**Noise Analysis**

**INTRODUCTION**

소음의 개념은 안내 시스템 엔지니어에게 중요합니다. 예를 들어, 레이더 유도 전술 미사일에서 비례 항법 유도의 구현에 필요한 시선 속도 신호의 탐색기 측정은 완벽하지 않지만 소음에 의해 손상됩니다. 측정에서 신호를 추출하려면 노이즈의 개념과 다양한 특성을 이해해야 합니다. 또한 노이즈가 존재하는 상태에서 시스템 성능을 평가하기 위해서는 먼저 노이즈를 시뮬레이션하는 방법을 알고 반복적인 시뮬레이션 시험을 통해 실험을 수행하고 해석하는 방법을 알아야 합니다.

이 장에서 개발하고 설명한 개념은 소음 또는 다른 무작위 현상이 존재하는 경우 시스템 성능을 필터링하고 평가하기 위해 본문 전반에 걸쳐 사용됩니다.

**BASIC DEFINITIONS**

이 섹션 [1]에서는 일반적인 지침 논의에서 벗어나 무작위 변수와 관련된 몇 가지 중요한 수량을 정의하는 것으로 시작할 것입니다. 랜덤 변수에는 알 수 없는 특정 값이 있으므로 일반적으로 통계적 특성에 따라 수량화됩니다. 임의의 함수 x의 가장 중요한 통계적 특성 중 하나는 확률 밀도 함수 p(x)입니다. 이 함수는 x의 각 값의 발생 가능성에 대한 척도이며



과

폰트, 라인, 친필, 번호이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

으로 정의됩니다

이는 x가 발생할 확률이 있음을 의미하며 x의 값이 +와 -의 무한대 사이에 있음이 확실합니다. a와 b 사이에 x가 59일 확률은 다음과 같이 확률밀도함수로 표현할 수 있습니다

폰트, 텍스트, 라인, 화이트이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

랜덤 변수와 관련된 또 다른 중요한 수량은 분포 함수입니다. 분포 함수 P(x)는 랜덤 변수가 x보다 작거나 같을 확률입니다. 따라서, 확률 밀도 함수가 알려진 경우, 분포 함수는 다음과 같이 적분하여 찾을 수 있습니다

폰트, 텍스트, 타이포그래피, 라인이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

x의 평균 또는 기대값은 다음과 같이 정의됩니다

폰트, 텍스트, 라인, 화이트이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

따라서 평균은 x의 1차 모멘트라고도 생각할 수 있습니다. 또한 x의 평균 값을 x의 모든 값의 합(적분)으로 생각할 수 있으며, 각 값은 발생 확률에 의해 가중됩니다. 만약 임의 변수 x1, ..., xn이 독립적이라면, 합의 기대값은 각각 기대값들의 합이라고 할 수 있습니다.



x의 2차 모멘트 또는 평균 제곱 값은 다음과 같이 정의됩니다.

폰트, 친필, 텍스트, 라인이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

따라서, x의 rms(Root mean square)는 앞의 방정식의 제곱근을 취함으로써 얻을 수 있습니다

폰트, 텍스트, 화이트, 서예이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

x의 분산인, 은 평균 값에서 x의 기대 제곱 편차로 정의됩니다. 수학적으로, 분산은 다음과 같이 표현될 수 있습니다



우리는 분산이 x의 평균 제곱 값과 x의 평균 제곱 사이의 차이라는 것을 알 수 있습니다. 만약 우리가 독립적인 무작위 변수 x1, ..., xn을 가지고 있다면, 그 합의 분산은 분산들의 합으로 보일 수 있습니다



분산의 제곱근은 표준 편차라고도 합니다. 일반적으로 RMS 값과 표준 편차는 임의 시행에서 평균이 0이 아니면 동일하지 않습니다

라인, 도표, 디자인이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명 확률 밀도 함수의 예는 그림 4.1에 나타낸 균일한 분포입니다. 이 확률 밀도 함수를 사용하면 a와 b 사이의 x 값이 모두 동일하게 발생할 가능성이 있습니다. 개인용 컴퓨터에서 프로그래밍한 적이 있는 엔지니어라면 누구나 익숙해야 하는 균일 분포의 중요한 실용적인 예는 기본 언어 난수 발생기(RND)입니다. BASIC RND [또는 MATLAB rand(1)] 문은 각 호출에 대해 0과 1 사이의 균일하게 분포된 임의의 번호를 제공합니다. 곧 우리는 확률 밀도 함수가 다른 난수가 균일한 분포를 따르는 난수로부터 어떻게 구성될 수 있는지 볼 것입니다. 이전의 정의를 통해 균일한 분포의 평균 값은 다음과 같습니다

