FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

Si dice funzione a più variabili una funzione del tipo:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Inoltre possiamo definire "scalare" una funzione del tipo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mentre viene definita vettoriale una funzione del tipo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

FUNZIONI A DUE VARIABILI SCALARI

È una funzione del tipo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, chiamo le variabili x, y.

Dominio $\to$ In generale, dati $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}^2$, D viene detto dominio.

Segno $\to$ Studio dove $f : (x, y) > 0$, $= 0$ oppure < 0. Si tratta quindi di determinare uno di questi sottoinsiemi (spesso è utile rappresentarlo graficamente).

Al fine di definire la continuità di una funzione è necessario definire i concetti di "distanza" e tutti i concetti che ne derivano e quello di "limite":

Distanza in $\mathbb{R}^2$ $\to$ Dati due punti (x, y) e (x_0, y_0) la distanza tra loro è data dalla norma a 2, cioè:

$$\mathbf{||(x,y) - (x_0,y_0)|| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$$

Intorno (Circolare) $\to$ Dato un punto (x_0, y_0), I viene detto intorno circolare di (x_0, y_0) se:

$$\mathbf{I(x_0,y_0) = \{(x,y) \mid ||(x-y) - (x_0,y_0)|| < r\}}$$

Interno $\to$ Dato un punto $(x_0, y_0) \in A$, tale punto si dice interno ad A se:

$$\mathbf{\exists I(x_0,y_0) \subset A}$$

Frontiera (o Bordo) $\to$ Un punto (x_0, y_0) si dice appartenere alla frontiera (o bordo) di A, e si scrive $(x_0, y_0) \in \partial A$ se:

$$\forall \mathbf{I(x_0,y_0)} \begin{cases} \exists (x,y) \neq (x_0,y_0) \text{ t.c. } (x,y) \in A \cap I(x_0,y_0) \\ \exists (z,t) \neq (x_0,y_0) \text{ t.c. } (z,t) \in A^c \cap I(x_0,y_0) \end{cases}$$

Punto di Accumulazione $\to$ Dato un punto (x_0, y_0), questo si dice punto di accumulazione per A se:

$$\forall I(x_0,y_0)\ \exists (x.y) \neq (x_0,y_0) \text{ t.c. } (x,y) \in I(x_0,y_0) \cap A$$

Insieme Aperto/Chiuso $\to$ A è un insieme aperto se coincide con l'insieme dei sui punti interni (cioè **A ha tutto il bordo "tratteggiato"**), mentre A è un insieme se $\partial A \subset A$ (cioè **A ha tutto il bordo "continuo"**).

Chiusura di un Insieme $\to$ La chiusura di un insieme A è data dall'insieme stesso unito con la sua frontiera, cioè:

$$\mathbf{\overline{A} = A \cup \partial A}$$

Inoltre possono anche essere utili altre definizioni secondarie come:

Insieme Limitato $\to$ Un insieme A è limitato in $\mathbb{R}^2$ se:

$$\mathbf{\exists a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall (x,y) \in A : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d}$$

oppure

$$\mathbf{\exists c \in \mathbb{R}^+ \text{ t.c. } \forall (x,y) \in A : x^2 + y^2 \leq c}$$

Insieme non Limitato $\to$ Un insieme A è non limitato se:

$$\mathbf{\forall c\ \exists (x,y) \text{ t.c. } ||(x,y)|| > c}$$

Insieme Compatto $\to$ Un insieme si dice compatto se è chiuso e limitato.

Insieme Connesso $\to$ Un insieme si dice connesso non ai può ricoprire con due insiemi non vuoti, aperti e disgiunti.

LIMITI DI FUNZIONI IN DUE VARIABILI

La principale differenza con i limiti di funzioni in una variabile sta nel fatto che in $\mathbb{R}$ esistono solo due possibili "direzioni" per cui una funzione può tendere ad un punto, mentre in $\mathbb{R}^2$ le direzioni sono infinite.

