

Министерство образования и науки Российской Федерации
Новосибирский государственный технический университет
Кафедра прикладной математики

Лабораторные работы №1, 2
по дисциплине «Метод конечных элементов»

Решение линейных и нелинейных задач магнитостатики

Факультет	ПМИ
Группа	ПМ 32
Студенты	Жиляков А. Антоненко В. Губский Е.
Преподаватель	Персова М. Г.
Вариант	1

Содержание

1	Как решалась задача	2
2	Исследование влияния удалённой границы	2
3	Магнитное поле в области Ω_{field}	5
4	Влияние силы тока на магнитное поле	5
5	Сравнение решений, полученных в CATS' PDEs и Telma	8

Список иллюстраций

1	Интерполянт $\hat{\mu}_{\text{iron}}$ для нелинейной задачи	2
2	Оптимальные размеры области для линейной и нелинейной задач	3
3	Магнитное поле в области Ω_{field} для линейной и нелинейной задач	5
4	Зависимость среднего значения B_{mean} модуля магнитного поля в области Ω_{field} от плотности тока J_z	6
5	Изменение вектор-потенциала A_z нелинейной конфигурации при изменении плотности тока J_z	7
6	Вектор-势 A_z, полученный при решении линейной задачи в пакете Telma, и соответствующее ему магнитное поле \mathbf{B}	8

Список таблиц

1	Влияние размера бака на среднее значение модуля магнитного поля в области Ω_{field}	4
----------	---	----------

1 Как решалась задача

Для дискретизации уравнения Пуассона

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\hat{\mu}} \nabla A_z \right) = \mu_0 J_z,$$

к которому свелась задача магнитостатики [1], мы использовали метод конечных элементов (треугольные Лагранжевы элементы 2-го порядка). Для решения результирующей СЛАУ использовался метод сопряжённых градиентов с многосеточным переобуславливателем.

Для решения нелинейной задачи мы воспользовались методом простой итерации (с релаксацией). Для построения интерполянта $\hat{\mu}_{\text{iron}} = \hat{\mu}_{\text{iron}}(\|\mathbf{B}\|) \equiv \hat{\mu}_{\text{iron}}(\|\nabla A_z\|)$ мы использовали Лагранжевы КЭ 1-го порядка (кусочно-линейная интерполяция). График интерполянта представлен на рисунке 1.

Исходный текст программы доступен в модуле [CATS' PDEs](#) “[FEM for Magnetostatic Poisson Problem](#)”.

2 Исследование влияния удалённой границы

Мы полагаем однородные условия Дирихле на краях бака, — левом, верхнем и правом, — «обрезая» магнитное поле (из соображений, что вдали от магнита модуль поля пренебрежительно мал). В действительности действие поля распространя-

