

FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

Si dice funzione a più variabili una funzione del tipo:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Inoltre possiamo definire "scalare" una funzione del tipo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mentre viene definita vettoriale una funzione del tipo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

FUNZIONI A DUE VARIABILI SCALARI

È una funzione del tipo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, chiamo le variabili x, y .

Dominio → In generale, dati $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}^2$, D viene detto dominio.

Segno → Studio dove $f(x, y) > 0$, $= 0$ oppure < 0 . Si tratta quindi di determinare uno di questi sottoinsiemi (spesso è utile rappresentarlo graficamente).

Al fine di definire la continuità di una funzione è necessario definire i concetti di "distanza" e tutti i concetti che ne derivano e quello di "limite":

Distanza in \mathbb{R}^2 → Dati due punti (x, y) e (x_0, y_0) la distanza tra loro è data dalla norma a 2, cioè:

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Intorno (Circolare) → Dato un punto (x_0, y_0) , I viene detto intorno circolare di (x_0, y_0) se:

$$I(x_0, y_0) = \{(x, y) \mid \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\}$$

Interno → Dato un punto $(x_0, y_0) \in A$, tale punto si dice interno ad A se:

$$\exists I(x_0, y_0) \subset A$$

Frontiera (o Bordo) → Un punto (x_0, y_0) si dice appartenere alla frontiera (o bordo) di A , e si scrive $(x_0, y_0) \in \partial A$ se:

$$\forall I(x_0, y_0) \left\{ \begin{array}{l} \exists (x, y) \neq (x_0, y_0) \text{ t.c. } (x, y) \in A \cap I(x_0, y_0) \\ \exists (z, t) \neq (x_0, y_0) \text{ t.c. } (z, t) \in A^c \cap I(x_0, y_0) \end{array} \right.$$

Punto di Accumulazione → Dato un punto (x_0, y_0) , questo si dice punto di accumulazione per A se:

$$\forall I(x_0, y_0) \exists (x, y) \neq (x_0, y_0) \text{ t.c. } (x, y) \in I(x_0, y_0) \cap A$$

Insieme Aperto/Chiuso → A è un insieme aperto se coincide con l'insieme dei suoi punti interni (cioè **A ha tutto il bordo "tratteggiato"**), mentre A è un insieme se $\partial A \subset A$ (cioè **A ha tutto il bordo "continuo"**).

Chiusura di un Insieme → La chiusura di un insieme A è data dall'insieme stesso unito con la sua frontiera, cioè:

$$\overline{A} = A \cup \partial A$$

Inoltre possono anche essere utili altre definizioni secondarie come:

Insieme Limitato → Un insieme A è limitato in \mathbb{R}^2 se:

$$\exists a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall (x, y) \in A : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$$

oppure

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \text{ t.c. } \forall (x, y) \in A : x^2 + y^2 \leq c$$

Insieme non Limitato → Un insieme A è non limitato se:

$$\forall c \exists (x, y) \text{ t.c. } \|(x, y)\| > c$$

Insieme Compatto → Un insieme si dice compatto se è chiuso e limitato.

Insieme Connesso → Un insieme si dice connesso non ai può ricoprire con due insiemi non vuoti, aperti e disgiunti.

LIMITI DI FUNZIONI IN DUE VARIABILI

La principale differenza con i limiti di funzioni in una variabile sta nel fatto che in \mathbb{R} esistono solo due possibili "direzioni" per cui una funzione può tendere ad un punto, mentre in \mathbb{R}^2 le direzioni sono infinite.

DEF: (Per Interni) → Data $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ e dato (x_0, y_0) punto di accumulazione per D dico che

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l \text{ se } \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. se}$$

$$(x, y) \in D, (x, y) \neq (x_0, y_0):$$

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \implies |f(x, y) - l| < \epsilon$$

DEF: (Per Successioni) → Data $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ e dato (x_0, y_0) punto di accumulazione per D dico che

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l \text{ se } \forall (x_n, y_n) \in D \setminus (x_0, y_0), n \in \mathbb{N} \text{ t.c. se:}$$

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) \text{ allora } f(x_n, y_n) \rightarrow l$$

È anche possibile approssiare il problema sotto il punto di vista delle coordinate polari (ρ, Θ) , questo riduce il problema ad un limite ad una variabile in quanto il parametro Θ è libero e dobbiamo verificare solo la tendenza di ρ .

