.3. Ventajas y Desventajas	12
2.4.4. Relevancia para el Proyecto de Simulación Gravitacional	12

2.4.5.	Experiencia Personal y Opinión	12
2.5.	Producto 05: Método híbrido <i>SPH</i> / <i>N</i> -cuerpos	13
2.5.1.	Descripción y Arquitectura Técnica	13
2.5.2.	Características y Aplicaciones Prácticas	13
2.5.3.	Ventajas y Desventajas	14
2.5.4.	Relevancia para el Proyecto de Simulación Gravitacional	14
3.	Marco Teórico	15
3.1.	Problema de los n cuerpos	15
3.1.1.	Puntos clave	15
3.1.2.	Principios y funcionamiento	15
3.1.3.	Aplicaciones inesperadas	16
3.1.4.	Definición y Enfoques	16
3.1.5.	Contexto Histórico	16
3.1.6.	Principios Fundamentales	16
3.1.7.	Variantes y Enfoques Principales	17
3.1.8.	Aplicaciones Típicas	17
3.2.	Problema de dos cuerpos	17
3.2.1.	Definición y Enfoques Conceptuales	17
3.2.2.	Principios Fundamentales y Mecanismo de Funcionamiento	18
3.2.3.	Contexto Histórico y Evolución del Problema	18
3.2.4.	Variantes y Enfoques Metodológicos	18
3.2.5.	Aplicaciones Típicas	19
3.2.6.	Ventajas y Limitaciones	19
3.3.	Exponente de Lyapunov	20
3.3.1.	Definiciones de los Exponentes de Lyapunov	20
3.3.2.	Principios Fundamentales y Funcionamiento	21
3.3.3.	Contexto Histórico	21
3.3.4.	Variantes y Conceptos Relacionados	22
3.3.5.	Aplicaciones (basadas en los artículos)	22
3.3.6.	Ventajas y Limitaciones	23
3.4.	Integradores Simpléticos	23
3.4.1.	Definición y Principios Fundamentales	24
3.4.2.	Contexto Histórico y Desarrollo	24
3.4.3.	Variantes y Enfoques Principales	25
3.4.4.	Propiedades Clave	25
3.4.5.	Aplicaciones Típicas	26
3.4.6.	Ventajas	26
3.4.7.	Desventajas y Limitaciones	26
3.4.8.	Desarrollos Recientes y Direcciones Futuras	27
3.5.	Método Multipolar Rápido	27
3.5.1.	Principios Fundamentales y Funcionamiento	28
3.5.2.	Contexto Histórico/Origen	30
3.5.3.	Variantes o Enfoques Principales	30
3.5.4.	Aplicaciones Típicas	31
3.5.5.	Ventajas y Desventajas/Limitaciones	31

Índice de figuras

3.1. Esquema de la estructura jerárquica de celdas (e.g., quadtree) y la distinción entre interacciones de campo cercano (directas) y campo lejano (aproximadas mediante expansiones), incluyendo la lista de interacción. Adaptado de [35, 40].	29
3.2. Ilustración del flujo de información en el FMM: fuentes originales (\mathbf{q}^σ) \rightarrow expansión saliente ($\hat{\mathbf{q}}^\sigma$) \rightarrow expansión entrante ($\hat{\mathbf{v}}^\tau$) \rightarrow potenciales (\mathbf{v}^τ), mostrando los operadores T^{ofs} , T^{ifo} , y T^{tfi} . Adaptado de [36].	30

Índice de cuadros

3.1. Enfoques en n cuerpos	17
3.2. Principales variantes de integradores simplécticos para problemas de N-cuerpos.	25
3.3. Comparación de complejidad computacional para problemas de N-cuerpos.	32

List of Algorithms

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1. Antecedentes

El desarrollo de simulaciones de n -cuerpos ha sido ampliamente investigado con el objetivo de mejorar su capacidad para modelar fenómenos complejos en entornos como la colisión de galaxias y la evolución de sistemas planetarios. Sin embargo, una limitación crítica es la incapacidad de ajustar los parámetros de los cuerpos durante la ejecución de la simulación, lo que afecta la representación precisa de eventos masivos como colisiones en las simulaciones disponibles.

El problema de los n -cuerpos¹ ha sido uno de los desafíos más complejos en la mecánica celeste, desde los trabajos pioneros de Newton en el siglo XVII. Si bien el problema de los dos cuerpos tiene una solución analítica exacta bajo ciertas condiciones, cuando se introducen factores adicionales, se requieren métodos numéricos avanzados para mejorar la precisión de las simulaciones.

Avances como el método multipolar rápido (FMM, por sus siglas en inglés, *Fast Multipole Method*)² y el algoritmo de Barnes-Hut³ han optimizado las simulaciones de n -cuerpos al reducir la complejidad computacional en el cálculo de las interacciones gravitacionales. Sin embargo, la falta de capacidad para ajustar dinámicamente las propiedades de los cuerpos durante la ejecución sigue siendo una limitación en la representación realista de eventos astronómicos.

Estudios recientes han introducido herramientas y enfoques que podrían mejorar las simulaciones de n -cuerpos, como el uso de árboles cuádruples y octales para la representación geométrica y la aplicación de inteligencia artificial en las simulaciones moleculares que podrían inspirar nuevas técnicas en simulaciones

¹El problema de n -cuerpos se refiere al estudio del movimiento e interacción gravitacional de varios cuerpos bajo sus influencias mutuas. En la sección 3.1 se profundiza a fondo el termino.

²El FMM es un algoritmo que optimiza el cálculo de interacciones entre partículas distantes en sistemas físicos, como los gravitacionales, agrupando partículas y aproximando su influencia colectiva, lo que reduce la complejidad computacional de $O(n^2)$ a $O(n)$ o $O(n \log n)$.

³El algoritmo de Barnes-Hut es una técnica de simulación de n -cuerpos que aproxima las fuerzas gravitacionales al agrupar cuerpos distantes en una misma región del espacio, representándolos como una única masa, lo que reduce la complejidad computacional de $O(n^2)$ a $O(n \log n)$.

celestes. Además, se ha demostrado la eficacia de integradores simplécticos⁴ para garantizar la estabilidad de las simulaciones durante colisiones y la paralelización para mejorar la eficiencia en simulaciones masivas.

1.2. Planteamiento del problema

Las simulaciones de sistemas de n -cuerpos celestes han sido una herramienta fundamental en la astronomía y la mecánica celeste para estudiar la evolución de sistemas planetarios, la dinámica estelar y la interacción gravitacional a gran escala. Sin embargo, una limitación crítica en los modelos actuales es la imposibilidad de modificar dinámicamente los parámetros de los cuerpos durante la ejecución de la simulación. En la mayoría de los simuladores, estos parámetros, como la masa, la energía del sistema, la posición y el tiempo de existencia de los cuerpos se definen antes de la ejecución, impidiendo la representación precisa de eventos atípicos o transitorios, como colisiones de galaxias, acreción de materia en discos protoplanetarios o cambios de masa en estrellas variables.

Uno de los problemas más importantes derivados de esta limitación es la incapacidad de ajustar la masa de los cuerpos celestes en tiempo real. En eventos como fusiones de agujeros negros o estrellas en procesos de acreción, la masa de los cuerpos cambia significativamente a lo largo del tiempo, alterando la evolución del sistema. Sin la posibilidad de modificar este parámetro de manera dinámica, los modelos actuales ofrecen solo aproximaciones estáticas que no reflejan con precisión la naturaleza de estos fenómenos.

Además, el rendimiento computacional también representa un desafío. La simulación de n -cuerpos es un problema computacionalmente costoso, ya que la cantidad de interacciones a calcular crece cuadráticamente con el número de cuerpos ($O(n^2)$), lo que hace que las simulaciones a gran escala sean prohibitivas en términos de tiempo de ejecución y recursos computacionales. Métodos como el algoritmo de Barnes-Hut y el método multipolar rápido han sido desarrollados para mitigar este problema reduciendo la cantidad de cálculos directos, pero no abordan la falta de flexibilidad en la modificación de parámetros en tiempo real.

En este contexto, la incapacidad de modificar parámetros dinámicamente en simulaciones de n -cuerpos afecta no solo la precisión de la representación de fenómenos astronómicos, sino también la capacidad de realizar simulaciones interactivas en tiempo real, algo que podría tener aplicaciones en la enseñanza, la exploración espacial y la industria del entretenimiento. La ausencia de modelos que permitan esta flexibilidad limita el alcance de las simulaciones actuales y plantea la necesidad de desarrollar enfoques más adaptativos y eficientes.

⁴Los integradores simplécticos son métodos numéricos utilizados para resolver ecuaciones diferenciales en sistemas dinámicos conservando las propiedades geométricas del sistema, como la conservación de la energía a largo plazo, lo que los hace especialmente adecuados para simular interacciones físicas, como las gravitacionales, en sistemas de n -cuerpos.

1.3. Propuesta de solución

La solución propuesta se basa en el desarrollo de un modelo que permite la modificación dinámica de parámetros durante la simulación, lo que representa una mejora significativa con respecto a los simuladores tradicionales, que requieren reconfiguraciones antes de cada ejecución. Este modelo integrará técnicas avanzadas para optimizar el cálculo de interacciones gravitacionales y garantizar la estabilidad de la simulación.

Para lograrlo, se empleará el método multipolar rápido (FMM) y el algoritmo de Barnes-Hut, ambos ampliamente utilizados para reducir la complejidad computacional en simulaciones de n -cuerpos sin comprometer la precisión. Estas técnicas permiten agrupar cuerpos en estructuras jerárquicas, disminuyendo el número de cálculos directos y mejorando la eficiencia del sistema.

Además, la implementación de algoritmos bioinspirados, como la optimización por enjambre de partículas (PSO) y algoritmos genéticos, permitirá el ajuste dinámico de los parámetros de los cuerpos celestes, garantizando un comportamiento estable incluso en escenarios de colisión o interacciones complejas. Estas estrategias facilitarán la identificación y ajuste de valores óptimos sin necesidad de intervención manual, lo que hará que la simulación sea más adaptable a eventos inesperados.

El modelo se diseñará para ser escalable, permitiendo la modificación en tiempo real de los parámetros de hasta dos cuerpos celestes, con la posibilidad de extenderse a más cuerpos en implementaciones futuras. Su integración con entornos virtuales como Unreal Engine o motores de simulación especializados permitirá su aplicación en campos como la educación, los videojuegos y la industria aeroespacial.

Para garantizar un rendimiento eficiente, el modelo se desarrollará optimizado para ejecutarse en hardware de gama media, como procesadores multinúcleo con al menos 16 GB de RAM. Esto asegurará que la solución sea accesible sin requerir infraestructuras de alto rendimiento, ampliando su potencial uso en distintos ámbitos.

Esta combinación de técnicas avanzadas y adaptabilidad en tiempo real establece una base innovadora para el desarrollo de simulaciones gravitacionales más dinámicas, eficientes y versátiles, superando las limitaciones de los modelos pre-configurados actuales.

1.4. Objetivo general

Desarrollar un modelo teórico para la simulación del problema de dos cuerpos que permita la modificación dinámica de la masa, mejorando la precisión en la representación de sus interacciones gravitacionales y eventos asociados.

1.4.1. Objetivos específicos

- Desarrollar el módulo de simulación para la integración del método multipolar rápido (FMM) y el algoritmo de Barnes-Hut.
- Desarrollar el módulo de optimización para ajustar dinámicamente la configuración del sistema con algoritmos bioinspirados.
- Desarrollar la implementación del modelo de simulación dinámica de interacciones gravitatorias entre dos cuerpos.
- Desarrollar el módulo de visualización para representar gráficamente la evolución del sistema en un número limitado de iteraciones.
- Desarrollar una interfaz básica para la modificación de parámetros y la visualización de resultados.