<u>**DEF:**</u> **(Per Intorni)** $\to$ Data $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ e dato (x_0, y_0) punto di accumulazione per D dico che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$ se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. se $(x, y) \in D$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$:

$$\mathbf{||(x,y) - (x_0,y_0)|| < \delta \implies |f(x,y) - l| < \epsilon}$$

<u>**DEF:**</u> **(Per Successioni)** $\to$ Data $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ e dato (x_0, y_0) punto di accumulazione per D dico che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$ se $\forall (x_n, y_n) \in D \setminus (x_0, y_0), n \in \mathbb{N}$ t.c. se:

$$\mathbf{(x_n,y_n) \to (x_0,y_0) \text{ allora } f(x_n,y_n) \to l}$$

È anche possibile approcciare il problema sotto il punto di vista delle coordinate polari (ρ, Θ), questo riduce il problema ad un limite ad una variabile in quanto il parametro Θ è libero è dobbiamo verificare solo la tendenza di ρ.

CONTINUITÀ DI FUNZIONI A DUE VARIABILI

<u>**DEF:**</u> $\to$ Data $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ e dato $(x_0, y_0) \in D$ punto di accumulazione per D, si dice che f è continua in (x_0, y_0) se:

$$\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \mathbf{f(x,y) \text{ ed è pari a } f(x_0,y_0)}.$$

Se la funzione è definita "a tratti" allora la continuità è da verificare nei punti di frontiera comune.

Teorema di Weierstrass $\to$ Data $f : K \to \mathbb{R}$ con K compatto e f continua in $\mathbb{R}$ allora:

f ha massimo e minimo assoluti in K

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI FUNZIONI A DUE VARIABILI

Superficie Associata $\to$ Data $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ definisco la superficie associata ad f come:

$$\mathbf{S_f} = \left\{ \mathbf{(x,y,z)} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{l} \mathbf{(x,y) \in D} \\ \mathbf{z = f(x,y)} \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Insiemi di Livello $\to$ Data $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ e dato $c \in \mathbb{R}$, chiamo "insieme di livello di f a livello c" l'insieme:

$$\mathbf{U_c := \{(x,y) \in D | f(x,y) = c\} \subset D}$$

<u>OSS:</u>

$$U_c \text{ può essere: } \begin{cases} \emptyset \\ \text{insieme di punti isolati} \\ \text{curva} \\ \text{regione bidimensionale} \end{cases}$$

DERIVATE PARZIALI

<u>**DEF:**</u> $\to$ Sia (x_0, y_0) un punto interno al dominio di f. si chiama derivata parziale di f rispetto ad x nel punto (x_0, y_0) , la derivata classica di:

$$x \to f(x, y_0) \text{ in } x = x_0$$

e si indica con $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Ricordando la definizione di derivata classica si ha che:

$$\mathbf{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \mathbf{\frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}}$$

<u>**OSS:**</u> Si possono usare le stesse regole di derivazione classiche considerando l'altra variabile come una costante.

Le derivate parziali si mettono in un vettore chiamato gradiente. Questo, come funzione di x, y è un campo vettoriale:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$$

Derivate Parziali di Ordine Superiore $\to$ Per una funzione a due variabili esistono 4 derivate di secondo ordine, infatti ogni derivata prima può essere derivata rispetto ad x o rispetto ad y:

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix}$$

Tale matrice viene detta Matrice Essiana.

Teorema di Schwarz $\to$ Se f è di classe C^2, cioè le derivate seconde esistono e sono continue allora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

cioè la matrice essiana è simmetrica.

