# Lineare Algebra

## 1. Grundlagen

TODO: Modulo und $\mathbb{Z}_{\ltimes}$

### 1.1. Mengenlehre

#### 1.1.1 Für alle Mengen A,B,C gilt:

1. $\emptyset \subset B$
2. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5. $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
   symmetr. Differenz zweier Mengen: Alle Elemente, die entweder in A oder B enthalten sind.
6. $A \times B = \{(a_1, b_1), ..., (a_1, b_n), (a_2, b_1), ...\}$
   direktes Produkt zweier Mengen, ordnet jedem Element aus $A$ jedes Element aus $B$ zu (Tupel)

### 1.2. Abbildungen

$f : A \to B$

**Surjektivität**

$\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$. Es wird auf alle Werte der Wertemenge abgebildet

Beweisstruktur:

- Sei $y \in B$, finde $x \in A$ mit $f(x) = y$
- Durch Einsetzen ergibt sich $y = f(x)$, kann man dies nach $x$ auflösen, so ist $f$ surjektiv.
  Ist $B = K^n$, z.B. $n = 2$, so wählt man $(a, b) \in K^2, f(x, y) = (a, b)$ und löst das lin. Gleichungssystem nach $x$ und $y$ auf

$f$ surjektiv $\iff \text{Bild } f = B$

**Injektivität**

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Zwei verschiedene Elemente der Definitionsmenge bilden nicht auf gleiche Elemente der Wertemenge ab.

Beweisstruktur:

- $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$
- Gibt es eine Kombination von $x_1, x_2$, sodass $f(x_1) = f(x_2)$, so ist $f$ nicht injektiv
  Ist $A = K^n$, z.B. $n = 2$, so wählt man $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K^2$ und vergleicht $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Hier erhält man zwei Gleichungen, setzt man die eine in die andere ein, so muss $x_1 = x_2$ bzw. $y_1 = y_2$ rauskommen.

$f$ injektiv $\iff \text{Kern } f = \{0\}$

$f$ injektiv $\iff f$ streng monoton steigend

#### 1.2.1 Schnitt-/Vereinigungsbeweis von (Ur-)Bildern

- $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$
  1. Sei $x \in f^{-1}(N_1 \cup N_2) \iff f(x) \in N_1 \cup N_2$
  2. Beweis weiterführen, bis man auf $x \in f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$ kommt
- $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$
  1. Sei $y \in f(M_1 \cup M_2) \iff x \in M_1 \cup M_2$
  2. Beweis weiterführen, bis man auf $y \in f(M_1) \cup f(M_2)$ kommt

## 2. Algebraische Strukturen

### 2.1. Gruppen

Menge mit einer Verknüpfung $\circ$ (z.B. $+$, $\cdot$) $\Rightarrow (M, \circ)$

#### 2.1.1 Halbgruppe

Falls für alle $a, b, c \in M$ das Assoziativgesetz gilt:
$(ab)c \overset{!}{=} a(bc)$, hierbei beschreibt $ab$ die Verknüpfung von $a$ und $b$ ($\circ$)

#### 2.1.2 Monoid

Halbgruppe mit neutralem Element $e$: $ae = ea = a$

#### 2.1.3 abelsche/kommutative (Halb)-Gruppe

(Halb-)Gruppe, wobei das Kommutativgesetz gilt: $ab = ba$

#### 2.1.4 Gruppe

Eine Halbgruppe $(G, \circ)$ heißt Gruppe mit neutralem Element $e$, falls:

1. Die Gruppe abgeschlossen ist: $\forall a, b \in G : a \circ b \in G$
2. es zu jedem $a \in G$ ein $b \in G$ gibt mit $ab = ba = e$. $b$ ist das Inverse von $a$ und ist eindeutig. Man schreibt $b = a^{-1}$

**symmetrische Gruppe** $S_n$: Gruppe der Permutationen:
$(\overset{1}{1}, \overset{2}{3}, \overset{3}{2})(\overset{1}{2}, \overset{2}{3}, \overset{3}{1}) = (3, 2, 1)$. Von rechts nach links gelesen:

1. Die Stelle 1 wird auf die 2 abgebildet, die Stelle 2 wird auf die 3 abgebildet. 1. Element des Ergebnisses, usw...

#### 2.1.5 Untergruppe

Gruppe $(U, \circ)$, wobei $U \subset G$. Dann ist $U$ Untergruppe von $G$

**Axiome zum Beweis von Untergruppe:**

1. $e \in U$
2. $v, w \in U \Rightarrow v \circ w \in U$
3. $v \in U \Rightarrow v^{-1} \in U$