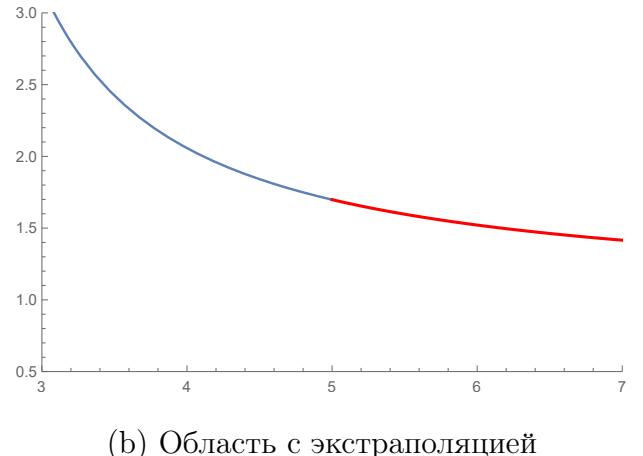
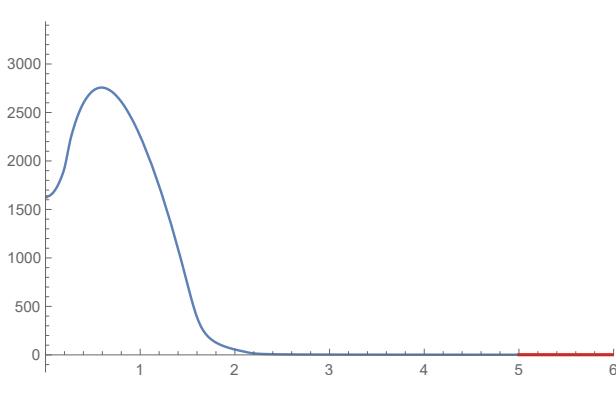
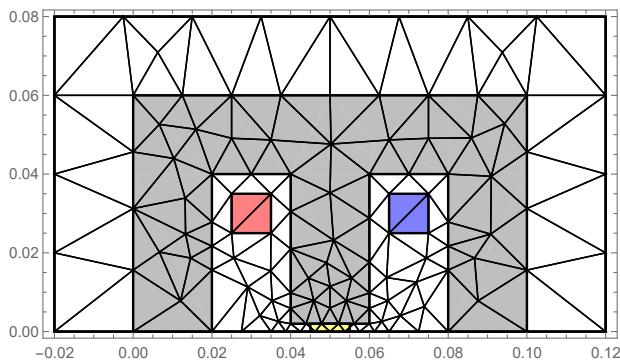
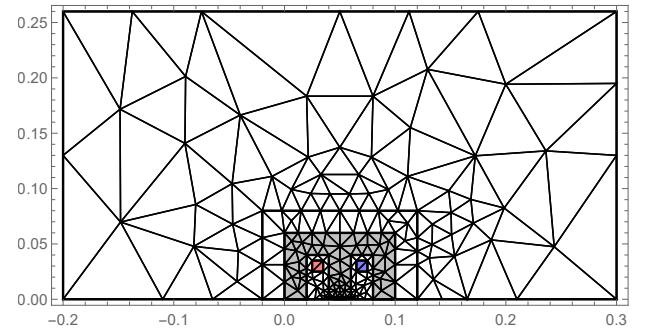


Рис. 1: Интерполянт $\hat{\mu}_{\text{iron}}$ для нелинейной задачи



(a)



(b)

Рис. 2: Оптимальные размеры области для линейной (а) и нелинейной (б) задач

ется бесконечно далеко.

Чтобы подобрать оптимальный размер бака, не нарушающий «физику» магнита, будем исследовать влияние размера бака на среднее значение модуля магнитного поля в области Ω_{field} (показана жёлтым на рисунке 2а). Результаты представлены в таблице 1. И линейную, и нелинейную задачи мы решали при плотности тока $J_z = 10^{10} \text{ Am}^{-2}$ (при плотности $\geq 10^{10}$ нелинейное решение сильно отличается от линейного — см. рисунок 5).

Из таблицы 1а видно, что **линейная задача нечувствительна к размерам бака**: решение, полученное при $S = 40 \text{ cm}$, отличается от решения, полученного при $S = 2 \text{ cm}$, меньше чем на сотую долю процента.

Нелинейная же конфигурация очень чувствительна к изменению S (таблица 1б). При $S = 20 \text{ cm}$ относительная разница не превосходит процента, при $S = 2 \text{ cm}$ — превосходит 17%.

Таким образом, можно предложить следующие оптимальные размеры бака (минимальный размер области + относительная разница $< 1\%$):

- линейная задача: $S = 2 \text{ cm}$,
- нелинейная задача: $S = 20 \text{ cm}$.

Области показаны на рисунке 2.

Таблица 1: Влияние размера бака на среднее значение модуля магнитного поля в области Ω_{field} . Обозначения:

- $S_i :=$ расстояние от магнита до границы области;
- $B_{\text{mean}_i} := m(\|\mathbf{B}\|) \equiv \int_{\Omega_{\text{field}}} \|\mathbf{B}\| d\mathbf{x} / |\Omega_{\text{field}}|$, среднее значение модуля магнитного поля;
- $\delta_i := |B_{\text{mean}_i} - B_{\text{mean}_1}| / B_{\text{mean}_1}$, относительная разница между средними значениями модуля поля на 1-й конфигурации (самый крупный размер бака) и i -й

