Taller Raíces de Funciones

David Alejandro Castillo Chíquiza,
Juan Sebastián Ruiz Bulla,
Juan Pablo Ortiz Rubio

23 de agosto de 2021

1 Müller

1.1 Explicación geométrica

El método de Müller aproxima la raíz de la función por la raíz del polinomio de segundo grado que pasa por tres puntos de dicha función. Se toman dos puntos, x_0 y x_1 que horquillen la raíz, y se determina x_2 por un método cualquiera, como por ejemplo bisección o preferentemente régula falsi. La raíz del polinomio que pasa por los tres puntos x_0, x_1 y x_2 se toma como una nueva aproximación a la raíz. Si se escribe este polinomio interpolador como

$$P(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$$

la nueva aproximación a la raíz viene dada por la solución de $P(x_3) = 0$, dada por

$$x_3 - x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se toma el signo que haga la diferencia $x_3 - x_2$ más pequeña en valor absoluto. El procedimiento se repite iterativamente, redenominando $x_3 \to x_2, x_2 \to x_1$ y $x_1 \to x_0$. Los coeficientes a, b y c se determinan de las condiciones $P(x_0) = f(x_0), P(x_1) = f(x_1), P(x_2) = f(x_2)$ que dan como resultado

$$a = \frac{(x_1 - x_2)[f(x_0) - f(x_2)] - (x_0 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

$$b = \frac{(x_0 - x_2)^2[f(x_1) - f(x_2)] - (x_1 - x_2)^2[f(x_0) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

$$c = f(x_2)$$

El método de Müller converge bastante rápidamente. Además, se puede utilizar en el caso de raíces complejas. Para evitar overflows cuando a es muy pequeño,

es conveniente escribir $x_3 - x_2$ como

$$x_3 - x_2 = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

tomando el signo que haga máximo el módulo del denominador. El método de Müller puede tomar como valores de comienzo números complejos, en cuyo caso sirve para obtener raíces complejas.

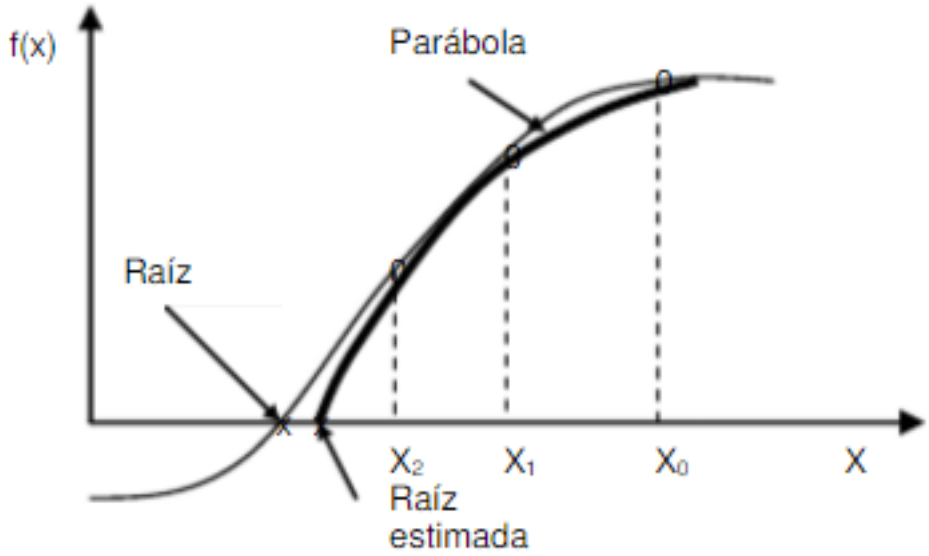

Figura 1.1: Representación gráfica del método de Müller.

2 Preguntas

2.1 ¿Cuáles son condiciones para aplicar el método?

Según el método de Müller, las condiciones para aplicar el mismo son las siguientes:

Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua entre $[a, b]$ y

$$\begin{array}{l} f(a) \leq x \leq f(b) \\ \quad o \qquad\qquad \equiv f(a)f(b) < 0 \\ f(b) \leq x \leq f(a) \end{array} \tag{2.1}$$

existe un punto c, tal que $a \leq c \leq b$, en el cual $f(c) = x$.

