FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

Si dice funzione a più variabili una funzione del tipo:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Inoltre possiamo definire "scalare" una funzione del tipo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mentre viene definita vettoriale una funzione del tipo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

FUNZIONI A DUE VARIABILI SCALARI

È una funzione del tipo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, chiamo le variabili x, y.

Dominio $\to$ In generale, dati $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}^2$, D viene detto dominio.

Segno $\to$ Studio dove $f : (x, y) > 0$, $= 0$ oppure < 0. Si tratta quindi di determinare uno di questi sottoinsiemi (spesso è utile rappresentarlo graficamente).

Al fine di definire la continuità di una funzione è necessario definire i concetti di "distanza" e tutti i concetti che ne derivano e quello di "limite":

Distanza in $\mathbb{R}^2$ $\to$ Dati due punti (x, y) e (x_0, y_0) la distanza tra loro è data dalla norma a 2, cioè:

$$\mathbf{||(x, y) - (x_0, y_0)|| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

Intorno (Circolare) $\to$ Dato un punto (x_0, y_0), I viene detto intorno circolare di (x_0, y_0) se:

$$\mathbf{I(x_0, y_0) = \{(x, y) \mid ||(x - y) - (x_0, y_0)|| < r\}}$$

Interno $\to$ Dato un punto $(x_0, y_0) \in A$, tale punto si dice interno ad A se:

$$\mathbf{\exists I(x_0, y_0) \subset A}$$

Frontiera (o Bordo) $\to$ Un punto (x_0, y_0) si dice appartenere alla frontiera (o bordo) di A, e si scrive $(x_0, y_0) \in \partial A$ se:

$$\forall \mathbf{I(x_0, y_0)} \begin{cases} \exists (x, y) \neq (x_0, y_0) \text{ t.c. } (x, y) \in A \cap I(x_0, y_0) \\ \exists (z, t) \neq (x_0, y_0) \text{ t.c. } (z, t) \in A^c \cap I(x_0, y_0) \end{cases}$$

Punto di Accumulazione $\to$ Dato un punto (x_0, y_0), questo si dice punto di accumulazione per A se:

$$\forall I(x_0, y_0)\ \exists (x.y) \neq (x_0, y_0) \text{ t.c. } (x, y) \in I(x_0, y_0) \cap A$$

Insieme Aperto/Chiuso $\to$ A è un insieme aperto se coincide con l'insieme dei sui punti interni (cioè **A ha tutto il bordo "tratteggiato"**), mentre A è un insieme se $\partial A \subset A$ (cioè **A ha tutto il bordo "continuo"**).

Chiusura di un Insieme $\to$ La chiusura di un insieme A è data dall'insieme stesso unito con la sua frontiera, cioè:

$$\mathbf{\overline{A} = A \cup \partial A}$$

Inoltre possono anche essere utili altre definizioni secondarie come:

Insieme Limitato $\to$ Un insieme A è limitato in $\mathbb{R}^2$ se:

$$\mathbf{\exists a, b, c, d} \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \mathbf{\forall (x, y) \in A : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d}$$

oppure

$$\mathbf{\exists c} \in \mathbb{R}^+ \text{ t.c. } \mathbf{\forall (x, y) \in A : x^2 + y^2 \leq c}$$

Insieme non Limitato $\to$ Un insieme A è non limitato se:

$$\mathbf{\forall c\ \exists (x, y)} \text{ t.c. } \mathbf{||(x, y)|| > c}$$

Insieme Compatto $\to$ Un insieme si dice compatto se è chiuso e limitato.

Insieme Connesso $\to$ Un insieme si dice connesso non ai può ricoprire con due insiemi non vuoti, aperti e disgiunti.

LIMITI DI FUNZIONI IN DUE VARIABILI

La principale differenza con i limiti di funzioni in una variabile sta nel fatto che in $\mathbb{R}$ esistono solo due possibili "direzioni" per cui una funzione può tendere ad un punto, mentre in $\mathbb{R}^2$ le direzioni sono infinite.

DEF: (Per Intorni) $\to$ Data $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ e dato (x_0, y_0) punto di accumulazione per D dico che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$ se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. se $(x, y) \in D,\ (x, y) \neq (x_0, y_0)$:

$$\mathbf{||(x, y) - (x_0, y_0)|| < \delta \implies |f(x, y) - l| < \epsilon}$$

DEF: (Per Successioni) $\to$ Data $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ e dato (x_0, y_0) punto di accumulazione per D dico che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$ se $\forall (x_n, y_n) \in D \setminus (x_0, y_0), n \in \mathbb{N}$ t.c. se:

$$\mathbf{(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)} \text{ allora } \mathbf{f(x_n, y_n) \to l}$$

È anche possibile approcciare il problema sotto il punto di vista delle coordinate polari (ρ, Θ), questo riduce il problema ad un limite ad una variabile in quanto il parametro Θ è libero è dobbiamo verificare solo la tendenza di ρ.