(a) Линейный случай

i	$S_i, [cm]$	$B_{\text{mean}_i}, [T]$	δ_i
1	40	595.335	0
2	2	595.311	.004%

(b) Нелинейный случай

i	$S_i, [cm]$	$B_{\text{mean}_i}, [T]$	δ_i
1	40	13.942	0
2	30	13.902	.3%
3	20	13.803	<1%
4	10	13.449	3.5%
5	2	11.556	>17%

3 Магнитное поле в области Ω_{field}

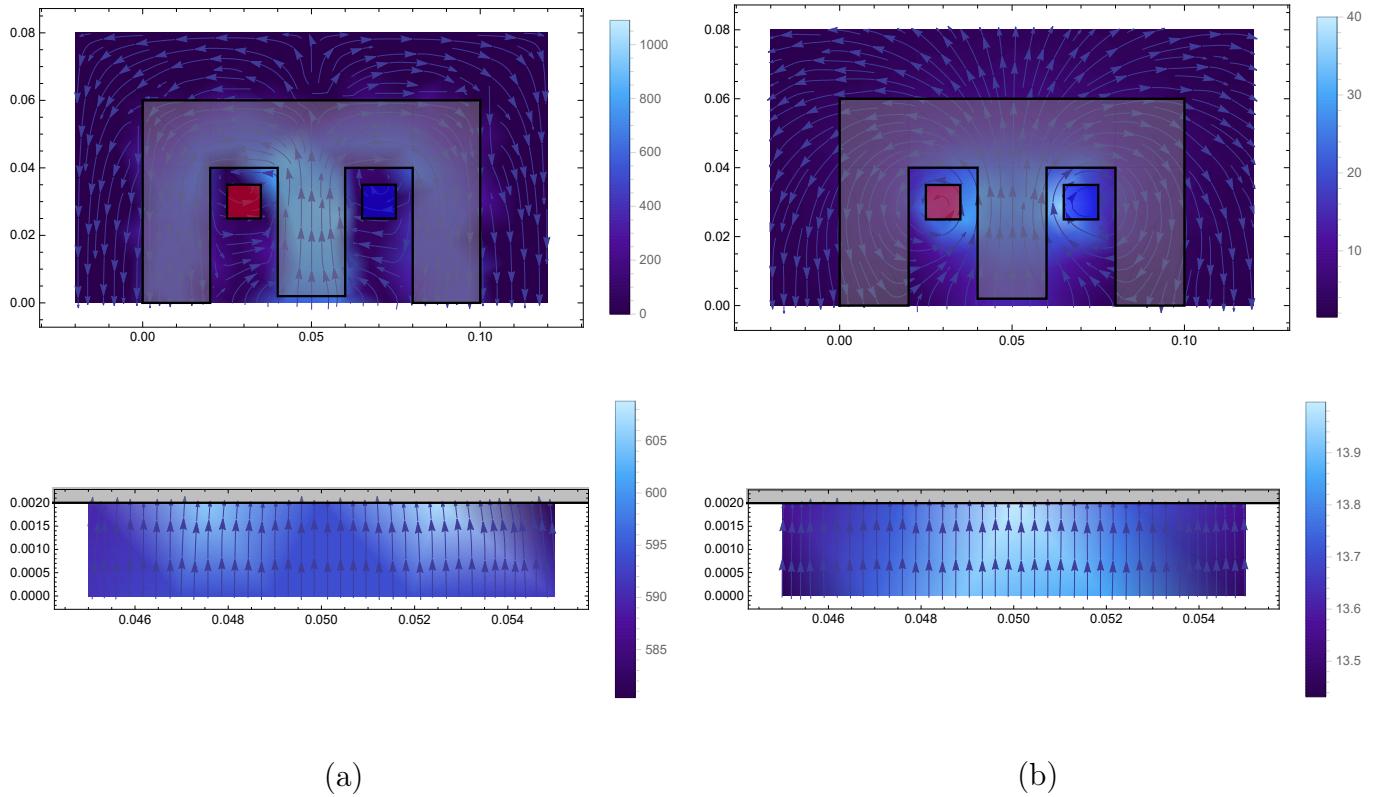


Рис. 3: Магнитное поле в области Ω_{field} для линейной (а) и нелинейной задач (б)

