

**FUNZIONI A PIÙ VARIABILI**

Si dice funzione a più variabili una funzione del tipo:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Inoltre possiamo definire "scalare" una funzione del tipo  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mentre viene definita vettoriale una funzione del tipo  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**FUNZIONI A DUE VARIABILI SCALARI**

È una funzione del tipo  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , chiamo le variabili  $x, y$ .

**Dominio**  $\rightarrow$  In generale, dati  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  con  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $D$  viene detto dominio.

**Segno**  $\rightarrow$  Studio dove  $f(x, y) > 0$ ,  $= 0$  oppure  $< 0$ . Si tratta quindi di determinare uno di questi sottoinsiemi (spesso è utile rappresentarlo graficamente).

Al fine di definire la continuità di una funzione è necessario definire i concetti di "distanza" e tutti i concetti che ne derivano e quello di "limite":

**Distanza in  $\mathbb{R}^2$**   $\rightarrow$  Dati due punti  $(x, y)$  e  $(x_0, y_0)$  la distanza tra loro è data dalla norma a 2, cioè:

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

**Intorno (Circolare)**  $\rightarrow$  Dato un punto  $(x_0, y_0)$ ,  $I$  viene detto intorno circolare di  $(x_0, y_0)$  se:

$$I(x_0, y_0) = \{(x, y) \mid \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\}$$

**Interno**  $\rightarrow$  Dato un punto  $(x_0, y_0) \in A$ , tale punto si dice interno ad  $A$  se:

$$\exists I(x_0, y_0) \subset A$$

**Frontiera (o Bordo)**  $\rightarrow$  Un punto  $(x_0, y_0)$  si dice appartenere alla frontiera (o bordo) di  $A$ , e si scrive  $(x_0, y_0) \in \partial A$  se:

$$\forall I(x_0, y_0) \left\{ \begin{array}{l} \exists (x, y) \neq (x_0, y_0) \text{ t.c. } (x, y) \in A \cap I(x_0, y_0) \\ \exists (z, t) \neq (x_0, y_0) \text{ t.c. } (z, t) \in A^c \cap I(x_0, y_0) \end{array} \right.$$

**Punto di Accumulazione**  $\rightarrow$  Dato un punto  $(x_0, y_0)$ , questo si dice punto di accumulazione per  $A$  se:

$$\forall I(x_0, y_0) \exists (x, y) \neq (x_0, y_0) \text{ t.c. } (x, y) \in I(x_0, y_0) \cap A$$

**Insieme Aperto/Chiuso**  $\rightarrow$   $A$  è un insieme aperto se coincide con l'insieme dei suoi punti interni (cioè **A ha tutto il bordo "tratteggiato"**), mentre  $A$  è un insieme se  $\partial A \subset A$  (cioè **A ha tutto il bordo "continuo"**).

**Chiusura di un Insieme**  $\rightarrow$  La chiusura di un insieme  $A$  è data dall'insieme stesso unito con la sua frontiera, cioè:

$$\bar{A} = A \cup \partial A$$

Inoltre possono anche essere utili altre definizioni secondarie come:

**Insieme Limitato**  $\rightarrow$  Un insieme  $A$  è limitato in  $\mathbb{R}^2$  se:

$$\exists a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall (x, y) \in A : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$$

$$\text{oppure} \quad \exists c \in \mathbb{R}^+ \text{ t.c. } \forall (x, y) \in A : x^2 + y^2 \leq c$$

**Insieme non Limitato**  $\rightarrow$  Un insieme  $A$  è non limitato se:

$$\forall c \exists (x, y) \text{ t.c. } \|(x, y)\| > c$$

**Insieme Compatto**  $\rightarrow$  Un insieme si dice compatto se è chiuso e limitato.

**Insieme Connesso**  $\rightarrow$  Un insieme si dice connesso non ai può ricoprire con due insiemi non vuoti, aperti e disgiunti.

**LIMITI DI FUNZIONI IN DUE VARIABILI**

La principale differenza con i limiti di funzioni in una variabile sta nel fatto che in  $\mathbb{R}$  esistono solo due possibili "direzioni" per cui una funzione può tendere ad un punto, mentre in  $\mathbb{R}^2$  le direzioni sono infinite.