2.2 Diagrama de flujo

Se comienza con un llamado al método que como parámetros recibe 4 datos; un x_0, x_1, una función, y el error o tolerancia a comprobar. Se verifica que el intervalo dado sea válido para aplicar el método y se continúa hallando un x_2 por el método de regula falsi. En este punto se entra a un ciclo mientras el valor absoluto de la iteración sea mayor al error o tolerancia antes dado. Dentro del ciclo, se realizan unos pasos previos para hallar la primera aproximación a la raíz de la función. Luego, se procede a aplicar el método de Müller para conocer la primera aproximación a la raíz. Al final, cuando se acaba el ciclo, el algoritmo retorna el valor final de la aproximación a la raíz de la función correspondiente a la última iteración hecha por el método.

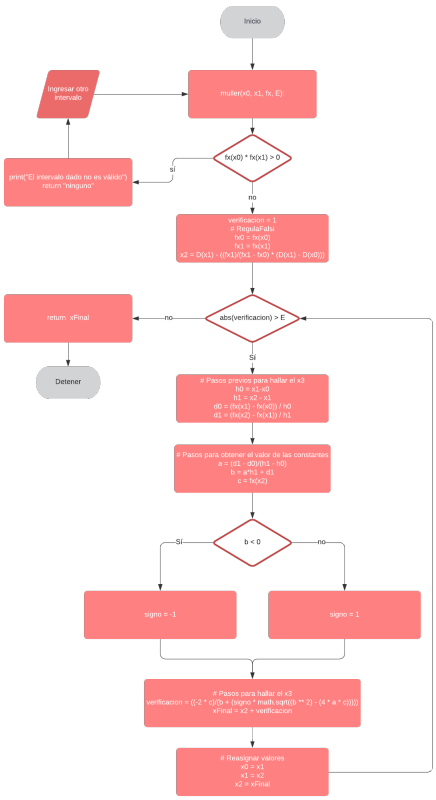

Figura 2.1: Diagrama de flujo método de Müller.

2.3 Comportamiento del método en cuanto: pérdida de significancia, el número de iteraciones, la convergencia, en cada caso.

2.3.1 Significancia

El método parece no tener pérdida de significancia con las tolerancias de 10^{-8} y 10^{-16}. Sin embargo, para 10^{-32} y 10^{-56} los resultados muestran una clara pérdida de significancia y precisión, esto se debe a que los dígitos después de la coma son correctos y acertados comparados con la respuesta de Wolfram hasta la décimo sexta cifra a la derecha de la coma. Esta pérdida de significancia es dada por la máquina, ya que el épsilon que calculamos de la máquina es 10^{-16}. Con esto dicho parece coherente que el método muestre una pérdida de significancia después de la décimo sexta cifra.

2.3.2 Iteraciones

Con el método de Müller se puede observar, a través de la comparación con los demás métodos, que el algoritmo llega a la aproximación de la raíz de la función en menos iteraciones.

2.3.3 Convergencia

Como se muestra en las siguientes imágenes, dada una función cualquiera, el método de Müller converge mucho más rápido en comparación con el método de bisección. Esto conlleva a que el método de Müller encuentre la aproximación a la raíz de la función dada en menos iteraciones que el método de bisección.

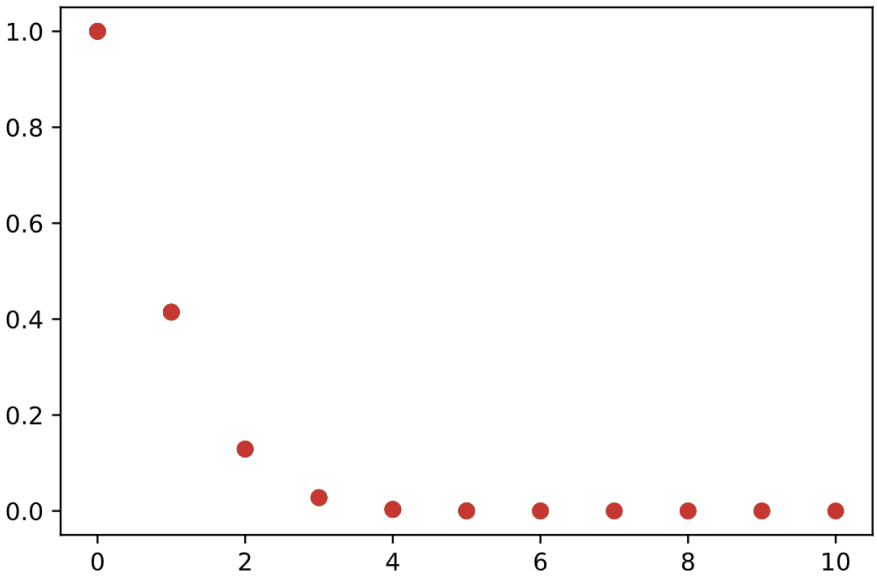

Figura 2.2: Gráfica de convergencia del método de Müller.

