

1. Grundlagen

TODO: Modulo und \mathbb{Z}_n

1.1. Abbildungen

$f : A \rightarrow B$

Surjektivität

$\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$. Es wird auf alle Werte der Wertemenge abgebildet

Beweisstruktur:

- Sei $y \in B$, finde $x \in A$ mit $f(x) = y$
- Durch Einsetzen ergibt sich $y = f(x)$, kann man dies nach x auflösen, so ist f surjektiv.

Injektivität

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Zwei verschiedene Elemente der Definitionsmenge bilden nicht auf gleiche Elemente der Wertemenge ab.

Beweisstruktur:

- $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$
- Gibt es eine Kombination von x_1, x_2 , sodass $f(x_1) = f(x_2)$, so ist f nicht injektiv

f injektiv $\iff f$ streng monoton steigend

2. Algebraische Strukturen

2.1. Gruppen

Menge mit einer Verknüpfung \circ (z.B. $+$, \cdot) $\Rightarrow (M, \circ)$

2.1.1 Halbgruppe

Falls für alle $a, b, c \in M$ das Assoziativgesetz gilt:

$(ab)c \stackrel{!}{=} a(bc)$, hierbei beschreibt ab die Verknüpfung von a und b (\circ)

2.1.2 Gruppe

Eine Halbgruppe (G, \circ) heißt Gruppe mit neutralem Element e , falls:

1. Die Gruppe abgeschlossen ist: $\forall a, b \in G : a \circ b \in G$
2. es zu jedem $a \in G$ ein $b \in G$ gibt mit $ab = ba = e$.
 $b = a^{-1}$ und ist eindeutig.

2.1.3 Untergruppe

Gruppe (U, \circ) , wobei $U \subset G$. Dann ist U Untergruppe von G

Axiome zum Beweis von Untergruppe:

1. $e \in U$
2. $v, w \in U \Rightarrow v \circ w \in U$
3. $v \in U \Rightarrow v^{-1} \in U$

2.2. Ring

Menge R mit zwei Verknüpfungen $(R, +, \cdot)$, falls gilt:

1. $(R, +)$ kommutative Gruppe mit neutralem Element **e**
2. (R, \cdot) Halbgruppe
3. $\forall a, b, c \in R$ gilt $a(b + c) = ab + ac$ und $(b + c)a = ba + ca$ (Distributivgesetz)

2.3. Körper

1. $(R, +, \cdot)$ ist ein Ring
2. $(R \setminus \{\mathbf{e}\}, \cdot)$ der kommutativen Gruppe des Rings, \cdot ist kommutative Gruppe

Wichtige Beispiele

- $(\mathbb{Z}_p, \oplus_p, \odot_p)$ ist für jede Primzahl p ein Körper

2.4. Vektorraum

Eine Menge V ist K -Vektorraum (VR über Körper K) mit

1. Vektoraddition: $V \times V \rightarrow V, (v, w) \mapsto v + w$
2. Skalarmultiplikation: $K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda v$

wobei $\forall \lambda, \mu \in K$ und $\forall v, w \in V$ gilt:

1. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
2. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ und $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
3. $1v = v$

2.4.1 Untervektorraum

U ist Untervektorraum von V , wenn $U \subset V$, bzw. $\forall v, w \in U, \lambda \in K$

1. $v + w \in U$
2. $\lambda v \in U$
3. $U \neq \emptyset$ bzw. $e \in U$ (**e** der kommut. Gruppe des Ringes)

2.4.2 direkte Summe zweier UVRs

Zwei UVRs U_1, U_2 heißen direkte Summe $U_1 \oplus U_2$, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. D.h. zwei UVRs treffen sich nur im Ursprung

2.4.3 Neue UVRs aus Alten

- $U_1 \cap U_2$ ist UVR
- $U_1 + U_2$ ist UVR
- $\Phi : V \rightarrow W$ linear mit $U \subset V, T \subset W$:
 $\Phi(U) = \{\Phi(u) | u \in U\}$ UVR von W
 $\Phi(T) = \{v \in V | \Phi(v) \in T\}$ UVR von V

2.5. Spann

Menge aller Vektoren, die aus Linearkombination der Argumente (hier v_1, v_2) hervorgehen,

z.B.: $\text{spann}(v_1, v_2) = \{av_1 + bv_2 | a, b \in \mathbb{R}\}$

- $\text{spann } M$ ist UVR von V , wenn $M \subset V$
- Sind U_1 und U_2 UVR von V : $\text{spann}(U_1 \cup U_2) = U_1 + U_2$
- $\text{spann } \emptyset = \{0\}$
- $\Phi : V \rightarrow W$ linear: $\text{spann}(\Phi(V)) = \Phi(\text{spann } V)$

