Carlos Daniel Gil Guerrero
1002635799.

Señales y sistemas
Parcial #2

1. Encuentre la expresión del espectro de Fourier (forma exponencial y trigonométrica) para la señal $x(t)=|A\sin(2\pi F_0 t)|^2$, con: $t \in \left[-\frac{1}{2F_0}, \frac{1}{2F_0}\right]$, con $A, F_0 \in \mathbb{R}^+$.

Solución:

$$t \in \left[-\frac{1}{2F_0}, \frac{1}{2F_0}\right] \rightarrow t_0 = \frac{-1}{2F_0}$$

$$x(t) = |A\,\mathrm{sen}(2\pi F_0 t)|^2$$

$$T = \frac{1}{2F_0} - \left(-\frac{1}{2F_0}\right) = \frac{2}{2F_0} = \frac{1}{F_0} = T_0$$

$$t \in \left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$$

$$x(t) = A^2\,\mathrm{sen}^2(2\pi F_0 t)$$
$$= A^2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\pi 2F_0 t)\right]$$

- Forma exponencial.

$$x(t) = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\cos(2\pi 2F_0 t).$$

→ Por trigonométrica.

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n w_0 t) + b\,\mathrm{sen}(n w_0 t).$$

$$C_n = \frac{a_n - j b_n}{2}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} |e^{jnw_0 t}|^2\,dt = T \qquad a_n = \frac{\langle x(t), \cos(n w_0 t)\rangle}{\frac{T}{2}\|\cos(n w_0 t)\|^2}$$

$$\|\cos\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} |\cos(n w_0 t|\,dt = \frac{T}{2}$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} C_n e^{jnW_0t}$$

$$x(t) = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\cos(2W_0t) = a_0 + a_2\cos(2W_0t)$$

$$C_0 = a_0 = \frac{A^2}{2} \; ; \; a_2 = \frac{-A^2}{2}$$

$$C_2 = -A^2$$
$$C_{-2} = A^2$$

a_0 codifica el nivel DC de la señal, entonces:

$$a_0 = \frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} x(t)\,dt$$

$$a_0 = \frac{1}{\frac{1}{2F_0} - \left(-\frac{1}{2F_0}\right)}\int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\cos(2W_0t)\,dt$$

$$\frac{1}{2F_0} + \frac{1}{2F_0} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}F_0} = \frac{1}{\frac{1}{F_0}} = F_0$$

$$a_0 = F_0 \cdot \frac{A^2}{2}\int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} dt - \frac{A^2}{2}\int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \cos(2W_0t)\,dt$$

$$a_0 = F_0 \cdot \frac{A^2}{2} \cdot t\Big|_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} - \frac{A^2}{2}\operatorname{Sen}(2W_0t)\Big|_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}}$$

$$a_0 = F_0 \cdot \frac{A^2}{2}\left[\frac{1}{2F_0} - \left(-\frac{1}{2F_0}\right)\right] - \frac{A^2}{2}\left[\operatorname{Sen}\left(2W_0\frac{1}{2F_0}\right) - \operatorname{Sen}\left(2W_0\cdot\frac{-1}{2F_0}\right)\right]$$

$$a_0 = F_0 \cdot \frac{A^2}{2}\left[\frac{1}{F_0}\right] - \frac{A^2}{2}\operatorname{Sen}\left(\frac{2W_0}{\cancel{2}F_0} + \frac{2W_0}{2F_0}\right)$$

$$a_0 = \cancel{F_0}\left[\frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{F_0}} - \cancel{\frac{A^2}{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{F_0}}\operatorname{Sen}(W_0 + W_0)\right]$$

$\cancel{\operatorname{Sen}(2W_0)}$ $\to 0$

$$a_0 = \boxed{\frac{A^2}{2}}$$

Por otro lado: $\quad W_0 = 2\pi F_0$

$$b_n = \frac{2}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} x(t)\,\mathrm{Sen}(nW_0 t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{\frac{1}{2F_0} - \left(-\frac{1}{2F_0}\right)} \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\cos(2\pi 2F_0 t)\,\mathrm{Sen}(nW_0 t)\,dt$$

$$\frac{2}{\frac{1}{2F_0} + \frac{1}{2F_0}} = \frac{2}{\frac{2}{2F_0}} \rightarrow \frac{2}{\frac{1}{F_0}} = 2F_0$$

$$b_n = 2F_0 \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \frac{A^2}{2}\,\mathrm{Sen}(nW_0 t) - \frac{A^2}{2}\cos(2W_0 t)\,\mathrm{Sen}(nW_0 t)\,dt$$

$$b_n = 2F_0 \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \frac{A^2}{2}\,\mathrm{Sen}(nW_0 t)\,dt - \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \frac{A^2}{2}\cos(2W_0 t)\,\mathrm{Sen}(nW_0 t)\,dt$$

