Lineare Algebra

1. Grundlagen

TODO: Modulo und $\mathbb{Z}_{\ltimes}$

1.1. Mengenlehre

1.1.1 Für alle Mengen A,B,C gilt:

1. $\emptyset \subset B$
2. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5. $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
   symmetr. Differenz zweier Mengen: Alle Elemente, die entweder in A oder B enthalten sind.
6. $A \times B = \{(a_1, b_1), ..., (a_1, b_n), (a_2, b_1), ...\}$
   direktes Produkt zweier Mengen, ordnet jedem Element aus A jedes Element aus B zu (Tupel)

1.2. Abbildungen

$f : A \to B$

Surjektivität
$\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$. Es wird auf alle Werte der Wertemenge abgebildet
Beweisstruktur:

- Sei $y \in B$, finde $x \in A$ mit $f(x) = y$
- Durch Einsetzen ergibt sich $y = f(x)$, kann man dies nach x auflösen, so ist f surjektiv.
  Ist $B = K^n$, z.B. $n = 2$, so wählt man $(a, b) \in K^2, f(x, y) = (a, b)$ und löst das lin. Gleichungssystem nach x und y auf

f surjektiv $\iff \text{Bild}\, f = B$

Injektivität
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Zwei verschiedene Elemente der Definitionsmenge bilden nicht auf gleiche Elemente der Wertemenge ab.
Beweisstruktur:

- $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$
- Gibt es eine Kombination von x_1, x_2, sodass $f(x_1) = f(x_2)$, so ist f nicht injektiv
  Ist $A = K^n$, z.B. $n = 2$, so wählt man $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K^2$ und vergleicht $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Hier erhält man zwei Gleichungen, setzt man die eine in die andere ein, so muss $x_1 = x_2$ bzw. $y_1 = y_2$ rauskommen.

f injektiv $\iff \text{Kern}\, f = \{0\}$

f injektiv $\iff f$ streng monoton steigend

1.2.1 Schnitt-/Vereinigungsbeweis von (Ur-)Bildern

- $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$
  1. Sei $x \in f^{-1}(N_1 \cup N_2) \iff f(x) \in N_1 \cup N_2$
  2. Beweis weiterführen, bis man auf $x \in f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$ kommt
- $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$
  1. Sei $y \in f(M_1 \cup M_2) \iff x \in M_1 \cup M_2$
  2. Beweis weiterführen, bis man auf $y \in f(M_1) \cup f(M_2)$ kommt

2. Algebraische Strukturen

2.1. Gruppen

Menge mit einer Verknüpfung $\circ$ (z.B. $+$, $\cdot$) $\Rightarrow (M, \circ)$

2.1.1 Halbgruppe

Falls für alle $a, b, c \in M$ das Assoziativgesetz gilt:
$(ab)c \overset{!}{=} a(bc)$, hierbei beschreibt ab die Verknüpfung von a und b ($\circ$)

2.1.2 Monoid

Halbgruppe mit neutralem Element e: $ae = ea = a$

2.1.3 abelsche/kommutative (Halb)-Gruppe

(Halb-)Gruppe, wobei das Kommutativgesetz gilt: $ab = ba$

2.1.4 Gruppe

Eine Halbgruppe $(G, \circ)$ heißt Gruppe mit neutralem Element e, falls:

1. Die Gruppe abgeschlossen ist: $\forall a, b \in G : a \circ b \in G$
2. es zu jedem $a \in G$ ein $b \in G$ gibt mit $ab = ba = e$. b ist das Inverse von a und ist eindeutig. Man schreibt $b = a^{-1}$

symmetrische Gruppe S_n: Gruppe der Permutationen:
$(\overset{1}{1}, \overset{2}{3}, \overset{3}{2})(\overset{1}{2}, \overset{2}{3}, \overset{3}{1}) = (3, 2, 1)$. Von rechts nach links gelesen:

1. Die Stelle 1 wird auf die 2 abgebildet, die Stelle 2 wird auf die 3 abgebildet. 1. Element des Ergebnisses, usw...

2.1.5 Untergruppe

Gruppe $(U, \circ)$, wobei $U \subset G$. Dann ist U Untergruppe von G

Axiome zum Beweis von Untergruppe:

1. $e \in U$
2. $v, w \in U \Rightarrow v \circ w \in U$
3. $v \in U \Rightarrow v^{-1} \in U$

2.2. Ring

Menge R mit zwei Verknüpfungen $(R, +, \cdot)$, falls gilt:

1. $(R, +)$ kommutative Gruppe mit neutralem Element e
2. $(R, \cdot)$ Halbgruppe
3. $\forall a, b, c \in R$ gilt $a(b + c) = ab + ac$ und $(b + c)a = ba + ca$ (Distributivgesetz)