При плотности тока $J_z = 10^{10} \text{ A m}^{-2}$ среднеквадратичное отклонение $\sqrt{m(\|\mathbf{B}\| - B_{\text{mean}})^2}$ составляет

- 3.2, или .5% от среднего значения B_{mean} линейной задачи;
- .13, или 1% от среднего значения B_{mean} нелинейной задачи.

Таким образом, **магнитное поле очень близко к постоянному в области Ω_{field} .** Это справедливо для обеих конфигураций.

4 Влияние силы тока на магнитное поле

Будем менять плотность тока и смотреть, как себя ведёт среднее значение B_{mean} модуля магнитного поля в области Ω_{field} .

Из рисунка 4а видно, что для линейной конфигурации характерна линейная зависимость. При малом токе ($\leq 10^7$) нелинейная задача ведёт себя как линейная, однако при сильном токе ситуация сильно меняется — см. рисунки 4б и 4с.

Поведение вектор-потенциала при изменении плотности тока показано на рисунке 5.

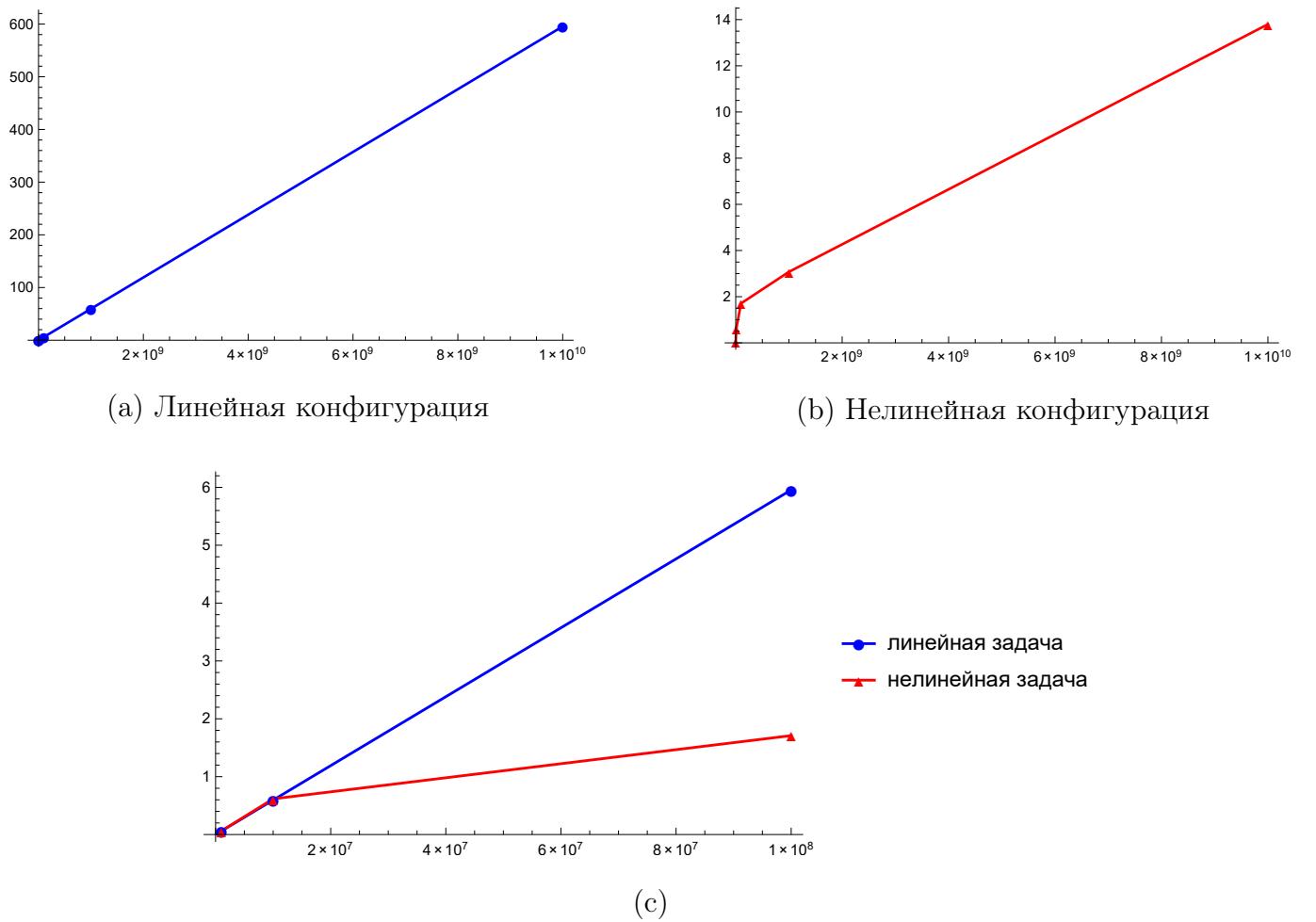


Рис. 4: Зависимость среднего значения B_{mean} модуля магнитного поля в области Ω_{field} от плотности тока J_z

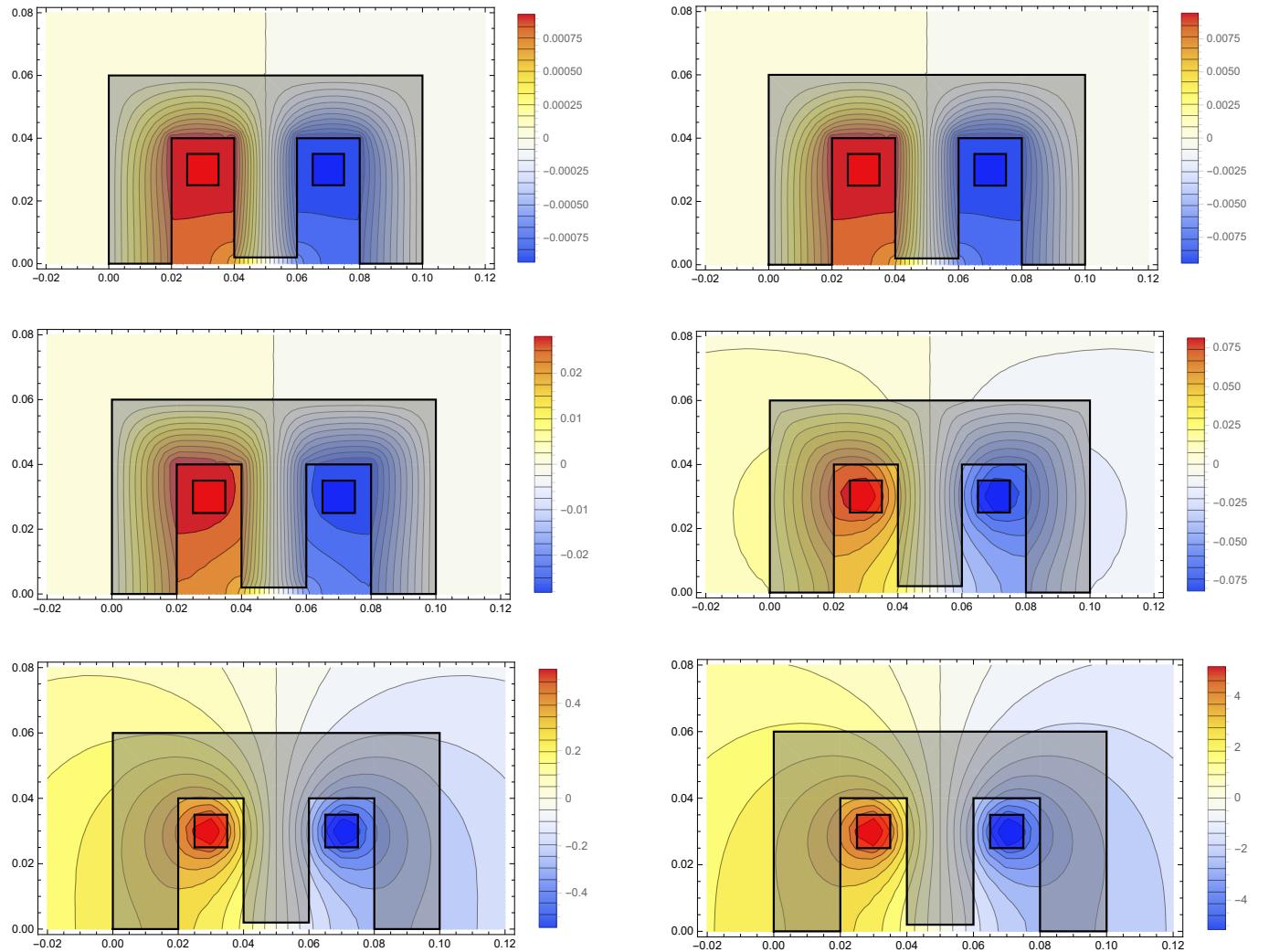
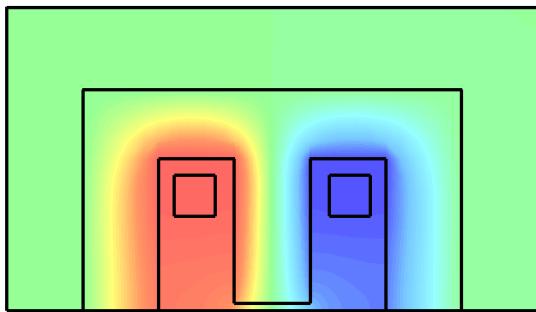