CONTINUITÀ DI FUNZIONI A DUE VARIABILI

DEF: → Data $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ e dato $(x_0, y_0) \in D$ punto di accumulazione per D , si dice che f è continua in (x_0, y_0) se:

$$\exists \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \text{ ed è pari a } f(x_0, y_0).$$

Se la funzione è definita "a tratti" allora la continuità è da verificare nei punti di frontiera comune.

Teorema di Weierstrass → Data $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ con K compatto e f continua in \mathbb{R} allora:

f ha massimo e minimo assoluti in K

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI FUNZIONI A DUE VARIABILI

Superficie Associata → Data $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ definisco la superficie associata ad f come:

$$S_f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} (x, y) \in D \\ z = f(x, y) \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Insiemi di Livello → Data $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ e dato $c \in \mathbb{R}$, chiamo "insieme di livello di f a livello c " l'insieme:

$$U_c := \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\} \subset D$$

OSS:

$$U_c \text{ può essere: } \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \\ \text{insieme di punti isolati} \\ \text{curva} \\ \text{regione bidimensionale} \end{array} \right.$$

DERIVATE PARZIALI

DEF: → Sia (x_0, y_0) un punto interno al dominio di f . si chiama derivata parziale di f rispetto ad x nel punto (x_0, y_0) , la derivata classica di:

$$x \rightarrow f(x, y_0) \text{ in } x = x_0$$

e si indica con $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Ricordando la definizione di derivata classica si ha che:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

OSS: Si possono usare le stesse regole di derivazione classiche considerando l'altra variabile come una costante.

Le derivate parziali si mettono in un vettore chiamato gradiente. Questo, come funzione di x, y è un campo vettoriale:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

Derivate Parziali di Ordine Superiore → Per una funzione a due variabili esistono 4 derivate di secondo ordine, infatti ogni derivata prima può essere derivata rispetto ad x o rispetto ad y :

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Tale matrice viene detta Matrice Essiana.

Teorema di Schwarz → Se f è di classe C^2 , cioè le derivate seconde esistono e sono continue allora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

cioè la matrice essiana è simmetrica.

Differenziabilità → Data $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con A aperto di \mathbb{R}^2 , $\nu \in \mathbb{R}^2$ ($\nu \rightarrow 0$ significa $\|\nu\| \rightarrow 0$), allora f si dice differenziabile se:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + \nu) - f(x, y) - \nabla f(x, y) \cdot \nu}{\|\nu\|} = 0$$

Teorema del Differenziale → Data $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con A aperto di \mathbb{R}^2 se:

$$f \text{ è di classe } C^1 \implies f \text{ è differenziabile.}$$

$$\text{OSS: Se } f \text{ è di classe } C^1 \implies f \text{ differenziabile} \implies f \text{ è di classe } C^0 \implies f \text{ continua.}$$

PIANO TANGENTE

Se una funzione è differenziabile, si può approssimare "bene" con un piano. Si chiama Piano Tangente il piano in \mathbb{R}^3 di equazione:

$$z := f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$$

è della forma $z = ax + by + c$ e il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è il punto di contatto tra il piano e la funzione.

DERIVATA DIREZIONALE

Dato ν un vettore unitario di \mathbb{R}^2 (cioè $||\nu|| = 1$) la derivata direzionale di f in direzione ν nel punto (x_0, y_0) è la derivata classica di:

$$t \rightarrow f((x_0, y_0) + t \cdot \nu)$$

cioè:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + t \cdot \nu) - f(x_0, y_0)}{t}$$

e si indica con $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$.

Teorema \rightarrow Se f è differenziabile, allora:

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \nu$$

ESEMPIO: Data $f(x, y)$ e (x_0, y_0) trovare ν t.c.

$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ sia massima/minima.