1.5. Justificación

Este proyecto es relevante porque introduce un enfoque innovador en la simulación de sistemas gravitacionales al permitir la modificación dinámica de parámetros, superando las limitaciones de los modelos tradicionales. La elección de algoritmos avanzados, como el método multipolar rápido (FMM) y el algoritmo de Barnes-Hut, garantiza un equilibrio entre precisión y eficiencia computacional, lo que permite su aplicación en escenarios más complejos sin un costo computacional excesivo. Además, la implementación de técnicas de optimización bioinspiradas ofrece un método adaptable para ajustar el sistema en tiempo real, mejorando la fidelidad de las simulaciones.

El uso de estas tecnologías no solo optimiza el rendimiento de la simulación, sino que también sienta las bases para su posible escalabilidad a problemas de mayor complejidad, como la simulación de múltiples cuerpos. Aunque el presente trabajo se centra en el problema de dos cuerpos, su enfoque y metodología podrían aplicarse en otros ámbitos, como el modelado de interacciones gravitacionales en videojuegos y simulaciones interactivas.

Los principales beneficiarios de este proyecto serán investigadores y académicos en los campos de la astronomía, astrofísica y mecánica celeste, quienes podrán utilizar el modelo para mejorar el análisis y la comprensión de interacciones gravitacionales. Además, su posible aplicación en videojuegos y simulaciones interactivas podría impactar significativamente la industria del entretenimiento y la educación, proporcionando herramientas más flexibles y precisas para la enseñanza y la creación de simulaciones realistas.

Asimismo, la industria aeroespacial y los organismos encargados de planificar maniobras espaciales podrían beneficiarse del modelo, ya que permitiría simular con mayor precisión eventos como colisiones orbitales o ajustes en la trayectoria de satélites. Al ofrecer la posibilidad de modificar dinámicamente los parámetros de los cuerpos en simulación, esta herramienta facilitaría la planificación y optimización de maniobras espaciales, mejorando la toma de decisiones en misiones reales.

CAPÍTULO 2

Estado del Arte

2.1. Producto 01: *Framework* `ode_num_int` para Integración Numérica

En el ámbito de la simulación de sistemas gravitacionales, la integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) desempeña un papel fundamental al describir el movimiento de cuerpos bajo influencias gravitacionales. La precisión y eficiencia de los métodos de integración utilizados impactan directamente la capacidad de los modelos para representar fenómenos físicos complejos, como los comportamientos dinámicos de sistemas de dos cuerpos. En este contexto, el *framework* `ode_num_int`, presentado en el artículo “C++ Playground for Numerical Integration Method Developers-[1], emerge como una herramienta relevante para el desarrollo y evaluación de métodos de integración numérica personalizados, con potencial aplicabilidad al proyecto descrito en este documento.

2.1.1. Descripción y Arquitectura Técnica

El *framework* `ode_num_int` es una biblioteca de software desarrollada en C++11, diseñada para proporcionar a investigadores y desarrolladores un entorno flexible y extensible para la creación y prueba de métodos de integración numérica destinados a resolver EDOs. A diferencia de bibliotecas tradicionales como GSL o Boost.Odeint, que priorizan soluciones numéricas predefinidas, `ode_num_int` se centra en el proceso investigativo, ofreciendo una arquitectura modular basada en clases *template*. Esta estructura permite a los usuarios personalizar componentes individuales según las necesidades específicas de sus simulaciones.

La arquitectura del *framework* se organiza en tres pilares principales:

1. Una infraestructura común que incluye el patrón observador para la gestión dinámica de *callbacks*, *holders* de propiedades para el manejo flexible de variables, factorías para la creación de instancias, parámetros opcionales y utilidades de temporización.
2. Componentes de álgebra lineal con *templates* para vectores y matrices dispersas, soporte para factorización *LU* y almacenamiento optimizado de

datos.

3. Capacidades de resolución numérica que abarcan *solvers* para sistemas algebraicos no lineales, métodos de iteración tipo Newton, *solvers* explícitos e implícitos para EDOs, manejo de eventos y controladores de tamaño de paso.

Esta modularidad permite combinar diferentes elementos de manera sencilla, facilitando la experimentación con métodos diversos.

2.1.2. Características y Aplicaciones Prácticas

Entre las características distintivas de `ode_num_int` se encuentra su flexibilidad para integrar componentes de *solver*, su monitoreo de rendimiento integrado y su soporte para múltiples tipos de métodos numéricos, incluyendo explícitos, implícitos y basados en extrapolación. Estas capacidades lo hacen adecuado para simulaciones de sistemas físicos complejos. Un ejemplo concreto de su aplicación es la simulación de la dinámica de transmisiones continuamente variables (CVT), un sistema con 3,600 variables de estado que involucra modelos de cuerpos elásticos deformables e interacciones de fricción. En este caso, se observó que el método del trapecio con un tamaño de paso de 10^{-5} alcanzó una precisión comparable a la del método Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) con un tamaño de paso de 10^{-8} , lo que indica un potencial de mejora en la eficiencia computacional.

El *framework* se utiliza principalmente en campos como la computación científica, simulaciones de ingeniería, modelado de sistemas mecánicos y análisis de dinámica en aeronáutica y robótica. Su diseño lo posiciona como una herramienta valiosa para investigadores que requieren un alto grado de control sobre los métodos de integración.

2.1.3. Ventajas y Desventajas

El `ode_num_int` ofrece varias ventajas significativas. Su alta extensibilidad permite a los usuarios incorporar nuevos componentes y métodos, mientras que su enfoque en el rendimiento, respaldado por herramientas de monitoreo, facilita la optimización de simulaciones. Además, su carácter *open-source* bajo la licencia GNU GPL fomenta la colaboración y el desarrollo comunitario. Sin embargo, presenta limitaciones notables: está diseñado principalmente para sistemas de escala media, lo que podría restringir su uso en simulaciones de gran escala como las de n -cuerpos masivos, y requiere un conocimiento avanzado de C++, lo que puede limitar su accesibilidad. Actualmente, se enfoca en métodos de un solo paso, aunque se planea ampliar esta capacidad en futuras versiones.

2.1.4. Relevancia para el Proyecto de Simulación Gravitacional

En el contexto del trabajo terminal abordado en este reporte, el cual busca desarrollar un modelo para simular comportamientos gravitacionales de dos

cuerpos con modificación dinámica de parámetros de posición y velocidad inicial, `ode_num_int` podría desempeñar un papel complementario. La simulación de sistemas gravitacionales requiere integrar las ecuaciones de movimiento, que son EDOs, y combinarlas con técnicas como el Método Multipolo Rápido (FMM) y el algoritmo de Barnes-Hut para calcular fuerzas gravitacionales de manera eficiente. La flexibilidad de `ode_num_int` para adaptar métodos de integración y su capacidad de monitoreo de rendimiento podrían facilitar la implementación de integradores personalizados que soporten cambios dinámicos en los parámetros durante la ejecución, un objetivo central del proyecto.

2.2. Producto 02: Representación de Objetos mediante *Quadrees* y *Octrees* de División No Minimal

Dentro del contexto que nos concierne, la simulación de sistemas gravitacionales, la representación eficiente de estructuras geométricas resulta esencial para modelar y visualizar cuerpos celestes y sus interacciones. La precisión en dicha representación influye directamente en la capacidad de los modelos para simular fenómenos físicos complejos, como trayectorias y colisiones en sistemas de dos cuerpos. En este contexto, el artículo “Object Representation by Means of Nonminimal Division *Quadrees* and *Octrees*” [2] propone una técnica avanzada para la representación de objetos geométricos en dos y tres dimensiones mediante estructuras jerárquicas de datos, con potencial relevancia para el proyecto descrito en este reporte técnico.

2.2.1. Descripción y Arquitectura Técnica

El artículo desarrolla un método innovador para representar objetos poligonales (en 2D) y polihédricos (en 3D) utilizando *quadrees* y *octrees* de división no minimal. Estas estructuras jerárquicas subdividen recursivamente el espacio en cuadrantes (*quadtree*) u octantes (*octree*), optimizando la representación de geometrías complejas. A diferencia de los métodos tradicionales, este enfoque introduce nodos especializados:

- WHITE: áreas fuera del objeto.
- BLACK: áreas dentro del objeto.
- GRAY: áreas que requieren subdivisión adicional.
- EDGE: nodos con segmentos de borde.
- VERTEX: nodos con vértices.

Esta clasificación permite una representación detallada de los contornos y vértices, facilitando operaciones como la intersección, unión y diferencia, así como la conversión precisa entre representaciones arbóreas y de bordes.

2.2.2. Características y Aplicaciones Prácticas

La técnica destaca por su capacidad para minimizar el uso de memoria mediante una subdivisión no minimal, que evita divisiones innecesarias en regiones uniformes. Los algoritmos propuestos exhiben una complejidad lineal, lo que los hace escalables para objetos en 2D y 3D. Estas propiedades son valiosas en aplicaciones como el modelado geométrico por computadora, sistemas CAD y simulaciones gráficas. En el proyecto de simulación gravitacional de dos cuerpos, este método podría integrarse con técnicas como el Método Multipolar Rápido (FMM) y el algoritmo de Barnes-Hut, optimizando la representación geométrica de los cuerpos celestes y complementando el cálculo de fuerzas gravitacionales.

2.2.3. Ventajas y Desventajas

Entre las ventajas del método se encuentran la reducción significativa del espacio de memoria, la eficiencia en operaciones booleanas y la precisión en la representación de bordes y vértices gracias a los nodos EDGE y VERTEX. Sin embargo, presenta desafíos, como una mayor complejidad de implementación debido a la necesidad de algoritmos especializados y una posible pérdida de precisión en objetos con detalles extremadamente pequeños, derivada de la naturaleza discreta de la subdivisión.

2.2.4. Relevancia para el Proyecto de Simulación Gravitacional

Aunque el artículo no aborda directamente la simulación de n -cuerpos, su enfoque en la representación geométrica eficiente tiene implicaciones para el proyecto. La modelización precisa de la geometría de dos cuerpos celestes podría mejorar la simulación de interacciones cercanas o colisiones, aspectos clave en el objetivo de ajustar dinámicamente parámetros como masa, velocidad y posición. La eficiencia en memoria y la rapidez en operaciones geométricas podrían integrarse con los algoritmos FMM y Barnes-Hut, potenciando el rendimiento del modelo propuesto.

2.2.5. Experiencia Personal y Opinión

Tras revisar el artículo y explorar conceptualmente sus planteamientos, consideramos que la introducción de nodos especializados representa un avance significativo sobre los *quadtrees* y *octrees* tradicionales, ofreciendo una solución elegante y eficiente para problemas de representación geométrica. Aunque no se implementó directamente el método, la lógica descrita sugiere una alta viabilidad para su uso en simulaciones que demandan precisión geométrica. La complejidad de implementación podría ser un obstáculo, pero su integración con técnicas de simulación gravitacional parece prometedora, especialmente para optimizar el modelado de cuerpos celestes.

2.3. Método de Red de n-Vecinos Más Cercanos (n-NNN) para Simulaciones Moleculares

En la disciplina de las simulaciones de sistemas dinámicos, como los comportamientos gravitacionales de cuerpos celestes descritos en este proyecto, la eficiencia computacional y la precisión física son pilares fundamentales. El proyecto aquí presentado busca modelar interacciones gravitacionales entre dos cuerpos con la capacidad de modificar dinámicamente parámetros como masa, posición y velocidad durante la ejecución, un desafío que requiere métodos innovadores para optimizar recursos sin comprometer la fidelidad física. En este contexto, el artículo *Artificial Intelligent Molecular Dynamics and Hamiltonian Surgery*-[3] introduce el método de Red de n-Vecinos Más Cercanos (n-NNN), un enfoque inicialmente diseñado para simulaciones moleculares que ofrece perspectivas valiosas y adaptables al modelado de sistemas gravitacionales.