Sabiendo que:

$$\mathrm{Sen}(\theta)\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{Sen}(\theta+\alpha)}{2} + \frac{\mathrm{Sen}(\theta-\alpha)}{2}$$

$\theta = nW_0 t$

$\alpha = 2W_0 t \rightarrow W_0 = 2\pi F_0 \rightarrow \alpha = 2\pi 2 F_0 t$

$$b_n = 2F_0 \frac{A^2}{2} \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \underset{①}{\mathrm{Sen}(nW_0 t)}\,dt - \frac{A^2}{2} \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \underset{②}{\frac{\mathrm{sen}(2W_0 t + nW_0 t)}{2}}$$

$$+ \underset{③}{\frac{\mathrm{Sen}(2W_0 t - nW_0 t)}{2}}\,dt$$

Resolviendo ①

$$= 2F_0 \cdot \frac{A^2}{2} \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} Sen(nw_0t)\,dt$$

$u = nw_0t$

$du = nw_0\,dt \rightarrow dt = \frac{du}{nw_0}$

$$= F_0 \cdot A^2 \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \frac{Sen(u)}{nw_0}\,du \rightarrow F_0 \cdot A^2 \cdot \frac{1}{nw_0} \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} Sen(u)\,du$$

$$= F_0 \cdot A^2 \cdot \frac{-Cos(u)}{nw_0} \Rightarrow F_0 \cdot A^2 \left. \frac{-Cos(nw_0t)}{nw_0} \right|_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}}$$

$$= F_0 \cdot A^2 \; \frac{\left(-Cos(nw_0\frac{1}{2F_0}\right)}{nw_0} - \frac{\left(-Cos\left(nw_0\left(-\frac{1}{2F_0}\right)\right)\right)}{nw_0} \rightarrow 0$$

$$① = F_0 \cdot A^2\,(0) = 0$$

Resolviendo ②

$$= 2F_0 \cdot -\frac{A^2}{2} \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \frac{Sen(2w_0t + nw_0t)}{2}\,dt$$

$$= 2F_0 - \frac{A^2}{2}\frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} Sen(2w_0t + nw_0t)\,dt$$

$u = 2w_0t + nw_0t$

$du = 2w_0 + nw_0\,dt \rightarrow dt = \frac{du}{2w_0 + nw_0}$

$$= 2F_0 - \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \frac{Sen(u)\,du}{2w_0 + nw_0}$$

$$= 2F_0 \left[-\frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2w_0 + nw_0} \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} Sen(u)\,du \right.$$

$$= 2F_0 \left[-\frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2w_0 + nw_0} (-cos(u)) \right]$$

$$= 2F_0\left[-\frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2W_0t+nW_0}(-\cos(2W_0t+nW_0t)\right]$$

$$= 2F_0\left[-\frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos(2W_0t+nW_0t}{2W_0t+nW_0}\right]\Bigg|_{\frac{-1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}}$$

$$= 2F_0\left[-\frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-\cos(2W_0\cdot\frac{1}{2F_0}+nW_0\cdot\frac{1}{2F_0}}{2W_0+nW_0}\right)\right.$$

$$-\frac{(-\cos(2W_0\frac{1}{2F_0}+nW_0(\frac{-1}{2F_0}))}{2W_0+nW_0} \rightarrow 0$$

(2) $= 2F_0\left[-\frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(0)\right)$

