FUNZIONI A DUE VARIABILI SCALARI

È una funzione del tipo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, chiamo le variabili x, y.

Dominio: (funzioni più comuni)
- **Frazioni** $\to$ denominatore $\neq 0$;
- **Radici Pari** $\to$ argomento ≥ 0;
- **Logaritmo** $\to$ argomento > 0;
- **Funzioni continue** $\to$ somma, prodotto e composizione di funzioni continue sono a loro volta continue.

Segno $\to$ Studio dove $f : (x, y) > 0$, $= 0$ oppure < 0. Si tratta quindi di determinare uno di questi sottoinsiemi (spesso è utile rappresentarlo graficamente).

Interno $\to$ Dato un punto $(x_0, y_0) \in A$, tale punto si dice interno ad A se:

$$\exists \mathbf{I(x_0, y_0)} \subset \mathbf{A}$$

Frontiera (o Bordo) $\to$ Un punto (x_0, y_0) si dice appartenere alla frontiera (o bordo) di A, e si scrive $(x_0, y_0) \in \partial A$ se:

$$\forall \mathbf{I(x_0, y_0)} \begin{cases} \exists (x, y) \neq (x_0, y_0) \text{ t.c. } (x, y) \in A \cap I(x_0, y_0) \\ \exists (z, t) \neq (x_0, y_0) \text{ t.c. } (z, t) \in A^c \cap I(x_0, y_0) \end{cases}$$

Insieme Aperto/Chiuso $\to$ A è un insieme aperto se coincide con l'insieme dei sui punti interni (cioè **A ha tutto il bordo "tratteggiato"**$(< / >)$), mentre A è un insieme se $\partial A \subset A$ (cioè **A ha tutto il bordo "continuo"**$(\leq / \geq)$).

Inoltre possono anche essere utili altre definizioni secondarie come:

Insieme Limitato $\to$ Un insieme A è limitato in $\mathbb{R}^2$ se:

$$\exists \mathbf{a, b, c, d} \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall \mathbf{(x, y)} \in \mathbf{A} : \mathbf{a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d}$$

oppure

$$\exists \mathbf{c} \in \mathbb{R}^+ \text{ t.c. } \forall \mathbf{(x, y)} \in \mathbf{A} : \mathbf{x^2 + y^2 \leq c}$$

<u>**PER ES:**</u> Se ho dubbi faccio limiti agli estremi del dominio e nei punti esclusi dal dominio.

Insieme non Limitato $\to$ Un insieme A è non limitato se:

$$\forall \mathbf{c}\ \exists \mathbf{(x, y)} \text{ t.c. } ||\mathbf{(x, y)}|| > \mathbf{c}$$

Insieme Compatto $\to$ Un insieme si dice compatto se è chiuso e limitato.

Insieme Connesso $\to$ Un insieme si dice connesso non ai può ricoprire con due insiemi non vuoti, aperti e disgiunti.

LIMITI DI FUNZIONI IN DUE VARIABILI

La principale differenza con i limiti di funzioni in una variabile sta nel fatto che in $\mathbb{R}$ esistono solo due possibili "direzioni" per cui una funzione può tendere ad un punto, mentre in $\mathbb{R}^2$ le direzioni sono infinite.

Non Esistenza: Dato un limite del tipo $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}$ è sufficiente trovare due successioni di intervalli tali che $(a_n, b_n) \to (x_0, y_0)$ e per cui il limite abbia valore diverso. Le successioni più comuni sono:

per $(x, y) \to (0, 0)$: $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), (\frac{1}{n}, 0), (0, \frac{1}{n})$ con $n \in \mathbb{N} \to \infty$;
per $(x, y) \to (\infty, \infty)$: (n, n) con $n \in \mathbb{N} \to \infty$.

Esistenza: Dato un limite del tipo $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}$ è necessario effettuare un cambio di variabile da (x, y) a (ρ, θ). Il cambio di variabile sarà allora $(x, y) = (\rho\ \cos\theta + x_0, \rho\ \sin\theta + y_0)$ e il limite diventerà quindi $\lim\limits_{\rho\to\rho_0}$, dove $\rho_0 = 0$ se il limite è finito, mentre $\rho_0 = \infty$ se il limite è infinito.

CONTINUITÀ DI FUNZIONI A DUE VARIABILI

Estensione a tutto $\mathbb{R}^2$ $\to$ Assumendo che la funzione $f(x, y)$ sia continua in tutto $\mathbb{R}$ eccetto che in uno o più punti P_i, la sua continuità è estendibile a tutto $\mathbb{R}$ se il limite (in (ρ, θ)) che tende a P_i esiste e ha valore finito.