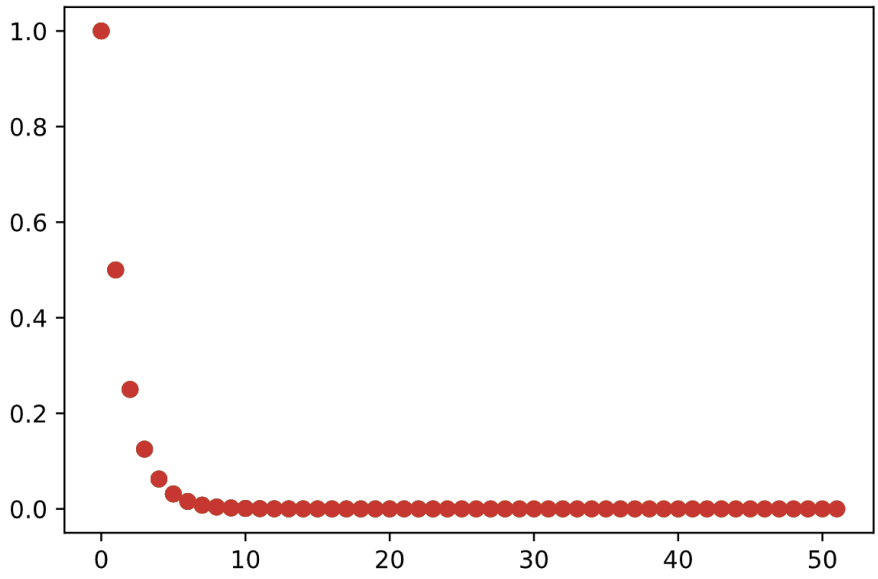

Figura 2.3: Gráfica de convergencia del método de bisección.

2.4 Cómo se puede solucionar el problema de significancia, es remediable o está destinado al fracaso, en los casos que se presente el problema

Para solucionar el problema de la significancia encontramos que podíamos hacer uso de una librería de Python, esta se llama "Decimal". Esta librería se encarga de ajustar la precisión del punto flotante permitiendo definirla en el contexto del inicio del programa, se desarrollaron una serie de funciones para simplificar el proceso de la precisión decimal poniendo 50 decimales más de precisión a lo solicitado en la significancia de cada ejercicio, y también una serie de funciones para imprimir el número con dos decimales más a la cantidad de cifras significativas que se solicitaban todo esto haciendo uso de la librería mencionada anteriormente. Quizás nuestra falta de experiencia y/o práctica con la librería fueron factores críticos para que nuestra solución de la significancia no resultara del todo exitosa, ya que al realizar la comparación con Wolfram el resultado después del 16avo decimal empezaba a diferir. Sin embargo, aparentemente es irremediable el problema de la significancia generado por el épsilon de la máquina.

2.5 Qué pasa con el método cuando hay más de dos raíces, explique su respuesta, encontrar la multiplicidad

En el caso cuando hay más de dos raices, es conveniente escribir $x_3 - x_2$ como

$$x_3 - x_2 = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

tomando el signo que haga máximo el módulo del denominador. El método de Müller en este caso escoge la raíz con la que se tome el signo.
Para determinar la multiplicidad de una función tenemos que tener en cuenta la siguiente definición:

Si una función contínua y derivable m veces tiene en r una raíz, $f(r) = 0$, y $0 = f(r) = f'(r) = f''(r) = \cdot \ldots \cdot = f^{(m-1)}(r)$, pero $f^m(r) \neq 0$, se dice que f tiene una multiplicidad de m en r se dice que f tiene una raíz múltiple en r si la multiplicidad es mayor que uno. La raíz es simple sí la multiplicidad es igual a uno.