Differenziabilità $\to$ Data $f : A \to \mathbb{R}$ con A aperto di $\mathbb{R}^2$, $\nu \in \mathbb{R}^2$ ($\nu \to 0$ significa $||\nu|| \to 0$), allora f si dice differenziabile se:

$$\lim_{\nu \to 0} \frac{f((x,y)+\nu) - f(x,y) - \nabla f(x,y) \cdot \nu}{||\nu||} = 0$$

Teorema del Differenziale $\to$ Data $f : A \to \mathbb{R}$ con A aperto di $\mathbb{R}^2$ se:

$$f \text{ è di classe } C^1 \implies f \text{ è differenziabile.}$$

<u>**OSS:**</u> Se f è di classe $C^1 \implies f$ differenziabile $\implies f$ è di classe $C^0 \implies f$ continua.

PIANO TANGENTE

Se una funzione è differenziabile, si può approssimare "bene" con un piano. Si chiama Piano Tangente il piano in $\mathbb{R}^3$ di equazione:

$$z := f(x_0, y_0) + \nabla f(x_o, y_0) \bullet (x - x_0, y - y_0)$$

è della forma $z = ax + by + c$ e il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è il punto di contatto tra il piano e la funzione.

DERIVATA DIREZIONALE

Dato ν un vettore unitario di $\mathbb{R}^2$ (cioè $||\nu|| = 1$) la derivata direzionale di f in direzione ν nel punto (x_0, y_0) è la derivata classica di:

$$t \to f((x_0, y_0) + t \cdot \nu)$$

cioè:

$$\lim_{f\to 0} \mathbf{\frac{f((x_0,y_0) + h \cdot \nu) - f(x_0,y_0)}{h}}$$

e si indica con $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$.

Teorema $\to$ Se f è differenziabile, allora:

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x, y) = \nabla f(x, y) \bullet \nu$$

<u>**ESEMPIO:**</u> Data $f(x, y)$ e (x_0, y_0) trovare ν t.c. $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ sia massima/minima.

Il modo migliore per svolgerlo è trovare il versore del gradiente e e il suo opposto. Quelli saranno i due ν che minimizzeranno/massimizzeranno la derivata direzionale in (x_0, y_0).

$$\nu_{MAX} = \frac{\nabla f(x_0,y_0)}{||f(x_0,y_0)||}$$

$$\nu_{MIN} = -\frac{\nabla f(x_0,y_0)}{||f(x_0,y_0)||}$$

MASSIMI E MINIMI (ESTREMI)

Estremi Assoluti

Data $f : D \to \mathbb{R}, (x_0, y_0)$ si chiama "Punto di Massimo Assoluto (o Globale)" se $f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in D$, mentre si chiama "Punto di Minimo Assoluto (o Globale)" se $f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in D$.

Estremi Relativi

Data $f : D \to \mathbb{R}, (x_0, y_0)$ si chiama "Punto di Massimo Relativo (o Locale)" se $f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall(x, y) \in U(x_0, y_0)$ intorno di (x_0, y_0), mentre si chiama "Punto di Minimo Relativo (o Locale)" se $f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall(x, y) \in U(x_0, y_0)$ intorno di (x_0, y_0).

Individuazione dei Punti Critici $\to$ Come nel caso 1D non è sufficiente che $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ affinché (x_0, y_0) sia un massimo/minimo. Devo quindi caratterizzare maggiormente la natura di questi punti.

Condizione Necessaria $\to$ se $(x_0, y_0) \in D_f$ (dominio della funzione) è un estremo locale/globale

$$\implies \begin{cases} \nabla f(x_0, y_0) = (0, 0) \implies \text{PUNTO CRITICO} \\ \nexists \nabla f(x_0, y_0) \implies \text{PUNTO SINGOLARE} \\ (x_0, y_0) \in \partial D_f \implies \text{PUNTO DI BORDO} \end{cases}$$