Teorema di Weierstrass $\to$ Data $f : K \to \mathbb{R}$ con K compatto e f continua in $\mathbb{R}$ allora:

f ha massimo e minimo assoluti in K

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI FUNZIONI A DUE VARIABILI

Insiemi di Livello $\to$ Data una funzione $f(x, y)$ per determinarne gli insiemi di livello si deve uguagliare la funzione alla costante c (possibilmente isolando x e y) e vedendo come varia la funzione al variare di c. Per disegnarli è sufficiente assegnare a c un valore.

Crescita della Funzione $\to$ Data una funzione $f(x, y)$ per determinarne la crescita è sufficiente porre $= 0$ una variabile alla volta, proiettando così la funzione sul piano perpendicolare all'asse della variabile annullata.

<u>**PER ES:**</u> $f(x, y) = \log(x^2 + y^2) \implies$
piano yz: $x = 0 \longrightarrow f(0, y) = \log(y^2)$;
piano xz: $y = 0 \longrightarrow f(x, 0) = \log(x^2)$.

DERIVATE PARZIALI

<u>**DEF:**</u> $\to$ Sia (x_0, y_0) un punto interno al dominio di f. si chiama derivata parziale di f rispetto ad x nel punto (x_0, y_0) , la derivata classica di:

$$x \to f(x, y_0) \text{ in } x = x_0$$

e si indica con $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Ricordando la definizione di derivata classica si ha che:

$$\mathbf{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \lim_{h\to 0} \mathbf{\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

Derivate Parziali di Ordine Superiore $\to$ Per una funzione a due variabili esistono 4 derivate di secondo ordine, infatti ogni derivata prima può essere derivata rispetto ad x o rispetto ad y:

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix}$$

Tale matrice viene detta Matrice Hessiana.

Teorema di Schwarz $\to$ Se f è di classe C^2, cioè le derivate seconde esistono e sono continue allora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

cioè la matrice essiana è simmetrica.

Differenziabilità $\to$ Data $f : A \to \mathbb{R}$ con A aperto di $\mathbb{R}^2$, $\nu \in \mathbb{R}^2$ ($\nu \to 0$ significa $||\nu|| \to 0$), allora f si dice differenziabile se:

$$\lim_{\nu\to 0} \frac{f((x,y)+\nu) - f(x,y) - \nabla f(x,y) \cdot \nu}{||\nu||} = 0$$

Teorema del Differenziale $\to$ se f è di classe C^1 (ovvero se le sue derivate prime sono continue e compatte) $\implies$ f è differenziabile.

PIANO TANGENTE

Se una funzione è differenziabile, si può approssimare "bene" con un piano. Si chiama Piano Tangente il piano in $\mathbb{R}^3$ di equazione:

$$z := f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \bullet (x - x_0, y - y_0)$$

è della forma $z = ax + by + c$ e il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è il punto di contatto tra il piano e la funzione.

Piano Tangente Orizzontale $\to$ Data $f(x, y)$ il piano tangente è orizzontale solo nei punti in cui $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Inserendo i punti in cui il gradiente si annulla nell'equazione del piano si ottiene la quota.

Piano Parallelo ad una Retta $\to$ Data l'equazione di un piano tangente z e l'equazione di una retta in $\mathbb{R}^3$ nella forma $ax = by = cz$ per ottenere i piani paralleli alla retta si deve ricavare il vettore direzione della retta cioè $[\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}]$ e sostituirla al posto di $[x, y, z]$ (non al posto di $[x_0, y_0]$) nel vettore in modo da poter ricavare una possibile variabile α dall'equazione del piano.

DERIVATA DIREZIONALE

Dato ν un vettore unitario di $\mathbb{R}^2$ (cioè $||\nu|| = 1$) la derivata direzionale di f in direzione ν nel punto (x_0, y_0) è la derivata classica di:

$$t \to f((x_0, y_0) + t \cdot \nu)$$

cioè:

$$\lim_{f\to 0} \mathbf{\frac{f((x_0, y_0) + h \cdot \nu) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

e si indica con $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$.

Teorema $\to$ Se f è differenziabile, allora:

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x, y) = \nabla f(x, y) \bullet \nu$$

<u>**PER ES:**</u> Data $f(x, y)$ e (x_0, y_0) trovare ν t.c. $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ sia massima/minima.
Il modo migliore per svolgerlo è trovare il versore del gradiente e e il suo opposto. Quelli saranno i due ν che minimizzeranno/massimizzeranno la derivata direzionale in (x_0, y_0).

$$\nu_{MAX} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{||f(x_0, y_0)||}$$

$$\nu_{MIN} = -\frac{\nabla f(x_0, y_0)}{||f(x_0, y_0)||}$$

MASSIMI E MINIMI (ESTREMI)

Individuazione dei Punti Critici $\to$ Come nel caso 1D non è sufficiente che $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ affinché (x_0, y_0) sia un massimo/minimo. Devo quindi caratterizzare maggiormente la natura di questi punti.