2.3.1. Descripción y Arquitectura Técnica

El método n-NNN surge como una alternativa a las simulaciones tradicionales que dependen de Hamiltonianos aditivos por pares, los cuales limitan la representación de interacciones complejas de n-cuerpos debido a su alta demanda computacional. En lugar de calcular las fuerzas entre todos los elementos del sistema en cada iteración, n-NNN emplea matrices multidimensionales para almacenar las fuerzas de cada sitio en función de su vecindario local, asemejándose a una red neuronal. Este diseño permite capturar distribuciones espaciales de múltiples cuerpos sin necesidad de incluir el Hamiltoniano completo, reduciendo significativamente la complejidad computacional. Además, la “cirugía Hamiltoniana” propuesta por los autores facilita la selección de términos de orden superior relevantes, ajustando el modelo para mantener la precisión estructural con un número reducido de vecinos considerados.

2.3.2. Características y Aplicaciones Prácticas

El método n-NNN se caracteriza por su capacidad para simular sistemas complejos, como líquidos de Lennard-Jones¹ o sistemas iónicos², con una precisión notable incluso al limitar el número de vecinos analizados. Su independencia respecto al grado de no aditividad permite incorporar términos de múltiples cuerpos sin un incremento exponencial en el tiempo de cálculo, una ventaja clave para sistemas dinámicos. En el contexto de este proyecto, que busca simular interacciones gravitacionales con parámetros modificables, el enfoque n-NNN podría inspirar estrategias para optimizar el cálculo de fuerzas gravitacionales, especialmente en escenarios donde la masa o la posición de los cuerpos cambian en tiempo

¹Los líquidos de Lennard-Jones son sistemas modelados en los que las interacciones entre las partículas (átomos o moléculas neutras) se describen mediante el potencial de Lennard-Jones. Para una definición a profundidad, consulte: [4]

²Los sistemas iónicos son aquellos en los que las interacciones predominantes se deben a la atracción electrostática entre iones de carga opuesta. En aras de una definición comprehensiva, consúltese: [5]

real. Aunque su aplicación original se centra en dinámicas moleculares, la lógica subyacente es trasladable a sistemas gravitacionales, donde la eficiencia y la adaptabilidad son igualmente críticas.

2.3.3. Ventajas y Desventajas

Entre las ventajas del método n-NNN destacan su escalabilidad a sistemas complejos, la preservación de la precisión estructural con un número reducido de vecinos y la posibilidad de “entrenar redes aplicables a diversos estados del sistema. Estas características lo convierten en una herramienta prometedora para simulaciones que requieren flexibilidad computacional. Empero, presenta desventajas notables: su validación se ha restringido a sistemas relativamente simples, como líquidos de Lennard-Jones y cloruro de sodio, lo que plantea dudas sobre su generalización a configuraciones más intrincadas. Por otra parte, la precisión depende de una selección cuidadosa del número de vecinos y de la función generadora, lo que podría complicar su implementación en sistemas gravitacionales altamente dinámicos sin un ajuste riguroso.

2.3.4. Relevancia para el Proyecto de Simulación Gravitacional

El trabajo terminal descrito en este reporte técnico tiene como objetivo desarrollar un modelo que permita ajustar dinámicamente parámetros de dos cuerpos celestes, utilizando técnicas como el Método Multipolar Rápido (FMM) y el algoritmo de Barnes-Hut. Aunque el n-NNN se diseñó para simulaciones moleculares, su enfoque en reducir la complejidad computacional sin sacrificar precisión física resulta altamente relevante. La capacidad de ajustar el modelo mediante “cirugía Hamiltoniana” podría adaptarse para optimizar el cálculo de interacciones gravitacionales, complementando las técnicas propuestas en el proyecto. Por ejemplo, combinar n-NNN con FMM y Barnes-Hut podría mejorar la eficiencia al manejar cambios en la masa o posición de los cuerpos, permitiendo simulaciones más rápidas y adaptativas.

2.3.5. Experiencia Personal y Opinión

Al evaluar conceptualmente el método n-NNN en el marco de este proyecto, no se planea realizar una implementación directa, pero se analizaron sus principios aplicados a simulaciones gravitacionales. Consideramos que el enfoque de Maguire y Woodcock representa un avance significativo en la optimización de simulaciones de sistemas de múltiples cuerpos. Su énfasis en la eficiencia y la flexibilidad sugiere un gran potencial para nuestro modelo, especialmente en la gestión de parámetros dinámicos. La idea de reducir el número de interacciones consideradas sin perder precisión estructural es particularmente atractiva para simulaciones en tiempo real. No obstante, la necesidad de calibrar cuidadosamente los parámetros del método podría ser un obstáculo en sistemas gravitacionales con comportamientos altamente variables, aunque la “cirugía Hamiltoniana” ofrece una vía prometedora para superar esta limitación.

2.4. Implementación de Métodos Hidrodinámicos Sin Malla en PKDGRAV3 para Simulaciones Cosmológicas

Desde la perspectiva de las simulaciones de sistemas dinámicos, como los comportamientos gravitacionales de cuerpos celestes descritos en este proyecto, la eficiencia computacional y la precisión física son pilares fundamentales. El proyecto aquí presentado busca modelar interacciones gravitacionales entre dos cuerpos con la capacidad de modificar dinámicamente parámetros como masa, posición y velocidad durante la ejecución, un desafío que requiere métodos innovadores para optimizar recursos sin comprometer la fidelidad física. En el marco de lo anterior, el artículo "Mesh-free hydrodynamics methods for astrophysical simulations: the PKDGRAV3 code" de I. Alonso Asensio et al [6] presenta la implementación de métodos hidrodinámicos sin malla (*mesh-free*) en PKDGRAV3, un enfoque inicialmente diseñado para simulaciones cosmológicas que ofrece perspectivas valiosas y adaptables al modelado de sistemas gravitacionales.

2.4.1. Descripción y Arquitectura Técnica

El método presentado en el artículo surge como una alternativa a las simulaciones tradicionales que dependen de mallas estructuradas, las cuales limitan la representación de interacciones complejas en sistemas dinámicos debido a su alta demanda computacional. En lugar de calcular las fuerzas entre todos los elementos del sistema en cada iteración mediante una malla global, los métodos sin malla, como *Meshless Finite Mass* (MFM) y *Meshless Finite Volume** (MFV), emplean partículas para discretizar el fluido, resolviendo las ecuaciones hidrodinámicas con un enfoque adaptativo basado en los vecinos más cercanos. Este diseño permite capturar fenómenos complejos, como choques y discontinuidades, sin necesidad de una malla fija, reduciendo significativamente la complejidad computacional. Además, la optimización del código mediante algoritmos de búsqueda de vecinos y paralelización avanzada ajusta el modelo para mantener la precisión física con un manejo eficiente de recursos.

2.4.2. Características y Aplicaciones Prácticas

El método sin malla en PKDGRAV3 se caracteriza por su capacidad para simular sistemas complejos, como la formación de estructuras cosmológicas, con una precisión notable incluso al manejar grandes contrastes de densidad. Su independencia respecto a una malla fija permite incorporar fenómenos dinámicos sin un incremento exponencial en el tiempo de cálculo, una ventaja clave para sistemas variables. En el contexto de este proyecto, que busca simular interacciones gravitacionales con parámetros modificables, el enfoque sin malla podría inspirar estrategias para optimizar el cálculo de fuerzas gravitacionales, especialmente en escenarios donde la masa o la posición de los cuerpos cambian en tiempo real. Aunque su aplicación original se centra en hidrodinámica, la lógica subyacente es trasladable a sistemas gravitacionales, donde la eficiencia y la adaptabilidad son igualmente críticas.

2.4.3. Ventajas y Desventajas

Entre las ventajas del método sin malla destacan su escalabilidad a sistemas complejos, la preservación de la precisión física con una resolución adaptativa y la posibilidad de manejar simulaciones a gran escala mediante optimizaciones paralelas. Estas características lo convierten en una herramienta prometedora para simulaciones que requieren flexibilidad computacional. Sin embargo, presenta desventajas notables: su validación se ha restringido a sistemas cosmológicos específicos, lo que plantea dudas sobre su generalización a configuraciones más intrincadas. Adicionalmente, la precisión depende de una selección cuidadosa de parámetros computacionales, lo que podría complicar su implementación en sistemas gravitacionales altamente dinámicos sin un ajuste riguroso.

2.4.4. Relevancia para el Proyecto de Simulación Gravitacional

El proyecto descrito en este reporte técnico tiene como objetivo desarrollar un modelo que permita ajustar dinámicamente parámetros de dos cuerpos celestes, utilizando técnicas como el Método Multipolar Rápido (FMM) y el algoritmo de Barnes-Hut. Aunque los métodos sin malla se diseñaron para simulaciones hidrodinámicas, su enfoque en reducir la complejidad computacional sin sacrificar precisión física resulta altamente relevante. La capacidad de ajustar el modelo mediante una discretización flexible podría adaptarse para optimizar el cálculo de interacciones gravitacionales, complementando las técnicas propuestas en el proyecto. Por ejemplo, combinar MFV y MFV con FMM y Barnes-Hut podría mejorar la eficiencia al manejar cambios en la masa o posición de los cuerpos, permitiendo simulaciones más rápidas y adaptativas.

2.4.5. Experiencia Personal y Opinión

Al evaluar conceptualmente el método sin malla en el marco de este proyecto, no se realizó una implementación directa, pero se analizaron sus principios aplicados a simulaciones gravitacionales. Inferimos que el enfoque de Alonso Asensio et al. representa un avance significativo en la optimización de simulaciones de sistemas de múltiples cuerpos. Su énfasis en la eficiencia y la flexibilidad sugiere un gran potencial para nuestro modelo, especialmente en la gestión de parámetros dinámicos. La idea de reducir la dependencia de estructuras fijas sin perder precisión física es particularmente atractiva para simulaciones en tiempo real. No obstante, la necesidad de calibrar cuidadosamente los parámetros del método podría ser un obstáculo en sistemas gravitacionales con comportamientos altamente variables, aunque las optimizaciones presentadas ofrecen una vía prometedora para superar esta limitación.

2.5. Método híbrido *SPH*/*N*-cuerpos para simulaciones de cúmulos estelares

2.5.1. Descripción y Arquitectura Técnica

El artículo presenta un enfoque híbrido que combina *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) con simulaciones *n*-cuerpos para modelar la evolución de cúmulos estelares jóvenes inmersos en un medio gaseoso. Tradicionalmente, las simulaciones astrofísicas han separado estos dos componentes: las simulaciones SPH permiten modelar la evolución del gas, mientras que las simulaciones *n*-cuerpos se enfocan en la interacción gravitacional entre estrellas. Sin embargo, esta separación limita la capacidad de capturar la retroalimentación entre el gas y las estrellas.

Este nuevo esquema híbrido busca cerrar esta brecha al combinar ambos enfoques dentro del código *SEREN*, un software de simulación hidrodinámica basado en partículas. Mediante la formulación de las ecuaciones de movimiento desde una perspectiva Lagrangiana, se garantiza la conservación de energía y momento, algo esencial para la precisión de las simulaciones.

2.5.2. Características y Aplicaciones Prácticas

Una de las claves del modelo es el uso del árbol de gravedad Barnes-Hut para calcular las fuerzas gravitacionales de todas las partículas gaseosas autogravitantes. Esta estructura de datos permite resolver la dinámica gravitacional de manera eficiente, reduciendo la complejidad computacional en comparación con cálculos directos de fuerza.

Para mejorar la precisión en el cálculo de la gravedad, se emplea el criterio de apertura multipolar (MAC), en lugar del estándar basado en el ángulo de apertura geométrica. Este criterio minimiza los errores en el cálculo de la fuerza gravitatoria, lo que a su vez reduce los errores en la conservación de energía.

Otro aspecto relevante es la incorporación del cálculo del *jerk* gravitacional, es decir, la derivada temporal de la aceleración. Mientras que para las partículas SPH solo se calcula la aceleración, para las estrellas se computa tanto la aceleración como el *jerk*, permitiendo una integración más precisa de sus órbitas.