Figure 4.1

폰트, 라인, 텍스트, 도표이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

기대값 또는 평균 값이 a와 b 사이의 중간이므로 이는 타당합니다. 균일한 분포의 분산은 또한 우리의 이전 정의로부터 발견될 수 있으며, 다음과 같이 나타낼 수 있습니다

폰트, 텍스트, 라인, 친필이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

즉, 균일한 분포의 난수가 0에서 1까지 다양한 경우 결과 집합의 평균은 1/2이고 분산은 1/12여야 합니다. 우리는 이 장의 후반부에서 서로 다른 확률 밀도 함수를 갖는 난수를 구성하기 위해 균일한 분포의 이 특성을 사용할 것입니다

또 다른 중요한 확률 밀도 함수는 **가우스 분포 또는 정규 분포**입니다. 미사일 호밍 루프에서 우리는 종종 센서 노이즈 교란을 가우스 분포를 갖는 것으로 취급해야 합니다. 이 분포에 대한 확률 밀도 함수는 그림 4.2에 나타나 있으며 다음 공식으로 제공됩니다

폰트, 친필, 텍스트, 라인이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명m과 는 변수

기본 정의를 사용하면 가우스 분포의 기대값 또는 평균 값이 다음과 같이 제공됨을 쉽게 알 수 있습니다



그리고 이것의 분산은



라인, 도표, 그래프이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

따라서 가우스 확률 밀도 함수의 식에서 m과 는 각각 평균과 표준 편차에 해당합니다. 그림 4.2에서 이 종 모양의 분포가 세 번의 표준 편차(3) 후에 사실상 0임을 알 수 있습니다. 분포 함수를 찾기 위한 확률 밀도 함수의 통합은 가우스 랜덤 변수가 평균의 한 표준 편차() 내에 있을 확률이 68%, 평균의 두 표준 편차 내에 있을 확률이 95%임을 보여줍니다, 평균의 세 가지 표준 편차 내에 있을 확률은 99%입니다. 가우스 분포 랜덤 변수의 합에 대한 결과 확률 밀도 함수도 가우스임을 알 수 있습니다. 또한 특정 상황에서 개별 밀도 함수에 관계없이 독립적인 무작위 변수의 합은 무작위 변수의 수가 커질수록 가우스로 향하는 경향이 있음을 보여줄 수 있습니다(이 현상에 대한 설명은 다음 절에서 설명하겠습니다). 그렇기 때문에 많은 랜덤 변수가 가우스 분포를 따릅니다

**GAUSSIAN NOISE EXAMPLE**

노이즈 또는 랜덤 이벤트를 시뮬레이션하려면 적절한 확률 밀도 함수를 사용하여 컴퓨터를 통해 의사 난수를 생성하는 방법을 알아야 합니다. 예를 들어 FORTRAN 언어에는 난수 생성기가 함께 제공되지 않습니다. 그러나 FORTRAN의 많은 마이크로컴퓨터 구현은 원하는 확률 밀도 기능을 가진 노이즈를 구성할 수 있는 확장 기능을 제공합니다. 예를 들어 Macintosh Absoft FORTRAN에서 irand(0) 문은 0과 2^31 사이의 균일한 분포 정수를 생성합니다. Central limit theorem를 통해 균일하게 분포된 변수를 많이 추가하면 가우스 분포 변수가 생성된다는 것을 알 수 있습니다.

**(Listing 4.1에서 한 것)** 원하는 확률 밀도 함수를 사용하여 난수를 구성하는 첫 번째 단계는 균일한 노이즈 생성기를 정규화하여 0과 1 사이의 난수가 생성되도록 하는 것입니다. 두 번째 단계는 균일하게 분포된 랜덤 변수 12개를 추가하고 6개를 빼면 단일 표준 편차를 갖는 평균이 0인 가우스 변수를 얻을 수 있습니다(균일하게 분포된 랜덤 변수 1개의 분산이 1/12이므로 12의 분산은 1이어야 함). 평균 및 단일 분산이 0인 100 가우스 분포 난수 생성에 대한 MATLAB Listing은 Listing 4.1에 나와 있습니다. 중요한 점은 자동으로 가우스 난수를 생성하는 MATLAB 문 randn을 사용하지 않는다는 것입니다.