__DIM:__ Dato $(x_0, y_0) \in D_f$ (parte interna di D_f) estremo locale/globale, supponiamo che $\exists \nabla f(x_0, y_0)$. Per assurdo supponiamo che sia $\neq (0, 0)$:

$$\implies \underline{\text{wlog}}\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0 \implies$$

$$\implies \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = l \neq 0,\ \underline{\text{wlog}}\ l > 0 \implies$$

$$\implies \text{per } h \text{ piccolo si ha } \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} > 0 \implies$$

$$\begin{cases} \text{se prendo } h > 0 \implies f(x_0 + h, y_0) > f(x_0, y_0) \implies \\ \text{se prendo } h < 0 \implies f(x_0 + h, y_0) < f(x_0, y_0) \implies \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \implies \text{NO MAX LOCALE} \\ \implies \text{NO MIN LOCALE} \end{matrix} \implies \underline{\text{Contraddizione}}.$$

N.B. $\to$ se $f : D \to \mathbb{R}$ continua su D compatto allora trovo sicuramente max/min assoluti confrontando punti critici/singolari/bordo.

Caratterizzazione dei Punti Critici Nel caso 1D si osserva la derivata seconda per capire la natura dei punti critici. Poiché la derivata seconda in 2D corrisponde alla matrice essiana abbiamo bisogno di ulteriori osservazioni:

__DEF:__**(Preliminare)** $\to$ Data M matrice 2×2 diagonalizzabile (ha 2 autovalori reali λ_1, λ_2) si dice:

(SEMI) DEF. POS. se $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ($\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$)
(SEMI) DEF. NEG. se $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0$)
INDEFINITA se$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ (o viceversa) .

Teorema $\to$ sia $f \in C^2$ definita su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si ha:

Condizione Necessaria $\to$ (x_0, y_0) è un max (min) locale $\implies D^2 f(x_0, y_0)$ è Semi Definita Negativa (Positiva).

Condizione Sufficiente $\to$ (x_0, y_0) t.c. $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ se $D^2 f(x_0, y_0)$ DEF. NEG. (POS.) $\implies (x_0, y_0)$ è max (min locale); se invece è INDEFINITA $\implies (x_0, y_0)$ è un PUNTO DI SELLA.
__N.B.__: Negli altri casi devo analizzare le derivate di ordine superiore.

__OSS:__ $\to D^2 f$ è simmetrica perché $f \in C^2 \implies D^2 f$ è diagonalizzabile.

Teorema di Weierstrass $\to$ Data f continua definita su A compatto $\implies$

$$\exists \max_A f, \exists \min_A f.$$

__OSS:__ $\to A$ è limitato e chiuso perché $\partial A \subset A$.
I punti di max / min vanno cercati tra:

$$\begin{cases} \text{Punti Critici Interni } \to \text{non ci sono} \\ \nexists \nabla f \to \text{non ci sono} \\ \partial A \to \underline{\text{ci sono}} \end{cases}$$

SVILUPPI DI TAYLOR

Data una funzione f differenziabile in $(x_0, y_0) \in D$ aperto di $\mathbb{R}^2$ allora lo sviluppo di Taylor sono:

Grado 1 :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) + \underbrace{+(||(x - x_0, y - y_0)||)}_{\text{Resto}};$$

$$f(x + h, y + k) = $$
$$= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k) + \underbrace{o(\sqrt{h^2 + k^2})}_{\text{Resto}}$$

Grado 2 :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) + $$
$$+ \frac{1}{2}\left[D^2 f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} +$$
$$\underbrace{+(||(x - x_0, y - y_0)||^2)}_{\text{Resto}}$$

__OSS:__ (Sviluppo di Taylor vicino ad un punto critico)
Dato (x_0, y_0) punto critico, f vicino a (x_0, y_0) è della forma $f(x_0 + h, y_0 + k)$ con h, k piccoli. Supponiamo inoltre che $D^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ diagonale, allora, poiché il vettore delle derivate parziali è $(0, 0)$(dalla definizione di punto critico):

$$\begin{cases} se\lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (x_0, y_0) \text{ è un MIN. LOC.} \\ se\lambda_1, \lambda_2 < 0 \implies (x_0, y_0) \text{ è un MAX. LOC.} \\ se\lambda_1 < (>)0, \lambda_2 > (<)0 \implies (x_0, y_0) \text{ è un punto di SELLA} \end{cases}$$