### 2.2. Ring

Menge $R$ mit zwei Verknüpfungen $(R, +, \cdot)$, falls gilt:

1. $(R, +)$ kommutative Gruppe mit neutralem Element e
2. $(R, \cdot)$ Halbgruppe
3. $\forall a, b, c \in R$ gilt $a(b + c) = ab + ac$ und $(b + c)a = ba + ca$ (Distributivgesetz)

### 2.3. Körper

1. $(R, +, \cdot)$ ist ein Ring
2. $(R \setminus \{$ e der kommutativen Gruppe des Rings$\}, \cdot)$ ist kommutative Gruppe

**Wichtige Beispiele**

- $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind Körper
- $(\mathbb{Z}_p, \oplus_p, \odot_p)$ ist für jede Primzahl $p$ ein Körper

### 2.4. Vektorraum

Eine Menge V ist K-Vektorraum (VR über Körper K) mit

1. Vektoraddition: $V \times V \to V, (v, w) \mapsto v + w$
2. Skalarmultiplikation: $K \times V \to V, (\lambda, v) \mapsto \lambda v$

wobei $\forall \lambda, \mu \in K$ und $\forall v, w \in V$ gilt:

1. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
2. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ und $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
3. $1v = v$

#### 2.4.1 Untervektorraum

$U$ ist Untervektorraum von $V$, wenn $U \subset V$, bzw. $\forall v, w \in U, \lambda \in K$

1. $v + w \in U$
2. $\lambda v \in U$
3. $U \neq \emptyset$ bzw. $e \in U$ ( e der kommut. Gruppe des Ringes)

#### 2.4.2 direkte Summe zweier UVRs

Zwei UVRs $U_1, U_2$ heißen direkte Summe $U_1 \oplus U_2$, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. D.h. zwei UVRs treffen sich nur im Ursprung (zwei Geraden (UVR vom $R^3$) schneiden sich nur im Ursprung)

In der Summe $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ ist die Darstellung $u = u_1 + u_2$ eindeutig. Es gibt nur eine mögliche Linearkombination! (Aus ) Z.B. $\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0, y) | x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$, da $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$

#### 2.4.3 Neue UVRs aus Alten

- $U_1 \cap U_2$ ist UVR
- $U_1 + U_2$ ist UVR
- $\Phi : V \to W$ linear mit $U \subset V, T \subset W$:
  $\Phi(U) = \{\Phi(u) | u \in U\}$ UVR von $W$
  $\Phi(T) = \{v \in V | \Phi(v) \in T\}$ UVR von $V$

### 2.5. Spann

Menge aller Vektoren, die aus Linearkombination der Argumente (hier $v_1, v_2$) hervorgehen,
z.B.: $\text{spann}(v_1, v_2) = \{av_1 + bv_2 | a, b \in \mathbb{R}\}$

- $\text{spann}\, M$ ist UVR von $V$, wenn $M \subset V$
- Sind $U_1$ und $U_2$ UVR von $V$: $\text{spann}(U_1 \cup U_2) = U_1 + U_2$
- $\text{spann}\, \emptyset = \{0\}$
- $\Phi : V \to W$ linear: $\text{spann}(\Phi(V)) = \Phi(\text{spann}\, V)$

## 3. Lineare Abbildungen

Seien $V, W$ $K$-Vektorräume. Eine Abbildung $\Phi : V \to W$ heißt **Vektorraumhomomorphismus** oder **linear**, falls $\forall v, w \in V$ und $\forall \lambda \in K$ gilt:

- $\Phi(0) = 0$
- $\Phi(\lambda v + w) = \lambda\Phi(v) + \Phi(w)$

$L(V, W) := \{\Phi : V \to W | \Phi \text{ linear}\}$

**Endomorphismen:** VR-Homomorphismen von $V$ auf sich selbst ($\Phi : V \to V$)
**Isomorphismen:** Bijektive VR-Homomorphismen
**Automorphismen:** Bijektive Endomorphismen

### 3.1. Kern

Sei $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung, der $\text{Kern}\, \Phi$ ist die Menge aller Elemente aus $V$, die auf die $0$ abgebildet werden.
$\text{Kern}\, \Phi := \{v \in V | \Phi(v) = 0\} = \Phi^{-1}(\{0\})$

### 3.2. Bild

Sei $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung, das $\text{Bild}\, \Phi$ ist die Menge aller Elemente aus $W$, auf die abgebildet wird.
$\text{Bild}\, \Phi := \{\Phi(v) | v \in V\}$

### 3.3. Dimension

Menge an lin. unabh. Vektoren eines VRs ($f : V \to W$ lin.)