2.6 Cómo se comporta el método con respecto al de bisección

Como se puede observar en la siguiente imagen, donde se pone a prueba el método de bisección y el método de Müller para encontrar la aproximación a la raíz de diferentes funciones, se encuentra que el método de Müller halla esta aproximación en menos iteraciones que el método de bisección. Comprobando

así, que el método de Müller converge más rápido y es más eficiente que el método de bisección.

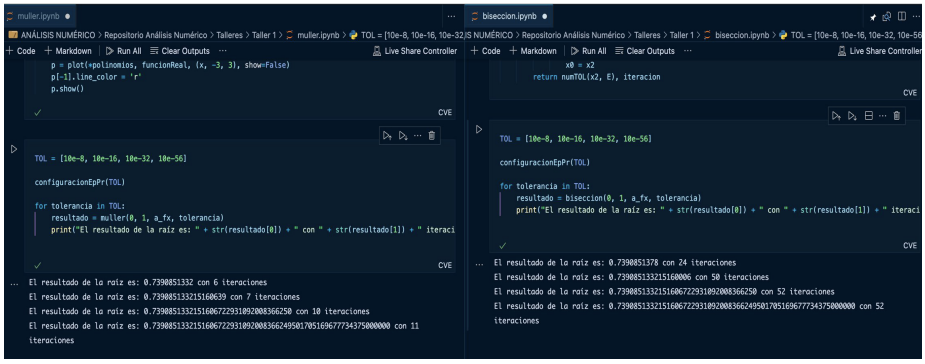

Figura 2.4: Comparación método de Müller contra método de bisección.

3 Resultados

A continuación se presentan los problemas del taller solucionados a través del método de Müller. Además, se verifican estos resultados a través de Wolfram.

a. $f(x) = cos^2(x) - x^2$

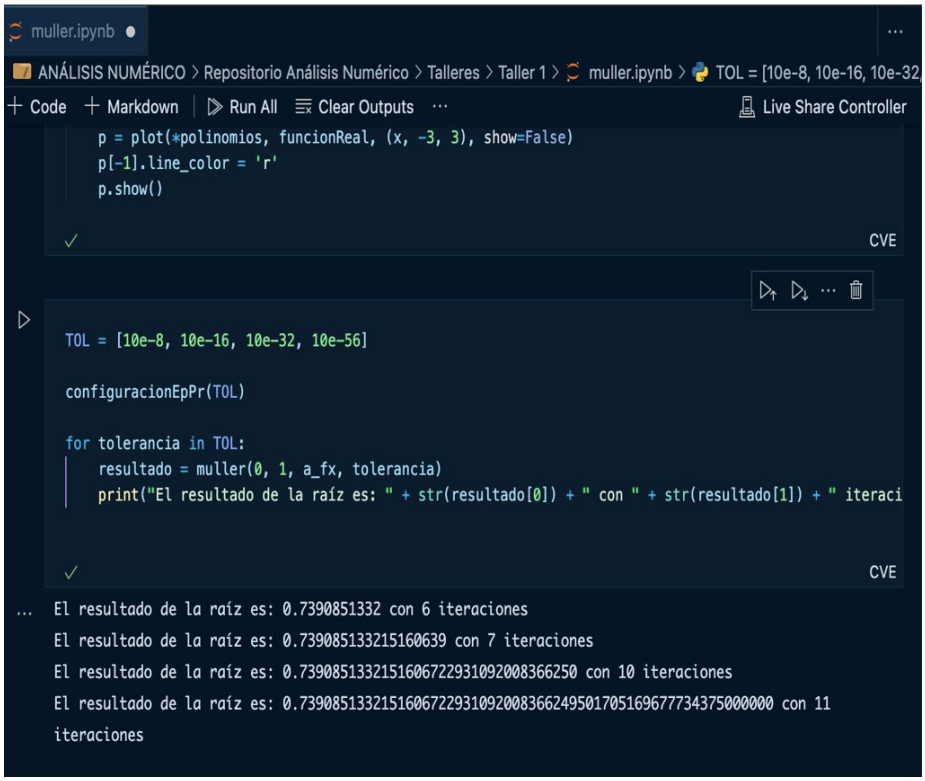

Figura 3.1: Problema 1.