Resolviendo (3)

$$= 2F_0\cdot\frac{1}{2}\int_{\frac{-1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}}\operatorname{Sen}(2W_0t-nW_0t)\,dt$$

$$= 2F_0\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2W_0t-nW_0}(-\cos(2W_0t+nW_0t))\right]$$

$$= 2F_0\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(2W_0t+nW_0t)}{2W_0t-nW_0t}\right]_{\frac{-1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}}$$

$$= F_0\left[\frac{(-\cos(2W_0\frac{1}{2F_0})+nW_0(\frac{-1}{2F_0})}{2W_0-nW_0} - \frac{(-\cos(2W_0(\frac{1}{2F_0})+nW_0(\frac{-1}{2F_0}))}{2W_0-nW_0}\right.$$

(3) $= F_0\cdot 0 = 0 \longrightarrow b_n = 0 \quad \forall n \in \{1,\ldots,N\}$

Para $n \neq \frac{1}{2F_0}$ $b_n \neq 0$. No obstante para $n=2=a_2$ debemos calcular el límite y aproximar la indeterminación $\frac{0}{0}$.

→ Calculamos a_n:

$$a_n = \frac{2}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} x(t)\cos(nW_0 t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{\frac{1}{2F_0} - \left(-\frac{1}{2F_0}\right)} \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\cos(2\pi 2F_0 t)(\cos(nW_0 t))\,dt$$

$$a_n = 2F_0 \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \frac{A^2}{2}\cos(nW_0 t) - \frac{A^2}{2}\cos(2W_0 t)\cos(nW_0 t)\,dt$$

$$a_n = 2F_0 \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \frac{A^2}{2}\cos(nW_0 t)\,dt - \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \frac{A^2}{2}\cos(2W_0 t)\cos(nW_0 t)\,dt$$

Se sabe que:

$$\cos(\theta)\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(\cos(\theta-\alpha) + \cos(\theta+\alpha))$$

$$\theta = 2W_0 t$$

$$\alpha = nW_0 t$$

$$a_n = 2F_0 \cdot \frac{A^2}{2}\overset{①}{\int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \cos(nW_0 t)\,dt} - \frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\overset{②}{\int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \cos(2W_0 t - nW_0 t)\,dt} + \overset{③}{\int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \cos(2W_0 t - nW_0 t)\,dt}$$

Resolviendo ①

$$= 2F_0 \frac{A^2}{2} \int_{\frac{-1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \cos(nW_0 t)\,dt$$

$u = nW_0 t$

$du = nW_0\,dt \rightarrow dt = \frac{du}{nW_0}$

$$= 2F_0 \frac{A^2}{2} \int_{\frac{-1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \frac{\cos(u)\,du}{nW_0} \rightarrow = 2F_0 \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{nW_0} \int_{\frac{-1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \cos(u)\,du$$

$$= 2F_0 \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{nW_0} \operatorname{Sen}(nW_0 t) \Big|_{\frac{-1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}}$$

$$= 2F_0 \frac{A^2}{2} \left(\frac{\operatorname{Sen}(nW_0 \frac{1}{2F_0})}{nW_0} - \frac{\operatorname{Sen}(nW_0(\frac{-1}{2F_0}))}{nW_0} \right)$$

Como $W_0 = 2\pi F_0$, entonces:

$$= 2F_0 \frac{A^2}{2} \left(\frac{\operatorname{sen}(n\pi 2F_0 \frac{1}{2F_0})}{n 2\pi F_0} - \frac{\operatorname{sen}(n 2\pi F_0 (\frac{-1}{2F_0}))}{n 2\pi F_0} \right)$$

$$= 2F_0 \frac{A^2}{2} \left(\frac{\operatorname{Sen}(n\pi) + \operatorname{Sen}(n\pi)}{n 2\pi F_0} \right)$$

$$= 2F_0 \frac{A^2}{2} \cdot \frac{2\operatorname{Sen}(n\pi)}{n 2\pi F_0} \rightarrow \cancel{2F_0} \frac{A^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{\operatorname{Sen}(n\pi)}{n\pi \cancel{F_0}}$$

$$① = A^2 \cdot \frac{\operatorname{Sen}(n\pi)}{n\pi}$$

Resolviendo ②

$$= 2F_0 \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{\frac{-1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \cos(2W_0 t - nW_0 t)\,dt$$