**DEF: (Per Intorni)**  $\rightarrow$  Data  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  e dato  $(x_0, y_0)$  punto di accumulazione per  $D$  dico che  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l$  se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. se } (x, y) \in D, (x, y) \neq (x_0, y_0): \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \implies |f(x, y) - l| < \epsilon$$

**DEF: (Per Successioni)**  $\rightarrow$  Data  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  e dato  $(x_0, y_0)$  punto di accumulazione per  $D$  dico che  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l$  se  $\forall (x_n, y_n) \in D \setminus (x_0, y_0), n \in \mathbb{N}$  t.c. se:

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) \text{ allora } f(x_n, y_n) \rightarrow l$$

È anche possibile approcciare il problema sotto il punto di vista delle coordinate polari  $(\rho, \Theta)$ , questo riduce il problema ad un limite ad una variabile in quanto il parametro  $\Theta$  è libero è dobbiamo verificare solo la tendenza di  $\rho$ .

**CONTINUITÀ DI FUNZIONI A DUE VARIABILI**

**DEF:**  $\rightarrow$  Data  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  e dato  $(x_0, y_0) \in D$  punto di accumulazione per  $D$ , si dice che  $f$  è continua in  $(x_0, y_0)$  se:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \text{ ed è pari a } f(x_0, y_0).$$

Se la funzione è definita "a tratti" allora la continuità è da verificare nei punti di frontiera comune.

**Teorema di Weierstrass**  $\rightarrow$  Data  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  con  $K$  compatto e  $f$  continua in  $\mathbb{R}$  allora:

$$f \text{ ha massimo e minimo assoluti in } K$$

**RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI FUNZIONI A DUE VARIABILI**

**Superficie Associata**  $\rightarrow$  Data  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  definisco la superficie associata ad  $f$  come:

$$S_f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} (x, y) \in D \\ z = f(x, y) \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

**Insiemi di Livello**  $\rightarrow$  Data  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  e dato  $c \in \mathbb{R}$ , chiamo "insieme di livello di  $f$  a livello  $c$ " l'insieme:

$$U_c := \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\} \subset D$$

OSS:

$$U_c \text{ può essere: } \begin{cases} \emptyset \\ \text{insieme di punti isolati} \\ \text{curva} \\ \text{regione bidimensionale} \end{cases}$$

**DERIVATE PARZIALI**

**DEF:**  $\rightarrow$  Sia  $(x_0, y_0)$  un punto interno al dominio di  $f$ . si chiama derivata parziale di  $f$  rispetto ad  $x$  nel punto  $(x_0, y_0)$ , la derivata classica di:

$$x \rightarrow f(x, y_0) \text{ in } x = x_0$$

e si indica con  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ . Ricordando la definizione di derivata classica si ha che:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

OSS: Si possono usare le stesse regole di derivazione classiche considerando l'altra variabile come una costante.

Le derivate parziali si mettono in un vettore chiamato gradiente.

Questo, come funzione di  $x, y$  è un campo vettoriale:

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

**Derivate Parziali di Ordine Superiore**  $\rightarrow$  Per una funzione a due variabili esistono 4 derivate di secondo ordine, infatti ogni derivata prima può essere derivata rispetto ad  $x$  o rispetto ad  $y$ :

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Tale matrice viene detta Matrice Hessiana.

**Teorema di Schwarz**  $\rightarrow$  Se  $f$  è di classe  $C^2$ , cioè le derivate seconde esistono e sono continue allora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

cioè la matrice Hessiana è simmetrica.