$$x \approx 0.739085133215160641 66$$

$$x \approx -0.739085133215160641 66$$

Figura 3.2: Resultado de Wolfram problema 1.

b. $f(x)=x\sin(x)-1$ en $[-1,2]$

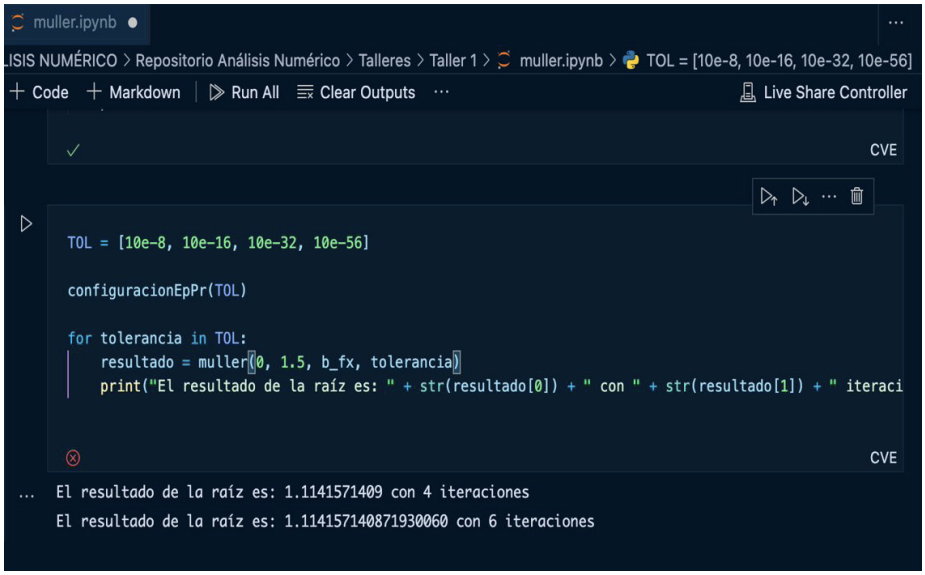

Figura 3.3: Problema 2.

$$x \approx \pm 1.114157140871930\ldots$$

Figura 3.4: Resultado de Wolfram problema 2.

c. $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$

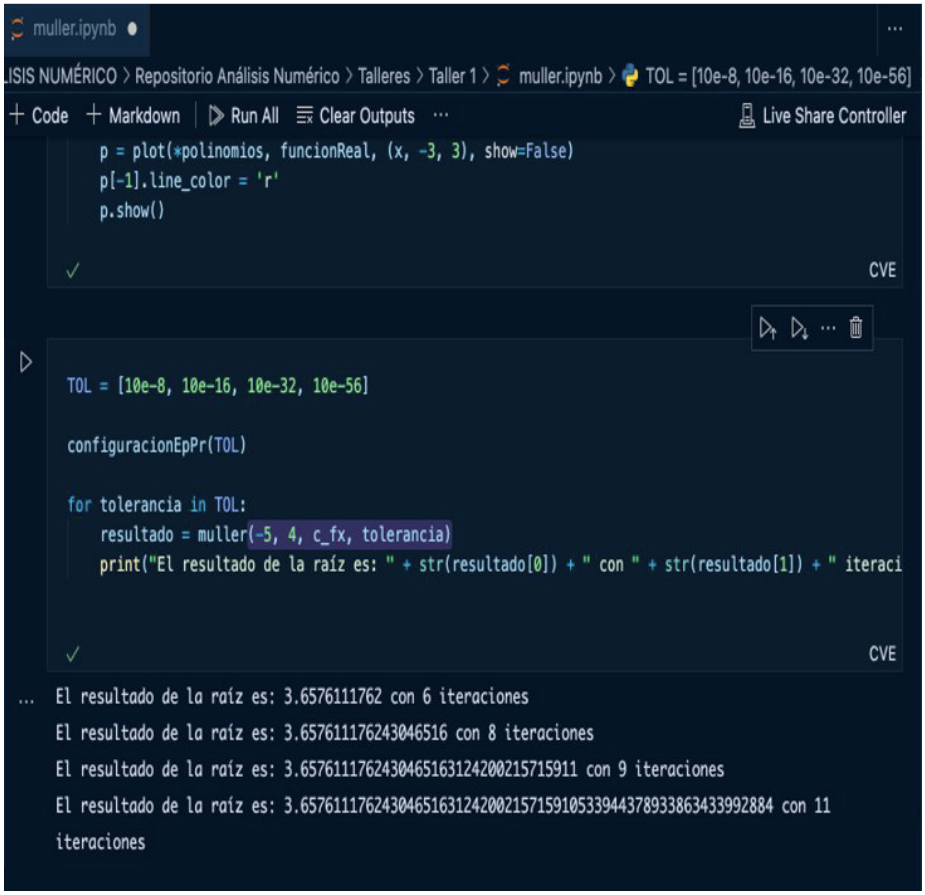

Figura 3.5: Problema 3.