그림 4.3은 Listing 4.1의 프로그램을 통해 생성된 100개의 난수 각각에 대한 값을 그래픽 형태로 보여줍니다. 그림을 잠깐 살펴보면 데이터의 평균이 거의 0인 것으로 나타납니다. 데이터의 표준 편차는 최대 편차(데이터가 3s 값 내에 있을 가능성 99%)를 확인하고 단순화된 관계를 사용하여 "눈대중화"할 수 있습니다(눈대중으로 제일 큰 것 – 제일 작은 것 =4)



따라서 의 눈에 띄는 값은 단일 표준 편차의 이론적 기대값에 충족하지 못합니다. (값이 (1/12)\*=1이어야함)

컴퓨터가 생성한 100개의 난수의 확률 밀도 함수에 대한 아이디어를 얻기 위해 다른 MATLAB 프로그램이 작성되었으며 Listing 4.2에 나와 있습니다. 기본적으로 각 난수는 발생 빈도와 그에 따른 확률 밀도 함수를 계산하기 위해 BIN에 배치됩니다 [2]. 또한 비교를 위해 0 평균, 단일 분산, 가우스 분포의 확률 밀도 함수에 대한 이론적 공식도 목록에 포함됩니다.

그림 4.4는 계산된 확률 밀도 함수를 그래픽 형태로 보여줍니다. 그림 위에 겹쳐진 것은 이론적인 가우스 분포도입니다. 그림은 표본 크기가 100개의 난수에 불과하기 때문에 컴퓨터 생성 확률 밀도 함수가 가우스 분포를 따른다는 것이 즉시 명백하지 않다는 것을 나타냅니다.

라인, 도표, 텍스트, 그래프이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

표본 크기를 100개의 난수에서 1000개의 난수로 늘리면 컴퓨터에서 생성된 난수의 "좋은 점"이 명확해집니다. 그림 4.5는 생성된 1000개의 난수를 각각 보여줍니다. 그림은 난수의 평균이 여전히 약 0이지만 이제 더 큰 편차(숫자는 +3 사이에서 변동)가 있으며 표준 편차의 대략적인 값은 다음과 같습니다

폰트, 텍스트, 서예, 타이포그래피이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명이건 이론적으로 맞는 값

텍스트, 타이포그래피, 반사이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

텍스트, 도표, 라인, 그래프이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

마지막으로, 그림 4.6은 샘플 크기를 1000개의 숫자로 늘렸을 때, 결과적인 확률 밀도 함수가 이론적인 종 모양의 곡선을 가깝게 따른다는 것을 보여줍니다. 따라서, 우리는 균일하게 분포된 12개의 무작위 변수의 합계로부터 가우스 분포가 어떻게 구성될 수 있는지 보았습니다. 이것은 central limit theorem의 실용적인 적용입니다. 실제로 컴퓨터 실행 시간을 절약하기 위해 균일하게 분포된 12개 미만의 숫자를 추가하여 가우스 분포 난수를 얻을 수 있습니다. 이 책의 나머지 부분에서 원하는 가우스 분포를 얻기 위해 균일하게 분포된 **6개의 숫자만** 추가할 것입니다.

**COMPUTATIONAL ISSUES**

종종 시뮬레이션 출력에서 기본 랜덤 변수 속성(예: 평균, 분산 등)을 계산하려고 합니다. 수학적으로, 우리는 n개의 샘플만 사용할 수 있을 때 유한한 데이터 세트에서 이러한 기본 랜덤 변수 속성을 계산하고자 합니다. 기본 랜덤 변수 특성에 대해 이전에 제시된 공식의 구체적인 공식은 다음 방정식으로 표시됩니다:

텍스트, 폰트, 친필, 라인이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

우리는 이 방정식을 통해 이론적 공식 또는 연속 공식의 적분이 공식에서의 합으로 대체되었음을 알 수 있습니다. 이론적인 랜덤 변수 속성과 계산된 랜덤 변수 속성이 동일하려면 공식에서 표본 수가 무한해야 합니다. 표본 크기가 유한하기 때문에 이산형 또는 계산된 공식은 근사치입니다. 실제로 이러한 공식에서 나온 답에는 자체 통계가 있습니다.