Además, el código usa un esquema de integración por bloques de tiempo (block timestepping), que ajusta dinámicamente los pasos de integración de cada partícula según su estado dinámico. Las partículas con interacciones más fuertes o aceleraciones altas pueden usar pasos de tiempo más cortos, mientras que aquellas en regiones más estables pueden emplear pasos más largos, optimizando así el rendimiento computacional.

2.5.3. Ventajas y Desventajas

El método híbrido SPH/N-body presenta varias ventajas clave. En primer lugar, proporciona una mayor precisión en la interacción entre el gas y las estrellas, al combinar ambos métodos en una estructura conservativa, eliminando la separación artificial entre estos componentes. Su eficiencia computacional se ve optimizada por el uso del árbol de gravedad Barnes-Hut y el esquema de integración por block timestepping, lo que permite realizar simulaciones más rápidas sin sacrificar la precisión. Además, el criterio MAC mejora significativamente la estimación de la fuerza gravitacional, reduciendo errores numéricos acumulativos y garantizando una mejor conservación de la energía. También ofrece flexibilidad en la resolución, al establecer criterios que equilibran la fidelidad física con los costos computacionales.

Sin embargo, el método también tiene algunas desventajas y limitaciones. Aunque más eficiente que las simulaciones full-SPH, sigue siendo más costoso que una simulación N-body pura. Además, no incluye un tratamiento avanzado de sistemas binarios, lo cual es fundamental para la evolución de cúmulos estelares jóvenes. Finalmente, la precisión de la simulación depende en gran medida de la correcta elección de los parámetros numéricos, como los criterios de resolución y de apertura del árbol de gravedad, lo que puede afectar la exactitud de los resultados si no se configuran adecuadamente.

2.5.4. Relevancia para el Proyecto de Simulación Gravitacional

El método híbrido SPH/N-body presentado en el artículo tiene una gran relevancia para proyectos de simulación gravitacional que buscan ajustar dinámicamente los parámetros de interacción entre dos cuerpos celestes. En particular, su uso del árbol de gravedad Barnes-Hut y la optimización mediante el criterio de apertura multipolar (MAC) proporcionan un marco eficiente para la resolución de fuerzas gravitacionales en sistemas con múltiples escalas de interacción. Además, la integración de estos métodos con enfoques más avanzados, como el Método Multipolar Rápido (FMM), permitiría reducir aún más la complejidad computacional al calcular interacciones gravitacionales con precisión ajustable.

Por otro lado, la combinación de estas técnicas con algoritmos bioinspirados, como algoritmos evolutivos o enjambre de partículas, abre la posibilidad de optimizar parámetros clave en la simulación, como la distribución de masa. Estos algoritmos pueden explorar de manera adaptativa diferentes configuraciones iniciales y estrategias de integración temporal, maximizando la eficiencia y precisión de la simulación. En este sentido, la metodología híbrida discutida en el artículo proporciona un punto de partida sólido para desarrollar simulaciones dinámicas en las que los parámetros de interacción entre cuerpos celestes evolucionan de manera autónoma en función de condiciones físicas y computacionales óptimas.

CAPÍTULO 3

Marco Teórico

3.1. Problema de los n cuerpos

El problema de n cuerpos estudia cómo n objetos, como planetas o estrellas, se mueven bajo la atracción gravitacional mutua, siguiendo las leyes de Newton. Para dos cuerpos, como la Tierra y el Sol, se puede calcular exactamente sus órbitas, que suelen ser elípticas. Sin embargo, cuando hay tres o más cuerpos, como en el sistema Tierra-Luna-Sol, predecir el movimiento se complica mucho, y a menudo se necesita usar computadoras para simulaciones.

Como se puede intuir, el problema de n cuerpos es un tema fundamental en mecánica celeste, astrofísica y física computacional, con implicaciones significativas en la simulación de sistemas dinámicos. A continuación, se presenta un análisis exhaustivo basado en fuentes académicas.

3.1.1. Puntos clave

- El problema de n cuerpos es un desafío central en física para predecir el movimiento de múltiples objetos que interactúan gravitacionalmente, como planetas o estrellas.
- La investigación indica que para dos cuerpos, hay una solución exacta, pero para tres o más, no hay solución general analítica y puede ser caótico.
- Se utiliza en simulaciones de sistemas planetarios, cúmulos estelares y galaxias, con métodos numéricos como el algoritmo de Barnes-Hut para grandes números de cuerpos.

3.1.2. Principios y funcionamiento

Cada cuerpo atrae a los demás con una fuerza que depende de sus masas y la distancia, según la fórmula:

$$\vec{a}_i = \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} \quad (3.1)$$

Esto crea un sistema de ecuaciones que, para muchos cuerpos, es difícil de resolver a mano y requiere métodos numéricos, como dividir el espacio en celdas para calcular fuerzas más rápido.

3.1.3. Aplicaciones inesperadas

Además de la astronomía, el problema de n cuerpos se usa en simulaciones de dinámica molecular, como el movimiento de proteínas, lo que podría sorprender a quienes solo lo asocian con el espacio.

3.1.4. Definición y Enfoques

El problema de n cuerpos se define como el desafío de predecir los movimientos individuales de un grupo de n partículas materiales que interactúan entre sí mediante la ley de gravitación universal de Newton, dada por:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (3.2)$$

donde G es la constante gravitacional y r es la distancia entre los cuerpos.

3.1.5. Contexto Histórico

El origen del problema se remonta a Isaac Newton (1687), quien formuló la ley de gravitación universal. Henri Poincaré (1889) descubrió el caos determinista al estudiar el problema de tres cuerpos. Karl Fritiof Sundman (siglo XX) proporcionó una solución teórica para $n = 3$ usando series convergentes.

3.1.6. Principios Fundamentales

La aceleración de cada cuerpo i está dada por:

$$\vec{a}_i = \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} \quad (3.3)$$

Resultando en un sistema de $6n$ ecuaciones diferenciales.

3.1.7. Variantes y Enfoques Principales

Cuadro 3.1: Tabla de enfoques principales a la hora de resolver problemas de n cuerpos

Enfoque	Descripción	Complejidad	Referencia
Solución Analítica ($n=2$)	Método que resuelve el problema de Kepler para dos cuerpos. Proporciona soluciones exactas para sistemas de dos objetos.	$O(1)$	[1]
Integración Numérica	Utiliza métodos como Runge-Kutta para simular movimientos. Permite aproximaciones numéricas para sistemas complejos.	$O(n^2)$	[5]
Algoritmo de Barnes-Hut	Método de agrupamiento jerárquico para reducir complejidad computacional. Mejora la eficiencia en simulaciones de múltiples cuerpos.	$O(n \log n)$	[6]

3.1.8. Aplicaciones Típicas

- Dinámica de sistemas planetarios
- Evolución de cúmulos estelares ($n \sim 10^6$)
- Formación de galaxias ($n \sim 10^9$)

3.2. Problema de dos cuerpos

El **problema de dos cuerpos** constituye uno de los fundamentos de la mecánica clásica, la astrofísica y la física computacional. Se trata del estudio del movimiento de dos masas puntuales que interactúan mediante una fuerza central, usualmente la gravitación newtoniana, lo cual permite obtener soluciones exactas que describen las trayectorias orbitales. Diversos autores han abordado este tema desde distintas perspectivas, resaltando su importancia tanto en el análisis teórico como en aplicaciones prácticas, como la predicción de órbitas planetarias y el estudio de sistemas binarios.

3.2.1. Definición y Enfoques Conceptuales

El problema de dos cuerpos se define formalmente como el estudio dinámico de dos objetos (por ejemplo, planetas, satélites o estrellas) que interactúan a través de una fuerza central, típicamente descrita por la ley de gravitación universal:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (3.4)$$

donde G es la constante gravitacional y r representa la distancia entre las dos masas. Según la literatura, esta interacción se traduce en movimientos cuyas

trayectorias son secciones cónicas (elipses, parábolas o hipérbolas), lo que implica que el sistema puede ser resuelto de forma analítica mediante la reducción a un problema de un solo cuerpo utilizando el concepto de centro de masa y la masa reducida. En este marco, la masa reducida se expresa como:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.5)$$

lo que permite transformar el movimiento relativo de ambos cuerpos en el movimiento de un único cuerpo bajo la acción de una fuerza central.

3.2.2. Principios Fundamentales y Mecanismo de Funcionamiento

El procedimiento para abordar el problema de dos cuerpos se fundamenta en la transformación al sistema de referencia del centro de masa. En ausencia de fuerzas externas, el centro de masa se mueve a velocidad constante, lo que facilita separar el movimiento global del sistema del movimiento relativo entre las masas. La ecuación diferencial que rige la dinámica radial se puede expresar de manera general como:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} + \frac{l^2}{r^3} \mathbf{r} \quad (3.6)$$

donde l representa el momento angular por unidad de masa. La resolución de esta ecuación se basa en la aplicación de las leyes de conservación de la energía y del momento angular, lo cual conduce a las formulaciones de las leyes de Kepler: la primera ley establece que las órbitas son elipses, la segunda que áreas iguales son barridas en tiempos iguales, y la tercera relaciona el período orbital con el semieje mayor.

3.2.3. Contexto Histórico y Evolución del Problema

El origen teórico del problema de dos cuerpos se remonta a los trabajos de Isaac Newton, quien en 1687, a través de su obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* [7], sentó las bases de la gravitación universal y demostró que las trayectorias planetarias son elípticas. Posteriormente, durante el siglo XVIII, Joseph Louis Lagrange y otros matemáticos expandieron estos conceptos, estableciendo métodos analíticos que permitieron una comprensión más profunda del movimiento relativo en sistemas binarios y facilitando la transición hacia el estudio de problemas con más de dos cuerpos mediante técnicas de perturbación.

3.2.4. Variantes y Enfoques Metodológicos

En la literatura se han desarrollado diversos enfoques para abordar el problema de dos cuerpos:

- **Elementos Orbitales:** Este método utiliza parámetros como el semieje mayor, la excentricidad, la inclinación y otros elementos que definen la órbita. Es especialmente valorado en astrofísica por su interpretación directa

de la geometría orbital, aunque su aplicación puede volverse compleja en presencia de perturbaciones.

- **Enfoque Vectorial:** Emplea la representación de la posición y la velocidad mediante vectores, lo cual resulta intuitivo para el análisis dinámico y permite incorporar de manera natural las variaciones en la dirección y magnitud de los movimientos.
- **Formulación Hamiltoniana:** Utilizando las ecuaciones de Hamilton, este enfoque es adecuado para estudios perturbativos y para la integración numérica de sistemas dinámicos, aunque requiere una base matemática avanzada.

3.2.5. Aplicaciones Típicas

El problema de dos cuerpos se aplica de forma extendida en áreas tales como:

- **Predicción de órbitas planetarias y trayectorias de satélites:** Permite modelar de manera precisa la dinámica orbital de sistemas planetarios y misiones espaciales.
- **Análisis de sistemas binarios:** Es crucial en la astrofísica para estudiar la interacción entre estrellas en sistemas dobles.
- **Cálculo de trayectorias de cometas y asteroides:** Facilita la determinación de órbitas y la evaluación de posibles perturbaciones en el sistema solar.

Estas aplicaciones han sido fundamentales en el desarrollo de simulaciones numéricas y en la validación de modelos teóricos en astrofísica.

3.2.6. Ventajas y Limitaciones

Entre las principales ventajas del problema de dos cuerpos se destacan:

- **Solución analítica exacta:** Permite una predicción precisa del movimiento de dos cuerpos sin recurrir a aproximaciones numéricas.
- **Base para métodos de perturbación:** Sirve como punto de partida para el análisis de sistemas más complejos en los que se introducen perturbaciones adicionales.