Condizione Necessaria $\to$ se $(x_0, y_0) \in D_f$ (dominio della funzione) è un estremo locale/globale

$$\implies \begin{cases} \nexists \nabla f(x_0, y_0) \implies \text{PUNTO SINGOLARE} \\ \nabla f(x_0, y_0) = (0, 0) \implies \text{PUNTO CRITICO} \\ (x_0, y_0) \in \partial D_f \implies \text{PUNTO DI BORDO} \end{cases}$$

N.B. $\to$ se $f : D \to \mathbb{R}$ continua su D compatto allora trovo sicuramente max/min assoluti confrontando punti critici/singolari/bordo.

Caratterizzazione dei Punti Critici Nel caso 1D si osserva la derivata seconda per capire la natura dei punti critici. Poiché la derivata seconda in 2D corrisponde alla matrice hessiana abbiamo bisogno di ulteriori osservazioni:

<u>**DEF:**</u>**(Preliminare)** $\to$ Data M matrice 2×2 diagonalizzabile (ha 2 autovalori reali λ_1, λ_2) si dice:

(SEMI) DEF. POS. se $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ($\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$)
(SEMI) DEF. NEG. se $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0$)
INDEFINITA se$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ (o viceversa) .

PER ES: Per caratterizzare la matrice hessiana è anche possibile usare traccia e determinante:
(SEMI) DEF. POS. se $Tr(D^2) > 0, Det(D^2) > 0$;
(SEMI) DEF. NEG. se $Tr(D^2) < 0, Det(D^2) < 0$;
INDEFINITA se $Tr(D^2)$ e $Det(D^2)$ sono discordi.

Teorema $\rightarrow$ sia $f \in C^2$ definita su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si ha:
Condizione Sufficiente $\rightarrow (x_0, y_0)$ t.c.
$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$ se $D^2 f(x_0, y_0)$ DEF. NEG. (POS.) $\implies (x_0, y_0)$ è max (min locale); se invece è INDEFINITA $\implies (x_0, y_0)$ è un PUNTO DI SELLA.
N.B.: Negli altri casi devo analizzare le derivate di ordine superiore.
OSS: $\rightarrow D^2 f$ è simmetrica perché $f \in C^2 \implies D^2 f$ è diagonalizzabile.

Teorema di Weierstrass $\rightarrow$ Data f continua definita su A compatto $\implies$
$$\exists \max_A f, \exists \min_A f.$$
OSS: $\rightarrow A$ è limitato e chiuso perché $\partial A \subset A$.
I punti di max / min vanno cercati tra:
$$\begin{cases} \text{Punti Critici Interni } \rightarrow \text{non ci sono} \\ \nexists \nabla f \rightarrow \text{non ci sono} \\ \partial A \rightarrow \underline{\text{ci sono}} \end{cases}$$

SVILUPPI DI TAYLOR

Data una funzione f differenziabile in $(x_0, y_0) \in D$ aperto di $\mathbb{R}^2$ allora gli sviluppi di Taylor sono:

Grado 1 :
$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \bullet (x - x_0, y - y_0) + \underbrace{(||(x-x_0, y-y_0)||)}_{\text{Resto}};$$
$$f(x+h, y+k) = = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \bullet (h,k) + \underbrace{o(\sqrt{h^2+k^2})}_{\text{Resto}}$$

Grado 2 :
$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \bullet (x - x_0, y - y_0) + \frac{1}{2}\left[D^2 f(x_0,y_0) \bullet \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \underbrace{(||(x-x_0, y-y_0)||^2)}_{\text{Resto}}$$

OSS: (Sviluppo di Taylor vicino ad un punto critico)
Dato (x_0, y_0) punto critico, f vicino a (x_0, y_0) è della forma $f(x_0 + h, y_0 + k)$ con h, k piccoli. Supponiamo inoltre che $D^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ diagonale, allora, poiché il vettore delle derivate parziali è $(0,0)$ (dalla definizione di punto critico):
$$\begin{cases} \text{se } \lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (x_0,y_0) \text{ è un MIN. LOC.} \\ \text{se } \lambda_1, \lambda_2 < 0 \implies (x_0,y_0) \text{ è un MAX. LOC.} \\ \text{se } \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \text{ sono discordi } \implies (x_0,y_0) \text{ è un punto di SELLA} \end{cases}$$