무작위 입력에 기초한 시뮬레이션 출력이 달라질 수 있다는 것을 인식하고, Monte Carlo 접근법[3]은 종종 이 텍스트에서 시스템 성능을 얻기 위해 사용될 것입니다. Monte Carlo 방법은 근사적이며 반복적인 시뮬레이션 시험과 결과 데이터의 후처리를 통해 평균과 표준 편차를 얻을 수 있습니다. 일반적으로 결과의 정확성에 대한 신뢰도를 제공하기 위해 많은 수의 시뮬레이션 시험이 필요합니다. 그러나 단순성과 일반성 때문에 Monte Carlo 접근법은 아마도 통계 분석의 가장 인기 있는 컴퓨터화된 방법일 것입니다

계산된 통계가 정확하지 않고 실제로 통계가 있는 랜덤 변수임을 입증하기 위해 가우스 노이즈의 MATLAB 시뮬레이션을 생성했으며, Listing 4.3은 샘플링된 표준 편차의 계산을 보여줍니다. 프로그램 계산에 사용된 i 샘플의 수는 연구에서 매개변수로 만들어졌고 1에서 100까지 다양했습니다

그림 4.7은 MATLAB 프로그램에서 얻은 계산된 표준 편차(실제 표준 편차는 단일성)가 사용된 표본 크기의 함수임을 보여줍니다. 표본이 20개 미만일 때 표준 편차 추정치의 큰 오차가 발생합니다. 표준 편차를 계산하는 데 많은 표본이 사용되면 계산의 정확도가 크게 향상됩니다. 이 예제에서는 계산된 표준 편차가 단일성 이론 값의 5% 이내가 되려면 100개 이상의 표본이 필요합니다. 시스템 성능을 평가하기 시작할 때, 입력이 무작위일 때, 우리는 이 정보를 고려하여 합리적으로 정확한 결과를 얻기 위해 얼마나 많은 시뮬레이션 시험(몬테카를로 주행)이 필요한지를 결정할 것입니다. 최종적으로 컴퓨터 실행 시간과 수치 정확도 사이의 절충에서 **50회 주행**이 충분하다고 생각합니다

텍스트, 영수증, 라인, 그래프이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

**MORE BASIC DEFINITIONS**

소음 중심 시스템 분석에 필요한 도구를 구축하려면 몇 가지 정의[1]가 더 필요합니다. 지금까지 랜덤 프로세스의 2차 통계에 대해 논의했습니다. 그러나 실제로 우리는 확률 밀도 함수에 의해 주어진 정보보다 더 적은 정보로 제한됩니다. 종종 이러한 랜덤 프로세스의 첫 번째 순간만 측정됩니다. 그러한 순간 중 하나는 autocorrelation function이며, 이는 다음과 같이 정의됩니다

폰트, 타이포그래피, 텍스트, 서예이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

autocorrelation function의 푸리에 변환은 power spectral density라고 불리며 다음과 같이 정의됩니다(<http://www.ktword.co.kr/test/view/view.php?m_temp1=3547>)

폰트, 텍스트, 라인, 친필이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명dimensions of unit squared per Hertz

이 텍스트 전체에 걸쳐 제시된 모든 통계 작업에서 전력 스펙트럼 밀도는 unit squared per Hertz 단위를 가질 것입니다.

power spectral density의 한 가지 단순하고 유용한 형태는 power spectral density가 일정한 백색 소음의 형태입니다,

폰트, 화이트, 타이포그래피, 디자인이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

백색 소음에 대한 autocorrelation function는 다음과 같은 델타 함수입니다

폰트, 텍스트, 서예, 타이포그래피이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

백색 소음은 물리적으로 실현 가능하지 않지만, 시스템 대역폭에 비해 방해가 되는 노이즈가 광대역인 상황에 대한 귀중한 근사치로 사용할 수 있습니다. 또한 백색 소음은 autocorrelation function의 impulsive 특성(적분을 사라지게 함)으로 인해 분석 작업에 유용합니다.