No obstante, sus limitaciones también son evidentes:

- **Restricción a dos cuerpos:** La formulación clásica ignora la influencia de cuerpos adicionales, lo que puede resultar inadecuado en escenarios reales de sistemas múltiples.
- **Suposición de cuerpos puntuales y fuerzas centrales:** La aproximación se basa en modelos ideales que no consideran efectos de extensión finita o fuerzas no centrales, lo que puede introducir discrepancias al modelar situaciones con alta complejidad dinámica.

3.3. Exponente de Lyapunov

El exponente de Lyapunov cuantifica la tasa promedio de separación (divergencia) o acercamiento (convergencia) exponencial de trayectorias infinitamente cercanas en el espacio de fases de un sistema dinámico. Es una medida fundamental de la sensibilidad a las condiciones iniciales. Durante esta sección del reporte abarcaremos lo necesario para el marco de este trabajo terminal.

3.3.1. Definiciones de los Exponentes de Lyapunov

El concepto de exponente de Lyapunov surge de la necesidad de cuantificar la estabilidad y la sensibilidad a las condiciones iniciales en sistemas dinámicos. Existen principalmente dos definiciones formales que, aunque relacionadas, no son idénticas y tienen interpretaciones geométricas distintas:

1. **Exponentes Característicos de Lyapunov (LCEs):** Introducidos originalmente por A.M. Lyapunov [8], se definen como los límites superiores de las tasas de crecimiento exponencial de las *normas* de las soluciones $x_i(t, x_0)$ del sistema linealizado $\dot{x} = J(t, x_0)x$ a lo largo de una trayectoria $z(t, x_0)$ del sistema no lineal original $\dot{z} = F(z)$. Formalmente: [9, 10]:

$$LCE_i(x_0) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |x_i(t, x_0)| \quad (3.7)$$

Estos miden cómo crecen o decrecen las longitudes de los vectores solución individuales. Geométricamente, se relacionan con la evolución de las aristas de un hipercubo infinitesimal bajo el mapeo linealizado [10].

2. **Exponentes de Lyapunov (LEs):** Definidos más tarde en el contexto de la teoría ergódica [11], se basan en las tasas de crecimiento exponencial de los *valores singulares* $\sigma_i(t, x_0)$ de la matriz fundamental $X(t, x_0)$ del sistema linealizado. Formalmente [10]:

$$LE_i(x_0) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \sigma_i(X(t, x_0)) \quad (3.8)$$

Estos miden cómo crecen o decrecen las longitudes de los semiejes principales de un elipsoide infinitesimal transformado por el sistema linealizado. Los LEs son cruciales para la teoría de la dimensión (p.ej., dimensión de Lyapunov) y son los que usualmente se calculan en estudios de caos [10].

Nota Importante: Aunque el LCE máximo siempre coincide con el LE máximo ($LCE_1 = LE_1$), los demás exponentes LCE_i y LE_i (para $i > 1$) generalmente no coinciden. Además, la suma de los LEs está relacionada con la traza de la Jacobiana (tasa de cambio de volumen en el espacio de fases), mientras que la suma de los LCEs para una base general no tiene esta interpretación directa [10]. La confusión entre LCEs y LEs puede llevar a errores si no se especifica claramente cuál se está usando [12].

3.3.2. Principios Fundamentales y Funcionamiento

El cálculo y la interpretación de los exponentes de Lyapunov se basan en:

- **Linealización:** Se estudia la dinámica local alrededor de una trayectoria $z(t, x_0)$ mediante la ecuación variacional $\dot{x} = J(t, x_0)x$, donde $J(t, x_0) = \frac{\partial F}{\partial z}|_{z=z(t, x_0)}$ es la matriz Jacobiana evaluada a lo largo de la trayectoria [10].
- **Matriz Fundamental:** La evolución de las perturbaciones está gobernada por la matriz fundamental $X(t, x_0)$, solución de $\dot{X} = J(t, x_0)X$ con $X(0, x_0) = I_n$.
- **Teorema Ergódico Multiplicativo (Oseledec):** Garantiza la existencia de los límites (no solo \limsup) para los LEs para casi todo punto x_0 respecto a una medida ergódica invariante [11, 13]. Sin embargo, verificar la ergodicidad es difícil en la práctica [10].
- **Cálculo Numérico:** Se usan algoritmos basados en la descomposición QR o SVD de la matriz fundamental, a menudo involucrando la reortogonalización periódica de un conjunto de vectores ortonormales evolucionados bajo el sistema linealizado (método de Benettin) [14]; Wolf et al. [15, 16].
- **Espectro de Lyapunov:** Para un sistema n -dimensional, hay n exponentes $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. λ_1 (el exponente máximo) determina la predictibilidad. Si $\lambda_1 > 0$, el sistema es caótico. La suma $\sum \lambda_i$ indica si el sistema es disipativo (< 0) o conservativo ($= 0$).

3.3.3. Contexto Histórico

- **A.M. Lyapunov (1892):** Introdujo los “exponentes característicos” (LCEs) para estudiar la estabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales *lineales con coeficientes variables en el tiempo* [8]. Definió sistemas “regulares” para los cuales el signo del LCE máximo determina la estabilidad de la solución cero [17].
- **O. Perron (1930):** Construyó un contraejemplo (un sistema lineal 2D) mostrando que para sistemas “irregulares”, tener todos los LCEs negativos no implica estabilidad (inestabilidad de Lyapunov de la solución cero). Además, mostró que en la vecindad de la solución cero pueden existir soluciones con LCEs positivos. Este fenómeno se conoce como *efecto Perron* [9, 17].
- **V.I. Oseledec (1968):** Probó el Teorema Ergódico Multiplicativo, estableciendo rigurosamente la existencia de los exponentes (LEs) y sus propiedades fundamentales en el marco de la teoría ergódica [11].
- **Desarrollos Posteriores:** Conexión con el caos, cálculo de la dimensión fractal Kaplan-Yorke [18], métodos numéricos robustos Benettin et al. [14], Wolf et al. [15].

3.3.4. Variantes y Conceptos Relacionados

- **LCEs vs. LEs:** Discutido arriba. Los LEs (basados en valores singulares) son los relevantes para la dimensión de Lyapunov y la tasa de cambio de volumen.
- **Exponentes de Tiempo Finito (FTLEs):** Valores calculados sobre intervalos finitos T , $LE_i(T, x_0)$. Convergen a los LEs asintóticos cuando $T \rightarrow \infty$ (si el límite existe). Son útiles numéricamente pero pueden fluctuar y mostrar “saltos” [10, 19].
- **Exponentes Condicionales:** Usados en sistemas acoplados (drive-response) para medir la estabilidad de la sincronización. Miden la divergencia/convergencia en las direcciones transversales al manifold de sincronización [20].
- **Exponentes k-dimensionales:** Miden la tasa de expansión/contracción de volúmenes k-dimensionales en el espacio tangente, dados por la suma de los k mayores LEs ($\sum_{i=1}^k \lambda_i$) [21].
- **Regularidad vs. Irregularidad:** Un sistema linealizado $\dot{x} = J(t)x$ es *regular* si la suma de sus LCEs (calculados a partir de una base normal) es igual al exponente de la traza ($\int \text{Tr}(J)dt$). Si no, es *irregular*. Solo para sistemas regulares, $\lambda_1 < 0$ implica estabilidad asintótica [17], [10]. El efecto Perron es una característica de los sistemas irregulares.
- **Invariancia:** Los LEs son invariantes bajo diffeomorfismos del espacio de fases, lo que los hace adecuados para caracterizar atractores. Los LCEs no comparten esta propiedad general, pero son invariantes bajo transformaciones de Lyapunov específicas [10].

3.3.5. Aplicaciones (basadas en los artículos)

- **Detección y Caracterización del Caos:** El signo del LE máximo (λ_1) se usa como indicador primario de caos [16].
- **Estabilidad Orbital:** En el CR3BP (*Problema Restringido Circular de Tres Cuerpos*), se usa λ_1 para determinar los límites de estabilidad de órbitas planetarias [16].
- **Dimensión de Atractores:** La dimensión de Lyapunov D_{KY} , calculada a partir del espectro de LEs usando la fórmula de Kaplan-Yorke, proporciona una cota superior para la dimensión de Hausdorff del atractor [10, 19]. El método de Leonov ofrece una vía analítica para estimar D_{KY} usando funciones de Lyapunov [19].
- **Sincronización:** Los exponentes condicionales determinan si el estado sincronizado es estable en sistemas acoplados [20].
- **Estabilidad por Primera Aproximación:** El análisis de estabilidad de puntos fijos o trayectorias periódicas se basa en los LCEs/LEs del sistema linealizado. Sin embargo, el efecto Perron limita su aplicabilidad general a sistemas irregulares [9, 17].

3.3.6. Ventajas y Limitaciones

■ Ventajas:

- Proporciona una medida cuantitativa y objetiva del caos.
- Relaciona la dinámica local (expansión/contracción) con el comportamiento global.
- Fundamental para calcular la dimensión de atractores.
- Invariante bajo cambios suaves de coordenadas (para LEs).

■ Limitaciones:

- **Efecto Perron:** La principal limitación teórica. El signo del LCE/LE máximo *no* siempre determina la estabilidad/inestabilidad en sistemas no lineales generales, solo en los regulares [10, 17].
- **Cálculo Numérico:** La convergencia puede ser lenta; los FTLEs pueden fluctuar; problemas de precisión si los exponents están cerca o son cero; la elección del tiempo de integración y reortogonalización es crucial [10, 19].
- **Requerimientos Teóricos:** La existencia rigurosa de LEs (como límites) depende de la teoría ergódica (Teorema de Oseledec), cuyas hipótesis (existencia de medida ergódica) son difíciles de verificar en la práctica [10].
- **Estimación a partir de Series Temporales:** Muy sensible al ruido, longitud de la serie, dimensión de embedding y otros parámetros; puede dar resultados espurios [10], citando a Sander & York.
- **Confusión Terminológica:** La existencia de LCEs y LEs (y a veces la falta de distinción clara en la literatura) puede generar confusión [10].

3.4. Integradores Simplécticos Gravitacionales

Los integradores simplécticos gravitacionales representan una clase especializada de métodos numéricos diseñados para la simulación de sistemas dinámicos descritos por la mecánica hamiltoniana, con una aplicación primordial en el problema gravitacional de N-cuerpos [22, 23]. Estos métodos son cruciales en la mecánica celeste y la astrofísica computacional para modelar con alta fidelidad la evolución a largo plazo de sistemas como planetas orbitando estrellas, satélites, asteroides, cúmulos estelares y galaxias [22, 24, 25]. Su característica distintiva y fundamental es la preservación de la estructura geométrica del espacio de fases, conocida como la forma simpléctica, lo que conlleva excelentes propiedades de conservación a largo plazo para cantidades como la energía y el momento angular, aunque esta conservación de energía no sea exacta, sino acotada [23, 26, 27].

3.4.1. Definición y Principios Fundamentales

Un sistema dinámico descrito por un Hamiltoniano $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ evoluciona en el tiempo según las ecuaciones de Hamilton. Un integrador numérico aproxima este flujo continuo mediante un mapa discreto $\Phi_h : (\mathbf{q}_n, \mathbf{p}_n) \mapsto (\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1})$ que avanza el sistema en un paso de tiempo h . El integrador Φ_h se denomina simpléctico si preserva la 2-forma simpléctica $\omega = \sum_i d\mathbf{p}_i \wedge d\mathbf{q}_i$ [23, 26]. Matemáticamente, esto significa que la matriz Jacobiana del mapa, $J = \partial(\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1})/\partial(\mathbf{q}_n, \mathbf{p}_n)$, debe satisfacer la condición $J^T \Omega J = \Omega$, donde Ω es la matriz estándar simpléctica [26, 27]. Esta propiedad garantiza que el mapa es una transformación canónica y preserva el volumen en el espacio de fases (Teorema de Liouville) [22, 23].