2.3. Körper

1. $(R, +, \cdot)$ ist ein Ring
2. $(R \setminus \{$ e der kommutativen Gruppe des Rings$\}, \cdot)$ ist kommutative Gruppe

Wichtige Beispiele

- $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind Körper
- $(\mathbb{Z}_p, \oplus_p, \odot_p)$ ist für jede Primzahl p ein Körper

2.4. Vektorraum

Eine Menge V ist K-Vektorraum (VR über Körper K) mit

1. Vektoraddition: $V \times V \to V, (v, w) \mapsto v + w$
2. Skalarmultiplikation: $K \times V \to V, (\lambda, v) \mapsto \lambda v$

wobei $\forall \lambda, \mu \in K$ und $\forall v, w \in V$ gilt:

1. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
2. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ und $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
3. $1v = v$

2.4.1 Untervektorraum

U ist Untervektorraum von V, wenn $U \subset V$, bzw. $\forall v, w \in U, \lambda \in K$

1. $v + w \in U$
2. $\lambda v \in U$
3. $U \neq \emptyset$ bzw. $e \in U$ (e der kommut. Gruppe des Ringes)

2.4.2 direkte Summe zweier UVRs

Zwei UVRs U_1, U_2 heißen direkte Summe $U_1 \oplus U_2$, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. D.h. zwei UVRs treffen sich nur im Ursprung (zwei Geraden (UVR vom R^3) schneiden sich nur im Ursprung)
In der Summe $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ ist die Darstellung $u = u_1 + u_2$ eindeutig. Es gibt nur eine mögliche Linearkombination! (Aus) Z.B. $\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0, y) | x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$, da $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$

2.4.3 Neue UVRs aus Alten

- $U_1 \cap U_2$ ist UVR
- $U_1 + U_2$ ist UVR
- $\Phi : V \to W$ linear mit $U \subset V, T \subset W$:
  $\Phi(U) = \{\Phi(u) | u \in U\}$ UVR von W
  $\Phi(T) = \{v \in V | \Phi(v) \in T\}$ UVR von V

2.5. Spann

Menge aller Vektoren, die aus Linearkombination der Argumente (hier v_1, v_2) hervorgehen,
z.B.: $\text{spann}(v_1, v_2) = \{av_1 + bv_2 | a, b \in \mathbb{R}\}$

- $\text{spann}\, M$ ist UVR von V, wenn $M \subset V$
- Sind U_1 und U_2 UVR von V: $\text{spann}(U_1 \cup U_2) = U_1 + U_2$
- $\text{spann}\, \emptyset = \{0\}$
- $\Phi : V \to W$ linear: $\text{spann}(\Phi(V)) = \Phi(\text{spann}\, V)$

3. Lineare Abbildungen

Seien V, W K-Vektorräume. Eine Abbildung $\Phi : V \to W$ heißt **Vektorraumhomomorphismus** oder **linear**, falls $\forall v, w \in V$ und $\forall \lambda \in K$ gilt:

- $\Phi(0) = 0$
- $\Phi(\lambda v + w) = \lambda\Phi(v) + \Phi(w)$

$L(V, W) := \{\Phi : V \to W | \Phi \text{ linear}\}$

Endomorphismen: VR-Homomorphismen von V auf sich selbst ($\Phi : V \to V$)
Isomorphismen: Bijektive VR-Homomorphismen
Automorphismen: Bijektive Endomorphismen

3.1. Kern

Sei $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung, der $\text{Kern}\, \Phi$ ist die Menge aller Elemente aus V, die auf die 0 abgebildet werden.
$\text{Kern}\, \Phi := \{v \in V | \Phi(v) = 0\} = \Phi^{-1}(\{0\})$

3.2. Bild

Sei $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung, das $\text{Bild}\, \Phi$ ist die Menge aller Elemente aus W, auf die abgebildet wird.
$\text{Bild}\, \Phi := \{\Phi(v) | v \in V\}$

3.3. Dimension

Menge an lin. unabh. Vektoren eines VRs ($f : V \to W$ lin.)
Rang: $\text{Rang}\, f := \dim(\text{Bild}\, f)$
Dimensionssatz: $\dim V = \dim(\text{Kern}\, f) + \dim(\text{Bild}\, f)$

- $\dim V = 0 \iff V = \{0\}$

3.4. Vektoraumisomorphismus

Zwei VRs sind isomorph $V \tilde{=} W$ genau dann, wenn

- Man eine bijektive lin. Abb. finden kann, die eine Basis von V auf eine Basis von W abbildet
- $\dim V = \dim W$

Koordinatensystem: Isomorphismus $\Phi : K^n \to V$

CONTINUE: Section: Lin. Abbildungen und Matrizen