3. Lineare Abbildungen

Seien V, W K -Vektorräume. Eine Abbildung $\Phi : V \rightarrow W$ heißt **Vektorraumhomomorphismus** oder **linear**, falls $\forall v, w \in V$ und $\forall \lambda \in K$ gilt:

- $\Phi(0) = 0$
- $\Phi(\lambda v + w) = \lambda \Phi(v) + \Phi(w)$

$L(V, W) := \{\Phi : V \rightarrow W | \Phi \text{ linear}\}$

Endomorphismen: VR-Homomorphismen von V auf sich selbst ($\Phi : V \rightarrow V$)

Isomorphismen: Bijektive VR-Homomorphismen

Automorphismen: Bijektive Endomorphismen

3.1. Dimension

Menge an lin. unabh. Vektoren eines VRs ($f : V \rightarrow W$ lin.)

Dimensionssatz: $\dim V = \dim(\text{Kern } f) + \dim(\text{Bild } f)$

- $\dim V = 0 \iff V = \{0\}$

3.2. Vektorraumisomorphismus

Zwei VRs sind isomorph $V \cong W$ genau dann, wenn

- Man eine bijektive lin. Abb. finden kann, die eine Basis von V auf eine Basis von W abbildet
- $\dim V = \dim W$

Koordinatensystem: Isomorphismus $\Phi : K^n \rightarrow V$

3.3. Basiswechsel

3.3.1 Basiswechselmatrix allg.

$[v]_{B_{\text{neu}}} = P_{B_{\text{neu}} \leftarrow B_{\text{alt}}} [v]_{B_{\text{alt}}}$

$[v]_{B_{\text{neu}}} = (a_1, \dots, a_n)^T$ mit $[v]_{B_{\text{alt}}} \stackrel{!}{=} a_1 [b_{1, \text{neu}}]_{B_{\text{alt}}} + \dots + a_n [b_{n, \text{neu}}]_{B_{\text{alt}}}$

Basiswechselmatrix finden, die B_{alt} zu B_{neu} abbildet:

1. Nimm den j -ten (v_j) Basisvektor aus B_{alt}
2. Schreibe ihn in der neuen Basis mithilfe Linearkombination der neuen Basisvektoren
 $v_j = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$
3. Die j -te Spalte von $P_{B_{\text{neu}} \leftarrow B_{\text{alt}}}$ ist der Vektor der Koeffizienten $(a_1, \dots, a_n)^T$

3.3.2 Basiswechselmatrix R^n

Basiswechselmatrix von B_{alt} zu B_{neu} :

1. Basisvektoren von B_{alt} und B_{neu} als Matrix nebeneinander schreiben
2. $P_{B_{\text{neu}} \leftarrow B_{\text{alt}}} = B_{\text{neu}}^{-1} B_{\text{alt}}$
 $P_{B_{\text{alt}} \leftarrow B_{\text{neu}}} = B_{\text{alt}}^{-1} B_{\text{neu}}$

3.4. Darstellungsmatrix D

Beschreibt die Bilder der Basisvektoren einer lin. Abb.

3.4.1 Basiswechsel mit Basiswechselmatrix

Basiswechsel im Definitionsraum mit neuer Basis B_{neu} :

$D_{B_{\text{neu}}, B} = D_{B_{\text{alt}}, B} \times P_{B_{\text{alt}} \leftarrow B_{\text{neu}}}$

$D_{B_{\text{neu}}, B} = \left[[f(b_{1, \text{neu}})]_B, \dots, [f(b_{n, \text{neu}})]_B \right]$

Basiswechsel im Bildraum mit neuer Basis B_{neu} :

$D_{B, B_{\text{neu}}} = P_{B_{\text{neu}} \leftarrow B_{\text{alt}}} \times D_{B, B_{\text{alt}}}$

$D_{B, B_{\text{neu}}} = \left[[f(b_1)]_{B_{\text{neu}}}, \dots, [f(b_n)]_{B_{\text{neu}}} \right]$

Basiswechsel im Definitionsraum mit B_{neu} und Bildraum mit C_{neu} :

$D_{B_{\text{neu}}, C_{\text{neu}}} = P_{C_{\text{neu}} \leftarrow C_{\text{alt}}} \times D_{B_{\text{alt}}, C_{\text{alt}}} \times P_{B_{\text{alt}} \leftarrow B_{\text{neu}}}$

$D_{B_{\text{neu}}, C_{\text{neu}}} = \left[[f(b_{1, \text{neu}})]_{C_{\text{neu}}}, \dots, [f(b_{n, \text{neu}})]_{C_{\text{neu}}} \right]$