Para el problema gravitacional de N-cuerpos, el Hamiltoniano es separable, $H = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q})$, donde T es la energía cinética (dependiente solo de los momentos) y V es la energía potencial (dependiente solo de las posiciones) [24, 28]. Esta separabilidad permite la construcción de integradores simplécticos mediante métodos de división (*splitting methods*) [23, 24]. Estos métodos descomponen el Hamiltoniano en partes integrables analíticamente (o de forma muy precisa) y componen sus flujos para aproximar el flujo completo. El ejemplo más básico es el integrador de Leapfrog (o Verlet), que es de segundo orden y simpléctico [23, 26, 28].

3.4.2. Contexto Histórico y Desarrollo

La necesidad de simulaciones estables a largo plazo en mecánica celeste impulsó el desarrollo de integradores simplécticos. Aunque la idea de conservar propiedades geométricas no es nueva, su aplicación sistemática a la integración numérica cobró fuerza a partir de los años 80. Trabajos como los de Ruth (1983) [29] y posteriormente Forest & Ruth (1990) [29], Candy & Rozmus (1991) [27], y Yoshida (1990) [26, 27] establecieron métodos para construir integradores simplécticos de orden superior mediante composición simétrica de métodos de orden inferior. Un hito fundamental fue el método de mapeo simpléctico de Wisdom y Holman (1991) [22], diseñado específicamente para la dinámica planetaria, que explotaba la dominancia del término Kepleriano. Paralelamente, los integradores variacionales, basados en la discretización del principio de acción de Hamilton, emergieron como otro enfoque robusto para derivar algoritmos simplécticos y conservadores de momento [26, 28].

3.4.3. Variantes y Enfoques Principales

La literatura describe una diversidad de integradores simplécticos aplicados al problema de N-cuerpos:

3.4.4. Propiedades Clave

Las propiedades más importantes de estos integradores son:

Cuadro 3.2: Principales variantes de integradores simplécticos para problemas de N-cuerpos.

Variante	Descripción	Referencias Clave
Método de Leapfrog/Verlet	Integrador simpléctico de segundo orden, base para muchos otros métodos. Eficiente para $H = T(p) + V(q)$.	[23, 26, 28]
Método de Wisdom-Holman (WH)	Separa H en $H_{\text{Kepler}} + H_{\text{Interaction}}$. Muy eficiente para órbitas casi Keplerianas (e.g., sistemas planetarios). Preserva implícitamente la integral de Jacobi modificada.	[22, 29, 30]
Integradores de Orden Superior	Construidos mediante composición (e.g., Yoshida). Aumentan la precisión pero requieren más evaluaciones de fuerza y pueden tener pasos de tiempo negativos.	[26, 27, 29]
Integradores Variacionales (GGL)	Derivados de la discretización del Lagrangiano (e.g., Galerkin Gauss-Lobatto). Conservan exactamente el momento (lineal y angular si hay simetría) y son simplécticos.	[26, 28]
Integradores Simplécticos Híbridos	Combinan un integrador simpléctico (como WHFast) para la evolución general con otro método (simpléctico o no, como IAS15 o BS) para manejar eventos específicos como encuentros cercanos. Ejemplos: MERCURIUS, TRACE, EnckeHH.	[25, 30-32]
Integradores Simplécticos Adelante (FSI)	Clase de integradores (e.g., 4A, 4B, 4C) que solo usan pasos de tiempo positivos, a costa de requerir el gradiente de la fuerza. Eficientes para problemas con fuerzas dependientes del tiempo.	[24]
Métodos Basados en Encke	Resuelven las ecuaciones para las <i>perturbaciones</i> respecto a una órbita Kepleriana de referencia. Muy precisos si las perturbaciones son pequeñas. Ejemplo: EnckeHH.	[25]
Métodos Gauge-Compatible (GCSM)	Para problemas con simetrías de gauge (como PIC en electromagnetismo), preservan explícitamente el mapa de momento asociado (e.g., ley de Gauss discreta).	[33]
Integradores para Coordenadas Corrotantes	Adaptan métodos simplécticos a sistemas no canónicos que surgen en marcos de referencia en rotación, preservando una estructura K-simpléctica.	[34]

1. **Simplécticidad:** Conservación de la 2-forma simpléctica, lo que implica la preservación del volumen en el espacio de fases [23, 26].
2. **Conservación de Energía:** Aunque no conservan exactamente la energía H , el error energético para un integrador simpléctico de orden r aplicado a un sistema hamiltoniano autónomo permanece acotado a largo plazo, oscilando alrededor del valor inicial, en contraste con el error secular (lineal o peor) de métodos no simplécticos [23, 25, 27]. Existe un Hamiltoniano “sombra” \tilde{H} , cercano a H , que es conservado casi exactamente por el integrador [27, 31].
3. **Conservación de Momento:** Los integradores variacionales conservan exactamente los mapas de momento asociados a las simetrías del Lagrangiano discreto (e.g., momento lineal y angular si el sistema es invariante bajo traslaciones y rotaciones) [26, 28]. Otros métodos simplécticos también suelen tener excelente conservación del momento, aunque puede haber errores de orden superior, especialmente con pasos de tiempo adaptativos [28].
4. **Estabilidad a Largo Plazo:** La preservación de la estructura simpléctica evita la deriva secular en los elementos orbitales y garantiza una excelente estabilidad numérica para integraciones muy largas [22, 23, 27].

3.4.5. Aplicaciones Típicas

Los integradores simplécticos son la herramienta estándar en:

- **Dinámica del Sistema Solar:** Estudio de la evolución orbital de planetas, asteroides y cometas a escalas de tiempo de millones o miles de millones de

años [22, 29].

- **Dinámica de Exoplanetas:** Análisis de la estabilidad de sistemas planetarios extrasolares [30].
- **Dinámica Estelar:** Simulación de cúmulos globulares y centros galácticos, aunque aquí los encuentros cercanos son un desafío [25, 28].
- **Simulaciones Cosmológicas:** El método Leapfrog es ampliamente usado en simulaciones de N-cuerpos para materia oscura debido a su simplicidad, eficiencia y naturaleza simpléctica [23].
- **Física de Plasmas (PIC):** Métodos geométricos y simplécticos, incluyendo los gauge-compatibles, se usan para preservar estructuras fundamentales [33].

3.4.6. Ventajas

- Excelente estabilidad y precisión a largo plazo [22, 27].
- Error de energía acotado, sin deriva secular [23, 26].
- Buena conservación (a menudo exacta en métodos variacionales) de otros integrales de movimiento como el momento lineal y angular [26, 28].
- Eficiencia computacional para Hamiltoniano separables [22].

3.4.7. Desventajas y Limitaciones

- **Pasos de Tiempo:** Los métodos simplécticos puros contruidos por composición o métodos explícitos estándar requieren pasos de tiempo fijos para mantener la simplécticidad [23, 26]. Esto es ineficiente para sistemas multi-escala o con encuentros cercanos donde se necesitarían pasos muy pequeños [25, 28].
- **Adaptatividad:** Introducir pasos de tiempo adaptativos (que varían con el tiempo o por partícula) generalmente rompe la estructura simpléctica exacta [26, 28]. Sin embargo, se ha demostrado que usar pasos de tiempo adaptativos discretizados en potencias de dos (*block power-of-two*) en integradores variacionales preserva la simplécticidad “casi siempre” (excepto en un conjunto de medida cero) [28], ofreciendo un compromiso viable. Hernandez (2019) [31] enfatiza que romper la simplécticidad, incluso en pocos puntos, puede ser problemático si no se mantiene la continuidad Lipschitz.
- **Encuentros Cercanos:** La singularidad del potencial gravitacional $1/r$ causa problemas. Los integradores simplécticos puros pueden fallar o requerir pasos de tiempo prohibitivamente pequeños. Técnicas como la regularización o el cambio a integradores no simplécticos (híbridos) son necesarias [25, 30].
- **Fuerzas No Conservativas:** Los integradores simplécticos están diseñados para sistemas hamiltonianos. Incorporar fuerzas disipativas (como arrastre

o radiación) requiere extensiones que pueden comprometer las propiedades de conservación [31].

- **Complejidad:** Los métodos de orden superior o los que requieren gradientes de fuerza (FSIs) pueden ser más costosos por paso [24, 26]. Los métodos implícitos requieren resolver ecuaciones no lineales [29].

3.4.8. Desarrollos Recientes y Direcciones Futuras

La investigación activa se centra en superar las limitations:

- **Integradores Híbridos:** Combinan la eficiencia y estabilidad simpléctica para la mayor parte de la evolución con la robustez de métodos adaptativos (como IAS15 o BS) durante fases críticas (encuentros cercanos) [25, 30, 32].
- **Métodos Adaptativos Simplécticos:** Desarrollo de esquemas que permitan variar el paso de tiempo mientras se preserva (exacta o aproximadamente) la simplécticidad, como los basados en potencia de dos [28] o correctores simplécticos [29].
- **Integradores Geométricos Más Allá de Simplécticos:** Exploración de métodos que preserven otras estructuras geométricas relevantes para sistemas específicos (e.g., simetrías de gauge [33], integradores para coordenadas corrotantes [34]).
- **Optimización de Errores:** Técnicas para minimizar errores de redondeo en integraciones de alta precisión, como la suma compensada y el manejo cuidadoso de constantes [30].

3.5. Método Multipolar Rápido (Fast Multipole Method - FMM)

El Método Multipolar Rápido (FMM), es una técnica computacional fundamental desarrollada para acelerar significativamente la evaluación de interacciones de largo alcance en sistemas de N partículas o elementos [35, 36]. Reconocido como uno de los algoritmos más influyentes del siglo XX [37], el FMM reduce drásticamente la complejidad computacional inherente a los problemas de N -cuerpos. Mientras que un cálculo directo de todas las interacciones par a par requiere $O(N^2)$ operaciones, el FMM logra esta tarea típicamente en $O(N)$ o $O(N \log N)$ operaciones, dependiendo de la distribución de las partículas y la variante del método empleada [35, 38]. De manera más precisa, en d dimensiones, la complejidad puede estimarse como $O(N \log^{(d-1)}(1/\epsilon))$ a medida que la precisión deseada ϵ tiende a cero [36]. Conceptualmente, el FMM puede interpretarse como un método para acelerar la multiplicación de un vector por una matriz densa específica que surge de la discretización de operadores integrales o sumas de interacciones par a par [36, 39].

3.5.1. Principios Fundamentales y Funcionamiento

El núcleo del FMM reside en una combinación de descomposición jerárquica del dominio computacional y el uso de expansiones matemáticas para aproximar interacciones [35]. El dominio se subdivide recursivamente mediante una estructura de árbol, como un *quadtree* (2D) o un *octree* (3D), agrupando las partículas o fuentes en celdas (o “cajas”) a diferentes niveles de refinamiento [36, 38].

El método distingue entre interacciones de “campo cercano” y “campo lejano”. Las interacciones entre partículas en celdas adyacentes (campo cercano) se calculan directamente, ya que las aproximaciones no son precisas a corta distancia [39, 40]. Para las interacciones entre celdas bien separadas (campo lejano), el FMM emplea dos tipos principales de expansiones [35, 36]:

- **Expansión Multipolo (Saliente):** Representa el campo potencial generado por todas las fuentes *dentro* de una celda (la “fuente”) como una única serie convergente fuera de la celda. Esta expansión es válida a una distancia suficiente de la celda origen. Funciona como una representación compacta de las fuentes.
- **Expansión Local (Entrante):** Representa el potencial generado por fuentes *distantes* (campo lejano) como una serie convergente *dentro* de una celda (la “objetivo”). Funciona como una representación compacta del campo externo que actúa sobre la celda.