$$x = \frac{2}{3} \approx 0.6666666666666667$$

Figura 3.6: Resultado de Wolfram problema 3.

d. Determinar el coeficiente de arrastre W necesario para que un paracaidista de masa m=68.1 kg tenga una velocidad de 40 m/s después de una caída libre de t=10 s.

muller.ipynb

LISIS NUMÉRICO > Repositorio Análisis Numérico > Talleres > Taller 1 > muller.ipynb > TOL = [10e-8, 10e-16, 10e-32, 10e-56]

+ Code + Markdown | Run All Clear Outputs ··· Live Share Controller

```
    p = plot(*polinomios, funcionReal, (x, -3, 3), show=False)
    p[-1].line_color = 'r'
    p.show()
```

CVE

```
TOL = [10e-8, 10e-16, 10e-32, 10e-56]

configuracionEpPr(TOL)

for tolerancia in TOL:
    resultado = muller(1, 20, d_fx, tolerancia)
    print("El resultado de la raíz es: " + str(resultado[0]) + " con " + str(resultado[1]) + " iteraci
```

CVE

```
El resultado de la raiz es: 14.8011359450 con 7 iteraciones
El resultado de la raiz es: 14.801135944991261727 con 9 iteraciones
El resultado de la raiz es: 14.80113594499126172663794423075396961964594821090022419877 41 con 10 iteraciones
El resultado de la raiz es: 14.80113594499126172663794423075396961964594821090022419877 41 con 11
iteraciones
```

Figura 3.7: Problema 4.

$$x \approx 14.801135944991 3...$$

Figura 3.8: Resultado de Wolfram problema 4.

e. $x^3 - 2x - 5 = 0$. Esta ecuación tiene valor histórico. Fue la ecuación que usó John Wallis para presentar por primera vez el método de Newton a la academia francesa de ciencias en el siglo XV.

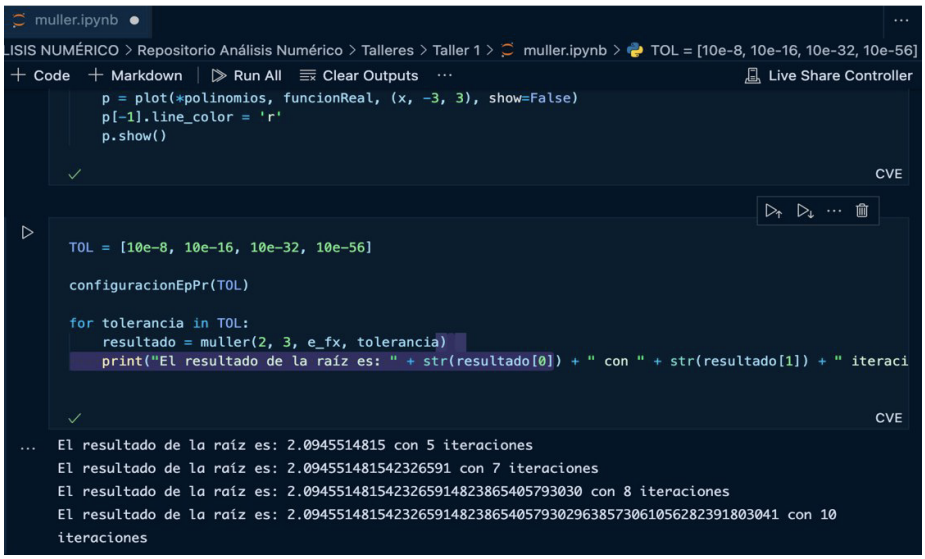

Figura 3.9: Problema 5.

$$x = 2.094551481542414$$

Figura 3.10: Resultado de Wolfram problema 5.