3.5. Determinanten

$f : V \rightarrow V, \omega$ Determinantenform:

$(\det f) \omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(f(v_1), \dots, f(v_n))$

3.5.1 Eigenschaften

- Vertauscht man zwei Spalten/Zeilen von $A \rightarrow A' \implies \det A' = -\det A$
- Skaliert man n Spalten mit $\lambda, A \rightarrow A' \iff \det A' = \lambda^n \det A$
- Addiert man zwei Spalten aufeinander: $\det A$ bleibt gleich
- $\det(f \circ g) = \det(AB) = \det f \det g = \det A \det B$
- $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
- $\det A = \det A^T$

4. euklidische Vektorräume

Cauchy-Schwarz-Ungl.: $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklid. VR. Dann gilt $\forall v, w \in V$:

1. **Polarisation:** $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)$
2. **Parallelogrammgleichung:**
 $2(\|v\|^2 + \|w\|^2) = \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2$

Für eine bel. Norm gilt: Die Parallelogrammgleichung gilt \iff Die Norm kommt von einem Skalarprodukt. Dann erhält man das Skalarprodukt durch Polarisation und es gilt: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

4.0.1 Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = x^T E y$$

- bilinear: $\langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$
- symmetr.: $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$
- pos. definit: $\langle v, v \rangle > 0$ oder $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$

4.0.2 Norm

Abbildung $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

- $\| \lambda v \| = |\lambda| \| v \| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$
- $\| a \| > 0$ oder $\| a \| = 0 \Rightarrow a = 0$
- $\forall v, w \in V$ gilt die Dreiecksungleichung:
 $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|$

4.1. Gram-Schmidt-Orthonormalisierung

w_n Ausgangsvektoren, v_n Orthonormale Vektoren:

$$\tilde{v}_3 = w_3 - \langle w_3, v_1 \rangle v_1 - \langle w_3, v_2 \rangle v_2$$

4.1.1 orthogonale Projektion

Für eine Orthonormalbasis u_1, \dots, u_k von U gilt:

$$\pi_U(v) = \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle u_i$$

4.1.2 orthogonales Komplement U^\perp

Vektoren, die senkrecht zu einem Unterraum U sind.

- $U^\perp = \text{Kern } \pi_U$
- U^\perp sind alle Vektoren, dessen Skalarprodukt mit Vektoren aus dem Unterraum 0 ist

4.1.3 Adjungierte f^* von $f \in \text{End}(V)$

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle$$

Ist B ON-Basis von V , so gilt: $D_{B,B}(f^*) = D_{B,B}(f)^T$

5. Matrix-Lookup-Table

5.1. Rechenregeln

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times k} \rightarrow AB$ definiert: $AB \in \mathbb{R}^{m \times k}$
- $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

5.2. Standard-Matrix

- Menge an lin. unabh. Spalten/Zeilen von A : $\text{Rang } A$
- $f : V \rightarrow W$: $\dim V = \text{Spaltenanzahl}, \dim W = \text{Zeilenanzahl}$
- $\text{Rang}(AB) \leq \min(\text{Rang } A, \text{Rang } B)$

5.2.1 Invertierbarkeit $A \in \text{Mat}(n, n, K)$

- A invertb. $\iff \text{Rang } A = n \iff \dim(\text{Kern } A) = 0 \rightarrow A$ besitzt keine Nullzeile/-spalte
- A invertierbar $\iff A$ bijektiv
- A invertierbar $\iff \det A \neq 0$

5.2.2 Transposition

- $\text{Rang } A = \text{Rang } A^T$ (Zeilenrang = Spaltenrang)
- symmetr. Matrix: $A^T = A$: $a_{ji} = a_{ij}$
- schiefssymmetr. Matrix: $A^T = -A$: $a_{ji} = -a_{ij}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

5.3. Gauß

- Anzahl der lin. unabh. Nicht-Nullzeilen $\iff \text{Rang } A$

5.3.1 Lösbarkeit der erw. Matrix $[A|b]$

- Unlösbar: Es existiert Nullzeile links und ein Nicht-Null Eintrag rechts
- Eindeutig lösbar: $\text{Rang } A = \text{Anzahl der Variablen}$ und $b \in \text{Bild } A$
- Unendl. viele Lösungen: $\text{Rang } A < \text{Anzahl der Variablen} \rightarrow$ Nullzeile rechts und Nulleintrag links
- Homog. System $b = 0$: Lösungsmenge ist VR - der Kern $A \Rightarrow \dim L = \dim V - \text{Rang } A$
- Inhomog. System: Lösungsmenge ist Partikulärlösung + Kern (affiner Unterraum)