**Differenziabilità**  $\rightarrow$  Data  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^2$ ,  $\nu \in \mathbb{R}^2$  ( $\nu \rightarrow 0$  significa  $\|\nu\| \rightarrow 0$ ), allora  $f$  si dice differenziabile se:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + \nu) - f(x, y) - \nabla f(x, y) \cdot \nu}{\|\nu\|} = 0$$

**Teorema del Differenziale**  $\rightarrow$  Data  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^2$  se:

$$f \text{ è di classe } C^1 \implies f \text{ è differenziabile.}$$

$$\text{OSS: Se } f \text{ è di classe } C^1 \implies f \text{ differenziabile} \implies f \text{ è di classe } C^0 \implies f \text{ continua.}$$

**PIANO TANGENTE**

Se una funzione è differenziabile, si può approssimare "bene" con un piano. Si chiama Piano Tangente il piano in  $\mathbb{R}^3$  di equazione:

$$z := f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$$

è della forma  $z = ax + by + c$  e il punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  è il punto di contatto tra il piano e la funzione.

**DERIVATA DIREZIONALE**

Dato  $\nu$  un vettore unitario di  $\mathbb{R}^2$  (cioè  $\|\nu\| = 1$ ) la derivata direzionale di  $f$  in direzione  $\nu$  nel punto  $(x_0, y_0)$  è la derivata classica di:

$$t \rightarrow f((x_0, y_0) + t \cdot \nu)$$

cioè:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + h \cdot \nu) - f(x_0, y_0)}{h}$$

e si indica con  $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ .

**Teorema**  $\rightarrow$  Se  $f$  è differenziabile, allora:

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \nu$$

**ESEMPIO:** Data  $f(x, y)$  e  $(x_0, y_0)$  trovare  $\nu$  t.c.  $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$  sia massima/minima.

Il modo migliore per svolgerlo è trovare il versore del gradiente e e il suo opposto. Quelli saranno i due  $\nu$  che minimizzeranno/massimizzeranno la derivata direzionale in  $(x_0, y_0)$ .

$$\nu_{MAX} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}$$

$$\nu_{MIN} = - \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}$$

**MASSIMI E MINIMI (ESTREMI)**

**Estremi Assoluti**

Data  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0, y_0)$  si chiama "Punto di Massimo Assoluto (o Globale)" se  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in D$ , mentre si chiama

"Punto di Minimo Assoluto (o Globale)" se

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in D.$$

**Estremi Relativi**

Data  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, (x_0, y_0)$  si chiama "Punto di Massimo Relativo (o Locale)" se  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in U(x_0, y_0)$  intorno di  $(x_0, y_0)$ , mentre si chiama "Punto di Minimo Relativo (o Locale)" se  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in U(x_0, y_0)$  intorno di  $(x_0, y_0)$ .

**Individuazione dei Punti Critici**  $\rightarrow$  Come nel caso 1D non è sufficiente che  $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$  affinché  $(x_0, y_0)$  sia un massimo/minimo. Devo quindi caratterizzare maggiormente la natura di questi punti.

**Condizione Necessaria**  $\rightarrow$  se  $(x_0, y_0) \in D_f$  (dominio della funzione) è un estremo locale/globale

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x_0, y_0) = (0, 0) \Rightarrow \text{PUNTO CRITICO} \\ \nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0) \Rightarrow \text{PUNTO SINGOLARE} \\ (x_0, y_0) \in \partial D_f \Rightarrow \text{PUNTO DI BORDO} \end{cases}$$

**DIM:** Dato  $(x_0, y_0) \in D_f$  (parte interna di  $D_f$ ) estremo locale/globale, supponiamo che  $\exists \nabla f(x_0, y_0)$ . Per assurdo supponiamo che sia  $\neq (0, 0)$ :

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \text{wlog } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = l \neq 0, \text{ wlog } l > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{per } h \text{ piccolo si ha } \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} > 0 \Rightarrow \\ &\begin{cases} \text{se prendo } h > 0 \Rightarrow f(x_0+h, y_0) > f(x_0, y_0) \Rightarrow \\ \text{se prendo } h < 0 \Rightarrow f(x_0+h, y_0) < f(x_0, y_0) \Rightarrow \end{cases} \\ &\Rightarrow \text{NO MAX LOCALE} \\ &\Rightarrow \text{NO MIN LOCALE} \Rightarrow \text{Contraddizione.} \end{aligned}$$

**N.B.**  $\rightarrow$  se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua su  $D$  compatto allora trovo sicuramente max/min assoluti confrontando punti critici/singolari/bordo.