CONTINUITÀ DI FUNZIONI A DUE VARIABILI

DEF: $\to$ Data $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ e dato $(x_0, y_0) \in D$ punto di accumulazione per D, si dice che f è continua in (x_0, y_0) se:

$$\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \mathbf{f(x, y)} \textbf{ ed è pari a } \mathbf{f(x_0, y_0)}.$$

Se la funzione è definita "a tratti" allora la continuità è da verificare nei punti di frontiera comune.

Teorema di Weierstrass $\to$ Data $f : K \to \mathbb{R}$ con K compatto e f continua in $\mathbb{R}$ allora:

f ha massimo e minimo assoluti in K

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI FUNZIONI A DUE VARIABILI

Superficie Associata $\to$ Data $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2$ definisco la superficie associata ad f come:

$$\mathbf{S_f} = \left\{ \mathbf{(x, y, z)} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{l} \mathbf{(x, y) \in D} \\ \mathbf{z = f(x, y)} \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Insiemi di Livello $\to$ Data $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2$ e dato $c \in \mathbb{R}$, chiamo "insieme di livello di f a livello c" l'insieme:

$$\mathbf{U_c := \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\} \subset D}$$

<u>OSS:</u>

$$U_c \text{ può essere: } \begin{cases} \emptyset \\ \text{insieme di punti isolati} \\ \text{curva} \\ \text{regione bidimensionale} \end{cases}$$

DERIVATE PARZIALI

DEF: $\to$ Sia (x_0, y_0) un punto interno al dominio di f. si chiama derivata parziale di f rispetto ad x nel punto (x_0, y_0) , la derivata classica di:

$$x \to f(x, y_0) \text{ in } x = x_0$$

e si indica con $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Ricordando la definizione di derivata classica si ha che:

$$\mathbf{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \lim_{h\to 0} \mathbf{\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

OSS: Si possono usare le stesse regole di derivazione classiche considerando l'altra variabile come una costante.

Le derivate parziali si mettono in un vettore chiamato gradiente. Questo, come funzione di x, y è un campo vettoriale:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$$

Derivate Parziali di Ordine Superiore $\to$ Per una funzione a due variabili esistono 4 derivate di secondo ordine, infatti ogni derivata prima può essere derivata rispetto ad x o rispetto ad y:

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix}$$

Tale matrice viene detta Matrice Essiana.

Teorema di Schwarz $\to$ Se f è di classe C^2, cioè le derivate seconde esistono e sono continue allora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

cioè la matrice essiana è simmetrica.

Differenziabilità $\to$ Data $f : A \to \mathbb{R}$ con A aperto di $\mathbb{R}^2$, $\nu \in \mathbb{R}^2$ ($\nu \to 0$ significa $||\nu|| \to 0$), allora f si dice differenziabile se:

$$\lim_{\nu\to\underline{0}} \frac{f((x,y)+\nu) - f(x,y) - \nabla f(x,y) \cdot \nu}{||\nu||} = 0$$

Teorema del Differenziale $\to$ Data $f : A \to \mathbb{R}$ con A aperto di $\mathbb{R}^2$ se:

$$f \text{ è di classe } C^1 \implies f \text{ è differenziabile.}$$

OSS: Se f è di classe $C^1 \implies f$ differenziabile $\implies$ f è di classe $C^0 \implies f$ continua.

PIANO TANGENTE

Se una funzione è differenziabile, si può approssimare "bene" con un piano. Si chiama Piano Tangente il piano in $\mathbb{R}^3$ di equazione:

$$z := f(x_0, y_0) + \nabla f(x_o, y_0) \bullet (x - x_0, y - y_0)$$

è della forma $z = ax + by + c$ e il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è il punto di contatto tra il piano e la funzione.

DERIVATA DIREZIONALE

Dato ν un vettore unitario di $\mathbb{R}^2$ (cioè $||\nu|| = 1$) la derivata direzionale di f in direzione ν nel punto (x_0, y_0) è la derivata classica di:

$$t \to f((x_0, y_0) + t \cdot \nu)$$

cioè:

$$\lim_{f \to 0} \frac{\mathbf{f((x_0,y_0)+h \cdot \nu)-f(x_0,y_0)}}{\mathbf{h}}$$

e si indica con $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$.

Teorema $\to$ Se f è differenziabile, allora:

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x, y) = \nabla f(x, y) \bullet \nu$$

<u>ESEMPIO</u>: Data $f(x, y)$ e (x_0, y_0) trovare ν t.c. $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ sia massima/minima.

Il modo migliore per svolgerlo è trovare il versore del gradiente e e il suo opposto. Quelli saranno i due ν che minimizzeranno/massimizzeranno la derivata direzionale in (x_0, y_0).

$$\nu_{MAX} = \frac{\nabla f(x_0,y_0)}{||f(x_0,y_0)||}$$

$$\nu_{MIN} = -\frac{\nabla f(x_0,y_0)}{||f(x_0,y_0)||}$$
