

FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

Si dice funzione a più variabili una funzione del tipo:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Inoltre possiamo definire "scalare" una funzione del tipo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mentre viene definita vettoriale una funzione del tipo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

FUNZIONI A DUE VARIABILI SCALARI

È una funzione del tipo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, chiamo le variabili x, y .

Dominio \rightarrow In generale, dati $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}^2$, D viene detto dominio.

Segno \rightarrow Studio dove $f(x, y) > 0$, $= 0$ oppure < 0 . Si tratta quindi di determinare uno di questi sottoinsiemi (spesso è utile rappresentarlo graficamente).

Al fine di definire la continuità di una funzione è necessario definire i concetti di "distanza" e tutti i concetti che ne derivano e quello di "limite":

Distanza in \mathbb{R}^2 \rightarrow Dati due punti (x, y) e (x_0, y_0) la distanza tra loro è data dalla norma a 2, cioè:

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Intorno (Circolare) \rightarrow Dato un punto (x_0, y_0) , I viene detto intorno circolare di (x_0, y_0) se:

$$I(x_0, y_0) = \{(x, y) \mid \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\}$$

Interno \rightarrow Dato un punto $(x_0, y_0) \in A$, tale punto si dice interno ad A se:

$$\exists I(x_0, y_0) \subset A$$

Frontiera (o Bordo) \rightarrow Un punto (x_0, y_0) si dice appartenere alla frontiera (o bordo) di A , e si scrive $(x_0, y_0) \in \partial A$ se:

$$\forall I(x_0, y_0) \begin{cases} \exists (x, y) \neq (x_0, y_0) \text{ t.c. } (x, y) \in A \cap I(x_0, y_0) \\ \exists (z, t) \neq (x_0, y_0) \text{ t.c. } (z, t) \in A^c \cap I(x_0, y_0) \end{cases}$$

Punto di Accumulazione \rightarrow Dato un punto (x_0, y_0) , questo si dice punto di accumulazione per A se:

$$\forall I(x_0, y_0) \exists (x, y) \neq (x_0, y_0) \text{ t.c. } (x, y) \in I(x_0, y_0) \cap A$$

Insieme Aperto/Chiuso \rightarrow A è un insieme aperto se coincide con l'insieme dei suoi punti interni (cioè **A ha tutto il bordo "tratteggiato"**), mentre A è un insieme se $\partial A \subset A$ (cioè **A ha tutto il bordo "continuo"**).

Chiusura di un Insieme \rightarrow La chiusura di un insieme A è data dall'insieme stesso unito con la sua frontiera, cioè:

$$\overline{A} = A \cup \partial A$$

Inoltre possono anche essere utili altre definizioni secondarie come:

Insieme Limitato \rightarrow Un insieme A è limitato in \mathbb{R}^2 se:

$$\exists a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall (x, y) \in A : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$$

oppure

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \text{ t.c. } \forall (x, y) \in A : x^2 + y^2 \leq c$$

Insieme non Limitato \rightarrow Un insieme A è non limitato se:

$$\forall c \exists (x, y) \text{ t.c. } \|(x, y)\| > c$$

Insieme Compatto \rightarrow Un insieme si dice compatto se è chiuso e limitato.

Insieme Connesso \rightarrow Un insieme si dice connesso non ai può ricoprire con due insiemi non vuoti, aperti e disgiunti.

LIMITI DI FUNZIONI IN DUE VARIABILI

La principale differenza con i limiti di funzioni in una variabile sta nel fatto che in \mathbb{R} esistono solo due possibili "direzioni" per cui una funzione può tendere ad un punto, mentre in \mathbb{R}^2 le direzioni sono infinite.

DEF: (Per Intorni) \rightarrow Data $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ e dato

(x_0, y_0) punto di accumulazione per D dico che

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l \text{ se } \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. se}$$

$$(x, y) \in D, (x, y) \neq (x_0, y_0):$$

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \implies |f(x, y) - l| < \epsilon$$

DEF: (Per Successioni) \rightarrow Data $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ e dato

(x_0, y_0) punto di accumulazione per D dico che

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l \text{ se } \forall (x_n, y_n) \in D \setminus (x_0, y_0), n \in \mathbb{N} \text{ t.c. se:}$$

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) \text{ allora } f(x_n, y_n) \rightarrow l$$

È anche possibile approssimare il problema sotto il punto di vista delle coordinate polari (ρ, Θ) , questo riduce il problema ad un limite ad una variabile in quanto il parametro Θ è libero e dobbiamo verificare solo la tendenza di ρ .

CONTINUITÀ DI FUNZIONI A DUE VARIABILI

DEF: \rightarrow Data $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ e dato $(x_0, y_0) \in D$ punto di accumulazione per D , si dice che f è continua in (x_0, y_0) se:

$$\exists \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \text{ ed è pari a } f(x_0, y_0).$$

Se la funzione è definita "a tratti" allora la continuità è da verificare nei punti di frontiera comune.

Teorema di Weierstrass \rightarrow Data $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ con K compatto e f continua in \mathbb{R} allora:

f ha massimo e minimo assoluti in K

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI FUNZIONI A DUE VARIABILI

Superficie Associata \rightarrow Data $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ definisco la superficie associata ad f come:

$$S_f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} (x, y) \in D \\ z = f(x, y) \end{matrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Insiemi di Livello \rightarrow Data $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ e dato $c \in \mathbb{R}$, chiamo "insieme di livello di f a livello c " l'insieme:

$$U_c := \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\} \subset D$$

OSS:

$$U_c \text{ può essere: } \begin{cases} \emptyset \\ \text{insieme di punti isolati} \\ \text{curva} \\ \text{regione bidimensionale} \end{cases}$$

DERIVATE PARZIALI

DEF: \rightarrow Sia (x_0, y_0) un punto interno al dominio di f . si chiama derivata parziale di f rispetto ad x nel punto (x_0, y_0) , la derivata classica di:

$$x \rightarrow f(x, y_0) \text{ in } x = x_0$$

e si indica con $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Ricordando la definizione di derivata classica si ha che:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

OSS: Si possono usare le stesse regole di derivazione classiche considerando l'altra variabile come una costante.

DERIVATA DIREZIONALE

DEF: \rightarrow Dato \vec{v} un vettore unitario di \mathbb{R}^2 (cioè $\|\vec{v}\| = 1$) la derivata direzionale di f in direzione \vec{v} nel punto (x_0, y_0) è la derivata classica di:

$$t \rightarrow f((x_0, y_0) + t \cdot \vec{v})$$

cioè:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + t \cdot \vec{v}) - f(x_0, y_0)}{t}$$

e si indica con $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$.