1 Описание задачи

Расчётная область представлена на рисунке 1. При заданной плотности тока $\mathbf{J} = (0, 0, J_z)$, $J_z \coloneqq \pm j\ \left[A\, m^{-2}\right]$ в проводах и магнитной проницаемости $\mu\ \left[N\, A^{-2}\right]$ железного тела, требуется найти результирующее поле магнитной индукции $\mathbf{B}\,[T]$.

Физика данной задачи описывается системой Максвелла. Введём в рассмотрение вектор-потенциал $\mathbf{A}$ через

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A};$$

тогда уравнения Максвелла $\nabla \times \frac{1}{\mu}\mathbf{B} = \mathbf{J}$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ можно переписать в терминах вектор-потенциала

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}.$$

Предполагая, что магнит достаточно длинный в z-направлении и учитывая тот факт, что поле $\mathbf{J}$ имеет только одну ненулевую z-компоненту, $J_z = J_z(x, y)$, мы можем свести последнее уравнение к уравнению Пуассона

$$-\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla A_z\right) = J_z; \tag{1}$$

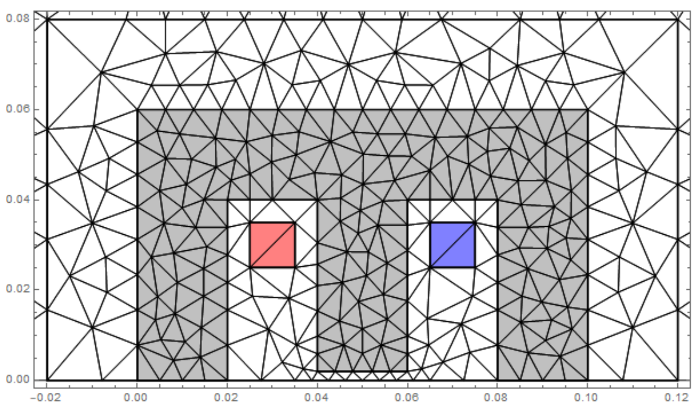


Рис. 1: Сечение в плоскости $x\,O\,y$: железный магнит (выделен серым цветом), медные провода (выделены красным и синим)

из физических соображений задача (1) оснащается однородными краевыми условиями Неймана (на нижней границе) и Дирихле (на остальной части). В результате КЭ-дискретизации задача сведётся к решению линейной

$$\mathbf{S}\,\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2}$$

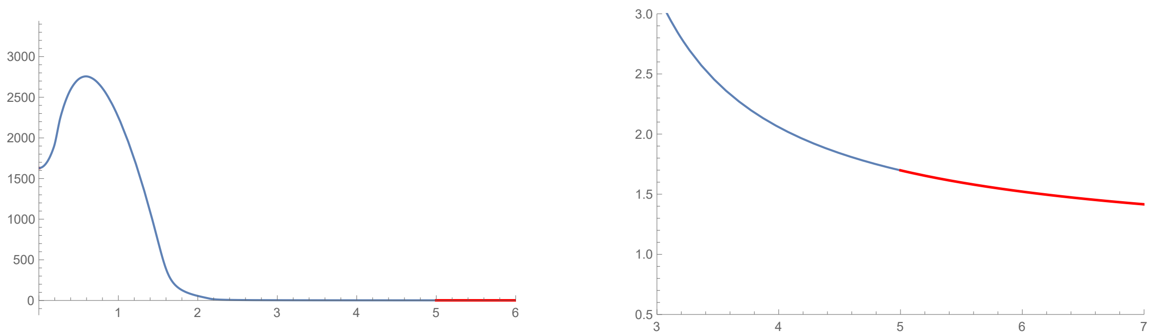
или нелинейной

$$\mathbf{S}(\mathbf{x})\,\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3}$$

системе уравнений в зависимости от того, каким образом магнитная проницаемость зависит от вектор-потенциала.

Представим магнитную проницаемость в виде $\mu = \mu_0\,\hat{\mu}$, где $\mu_0 := 4\,\pi\,10^{-7}\left[N\,A^{-2}\right]$ есть проницаемость вакуума. Мы можем положить $\hat{\mu}_{\text{iron}} = 1000$ — тогда (1) сведётся к линейной системе (2). В таком случае ... (описать скейлинг и метод решения слау)

В действительности же $\hat{\mu}_{\text{iron}}$ нелинейно зависит $\mathbf{B}$ (см. рисунок 2) — $\mu_{\text{iron}} = \mu_{\text{iron}}(||\mathbf{B}|| = ||\nabla A_z||)$. При таком раскладе (1) сведётся к нелинейной системе (2). Далее мы рассмотрим методы решения нелинейных систем.



(a) $\hat{\mu}_{\text{iron}} = \hat{\mu}_{\text{iron}}(||\mathbf{B}||)$

(b) Часть с экстраполяцией

Рис. 2: Интерполянт для магнитной проницаемости, построенный по реальным данным

2 Ускорение Андерсона

Пусть требуется решить нелинейную задачу

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0. \tag{4}$$

От задачи поиска корня (4), записанной в терминах оператора невязки $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, можно перейти к эквивалентвной задаче поиска фиксированной точки

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \tag{5}$$

записанной в форме оператора итераций $\mathbf{g}$. (Сделать это можно, например, положив $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \coloneqq \mathbf{x} - \gamma\, f(\mathbf{x})$.)

Выбрав начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}$, для решения (5) можно применить **метод простой итерации**

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}). \tag{6}$$

Для ускорения сходимости (6) можно предложить следующую идею. Будем искать новое приближения, используя $(m+1)$ предыдущих приближений:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i\, \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k-i)}). \tag{7}$$

Метод (7) будет состоятельным тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1. \tag{8}$$

Коэффициенты α_i будем искать, решая задачу минимизации

$$\boldsymbol{\alpha} = \underset{\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1}{\arg\min} \left\| \sum_{i=0}^{m} \alpha_i\, \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k-i)}) \right\|_2 . \tag{9}$$

Представим коэффициенты α_i в виде

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 - \beta_1, \\ \alpha_1 &= \beta_1 - \beta_2, \\ &\vdots \\ \alpha_{m-1} &= \beta_{m-1} - \beta_m, \\ \alpha_m &= \beta_m; \end{aligned}$$

тогда задачу минимизации с ограничениями (9) можно переписать как задачу минимизации без ограничений — задаче наименьших квадратов

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} &= \underset{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^m}{\arg\min} \left\| \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{i=1}^{m} \beta_i \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k-i)}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k-i+1)})\right) \right\|_2 \\ &= \underset{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^m}{\arg\min} \left\| \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{F}\,\boldsymbol{\beta} \right\|_2, \\ \left(\mathbf{F}^T\,\mathbf{F}\right)\,\boldsymbol{\beta} &= \mathbf{F}^T\,\mathbf{f}(x^{(k)}),\ \text{где} \\ \mathbf{F} &\coloneqq \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k-1)}) \quad \dots \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k-m+1)} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k-m)})\right) \in \mathbb{R}^{m\times n}. \end{aligned} \tag{10}$$

3 Численные результаты