**Rang:** $\text{Rang}\, f := \dim(\text{Bild}\, f)$
**Dimensionssatz:** $\dim V = \dim(\text{Kern}\, f) + \dim(\text{Bild}\, f)$

- $\dim V = 0 \iff V = \{0\}$

### 3.4. Vektoraumisomorphismus

Zwei VRs sind isomorph $V \tilde{=} W$ genau dann, wenn

- Man eine bijektive lin. Abb. finden kann, die eine Basis von $V$ auf eine Basis von $W$ abbildet
- $\dim V = \dim W$

**Koordinatensystem:** Isomorphismus $\Phi : K^n \to V$

CONTINUE: Determinanten und Bilinearform

## 3.5. Basiswechsel

### 3.5.1 Basiswechselmatrix allg.
$[v]_{B_{neu}} = P_{B_{neu} \leftarrow B_{alt}} [v]_{B_{alt}}$
Basiswechselmatrix finden, die $B_{alt}$ zu $B_{neu}$ abbildet:
1. Nimm den $j$-ten $(v_j)$ Basisvektor aus $B_{alt}$
2. Schreibe ihn in der neuen Basis mithilfe Linearkombination der neuen Basisvektoren
   $v_j = a_1 w_1 + ... + a_n w_n$
3. Die $j$-te Spalte von $P_{B_{neu} \leftarrow B_{alt}}$ ist der Vektor der Koeffizienten $(a_1, ..., a_n)^T$

### 3.5.2 Basiswechselmatrix $R^n$
Basiswechselmatrix von $B_{alt}$ zu $B_{neu}$:
1. Basisvektoren von $B_{alt}$ und $B_{neu}$ als Matrix nebeneinander schreiben
2. $P_{B_{neu} \leftarrow B_{alt}} = B_{neu}^{-1} B_{alt}$
   $P_{B_{alt} \leftarrow B_{neu}} = B_{alt}^{-1} B_{neu}$

## 3.6. Darstellungsmatrix $D$
Beschreibt die Bilder der Basisvektoren einer lin. Abb.

### 3.6.1 Basiswechsel mit Basiswechselmatrix
Basiswechsel im Definitionsraum mit neuer Basis $B_{neu}$:
$D_{B_{neu}, B} = D_{B_{alt}, B} \times P_{B_{alt} \leftarrow B_{neu}}$
Basiswechsel im Bildraum mit neuer Basis $B_{neu}$:
$D_{B, B_{neu}} = P_{B_{neu} \leftarrow B_{alt}} \times D_{B, B_{alt}}$

### 3.6.2 Spezialfälle
Basiswechsel im Definitionsraum mit Standard-Basis im Bildraum:
Bilder der neuen Basisvektoren sind die Spalten der Darstellungsmatrix

Basiswechsel im Bildraum mit Standard-Basis im Definitionsraum:
Die Bilder der Standard-Basisvektoren ausgedrückt in der neuen Basis $\{b_1, ..., b_n\}$ bilden die Spalten der Darstellungsmatrix: $f(e_n) \overset{!}{=} a_1 b_1 + ... + a_n b_n$. Die Koeffizienten bilden die Spalten der Darstellungsmatrix.