**Caratterizzazione dei Punti Critici** Nel caso 1D si osserva la derivata seconda per capire la natura dei punti critici. Poiché la derivata seconda in 2D corrisponde alla matrice Hessiana abbiamo bisogno di ulteriori osservazioni:

**DEF: (Preliminare)**  $\rightarrow$  Data  $M$  matrice  $2 \times 2$  diagonalizzabile (ha 2 autovalori reali  $\lambda_1, \lambda_2$ ) si dice:

(SEMI) DEF. POS. se  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$  ( $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ )  
(SEMI) DEF. NEG. se  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$  ( $\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0$ )  
INDEFINITA se  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$  (o viceversa).

**Teorema**  $\rightarrow$  sia  $f \in C^2$  definita su un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  si ha:

**Condizione Necessaria**  $\rightarrow (x_0, y_0)$  è un max (min) locale  $\Rightarrow D^2 f(x_0, y_0)$  è Semi Definita Negativa (Positiva).

**Condizione Sufficiente**  $\rightarrow (x_0, y_0)$  t.c.  
 $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$  se  $D^2 f(x_0, y_0)$  DEF. NEG. (POS.)  
 $\Rightarrow (x_0, y_0)$  è max (min locale); se invece è INDEFINITA  $\Rightarrow (x_0, y_0)$  è un PUNTO DI SELLA.

N.B.: Negli altri casi devo analizzare le derivate di ordine superiore.

**OSS:**  $\rightarrow D^2 f$  è simmetrica perché  $f \in C^2 \Rightarrow D^2 f$  è diagonalizzabile.

**Teorema di Weierstrass**  $\rightarrow$  Data  $f$  continua definita su  $A$  compatto  $\Rightarrow$

$$\exists \max_A f, \exists \min_A f.$$

**OSS:**  $\rightarrow A$  è limitato e chiuso perché  $\partial A \subset A$ .

I punti di max / min vanno cercati tra:

$$\begin{cases} \text{Punti Critici Interni} \rightarrow \text{non ci sono} \\ \nabla f \rightarrow \text{non ci sono} \\ \partial A \rightarrow \text{ci sono} \end{cases}$$

## SVILUPPI DI TAYLOR

Data una funzione  $f$  differenziabile in  $(x_0, y_0) \in D$  aperto di  $\mathbb{R}^2$  allora lo sviluppo di Taylor sono:

**Grado 1 :**

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) + \underbrace{(|(x - x_0, y - y_0)|)|}_{\text{Resto}};$$

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= \\ &= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k) + \underbrace{o(\sqrt{h^2 + k^2})}_{\text{Resto}} \end{aligned}$$

**Grado 2 :**

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ D^2 f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \\ &+ \underbrace{(|(x - x_0, y - y_0)|^2)}_{\text{Resto}} \end{aligned}$$

**OSS:** (Sviluppo di Taylor vicino ad un punto critico)

Dato  $(x_0, y_0)$  punto critico,  $f$  vicino a  $(x_0, y_0)$  è della forma  $f(x_0+h, y_0+k)$  con  $h, k$  piccoli. Supponiamo inoltre che

$D^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  diagonale, allora, poiché il vettore delle derivate parziali è  $(0, 0)$  (dalla definizione di punto critico):

$$\begin{cases} se \lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ è un MIN. LOC.} \\ se \lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ è un MAX. LOC.} \\ se \lambda_1 < (>)0, \lambda_2 > (<)0 \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ è un punto di SELLA} \end{cases}$$

## FUNZIONI SCALARI IN $n$ VARIABILI

Prendo una funzione del tipo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  allora:

**Dominio**  $\rightarrow D := \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \in \mathbb{R}\}$ ;

**Intorni**  $\rightarrow \{x \in \mathbb{R}^n | \|x - x_0\| < r\}$  è l'intorno sferico di  $x_0$ ;

**Continuità**  $\rightarrow \underline{n}^{(n)} \rightarrow x_0 \Rightarrow |f(\underline{n}^{(n)}) - f(x_0)| \rightarrow 0$ ;