$u = 2W_0 t - nW_0 t$

$du = 2W_0 - nW_0\,dt$

$dt = \frac{du}{2W_0 - nW_0}$

$$= 2F_0 \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \frac{\cos(u)}{2W_0 - nW_0} du$$

$$= 2F_0 \cdot \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2W_0 - nW_0} \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \cos(u) du$$

$$= 2F_0 \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{2W_0 - nW_0} \cdot \operatorname{Sen}(2W_0 t - nW_0 t) \Big|_{\frac{-1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}}$$

$$= 2F_0 \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2W_0 - nW_0} \cdot \operatorname{Sen}\left(2\pi 2F_0 \cdot \frac{1}{2F_0} - n 2\pi F_0 \frac{1}{2F_0}\right.$$
$$\left. - \left(2\pi 2F_0\left(\frac{-1}{2F_0}\right) - n2\pi F_0\left(\frac{-1}{2F_0}\right)\right)\right)$$

$$= 2F_0 \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{2W_0 - nW_0} \operatorname{Sen}(\cancel{2\pi} - n\pi \cancel{-2\pi} - n\pi)$$

$$= 2F_0 \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi 2F_0 - n2\pi F_0} \operatorname{sen}(-2n\pi)$$

$$= 2\cancel{F_0} \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\cancel{2F_0}(2\pi - n\pi)} \operatorname{Sen}(-2n\pi)$$

(2) $= \dfrac{-A^2 \operatorname{Sen}(2n\pi)}{8\pi - 4n\pi}$

Resolviendo (3)

$$= 2F_0 \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \cos(2W_0 t - nW_0 t) dt$$

$u = 2W_0 t - nW_0 t$

$du = 2W_0 - nW_0 \longrightarrow dt = \dfrac{du}{2W_0 - nW_0}$

$$= 2F_0 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \frac{\cos(u)}{2W_0 - nW_0} du$$

$$= 2F_0 \frac{1}{2} \frac{1}{2W_0 - nW_0} \int_{-\frac{1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}} \cos(u) du$$

$$= 2F_0 \frac{1}{2} \frac{1}{2W_0 - nW_0} \operatorname{Sen}(2W_0 t - nW_0 t) \Big|_{\frac{-1}{2F_0}}^{\frac{1}{2F_0}}$$

$$= 2F_0 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2W_0 - nW_0} \operatorname{Sen}\left(2\pi 2F_0 \frac{1}{2F_0} - n 2\pi F_0 \frac{1}{2F_0}\right) - \left(2\pi 2F_0\left(\frac{-1}{2F_0}\right) - n\pi 2F_0\left(\frac{-1}{2F_0}\right)\right)$$

$$= 2F_0 \frac{1}{2} \frac{1}{2W_0 - nW_0} \operatorname{Sen}(\cancel{2\pi} - n\pi \cancel{-2\pi} - n\pi)$$

$$= 2F_0 \frac{1}{2} \frac{1}{2W_0 - nW_0} \operatorname{Sen}(-2n\pi)$$

$$= 2F_0 \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi 2F_0 - n\pi 2F_0} \operatorname{Sen}(-2n\pi)$$

$$= \cancel{2F_0} \frac{1}{2} \frac{1}{\cancel{2F_0}(2\pi - n\pi)} \operatorname{sen}(-2n\pi)$$

(3) $= \dfrac{-\operatorname{Sen}(2n\pi)}{4\pi - 2n\pi}$

Así, entonces:

$$a_n = A^2 \frac{\operatorname{Sen}(n\pi)}{n\pi} - A^2 \frac{\operatorname{Sen}(2n\pi)}{8\pi - 4n\pi} - \frac{\operatorname{Sen}(2n\pi)}{4\pi - 2n\pi}$$

Para $n \neq \frac{1}{2F_0}$ $b_n = 0$ No obstante para $n = 2 = a_2$ debemos calcular el limite y aproximar la indeterminación $\frac{0}{0}$.

