FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

Si dice funzione a più variabili una funzione del tipo:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Inoltre possiamo definire "scalare" una funzione del tipo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mentre viene definita vettoriale una funzione del tipo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

FUNZIONI A DUE VARIABILI SCALARI

È una funzione del tipo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, chiamo le variabili x, y.

Dominio $\to$ In generale, dati $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}^2$, D viene detto dominio.

Segno $\to$ Studio dove $f : (x, y) > 0, \ = 0$ oppure < 0. Si tratta quindi di determinare uno di questi sottoinsiemi (spesso è utile rappresentarlo graficamente).

Al fine di definire la continuità di una funzione è necessario definire i concetti di "distanza" e tutti i concetti che ne derivano e quello di "limite":

Distanza in $\mathbb{R}^2$ $\to$ Dati due punti (x, y) e (x_0, y_0) la distanza tra loro è data dalla norma a 2, cioè:

$$\mathbf{||(x,y) - (x_0,y_0)|| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$$

Intorno (Circolare) $\to$ Dato un punto (x_0, y_0), I viene detto intorno circolare di (x_0, y_0) se:

$$\mathbf{I(x_0,y_0) = \{(x,y) \mid ||(x-y) - (x_0,y_0)|| < r\}}$$

Interno $\to$ Dato un punto $(x_0, y_0) \in A$, tale punto si dice interno ad A se:

$$\mathbf{\exists I(x_0,y_0) \subset A}$$

Frontiera (o Bordo) $\to$ Un punto (x_0, y_0) si dice appartenere alla frontiera (o bordo) di A, e si scrive $(x_0, y_0) \in \partial A$ se:

$$\forall \mathbf{I(x_0,y_0)} \begin{cases} \exists(x,y) \neq (x_0,y_0) \text{ t.c. } (x,y) \in A \cap I(x_0,y_0) \\ \exists(z,t) \neq (x_0,y_0) \text{ t.c. } (z,t) \in A^c \cap I(x_0,y_0) \end{cases}$$

Punto di Accumulazione $\to$ Dato un punto (x_0, y_0), questo si dice punto di accumulazione per A se:

$$\forall I(x_0,y_0)\ \exists(x.y) \neq (x_0,y_0) \text{ t.c. } (x,y) \in I(x_0,y_0) \cap A$$

Insieme Aperto/Chiuso $\to$ A è un insieme aperto se coincide con l'insieme dei sui punti interni (cioè **A ha tutto il bordo "tratteggiato"**), mentre A è un insieme se $\partial A \subset A$ (cioè **A ha tutto il bordo "continuo"**).

Chiusura di un Insieme $\to$ La chiusura di un insieme A è data dall'insieme stesso unito con la sua frontiera, cioè:

$$\mathbf{\overline{A} = A \cup \partial A}$$

Inoltre possono anche essere utili altre definizioni secondarie come:

Insieme Limitato $\to$ Un insieme A è limitato in $\mathbb{R}^2$ se:

$$\mathbf{\exists a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall(x,y) \in A : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d}$$

oppure

$$\mathbf{\exists c \in \mathbb{R}^+ \text{ t.c. } \forall(x,y) \in A : x^2 + y^2 \leq c}$$

Insieme non Limitato $\to$ Un insieme A è non limitato se:

$$\mathbf{\forall c\ \exists(x,y) \text{ t.c. } ||(x,y)|| > c}$$

Insieme Compatto $\to$ Un insieme si dice compatto se è chiuso e limitato.

Insieme Connesso $\to$ Un insieme si dice connesso non ai può ricoprire con due insiemi non vuoti, aperti e disgiunti.

LIMITI DI FUNZIONI IN DUE VARIABILI

La principale differenza con i limiti di funzioni in una variabile sta nel fatto che in $\mathbb{R}$ esistono solo due possibili "direzioni" per cui una funzione può tendere ad un punto, mentre in $\mathbb{R}^2$ le direzioni sono infinite.

<u>**DEF:**</u> **(Per Intorni)** $\to$ Data $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ e dato (x_0, y_0) punto di accumulazione per D dico che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$ se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. se $(x, y) \in D,\ (x, y) \neq (x_0, y_0)$:

$$\mathbf{||(x,y) - (x_0,y_0)|| < \delta \implies |f(x,y) - l| < \epsilon}$$

<u>**DEF:**</u> **(Per Successioni)** $\to$ Data $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ e dato (x_0, y_0) punto di accumulazione per D dico che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$ se $\forall(x_n, y_n) \in D \setminus (x_0, y_0), n \in \mathbb{N}$ t.c. se:

$$\mathbf{(x_n,y_n) \to (x_0,y_0) \text{ allora } f(x_n,y_n) \to l}$$

È anche possibile approcciare il problema sotto il punto di vista delle coordinate polari (ρ, Θ), questo riduce il problema ad un limite ad una variabile in quanto il parametro Θ è libero è dobbiamo verificare solo la tendenza di ρ.

CONTINUITÀ DI FUNZIONI A DUE VARIABILI

<u>**DEF:**</u> $\to$ Data $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ e dato $(x_0, y_0) \in D$ punto di accumulazione per D, si dice che f è continua in (x_0, y_0) se:

$$\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \mathbf{f(x,y) \text{ ed è pari a } f(x_0,y_0)}.$$

Se la funzione è definita "a tratti" allora la continuità è da verificare nei punti di frontiera comune.

Teorema di Weierstrass $\to$ Data $f : K \to \mathbb{R}$ con K compatto e f continua in $\mathbb{R}$ allora:

f ha massimo e minimo assoluti in K

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI FUNZIONI A DUE VARIABILI

Superficie Associata $\to$ Data $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2$ definisco la superficie associata ad f come:

$$\mathbf{S_f} = \left\{ \mathbf{(x,y,z)} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{l} \mathbf{(x,y) \in D} \\ \mathbf{z = f(x,y)} \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Insiemi di Livello $\to$ Data $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2$ e dato $c \in \mathbb{R}$, chiamo "insieme di livello di f a livello c" l'insieme:

$$\mathbf{U_c := \{(x,y) \in D \mid f(x,y) = c\} \subset D}$$

<u>OSS:</u>

$$U_c \text{ può essere: } \begin{cases} \emptyset \\ \text{insieme di punti isolati} \\ \text{curva} \\ \text{regione bidimensionale} \end{cases}$$

DERIVATE PARZIALI

<u>**DEF:**</u> $\to$ Sia (x_0, y_0) un punto interno al dominio di f. si chiama derivata parziale di f rispetto ad x nel punto (x_0, y_0) , la derivata classica di:

$$x \to f(x, y_0) \text{ in } x = x_0$$

e si indica con $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Ricordando la definizione di derivata classica si ha che:

$$\mathbf{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \mathbf{\frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}}$$

<u>OSS:</u> Si possono usare le stesse regole di derivazione classiche considerando l'altra variabile come una costante.

DERIVATA DIREZIONALE

<u>**DEF:**</u> $\to$ Dato $\overrightarrow{\nu}$ un vettore unitario di $\mathbb{R}^2$ (cioè $||\overrightarrow{\nu}|| = 1$) la derivata direzionale di f in direzione $\overrightarrow{\nu}$ nel punto (x_0, y_0) è la derivata classica di:

$$t \to f((x_0, y_0) + t \cdot \overrightarrow{\nu})$$

cioè:

$$\lim_{f\to 0} \mathbf{\frac{f((x_0,y_0) + h \cdot \overrightarrow{\nu}) - f(x_0,y_0)}{h}}$$

e si indica con $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$.