FUNZIONI SCALARI IN n VARIABILI

Prendo una funzione del tipo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ allora:
Dominio $\rightarrow D := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n | f(\underline{x}) \in \mathbb{R}\}$;
Intorni $\rightarrow \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n | \; ||\underline{x} - \underline{x_0}|| < r\}$ è l'intorno sferico di $\underline{x_0}$;
Continuità $\rightarrow \quad \underline{n}^{(n)} \rightarrow \underline{x_0} \implies |f(\underline{n}^{(n)}) - f(\underline{x_0})| \rightarrow 0?$;
Gradiente $\rightarrow \nabla f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x})\right)$ vettore di $\mathbb{R}^n$;
Matrice Essiana $\rightarrow D^2 f(\underline{x}) =$ matr. $n \times, n$,
$(D^2 f)_{ij}(\underline{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_i}(\underline{x})$ (se $f \in C^2 \implies D^2$è simmetrica);
Taylor $\rightarrow$ continua a valere.

FUNZIONI VETTORIALI IN n VARIABILI

Prendo una funzione del tipo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ allora possiamo considerare F come avente m componenti, cioè:
$$F(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), ..., f_m(\underline{x})) \text{ con } f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$
Ognuna di queste componenti ha n derivate parziali. Possiamo quindi definire la Matrice Jacobiana delle derivate parziali:
$$DF(\underline{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{m \times n}, \text{ con } (DF)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

DERIVAZIONE DI FUNZIONI COMPOSTE

Date 2 funzioni del tipo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, allora la derivata della loro composizione $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è:
$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \underbrace{\nabla f(\gamma(t))}_{\text{vett. di } \mathbb{R}^2} \bullet \underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{\text{vett. di } \mathbb{R}^2} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t)$$
con γ derivabile in t e f differenziabile in $\gamma(t)$.

Generalizzazione Vettore Gradiente:
Date due funzioni del tipo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, allora il gradiente della loro composizione è:
Def. Estesa: $\nabla(g \circ f)$ è un vettore riga di $\mathbb{R}^n$. In particolare la i-esima componente di tale vettore è:
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f) = \sum_j = 1^n \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x);$$
Def. Matriciale: $\underbrace{\nabla(g \circ f)}_{1 \times n} = \underbrace{\nabla g}_{1 \times m} \bullet \underbrace{Df}_{m \times n}$.
OSS: $\nabla(g \circ f)(\underline{x}) = \nabla g(f(\underline{x})) \bullet Df(\underline{x})$ (come la derivata classica).

Generalizzazione Matrice Jacobiana:
Date due funzioni vettoriali del tipo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ la loro composizione sarà $g \circ f : R^n \rightarrow \mathbb{R}^k$. Allora la matrice Jacobiana delle derivate parziali è data da:
$$\underbrace{D(g \circ f)(\underline{x})}_{k \times n} = \underbrace{\nabla g(f(\underline{x}))}_{k \times m} \bullet \underbrace{Df(\underline{x})}_{m \times n}$$

EQUAZIONI DELLE CURVE

Parabola $\rightarrow p := ax^2 + bx + c = 0$ con a concavità con centro in $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$.
Circonferenza $\rightarrow c := (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ con α, β la distanza dall'origine del centro, r il raggio.
Ellisse $\rightarrow e := \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ con α, β la distanza dall'origine del centro, a è il semiasse su x e b è il semiasse su y.
Iperbole $\rightarrow i := \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ con asintoti di equazione $y = -\frac{bx}{a}$ e $y = \frac{bx}{a}$ (in caso $\alpha, \beta \neq 0$ si aggiungono nella relativa variabile cioè si pone $x = x - \alpha$ e $y = y - \beta$).1

PARAMETRIZZAZIONE DELLE CURVE

Segmenti $\rightarrow s := [t, mt + q]$ con $t \in [t_1, t_2]$ (se il segmento è verticale diventa $[mt + q, t]$).
Parabola $\rightarrow p := [t, at^2 + bt + c]$ con $t \in [t_1, t_2]$
Circonferenza $\rightarrow c := [\alpha + r\cos(t), \beta + r\sin(t)]$ con α, β la distanza dall'origine del centro, r il raggio e $t \in [0, 2\pi]$.
Ellisse $\rightarrow e := [\alpha + a\cos(t), \beta + b\sin(t)]$ con α, β la distanza dall'origine del centro, a è il semiasse su x e b è il semiasse su y e $t \in [0, 2\pi]$.
Iperbole $\rightarrow i := [\cosh(t), \sinh(t)]$ dove $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ e $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

FORMULE TRIGONOMETRICHE

Relazione Fondamentale :
$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.
Formule di Duplicazione :
$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$;
$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$;
$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$.
Formule di Bisezione :
$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$;
$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$;
$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$;

DERIVATE DI FUNZIONI

Funzione	Derivata
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$