Рис. 5: Сверху вниз и слева направо: изменение вектор-потенциала A_z нелинейной конфигурации при изменении плотности тока $J_z = 10^6, 10^7, \dots, 10^{11} \text{ A m}^{-2}$

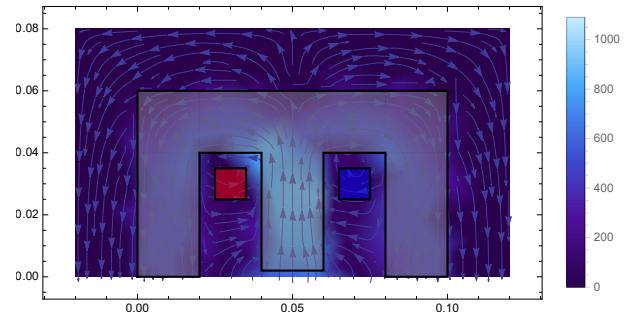
5 Сравнение решений, полученных в CATS' PDEs и Telma

Для сравнения решений мы записали в файл `Point` точки области, с которыми ассоциированы степени свободы КЭ-интерполянта на треугольной сетке, и «скормили» его пакету `Telma`. Далее, получив результат `RESB`, с помощью модуля `FEM for Magnetostatic Poisson Problem/postprocessing` мы построили интерполянт для магнитного поля; он изображён на рисунке 6b — сравните с 3a, полученным нашим решателем.

Норма разницы $\Delta := \sqrt{\int_{\Omega_{\text{field}}} (\|\mathbf{B}^{\text{cats}}\| - \|\mathbf{B}^{\text{telma}}\|)^2 d\mathbf{x}} = .38$ между модулями полей составила меньше десятой доли процента от среднего значения B_{mean} , $\Delta/B_{\text{mean}} = .0006 = .06\%$.



(a)



(b)

Рис. 6: Вектор-потенциал A_z (a), полученный при решении линейной задачи в пакете `Telma`, и соответствующее ему магнитное поле \mathbf{B} (b) при плотности тока $J_z = 10^{10} A m^{-2}$

Список литературы

- [1] М. Г. Персова, М. Г. Токарева, Г. М. Тригубович, А. Г. Задорожный
Метод конечных элементов
Методические указания к выполнению лабораторных работ для студентов 4 курса ФПМИ
НГТУ, 2007