**RESPONSE OF LINEAR SYSTEM TO WHITE NOISE**

우리는 종종 소음에 대한 선형 시스템의 반응을 찾는 데 관심이 있습니다. 만약 시스템이 선형이고, impulse reponse h(t, )를 가지고 있다면, 출력 y(t)는 convolution 적분을 통해 입력 x(t)로 표현될 수 있습니다

폰트, 친필, 타이포그래피, 서예이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

앞의 방정식의 양 변을 제곱하면 산출량이 늘어납니다

폰트, 텍스트, 라인, 타이포그래피이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

만약 x(t)가 무작위라면, 우리는 양쪽의 기대값을 가질 수 있습니다

폰트, 텍스트, 화이트, 서예이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

또한, 입력 x(t)가 power spectral density 를 갖는 백색 잡음이라면, autocorrelation function의 충격 특성 때문에 앞의 방정식의 이중 적분을 단순화할 수 있습니다

폰트, 타이포그래피, 친필, 텍스트이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

폰트, 타이포그래피, 친필, 서예이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

따라서 power spectral density (여기서 는 unit^2/Hz의 단위를 갖습니다)를 갖는 백색 소음에 의해 구동되는 선형 시스템의 **평균 제곱 응답은 impulse 응답의 제곱 적분에 비례합니다**. 앞의 방정식은 일반적인 관계이며 백색 소음에 의해 구동되는 시간 변동 및 시간 불변 선형 시스템 모두에 유효합니다

**LOW-PASS-FILTER EXAMPLE**

평균 제곱 응답 방정식의 유용성을 설명하기 위해 그림 4.8과 같이 백색 소음에 대한 low-pass filter의 응답을 알아보겠습니다. 여기서 입력 x는 power spectral density 를 갖는 백색 소음입니다. 이 시스템은 시간에 구애받지 않고 물리적으로 실현 가능(무원인)하므로 기본적인 소음 관계는 다음과 같이 단순화됩니다

폰트, 타이포그래피, 텍스트, 화이트이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

그림 4.8에 표시된 low-pass filter의 전달 함수가 다음과 같이 주어진다는 것을 먼저 인식함으로써 이전 적분에서 시스템 임펄스 응답을 찾을 수 있습니다

폰트, 상징, 번호, 텍스트이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

폰트, 라인, 도표, 화이트이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

그러므로 이것의 라플라스 역변환은

텍스트, 폰트, 친필, 도표이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

따라서 이것 폰트, 친필, 라인, 타이포그래피이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

Steady state까지 가면 폰트, 텍스트, 타이포그래피, 화이트이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

MATLAB 프로그램을 작성하여 문제를 시뮬레이션하고 이론적 결과와 시뮬레이션 결과가 어떻게 일치하는지 확인할 수 있습니다. 이를 위해서는 가우스 백색 잡음을 시뮬레이션할 수 있어야 합니다. MATLAB에서 가우스 난수는 randn을 사용하여 생성할 수도 있습니다. MATLAB 가우스 분산 난수는 독립적이기 때문에 대역폭이 필터 대역폭보다 훨씬 크면 결과 가우스 난수가 로우패스 필터에 흰색으로 표시됩니다. 그림 4.8의 연속 시스템 시뮬레이션에서 MATLAB 가우스 노이즈 발생기는 모든 적분 간격 h라고 불립니다. 수치 적분 기법으로 정답을 얻기 위해 적분 간격은 항상 최소 시스템 시상수(T) T/h << T보다 최소 몇 배 이상 작도록 선택되기 때문에 노이즈는 시스템에서 흰색으로 보일 것입니다.

가짜 백색 소음의 표준 편차(실제 백색 소음은 무한한 표준 편차를 가짐)는 다음 공식에 따라 원하는 백색 소음 스펙트럼 밀도및 적분 간격 h와 관련이 있습니다.

폰트, 디자인, 타이포그래피이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

백색 소음 구동 로우패스 필터의 MATLAB 시뮬레이션 listing은 Listing 4.4에 나와 있습니다. unity 표준 편차가 있는 가우스 노이즈가 원하는 유사 백색 노이즈 스펙트럼 밀도( = 1)를 얻기 위해 수정된 것을 Listing에서 확인할 수 있습니다. 매 적분 간격마다 대략적인 백색 소음이 시스템에 유입됩니다. 0.2초의 상관관계 시간에 대한 샘플 출력은 그림 4.9에 나와 있습니다. 또한 화이트 노이즈 구동 로우패스 필터의 출력 표준 편차에 대해 이전에 도출된 공식에서 얻은 이론적 결과도 목록과 그림에 나와 있습니다

텍스트, 도표, 라인, 그래프이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명