**Gradiente**  $\rightarrow \nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$  vettore di  $\mathbb{R}^n$ ;

**Matrice Hessiana**  $\rightarrow D^2 f(x) = \text{matr. } n \times n$ ,

$$(D^2 f)_{ij}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \text{ (se } f \in C^2 \Rightarrow D^2 \text{ è simmetrica);}$$

**Taylor**  $\rightarrow$  continua a valere.

## FUNZIONI VETTORIALI IN $n$ VARIABILI

Prendo una funzione del tipo  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  allora possiamo considerare  $F$  come avente  $m$  componenti, cioè:

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \text{ con } f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ognuna di queste componenti ha  $n$  derivate parziali. Possiamo quindi definire la Matrice Jacobiana delle derivate parziali:

$$DF(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \text{ con } (DF)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

## DERIVAZIONE DI FUNZIONI COMPOSTE

Date 2 funzioni del tipo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , allora la derivata della loro composizione  $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) &= \underbrace{\nabla f(\gamma(t))}_{\text{vett. di } \mathbb{R}^2} \cdot \underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{\text{vett. di } \mathbb{R}^2} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t) \end{aligned}$$

con  $\gamma$  derivabile in  $t$  e  $f$  differenziabile in  $\gamma(t)$ .

**Generalizzazione Vettore Gradiente:**

Date due funzioni del tipo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , allora il gradiente della loro composizione è:

**Def. Estesa:**  $\nabla(g \circ f)$  è un vettore riga di  $\mathbb{R}^n$ . In particolare la  $i$ -esima componente di tale vettore è:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f) = \sum_j = 1^n \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x);$$

**Def. Matriciale:**  $\nabla(g \circ f) = \underbrace{\nabla g}_{1 \times m} \cdot \underbrace{Df}_{m \times n}$ .

**OSS:**  $\nabla(g \circ f)(x) = \nabla g(f(x)) \cdot Df(x)$  (come la derivata classica).

**Generalizzazione Matrice Jacobiana:**

Date due funzioni vettoriali del tipo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  la loro composizione sarà  $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Allora la matrice Jacobiana delle derivate parziali è data da:

$$\underbrace{D(g \circ f)(x)}_{k \times n} = \underbrace{\nabla g(f(x))}_{k \times m} \cdot \underbrace{Df(x)}_{m \times n}$$

## CURVE NELLO SPAZIO

Una curva è una funzione  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Uso  $t \in I$  come variabile (tempo). Allora:

**Vettore Posizione**  $\rightarrow \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$  con  $\gamma_i \in \mathbb{R}$ ;

**Vettore Velocità**  $\rightarrow$  se  $\exists \dot{\gamma}_i, \dot{\gamma}_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  allora:

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t));$$

**Vettore Accelerazione**  $\rightarrow$  se  $\exists \ddot{\gamma}_i, \ddot{\gamma}_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  allora:

$$\ddot{\gamma}(t) = (\ddot{\gamma}_1(t), \dots, \ddot{\gamma}_n(t));$$

**Sostegno**  $\rightarrow \Gamma = \gamma(I)$  (è un' "immagine" della curva). Curve diverse possono avere lo stesso sostegno.

**Curva Semplice**  $\rightarrow$  Data  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , questa si dice Semplice se  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \quad \forall t_1 \neq t_2$  con almeno uno dei  $t_i \in (a, b)$ .

**OSS:**  $\gamma$  è semplice  $\iff \gamma|_{(a,b)}$  è iniettiva.

**Curva Chiusa**  $\rightarrow$  Una curva  $\gamma$  si dice chiusa se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

**Curva Regolare**  $\rightarrow$  Una curva  $\gamma$  si dice regolare se  $\in C^1((a, b); \mathbb{R})$  (cioè ogni componente è di classe  $C^1$ ) e se  $\dot{\gamma} \neq \underline{0} \quad \forall t \in (a, b)$ .

**OSS:**  $\exists$  sempre il vettore velocità ed è  $\neq 0 \Rightarrow \exists \tau(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$  (viene detto Versore Tangente).