Il modo migliore per svolgerlo è trovare il versore del gradiente e e il suo opposto. Quelli saranno i due ν che minimizzeranno/massimizzeranno la derivata direzionale in (x_0, y_0) .

$$\nu_{MAX} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{||\nabla f(x_0, y_0)||}$$

$$\nu_{MIN} = -\frac{\nabla f(x_0, y_0)}{||\nabla f(x_0, y_0)||}$$

MASSIMI E MINIMI (ESTREMI)

Estremi Assoluti

Data $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, (x_0, y_0) si chiama "Punto di Massimo Assoluto (o Globale)" se $f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in D$, mentre si chiama "Punto di Minimo Assoluto (o Globale)" se $f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in D$.

Estremi Relativi

Data $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, (x_0, y_0) si chiama "Punto di Massimo Relativo (o Locale)" se $f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in U(x_0, y_0)$ intorno di (x_0, y_0) , mentre si chiama "Punto di Minimo Relativo (o Locale)" se $f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in U(x_0, y_0)$ intorno di (x_0, y_0) .

Individuazione dei Punti Critici \rightarrow Come nel caso 1D non è sufficiente che $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ affinché (x_0, y_0) sia un massimo/minimo. Devo quindi caratterizzare maggiormente la natura di questi punti.

Condizione Necessaria \rightarrow se $(x_0, y_0) \in D_f$ (dominio della funzione) è un estremo locale/globale \implies

$$\begin{cases} \nabla f(x_0, y_0) = (0, 0) \implies \text{PUNTO CRITICO} \\ \nexists \nabla f(x_0, y_0) \implies \text{PUNTO SINGOLARE} \\ (x_0, y_0) \in \partial D_f \implies \text{PUNTO DI BORDO} \end{cases}$$

DIM: Dato $(x_0, y_0) \in D_f$ (parte interna di D_f) estremo locale/globale, supponiamo che $\exists \nabla f(x_0, y_0)$. Per assurdo supponiamo che sia $\neq (0, 0)$:

$$\begin{aligned} &\implies \text{wlog } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0 \implies \\ &\implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = l \neq 0, \text{ wlog } l > 0 \implies \\ &\implies \text{per } h \text{ piccolo si ha } \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} > 0 \implies \\ &\begin{cases} \text{se prendo } h > 0 \implies f(x_0 + h, y_0) > f(x_0, y_0) \implies \\ \text{se prendo } h < 0 \implies f(x_0 + h, y_0) < f(x_0, y_0) \implies \end{cases} \\ &\implies \text{NO MAX LOCALE} \implies \text{Contraddizione.} \\ &\implies \text{NO MIN LOCALE} \end{aligned}$$

N.B. \rightarrow se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continua su D compatto allora trovo sicuramente max/min assoluti confrontando punti critici/singolari/bordo.

Caratterizzazione dei Punti Critici Nel caso 1D si osserva la derivata seconda per capire la natura dei punti critici. Poiché la derivata seconda in 2D corrisponde alla matrice Hessiana abbiamo bisogno di ulteriori osservazioni:

DEF:(Preliminare) \rightarrow Data M matrice 2×2

diagonalizzabile (ha 2 autovalori reali λ_1, λ_2) si dice:
 (SEMI) DEF. POS. se $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ($\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$)
 (SEMI) DEF. NEG. se $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0$)
 INDEFINITA se $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ (o viceversa) .

Teorema \rightarrow sia $f \in C^2$ definita su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si ha:

Condizione Necessaria $\rightarrow (x_0, y_0)$ è un max (min) locale $\implies D^2 f(x_0, y_0)$ è Semi Definita Negativa (Positiva).

Condizione Sufficiente $\rightarrow (x_0, y_0)$ t.c.
 $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ se $D^2 f(x_0, y_0)$ DEF. NEG. (POS.) $\implies (x_0, y_0)$ è max (min locale); se invece è INDEFINITA $\implies (x_0, y_0)$ è un PUNTO DI SELLA.

N.B.: Negli altri casi devo analizzare le derivate di ordine superiore.

OSS: $\rightarrow D^2 f$ è simmetrica perché $f \in C^2 \implies D^2 f$ è diagonalizzabile.