El algoritmo clásico opera en dos fases principales sobre la estructura de árbol [35, 36, 38]:

- **Paso Ascendente (Upward Pass):** Se calculan las expansiones multipolares para todas las celdas. Para las celdas hoja (el nivel más fino), se calcula directamente a partir de las fuentes contenidas. Para celdas padre, las expansiones se obtienen combinando (transladando y sumando) las expansiones de sus celdas hijas (operador *Multipole-to-Multipole* o M2M).
- **Paso Descendente (Downward Pass):** Se calculan las expansiones locales para todas las celdas. Para cada celda, se convierten las expansiones multipolares de las celdas en su “lista de interacción” (celdas bien separadas en el mismo nivel, cuyos padres son vecinos pero ellas no) en contribuciones a su propia expansión local (operador *Multipole-to-Local* o M2L). Luego, las expansiones locales de una celda padre se trasladan y se añaden a las expansiones locales de sus celdas hijas (operador *Local-to-Local* o L2L).

Finalmente, en las celdas hoja, el potencial total en cada punto se calcula sumando la contribución directa de las fuentes en celdas vecinas y evaluando la expansión local acumulada (que representa todo el campo lejano). La clave de la eficiencia $O(N)$ radica en que el número de celdas en la lista de interacción es acotado (independiente de N), y las operaciones de traslación (M2M, M2L, L2L) tienen un coste que depende del orden de la expansión p (relacionado con la precisión ϵ) pero no de N [35].

Desde una perspectiva matricial, el FMM explota la propiedad de que los bloques fuera de la diagonal de la matriz de interacción (que representan interacciones

entre grupos de puntos separados espacialmente) tienen bajo rango numérico y pueden aproximarse eficientemente mediante factorizaciones de bajo rango, como las implícitas en las expansiones multipolares y locales [36, 39].

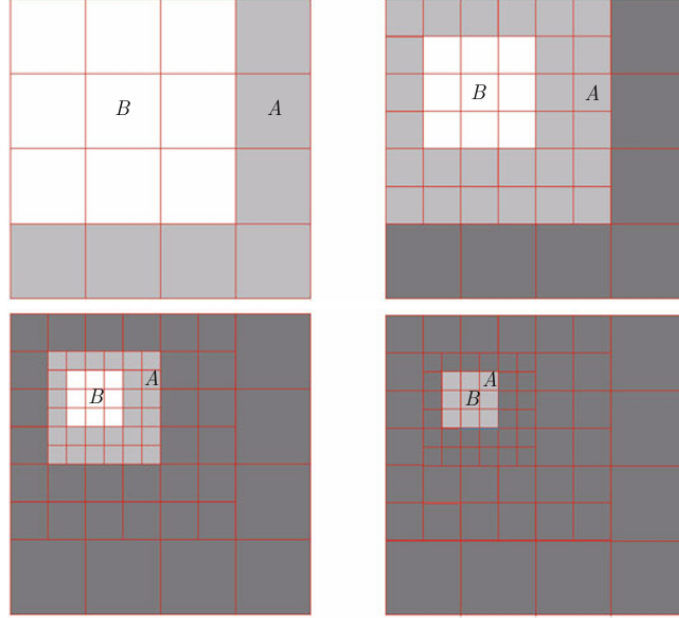


Figura 3.1: Esquema de la estructura jerárquica de celdas (e.g., quadtree) y la distinción entre interacciones de campo cercano (directas) y campo lejano (aproximadas mediante expansiones), incluyendo la lista de interacción. Adaptado de [35, 40].

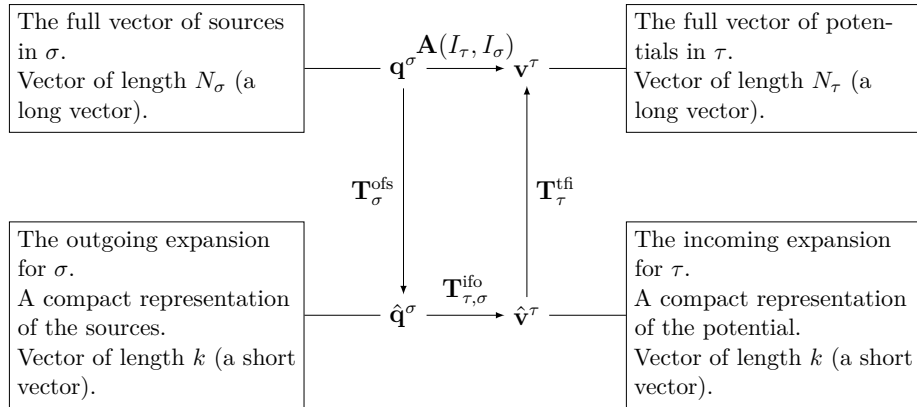


Figura 3.2: Ilustración del flujo de información en el FMM: fuentes originales (\mathbf{q}^σ) \rightarrow expansión saliente ($\hat{\mathbf{q}}^\sigma$) \rightarrow expansión entrante ($\hat{\mathbf{v}}^\tau$) \rightarrow potenciales (\mathbf{v}^τ), mostrando los operadores $\mathbf{T}_\sigma^{\text{ofs}}$, $\mathbf{T}_{\tau,\sigma}^{\text{ifo}}$, y $\mathbf{T}_\tau^{\text{tfo}}$. Adaptado de [36].

3.5.2. Contexto Histórico/Origen

El FMM fue introducido formalmente por Leslie Greengard y Vladimir Rokhlin en su seminal artículo de 1987 [35], aunque ideas relacionadas con expansiones multipolares y métodos jerárquicos existían previamente (e.g., [41, 42]). El trabajo

de Greengard y Rokhlin proporcionó un marco riguroso y un algoritmo con complejidad demostrada de $O(N)$ para el problema de Laplace, revolucionando la simulación de N -cuerpos y la solución de ecuaciones integrales [35]. Su impacto fue tal que fue incluido en la lista de los 10 algoritmos más importantes del siglo XX [37].

3.5.3. Variantes o Enfoques Principales

El FMM ha evolucionado considerablemente desde su concepción original:

- **Extensiones a otros Kernels:** Aunque inicialmente formulado para el kernel de Laplace ($1/r$), se ha extendido a otros kernels importantes como el de Helmholtz (ondas), Stokes (fluidos), Yukawa (física de partículas) y elasticidad [36, 43, 44]. Para kernels oscilatorios como el de Helmholtz, se requieren enfoques más sofisticados (e.g., *FMM direccional*) para mantener la eficiencia, especialmente a altas frecuencias [44, 45].
- **Métodos Adaptativos:** Para manejar distribuciones de partículas altamente no uniformes, se desarrollaron versiones adaptativas del FMM que refinan el árbol jerárquico solo donde es necesario, manteniendo la eficiencia [43, 46].
- **FMM Independiente del Kernel (KIFMM):** Estos métodos buscan separar la maquinaria del FMM (árbol, traslaciones) de las expansiones específicas del kernel, utilizando representaciones intermedias como cargas equivalentes/ficticias y potenciales de chequeo, lo que facilita su aplicación a nuevos kernels [36, 47].
- **Optimizaciones para Baja Precisión:** En campos como la astrofísica, donde no siempre se requiere alta precisión, se han desarrollado métodos FMM-like o variantes de códigos de árbol optimizados, que pueden lograr complejidades $O(N)$ o incluso sublineales empíricamente [48]. El método de Dehnen [48], por ejemplo, utiliza interacciones celda-celda y expansiones de Taylor, conservando el momento lineal.
- **Versiones Paralelas y para GPU:** Se han desarrollado implementaciones altamente optimizadas para arquitecturas paralelas modernas, incluyendo CPUs multi-núcleo y GPUs, lo que permite abordar problemas de escala masiva [36, 49].

3.5.4. Aplicaciones Típicas

El FMM es una herramienta esencial en:

- **Astrofísica:** Simulación de la evolución dinámica de galaxias y cúmulos estelares (interacciones gravitacionales) [37, 48].
- **Dinámica Molecular:** Cálculo de fuerzas electrostáticas y de van der Waals en simulaciones de proteínas y otras biomoléculas [38].

- **Electromagnetismo:** Solución de ecuaciones integrales para el cálculo de capacitancia, dispersión de ondas electromagnéticas y diseño de antenas [36, 43].
- **Mecánica de Fluidos:** Simulación de flujos utilizando métodos de vórtices o resolviendo ecuaciones integrales para flujos de Stokes [38].
- **Método de Elementos de Contorno (BEM):** Aceleración de la solución de sistemas lineales densos que surgen de la discretización de ecuaciones integrales de contorno [36, 39].

3.5.5. Ventajas y Desventajas/Limitaciones

Ventajas:

- **Eficiencia Asintótica:** Su complejidad $O(N)$ o $O(N \log N)$ lo hace significativamente más rápido que los métodos directos $O(N^2)$ para N grande [35].
- **Precisión Controlable:** La exactitud de la aproximación se puede ajustar sistemáticamente aumentando el orden p de las expansiones [38].
- **Escalabilidad:** Las versiones modernas han demostrado una excelente escalabilidad en arquitecturas paralelas de alto rendimiento [49].
- **Amplia Aplicabilidad:** Existen variantes para una gran diversidad de kernels de interacción física [36].

Desventajas/Limitaciones:

- **Complejidad de Implementación:** El algoritmo es considerablemente más complejo de implementar y depurar que los métodos directos o códigos de árbol más simples [36, 38].
- **Constante Oculta:** Aunque asintóticamente eficiente, la constante multiplicativa en la complejidad $O(N)$ puede ser grande, haciendo que para valores pequeños o intermedios de N , métodos más simples (como Barnes-Hut o incluso directos) puedan ser competitivos [48].
- **Consumo de Memoria:** Requiere almacenar las expansiones multipolares y locales en cada celda del árbol, lo que puede incrementar el uso de memoria en comparación con métodos directos [47].
- **Rendimiento en Distribuciones No Uniformes:** Las versiones no adaptativas pueden perder eficiencia si la distribución de partículas es muy irregular, aunque las variantes adaptativas mitigan este problema [43, 46].

Cuadro 3.3: Comparación de complejidad computacional para problemas de N-cuerpos.

Método	Complejidad Computacional
Cálculo Directo	$O(N^2)$
Algoritmo Barnes-Hut	$O(N \log N)$
Método Multipolar Rápido (FMM)	$O(N)$ o $O(N \log N)$

Fuente: Basado en [35, 36, 38].

Bibliografía

- [1] S. Orlov. «C++ Playground for Numerical Integration Method Developers». En: *Supercomputing*. Ed. por V. Voevodin y S. Sobolev. Cham: Springer International Publishing, 2017, págs. 418-429. DOI: 10.1007/978-3-319-71255-0_34.
- [2] R. Juan D. Ayala P. Brunet e I. Navazo. «Object representation by means of nonminimal division quadrees and octrees». En: *ACM Trans. Graph.* 4.1 (1985), págs. 41-59. DOI: 10.1145/3973.3975.
- [3] J. Maguire y L. Woodcock. «Artificial Intelligent Molecular Dynamics and Hamiltonian Surgery». Tesis doct. Research Gate, 2005. URL: https://www.researchgate.net/profile/Leslie-Woodcock/publication/355486308_Artificial_Intelligent_Molecular_Dynamics_and_Hamiltonian_Surgery/links/617535ba0be8ec17a921a0c1/Artificial-Intelligent-Molecular-Dynamics-and-Hamiltonian-Surgery.pdf.
- [4] Michael P. Allen y Dominic J. Tildesley. *Computer Simulation of Liquids*. Oxford University Press, jun. de 2017. ISBN: 9780198803195. DOI: 10.1093/oso/9780198803195.001.0001. URL: <https://doi.org/10.1093/oso/9780198803195.001.0001>.
- [5] Peter Atkins y Julio de Paula. *Physical Chemistry*. 9th. Oxford: Oxford University Press, 2008. ISBN: 9780195685220. URL: <http://www.worldcat.org/isbn/9780195685220>.
- [6] D. Potter I. Alonso Asensio C. Dalla Vecchia y J. Stadel. «Mesh-free hydrodynamics in pkdgrav3 for galaxy formation simulations». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 519.1 (2022), págs. 300-317. DOI: 10.1093/mnras/stac3447.
- [7] Sir Isaac Newton. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Trad. por Andrew Motte. Revised and edited by Florian Cajori. University of California Press, 1934. The Royal Society, 1687.
- [8] A. M. LYAPUNOV and. «The general problem of the stability of motion». En: *International Journal of Control* 55.3 (1992), págs. 531-534. DOI: 10.1080/00207179208934253. eprint: <https://doi.org/10.1080/00207179208934253>. URL: <https://doi.org/10.1080/00207179208934253>.