## 3.7. Determinanten
$f: V \to V$, $\omega$ Determinantenform:
$(\det f)\omega(v_1, ..., v_n) = \omega(f(v_1), ..., f(v_n))$

### 3.7.1 Eigenschaften
- Vertauscht man zwei Spalten/Zeilen von $A \to A' \implies \det A = -\det A'$
- Skaliert man $n$ Spalten mit $\lambda$, $A \to A' \iff \det A = \lambda^n \det A'$
- Addiert man zwei Spalten aufeinander: $\det A$ bleibt gleich
- $\det(f \circ g) = \det(AB) = \det f \det g = \det A \det B$
- $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
- $\det A = \det A^T$

### 3.7.2 Laplace-Formel
Vorzeichenwechsel beispielhaft erklärt für $K^{3 \times 3}$

| Term | Spalte | sign | # Vertauschungen |
|---|---|---|---|
| $aei$ | $(1, 2, 3)$ | $+$ | 0 |
| $afg$ | $(1, 3, 2)$ | $-$ | 1 |
| $bfg$ | $(2, 3, 1)$ | $-$ | 2 |

## 3.8. euklidische Vektorräume
**Cauchy-Schwarz-Ungl.:** $|\langle v, w\rangle| \leq ||v|| \, ||w||$

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklid. VR. Dann gilt $\forall v, w \in V$:
1. **Polarisation:** $\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}(||v+w||^2 - ||v-w||^2)$
2. **Parallelogrammgleichung:**
   $2(||v||^2 + ||w||^2) = ||v+w||^2 + ||v-w||^2$

Für eine bel. Norm gilt: Die Parallelogrammgleichung gilt $\iff$ Die Norm kommt von einem Skalarprodukt. Dann erhält man das Skalarprodukt durch Polarisation und es gilt: $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

### 3.8.1 Skalarprodukt
$\langle x, y\rangle = x^T E y$
- bilinear: $\langle a, b+c\rangle = \langle a, b\rangle + \langle a, c\rangle$
- symmetr.: $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$
- pos. definit: $\langle v, v\rangle > 0$ oder $\langle v, v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0$

### 3.8.2 Norm
Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:
- $||\lambda v|| = |\lambda| \, ||v|| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$
- $||a|| > 0$ oder $||a|| = 0 \Rightarrow a = 0$
- $\forall v, w \in V$ gilt die Dreiecksungleichung:
  $||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$

## 3.9. Gram-Schmidt-Orthonormalisierung
$w_n$ Ausgangsvektoren, $v_n$ Orthonormale Vektoren:
$\tilde{v_3} = w_3 - \langle w_3, v_1\rangle v_1 - \langle w_3, v_2\rangle v_2$

### 3.9.1 orthogonale Projektion
Abbildung $\pi_U : V \to U$ die Vektoren in $V$ auf einen Unterraum projeziert.
Für eine Orthonormalbasis $u_1, ..., u_k$ von $U$ gilt:
$\pi_U(v) = \sum_{i=1}^k \langle v, u_i\rangle u_i$

### 3.9.2 orthogonales Komplement $U^\perp$
Vektoren, die senkrecht zu einem Unterraum U sind.
- $U^\perp = \mathrm{Kern}\, \pi_U$
- $U^\perp$ sind alle Vektoren, dessen Skalarprodukt mit Vektoren aus dem Unterraum 0 ist: $A^T v = 0$ mit $A$ als Matrix der Basen des Unterraums als Spalten.

### 3.9.3 Adjungierte $f^*$ von $f \in \mathrm{End}(V)$
$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle$
Ist $B$ Orthonormalbasis von $V$, so gilt: $D_{B,B}(f^*) = D_{B,B}(f)^T$

### 3.9.4 Orthogonale Abbildung
Bildet Orthonormalbasis auf Orthonormalbasis ab $\to$ Zeilen und Spalten der orthogonalen Matrix $A$ sind Orthonormalbasen.
$A^T = A^{-1}$ und $\det A = \pm 1$

## 3.10. Vektorprodukt
$$v \times x = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$
$$||v \times w|| = ||v|| \, ||w|| \sin \angle(v, w)$$
$$\det(u, v, w) = \langle u, v \times w\rangle$$

## 3.11. Eigenvektoren und Eigenwerte
Berechnung zu Matrix $A$:
**Eigenwerte**: $\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$
**Eigenvektoren**: $E_\lambda = \mathrm{Kern}(A - \lambda I)$

### 3.11.1 Definitionen
- **Spektrum**: Menge an Eigenwerten einer Matrix
- **Eigenraum $E_\lambda$ zum Eigenwert** $\lambda$: Unterraum, den die Eigenvektoren zu einem Eigenwert $\lambda$ aufspannen
- **geometrische Vielfachheit**: $\dim E_\lambda$
- **algebraische Vielfachheit**: Die Vielfachheit der Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_A$ (z.B. doppelte Nullstelle)