$$a_2 = \lim_{n \to 2} \frac{\frac{d}{dn}(-A^2 \operatorname{sen}(2n\pi))}{\frac{d}{dn}(8\pi - 4n\pi)}$$

$$a_2 = \lim_{n \to 2} \frac{-A^2 2\pi \cos(2n\pi)}{4\pi}$$

$$a_2 = \lim_{n \to 2} -\frac{A^2}{2} \cancelto{1}{\cos(2 \cdot 2\pi)}$$

$$a_2 = \frac{-A^2}{2} \cdot 1 \longrightarrow \frac{-A^2}{2}$$

$$a_{-2} = \lim_{n\to 2} \frac{\frac{d}{dn}\left(-A^2 \cdot sen(2n\pi)\right)}{\frac{d}{dn}(8\pi - 4n\pi)}$$

$$a_{-2} = \lim_{n\to 2} \frac{-A^2 \cdot 2\pi \cos(2n\pi)}{4\pi}$$

$$a_{-2} = \lim_{n\to 2} -\frac{A^2}{2} \overset{-1}{\cancel{\cos(2(-2)\pi)}}$$

$$a_{-2} = -\frac{A^2}{2}(-1) = \frac{A^2}{2} = a_{-2}$$

Se tiene entonces

$$a_n = \begin{cases} 0 & \forall n \setminus \{-2, 2\} \\ -\frac{A^2}{2} & n=2 \\ \frac{A^2}{2} & n=-2 \end{cases}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nW_0t) + b_n \cdot sen(nW_0t)$$

$$= \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\cos(2W_0t)$$

Para el caso de la serie exponencial compleja

$$C_0 = a_0 = \frac{A^2}{2} \quad y \quad C_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

Entonces

$$C_n = \frac{A^2 \cdot \frac{sen(n\pi)}{n\pi} - A^2 \frac{sen(2n\pi)}{8\pi - 4n\pi} - \frac{sen(2n\pi)}{4\pi - 2n\pi} - j0}{2}$$

$$C_n = \begin{cases} j0 & n = \frac{1}{2F_0} \\ A^2 & n=-2 \\ -A^2 & n=2 \\ 0 & \forall n \setminus \{-2, 0, 2\} \end{cases}$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} C_n e^{jnt} \qquad W_0 = 2\pi F_0$$

$$x(t) = C_{\frac{1}{2F_0}} e^{j2W_0t} + C_{-2} e^{-2} + C_{-\frac{1}{2F_0}} e^{-j2W_0t}$$

$$x(t) = 0j\cos(2W_0t) - j\mathrm{Sen}(2W_0t) + \frac{A^2}{2} - 0j(\cos(2W_0t - j\mathrm{sen}(2W_0t))$$

$$x(t) = 0j\mathrm{Sen}(2W_0t) - \frac{A^2}{4}\cos(2W_0t) + \frac{A^2}{2} - 0j\mathrm{Sen}(2W_0t) - \frac{A^2}{4}\cos(2W_0t)$$

$$x(t) = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\cos(2W_0t).$$

Como $W_0 = 2\pi F_0$, tenemos que la forma exponenecial.

$$x(t) = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\cos(2\pi 2F_0t).$$

Pregunta 3

$$Y(w) = F\{y(t)\}$$

$$= F\left\{1 + \frac{m(t)}{Ac} c(t)\right\}$$

$$= \left\{c(t) + \frac{m(t)}{Ac} c(t)\right\}$$

$$Y(w) = F\{c(t)\} + \frac{1}{Ac} F\{m(t)c(t)\}$$

$$Y(w) = C(w) + \frac{1}{Ac} F\{m(t)c(t)\}$$

$$C(w) = F\{c(t)\} = F\{Ac\, Sen(2\pi F_c t)\}$$

$$C(w) = Ac\, F\left\{\frac{e^{j2\pi F_c t} - e^{-j2\pi F_c t}}{2j}\right\}$$

$$C(w) = \frac{Ac}{2j}\left[F\{e^{j2\pi F_c t}\} - F\{e^{-j2\pi F_c t}\}\right]$$

$$F[F^{-1}\{X(w \pm w_0)\}] = F\{x(t)e^{\mp jw_0 t}\}$$

$$F\{x(t \pm t_0)\} = X(w)e^{\pm jw_0 t}$$

$$F\{x(t)e^{\mp jw_0 t}\} = X(w \pm w_0)$$

$$F\{1 \cdot e^{\pm jw_0 t}\}$$

$$F\{\delta(t)\} = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-jwt}\,dt = e^0 = 1$$

$$C(w) = \frac{Ac}{2j}\left[2\pi\delta(w - 2\pi F_c) - 2\pi\delta(w + 2\pi F_c)\right]$$

$$C(w) = \frac{Ac}{2j}\pi\left[\delta(w - 2\pi F_c) - \delta(w + 2\pi F_c)\right]$$