FUNZIONI SCALARI IN n VARIABILI

Prendo una funzione del tipo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ allora:

Dominio $\to D := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n | f(\underline{x}) \in \mathbb{R}\}$;

Intorni $\to \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n |\ ||\underline{x} - \underline{x_0}|| < r\}$ è l'intorno sferico di $\underline{x_0}$;

Continuità $\to \quad \underline{n}^{(n)} \to \underline{x_0} \implies |f(\underline{n}^{(n)}) - f(\underline{x_0})| \to 0?$;

Gradiente $\to \nabla f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x})\right)$ vettore di $\mathbb{R}^n$;

Matrice Essiana $\to D^2 f(\underline{x}) =$ matr. $n \times, n$,
$(D^2 f)_{ij}(\underline{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_i}(\underline{x})$ (se $f \in C^2 \implies D^2$è simmetrica);

Taylor $\to$ continua a valere.

FUNZIONI VETTORIALI IN n VARIABILI

Prendo una funzione del tipo $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ allora possiamo considerare F come avente m componenti, cioè:

$$F(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), ..., f_m(\underline{x})) \text{ con } f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Ognuna di queste componenti ha n derivate parziali. Possiamo quindi definire la Matrice Jacobiana delle derivate parziali:

$$DF(\underline{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{m \times n}, \text{ con } (DF)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

DERIVAZIONE DI FUNZIONI COMPOSTE

Date 2 funzioni del tipo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, allora la derivata della loro composizione $f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \underbrace{\nabla f(\gamma(t))}_{\text{vett. di } \mathbb{R}^2} \bullet \underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{\text{vett. di } \mathbb{R}^2} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t)$$

con γ derivabile in t e f differenziabile in $\gamma(t)$.

Generalizzazione Vettore Gradiente:
Date due funzioni del tipo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, allora il gradiente della loro composizione è:

Def. Estesa: $\nabla(g \circ f)$ è un vettore riga di $\mathbb{R}^n$. In particolare la i-esima componente di tale vettore è:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f) = \sum_j = 1^n \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x);$$

Def. Matriciale: $\underbrace{\nabla(g \circ f)}_{1 \times n} = \underbrace{\nabla g}_{1 \times m} \cdot \underbrace{Df}_{m \times n}$.

__OSS:__ $\nabla(g \circ f)(\underline{x}) = \nabla g(f(\underline{x})) \cdot Df(\underline{x})$ (come la derivata classica).

Generalizzazione Matrice Jacobiana:
Date due funzioni vettoriali del tipo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ la loro composizione sarà $g \circ f : R^n \to \mathbb{R}^k$. Allora la matrice Jacobiana delle derivate parziali è data da:

$$\underbrace{D(g \circ f)(\underline{x})}_{k \times n} = \underbrace{\nabla g(f(\underline{x}))}_{k \times m} \cdot \underbrace{Df(\underline{x})}_{m \times n}$$

CURVE NELLO SPAZIO

Una curva è una funzione $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Uso $t \in I$ come variabile (tempo). Allora:

Vettore Posizione $\to \gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$ con $\gamma_i \in \mathbb{R}$;

Vettore Velocità $\to$ se $\exists \dot{\gamma_i}, \dot{\gamma_i} : I \to \mathbb{R}^n$ allora:
$\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma_1}(t), ..., \dot{\gamma_n}(t))$;

Vettore Accelerazione $\to$ se $\exists \ddot{\gamma_i}, \dot{\gamma_i} : I \to \mathbb{R}^n$ allora:
$\ddot{\gamma}(t) = (\ddot{\gamma_1}(t), ..., \ddot{\gamma_n}(t))$;

Sostegno $\to \Gamma = \gamma(I)$ (è un' "immagine" della curva). Curve diverse possono avere lo stesso sostegno.