- [9] N.V. Kuznetsov y G.A. Leonov. «On stability by the first approximation for discrete systems». En: *Proceedings. 2005 International Conference Physics and Control, 2005*. Ago. de 2005, págs. 596-599. DOI: 10.1109/PHYCON.2005.1514053.
- [10] N. V. Kuznetsov, T. A. Alexeeva y G. A. Leonov. «Invariance of Lyapunov exponents and Lyapunov dimension for regular and irregular linearizations». En: *Nonlinear Dynamics* 85.1 (feb. de 2016), págs. 195-201. ISSN: 1573-269X. DOI: 10.1007/s11071-016-2678-4. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11071-016-2678-4>.
- [11] V. I. Oseledec. «A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic exponents of dynamical systems». En: *Transactions of the Moscow Mathematical Society* 19 (1968), págs. 197-231.
- [12] P. Cvitanović y col. *Chaos: Classical and Quantum*. Disponible en <http://ChaosBook.org>. Niels Bohr Institute, Copenhagen, 2012. URL: <https://www.mathnet.ru/eng/mmo214>.
- [13] Ya B Pesin. «CHARACTERISTIC LYAPUNOV EXPONENTS AND SMOOTH ERGODIC THEORY». En: *Russian Mathematical Surveys* 32.4 (ago. de 1977), pág. 55. DOI: 10.1070/RM1977v032n04ABEH001639. URL: <https://dx.doi.org/10.1070/RM1977v032n04ABEH001639>.
- [14] Giancarlo Benettin y col. «Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems - A method for computing all of them. I - Theory. II - Numerical application». En: *Meccanica* 15 (mar. de 1980), págs. 21-30. DOI: 10.1007/BF02128236.
- [15] A. Wolf y col. «Determining Lyapunov exponents from a time series». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 16.3 (jul. de 1985), págs. 285-317. DOI: 10.1016/0167-2789(85)90011-9. URL: <http://chaos.utexas.edu/manuscripts/1085774778.pdf>.
- [16] B. Quarles y col. «The instability transition for the restricted 3-body problem: III. The Lyapunov exponent criterion». En: *Astronomy & Astrophysics* 533 (ago. de 2011), A2. ISSN: 1432-0746. DOI: 10.1051/0004-6361/201016199. URL: <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201016199>.
- [17] Gennady Leonov y Nikolay Kuznetsov. «TIME-VARYING LINEARIZATION AND THE PERRON EFFECTS». En: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 17 (abr. de 2007), págs. 1079-1107. DOI: 10.1142/S0218127407017732.
- [18] James L. Kaplan y James A. Yorke. «Chaotic behavior of multidimensional difference equations». En: *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points*. Ed. por Heinz-Otto Peitgen y Hans-Otto Walther. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1979, págs. 204-227. ISBN: 978-3-540-35129-0.
- [19] N.V. Kuznetsov. «The Lyapunov dimension and its estimation via the Leonov method». En: *Physics Letters A* 380.25-26 (jun. de 2016), págs. 2142-2149. ISSN: 0375-9601. DOI: 10.1016/j.physleta.2016.04.036. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2016.04.036>.

- [20] Louis M. Pecora y col. «Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications.» En: *Chaos* 7 4 (1997), págs. 520-543. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:17209888>.
- [21] I. Shimada y T. Nagashima. «A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems». En: *Progress of Theoretical Physics* 61.6 (jun. de 1979), págs. 1605-1616. DOI: 10.1143/PTP.61.1605.
- [22] Jack Wisdom y Matthew Holman. «Symplectic maps for the N-body problem.» En: *The Astronomical Journal* 102 (oct. de 1991), págs. 1528-1538. DOI: 10.1086/115978.
- [23] T.J. Stuchi. «Symplectic integrators revisited». En: *Brazilian Journal of Physics* (2002). ISSN: 0103-9733. DOI: <https://doi.org/10.1590/S0103-97332002000500022>. URL: <https://www.scielo.br/j/bjp/a/NgqxKCKkBmrC93BgP4FJ4fk/?lang=en#>.
- [24] Siu A. Chin y C. R. Chen. «Forward Symplectic Integrators for Solving Gravitational Few-Body Problems». En: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 91.3 (2005), págs. 301-322. ISSN: 1572-9478. DOI: 10.1007/s10569-004-4622-z. URL: <https://doi.org/10.1007/s10569-004-4622-z>.
- [25] David M Hernandez y Matthew J Holman. « $\text{\texttt{jscpj}}/\text{\texttt{scpj}}$: an integrator for gravitational dynamics with a dominant mass that achieves optimal error behaviour». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 502.1 (dic. de 2020), págs. 556-563. ISSN: 1365-2966. DOI: 10.1093/mnras/staa3945. URL: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/staa3945>.
- [26] Will M. Farr y Edmund Bertschinger. «Variational Integrators for the Gravitational N-Body Problem». En: *The Astrophysical Journal* 663.2 (jul. de 2007), págs. 1420-1433. ISSN: 1538-4357. DOI: 10.1086/518641. URL: <http://dx.doi.org/10.1086/518641>.
- [27] Haruo Yoshida. «Recent progress in the theory and application of symplectic integrators». En: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 56.1 (1993), págs. 27-43. ISSN: 1572-9478. DOI: 10.1007/BF00699717. URL: <https://doi.org/10.1007/BF00699717>.
- [28] D. M. Hernandez y E. Bertschinger. «Symplectic integration for the collisional gravitational N-body problem». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 452.2 (2015), págs. 1934-1944. DOI: 10.1093/mnras/stv1439.
- [29] Haruo Yoshida. «Construction of higher order symplectic integrators». En: *Physics Letters A* 150.5 (1990), págs. 262-268. ISSN: 0375-9601. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(90\)90092-3](https://doi.org/10.1016/0375-9601(90)90092-3). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960190900923>.
- [30] Hanno Rein, David S. Spiegel y David Tamayo. *REBOUND Documentation and Integrators*. Conceptual reference to REBOUND documentation and related papers. See H. Rein and D. S. Spiegel, «IAS15: A fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision», MNRAS, vol. 446, pp. 1424-1437, Jan. 2015; H. Rein and D. Tamayo, «WHFAST: A fast and unbiased implementation of the Wisdom-Holman

- algorithm for long-term gravitational simulations,”MNRAS, vol. 452, pp. 376–388, Sep. 2015. URL: <https://rebound.readthedocs.io/en/latest/integrators/>.
- [31] David M Hernandez. «Should N-body integrators be symplectic everywhere in phase space?» En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 486.4 (abr. de 2019), págs. 5231-5238. ISSN: 1365-2966. DOI: 10.1093/mnras/stz884. URL: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stz884>.
- [32] Hanno Rein y col. «Hybrid symplectic integrators for planetary dynamics». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 485.4 (jun. de 2019), págs. 5490-5497. DOI: 10.1093/mnras/stz769. arXiv: 1903.04972 [astro-ph.EP].
- [33] Alexander S. Glasser y Hong Qin. «A gauge-compatible Hamiltonian splitting algorithm for particle-in-cell simulations using finite element exterior calculus». En: *Journal of Plasma Physics* 88.2 (2022), pág. 835880202. DOI: 10.1017/S0022377822000290.
- [34] Xiongbiao Tu, Qiao Wang y Yifa Tang. *Symplectic Integrators in Corotating Coordinates*. 2022. arXiv: 2202.03779 [astro-ph.IM]. URL: <https://arxiv.org/abs/2202.03779>.
- [35] L Greengard y V Rokhlin. «A fast algorithm for particle simulations». En: *Journal of Computational Physics* 73.2 (1987), págs. 325-348. ISSN: 0021-9991. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(87\)90140-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(87)90140-9). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999187901409>.
- [36] Per-Gunnar Martinsson. *Encyclopedia entry on “Fast Multipole Methods”*. Ago. de 2012. URL: https://amath.colorado.edu/faculty/martinss/2014_CBMS/Refs/2012_fmm_encyclopedia.pdf.
- [37] Barry A. Cipra. «The Best of the 20th Century: Editors Name Top 10 Algorithms». En: *SIAM News* 33.4 (feb. de 2000). URL: https://web.tecnico.ulisboa.pt/~mcasquilho/CD_Casquilho/PRINT/NotebookSC_1LP_22pp.pdf.
- [38] Rick Beatson y Leslie Greengard. *A short course on fast multipole methods*. Short course. 1997. URL: https://math.nyu.edu/~greengar/shortcourse_fmm.pdf.
- [39] Long Chen. *Introduction to Fast Multipole Methods*. Unpublished manuscript or notes. URL: <https://www.math.uci.edu/~chenlong/MathPKU/FMMsimple.pdf>.
- [40] Lexing Ying. «A pedestrian introduction to fast multipole methods». En: *Science China Mathematics* 55.5 (2012), págs. 1043-1051. ISSN: 1869-1862. DOI: 10.1007/s11425-012-4392-0. URL: <https://doi.org/10.1007/s11425-012-4392-0>.
- [41] Andrew W. Appel. «An Efficient Program for Many-Body Simulation». En: *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 6.1 (1985), págs. 85-103. DOI: 10.1137/0906008. eprint: <https://doi.org/10.1137/0906008>. URL: <https://doi.org/10.1137/0906008>.

- [42] Josh Barnes y Piet Hut. «A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm». En: *Nature* 324.6096 (1986), págs. 446-449. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/324446a0. URL: <https://doi.org/10.1038/324446a0>.
- [43] H. Cheng, L. Greengard y V. Rokhlin. «A Fast Adaptive Multipole Algorithm in Three Dimensions». En: *Journal of Computational Physics* 155.2 (1999), págs. 468-498. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6355>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999199963556>.
- [44] V Rokhlin. «Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions». En: *Journal of Computational Physics* 86.2 (1990), págs. 414-439. ISSN: 0021-9991. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(90\)90107-C](https://doi.org/10.1016/0021-9991(90)90107-C). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002199919090107C>.
- [45] Björn Engquist y Lexing Ying. «A Fast Directional Algorithm for High Frequency Acoustic Scattering in Two Dimensions». En: *Communications in Mathematical Sciences* 7.2 (2009), págs. 327-345.
- [46] J. Carrier, L. Greengard y V. Rokhlin. «A Fast Adaptive Multipole Algorithm for Particle Simulations». En: *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 9.4 (1988), págs. 669-686. DOI: 10.1137/0909044. eprint: <https://doi.org/10.1137/0909044>. URL: <https://doi.org/10.1137/0909044>.
- [47] Lexing Ying, George Biros y Denis Zorin. «A kernel-independent adaptive fast multipole algorithm in two and three dimensions». En: *Journal of Computational Physics* 196.2 (2004), págs. 591-626. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.11.021>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999103006090>.
- [48] Walter Dehnen. «A Hierarchical $O(N)$ Force Calculation Algorithm». En: *Journal of Computational Physics* 179.1 (2002), págs. 27-42. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1006/jcph.2002.7026>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999102970269>.
- [49] Rio Yokota y Lorena A Barba. «A tuned and scalable fast multipole method as a preeminent algorithm for exascale systems». En: *The International Journal of High Performance Computing Applications* 26.4 (2012), págs. 337-346. DOI: 10.1177/1094342011429952. eprint: <https://doi.org/10.1177/1094342011429952>. URL: <https://doi.org/10.1177/1094342011429952>.