$$F_c >> F_{max}\, m(t)$$

$$m(t)\,c(t) = m(t)\left[A_c \operatorname{Sen}(2\pi F_c(t))\right]$$

$$m(t)\,c(t) = m(t)\,A_c\left[\frac{e^{j2\pi F_c t} - e^{-j2\pi F_c t}}{2j}\right]$$

$$F\left\{\frac{A_c}{2j}\, m(t)\, e^{j2\pi F_c t}\right\} - F\left\{\frac{A_c}{2j}\, m(t)\, e^{-j2\pi F_c t}\right\}$$

$$\frac{A_c}{2j}\left[M(W-2\pi F_c) - M(W+2\pi F_c)\right]$$

$$y(w) = \frac{A_c}{2j}\left[\delta(W-2\pi F_c) - \delta(W+2\pi F_c)\right] + \frac{A_c}{2j}\left[M(W-2\pi F_c) - M(W+2\pi F_c)\right]$$

$$Y(w) = \frac{A_c\pi}{2\cancel{j}}\cdot \cancel{j}\left[\delta(W-2\pi F_c) - \delta(W+2\pi F_c)\right] + \frac{A_c}{2\cancel{j}}\cdot\cancel{j}\left[M(W-2\pi F_c) - M(W+2\pi F_c)\right]$$

$$Y(W) = \frac{A_c}{2}\pi\left[\delta(W-2\pi F_c) - \delta(W+2\pi F_c)\right] + \frac{A_c}{2}\left[M(W-2\pi F_c) - M(W+2\pi F_c)\right]$$

Pregunta 4.

Distorsión total de armónico

La distorsión total de armónicos (THD) mide el nivel de distorsión en una señal respecto a su frecuencia fundamental, causada por armónicos generados por la no linealidad en dispositivos eléctricos. Es clave para evaluar la calidad de energía, especialmente en sistemas con cargas no lineales.

Se calcula:

$$THD = \frac{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + \dots}}{V_1} \times 100$$

Donde:

→ V_1 es el valor RMS de la frecuencia fundamental.

→ $V_2, V_3, \dots$ son los valores RMS de los armónicos

Factor de Potencia (FP)

Es una medida de qué tan eficientemente se está utilizando la energía eléctrica en un circuito. Se define como la relación entre la potencia activa (la potencia que realiza un trabajo útil) y la potencia aparente (la potencia total que fluye hacia la carga). Se puede expresar como:

$$FP = \frac{\text{Potencia activa}}{\text{Potencia aparente}} = \cos\phi$$

El factor de potencia ideal es 1 (o 100%), lo que significa que toda la potencia suministra se está utilizando eficazmente.

Cálculo del THD desde la FFT.

La FFT se utiliza para transformar una señal en el dominio del tiempo a su representación en el dominio de la frecuencia. Esta herramienta es esencial para el análisis de armónicos, ya que descompone la señal en sus componentes de frecuencia

Para hacer este cálculo, usamos los siguientes pasos.

1. Realizar la FFT sobre la señal de voltaje o corriente. Esto descompone la señal en la frecuencia fundamental y sus armónicos.

2. Identificar los valores RMS de la frecuencia fundamental y los armónicos. Estos valores se obtienen directamente a partir del espectro de frecuencias generado por la FFT.

3. Calcular el THD usando la fórmula mencionada antes. La magnitud RMS de los armónicos se puede obtener sumando los cuadrados de los valores RMS de cada armónico y tomando la raíz cuadrada.

Cálculo de la Distorsión del factor de potencia basada en el THD

El FP no solo se ve afectado por el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje (debido a cargas inductivas o capacitivas), sino también por la distorsión armónica en la corriente o el voltaje. La distorsión armónica reduce el factor de potencia total.

El factor de potencia total se descompone en 2 partes.

- Factor de potencia de desplazamiento (FPD): Debido al desfase entre la corriente y el voltaje a la frecuencia fundamental.
- Factor de potencia debido a la distorsión (FPD): Debido a los armónicos:

El FP se calcula:

$$FP_{Total} = FPD \times \frac{1}{\sqrt{1+THD^2}}$$

Paso a paso, sería

1. Determinar el factor de potencia de desplazamiento (FPD)
2. Obtener el valor del THD
3. Realizar el cálculo del FP total.