Curva Semplice $\to$ Data $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, questa si dice Semplice se $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \quad \forall t_1 \neq t_2$ con almeno uno dei $t_i \in (a, b)$.
__OSS:__ γ è semplice $\iff \gamma_{|(a,b)}$ è iniettiva.

Curva Chiusa $\to$ Una curva γ si dice chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Curva Regolare $\to$ Una curva γ si dice regolare se $\in C^1((a, b); \mathbb{R})$ (cioè ogni componente è di classe C^1) e se $\dot{\gamma} \neq \underline{0} \quad \forall t \in (a, b)$.
__OSS:__ $\exists$ sempre il vettore velocità ed è $\neq 0 \implies \exists\ \tau(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma}(t)||}$ (viene detto Versore Tangente).

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Partiziono la curva definita su un intervallo $[a, b]$ come $P = \{(t_0, ..., t_n) \mid a = t_0 \leq ... \leq t_n = b \quad n \in \mathbb{N}\}$ e chiamo $\gamma_{\underline{P}}$ con $\underline{P} \in P$ la spezzata che congiunge i punti $\gamma(t_i)$, allora la lunghezza della curva $\gamma_{\underline{P}}$ sarà:

$$L(\gamma_{\underline{P}}) = \sum_{i=0}^{n-1} ||\gamma(t_i + 1) - \gamma(t_i)||$$

Posso dunque definire la lunghezza di una curva come:

$$L(\gamma) := \sup L(\gamma_{\underline{P}}) \quad \underline{P} \in P$$

inoltre se $L(\gamma) < \infty$ allora γ di dice Rettificabile.

Teorema $\rightarrow$ se $\gamma \in C^1 : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ allora:

γ è rettificabile e $L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||\ dt$

Lemma $\rightarrow$ Data $v \in C^0 : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ avrò che

$\int_a^b\ v(t)\ dt := \left(\int_a^b\ v_1(t)\ dt, ..., \int_a^b\ v_n(t)\ dt\right)$ allora:

$||\int_a^b\ v(t)\ dt|| \leq \int_a^b ||v(t)||\ dt$

CASI PARTICOLARI $\rightarrow$ Analizzo come caso particolare quello di una curva γ che è C^1 a tratti, ovvero $\gamma \in C^0 : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\exists (t_0, ..., t_n)$ t.c. $t_0 = a < ... < b = t_n$, $\gamma \in C^1 : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}^n$

Teorema : Data η, anch'essa curva C^1, allora se:

$\gamma \sim \eta \implies L(\gamma) = L(\eta)$.

Dimostrazione : (uso cambio di variabile)

$\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\eta : [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ allora $\exists\ \dot{g} \neq 0$ cambio di variabile tale che:

$\gamma(t) = \eta(g(t))$, ovvero $\gamma = \eta \circ g$

Supponendo, senza perdita di generalità che $\dot{g} > 0$ ovunque, posso calcolare la lunghezza di γ:

$L(\gamma) = \int_a^b ||\dot{\gamma}(t)||\ dt = \int_a^b ||\dot{\eta}(g(t)) \cdot \dot{g}(t)||\ dt$

per le proprietà delle funzioni composte. Inoltre, essendo $\dot{g}(t)$ uno scalare ho che:

$= \int_a^b ||\dot{\eta}(g(t))|| \cdot |\dot{g}(t)|\ dt$

e poiché $\dot{g} > 0$:

$= \int_a^b ||\dot{\eta}(g(t))|| \cdot \dot{g}(t)\ dt$

cambio variabile di integrazione $s = g(t) \rightarrow ds = \dot{g}(t)\ dt$:

$= \int_{g(a)}^{g(b)} ||\dot{\eta}(s)||\ ds$

Infine poiché $\dot{g} > 0 \implies g$ crescente $\begin{cases} g(a) = c \\ g(b) = d \end{cases}$ allora:

$= \int_c^d ||\eta||(s)\ ds = L(\eta)$

N.B. Lo stesso vale per $\dot{g} < 0$.