### 3.11.2 Eigenschaften
- Basiswechsel mit Basiswechselmatrix $B$: $B^{-1}AB$ ändert die Eigenwerte von $A$ nicht
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig

## 3.12. unitäre Vektorräume
Vektorräume über $\mathbb{C}$, wobei gilt
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist linear im ersten Argument (2. Argument konstant gehalten)
- $\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle$ (nur im 2. Argument)
- $\langle v, \lambda w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle$ (nur im 2. Argument)
- $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$
- $\langle v, v\rangle > 0 \; \forall v \in V \setminus \{0\}$

Äquivalente ($\iff$) Aussagen:
- $f$ ist unitär
- $f$ ist längentreu
- $f^* \circ f = f \circ f^* = id \iff A^*A = AA^* = I$
- Die Zeilen und Spalten von $A$ bilden jeweils eine Orthonormalbasis

## 3.13. Diagonalisierung

### 3.13.1 Diagonalisierbarkeit
- $f$ ist diagonalisierbar, falls $V$ eine Basis aus Eigenvektoren besitzt
- $D_f \in K^{n \times n}$ ist diagonalisierbar, falls $B^{-1} D_f B$ Diagonalgestalt hat ($B$: Basiswechselmatrix, $D_f$: Darstellungsmatrix)
- $V$ kann als direkte Summe aller Eigenräume geschrieben werden: $\dim E_{\lambda_1} + ... + \dim E_{\lambda_k} = \dim V$. Die Basis aus Eigenvektoren bildet sich aus der Vereinigung der Basen der Eigenräume.
  *Hat man z.B. zwei Mal den gleichen Eigenwert $\mu$, so ist $A$ nur diagonalisierbar, falls $\dim E_\mu = 2$ ist. Es also zwei Eigenvektoren zu dem Eigenwert $\mu$ gibt*
- Jede Selbstadjungierte ($f^* = f$) ist diagonalisierbar mit einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren

### 3.13.2 Spur $\mathrm{tr}\, A$
Summe der Diagonaleinträge einer Matrix. Immer gleich der Summe der Eigenwerte

# 4. Matrix-Lookup-Table

## 4.1. Rechenregeln
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k} \to AB$ definiert: $AB \in \mathbb{R}^{m \times k}$
- $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$
- $\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$

## 4.2. Standard-Matrix

- Menge an lin. unabh. Spalten/Zeilen von A: $\operatorname{Rang} A$
- $\dim(\operatorname{Kern} A) =$ Spaltenanzahl $- \operatorname{Rang} A$
- $f : V \to W$: $\dim V =$ Spaltenanzahl, $\dim W =$ Zeilenanzahl
- $\operatorname{Rang}(AB) \leq \min(\operatorname{Rang} A, \operatorname{Rang} B)$

### 4.2.1 Invertierbarkeit $A \in \operatorname{Mat}(n, n, K)$

- $A$ invertb. $\iff \operatorname{Rang} A = n \iff \dim(\operatorname{Kern} A) = 0 \to A$ besitzt keine Nullzeile/-spalte
- $A$ invertierbar $\iff A$ bijektiv
- $A$ invertierbar $\iff \det A \neq 0$
- $A$ Nullzeile/-spalte $\iff A$ nicht invertb.

### 4.2.2 Transposition

- $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} A^T$ (Zeilenrang = Spaltenrang)
- symmetr. Matrix: $A^T = A$: $a_{ji} = a_{ij}$
- schiefsymmetr. Matrix: $A^T = -A^T$: $a_{ji} = -a_{ij}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

## 4.3. Gauß

- Anzahl der lin. unabh. Nicht-Nullzeilen $\iff \operatorname{Rang} A$

### 4.3.1 Lösbarkeit der erw. Matrix $[A|b]$

- Unlösbar: Es existiert Nullzeile links und ein Nicht-Null Eintrag rechts
- Eindeutig lösbar: $\operatorname{Rang} A =$ Anzahl der Variablen und $b \in \operatorname{Bild} A$
- Unendl. viele Lösungen: $\operatorname{Rang} A <$ Anzahl der Variablen $\to$ Nullzeile rechts und Nulleintrag links
- Homog. System $b = 0$: Lösungsmenge ist VR - der $\operatorname{Kern} A \Rightarrow \dim L = \dim V - \operatorname{Rang} A$
- Inhomog. System: Lösungsmenge ist Partikularlösung + Kern (affiner Unterraum)