



Lineare Algebra

1. Grundlagen

TODO: Modulo und \mathbb{Z}_\times

1.1 Mengenlehre

1.1.1 Für alle Mengen A,B,C gilt:

- 1. $\emptyset \subset B$
- 2. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- 3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- 4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 5. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
symmetr. Differenz zweier Mengen: Alle Elemente, die entweder in A oder B enthalten sind.
- 6. $A \times B = \{(a_1, b_1), \dots, (a_1, b_n), (a_2, b_1), \dots\}$
direktes Produkt zweier Mengen, ordnet jedem Element aus A jedes Element aus B zu (Tupel)

1.2 Abbildungen

$$f : A \rightarrow B$$

Surjektivität

$\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$. Es wird auf alle Werte der Wertemenge abgebildet
Beweisstruktur:

- Sei $y \in B$, finde $x \in A$ mit $f(x) = y$
- Durch Einsetzen ergibt sich $y = f(x)$, kann man dies nach x auflösen, so ist f surjektiv.

Ist $B = K^n$, z.B. $n = 2$, so wählt man $(a, b) \in K^2$, $f(x, y) = (a, b)$ und löst das lin. Gleichungssystem nach x und y auf

$$f \text{ surjektiv} \iff \text{Bild } f = B$$

Injektivität

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Zwei verschiedene Elemente der Definitionsmenge bilden nicht auf gleiche Elemente der Wertemenge ab.

Beweisstruktur:

- $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$
- Gibt es eine Kombination von x_1, x_2 , sodass $f(x_1) = f(x_2)$, so ist f nicht injektiv
- Ist $A = K^n$, z.B. $n = 2$, so wählt man $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K^2$ und vergleicht $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Hier erhält man zwei Gleichungen, setzt man die eine in die andere ein, so muss $x_1 = x_2$ bzw. $y_1 = y_2$ rauskommen.

$$f \text{ injektiv} \iff \text{Kern } f = \{0\}$$

$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ streng monoton steigend}$$

1.2.1 Schnitt-/Vereinigungsbeweis von (Ur-)Bildern

- $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$
 1. Sei $x \in f^{-1}(N_1 \cup N_2) \iff f(x) \in N_1 \cup N_2$
 2. Beweis weiterführen, bis man auf $x \in f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$ kommt
- $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$
 1. Sei $y \in f(M_1 \cup M_2) \iff x \in M_1 \cup M_2$
 2. Beweis weiterführen, bis man auf $y \in f(M_1) \cup f(M_2)$ kommt

2. Algebraische Strukturen

2.1 Gruppen

Menge mit einer Verknüpfung \circ (z.B. $+$, \cdot) $\Rightarrow (M, \circ)$

2.1.1 Halbgruppe

Falls für alle $a, b, c \in M$ das Assoziativgesetz gilt:
 $(ab)c \stackrel{!}{=} a(bc)$, hierbei beschreibt ab die Verknüpfung von a und b (\circ)

2.1.2 Monoid

Halbgruppe mit neutralem Element e : $ae = ea = a$

2.1.3 abelsche/kommutative (Halb)-Gruppe

(Halb-)Gruppe, wobei das Kommutativgesetz gilt: $ab = ba$

2.1.4 Gruppe

Eine Halbgruppe (G, \circ) heißt Gruppe mit neutralem Element e , falls:

1. Die Gruppe abgeschlossen ist: $\forall a, b \in G : a \circ b \in G$
2. es zu jedem $a \in G$ ein $b \in G$ gibt mit $ab = ba = e$. b ist das Inverse von a und ist eindeutig. Man schreibt $b = a^{-1}$

symmetrische Gruppe S_n : Gruppe der Permutationen:
 $\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3, 2 & 2, 3, 1 \end{smallmatrix} = (3, 2, 1)$. Von rechts nach links gelesen:

1. Die Stelle 1 wird auf die 2 abgebildet, die Stelle 2 wird auf die 3 abgebildet. 1. Element des Ergebnisses, usw...

2.1.5 Untergruppe

Gruppe (U, \circ) , wobei $U \subset G$. Dann ist U Untergruppe von G

Axiome zum Beweis von Untergruppe:

1. $e \in U$
2. $v, w \in U \Rightarrow v \circ w \in U$
3. $v \in U \Rightarrow v^{-1} \in U$

2.2 Ring

Menge R mit zwei Verknüpfungen $(R, +, \cdot)$, falls gilt:

1. $(R, +)$ kommutative Gruppe mit neutralem Element e
2. (R, \cdot) Halbgruppe
3. $\forall a, b, c \in R$ gilt $a(b+c) = ab+ac$ und $(b+c)a = ba+ca$ (Distributivgesetz)

2.3 Körper

1. $(R, +, \cdot)$ ist ein Ring
2. $(R \setminus \{e\} \text{ der kommutativen Gruppe des Rings}, \cdot)$ ist kommutative Gruppe

Wichtige Beispiele

- \mathbb{Q} und \mathbb{R} sind Körper
- $(\mathbb{Z}_p, \oplus_p, \odot_p)$ ist für jede Primzahl p ein Körper

2.4 Vektorraum

Eine Menge V ist K-Vektorraum (VR über Körper K) mit

1. Vektoraddition: $V \times V \rightarrow V, (v, w) \mapsto v + w$
2. Skalarmultiplikation: $K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda v$ wobei $\forall \lambda, \mu \in K$ und $\forall v, w \in V$ gilt:
 1. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
 2. $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$ und $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$
 3. $1v = v$

2.4.1 Untervektorraum

U ist Untervektorraum von V , wenn $U \subset V$, bzw. $\forall v, w \in U, \lambda \in K$

1. $v + w \in U$
2. $\lambda v \in U$
3. $U \neq \emptyset$ bzw. $e \in U$ (e der kommut. Gruppe des Ringes)

2.4.2 direkte Summe zweier UVRs

Zwei UVRs U_1, U_2 heißen direkte Summe $U_1 \oplus U_2$, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. D.h. zwei UVRs treffen sich nur im Ursprung (zwei Geraden (UVR vom R^3) schneiden sich nur im Ursprung)

In der Summe $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ ist die Darstellung $u = u_1 + u_2$ eindeutig. Es gibt nur eine mögliche Linearkombination! (Aus) Z.B. $\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$, da $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$

2.4.3 Neue UVRs aus Alten

- $U_1 \cap U_2$ ist UVR
- $U_1 + U_2$ ist UVR
- $\Phi : V \rightarrow W$ linear mit $U \subset V, T \subset W$:
 $\Phi(U) = \{\Phi(u) \mid u \in U\}$ UVR von W
 $\Phi(T) = \{v \in V \mid \Phi(v) \in T\}$ UVR von V

2.5 Spann

Menge aller Vektoren, die aus Linearkombination der Argumente (hier v_1, v_2) hervorgehen,
z.B.: $\text{spann}(v_1, v_2) = \{av_1 + bv_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

- $\text{spann } M$ ist UVR von V , wenn $M \subset V$
- Sind U_1 und U_2 UVR von V : $\text{spann}(U_1 \cup U_2) = U_1 + U_2$
- $\text{spann } \emptyset = \{0\}$
- $\Phi : V \rightarrow W$ linear: $\text{spann}(\Phi(V)) = \Phi(\text{spann } V)$

3. Lineare Abbildungen

Seien V, W K-Vektorräume. Eine Abbildung $\Phi : V \rightarrow W$ heißt **Vektorraumhomomorphismus** oder **linear**, falls $\forall v, w \in V$ und $\forall \lambda \in K$ gilt:

- $\Phi(0) = 0$
- $\Phi(\lambda v + w) = \lambda\Phi(v) + \Phi(w)$

$$L(V, W) := \{\Phi : V \rightarrow W \mid \Phi \text{ linear}\}$$

Endomorphismen: VR-Homomorphismen von V auf sich selbst ($\Phi : V \rightarrow V$)

Isomorphismen: Bijektive VR-Homomorphismen

Automorphismen: Bijektive Endomorphismen

3.1 Kern

Sei $\Phi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, der Kern Φ ist die Menge aller Elemente aus V , die auf die 0 abgebildet werden.
Kern $\Phi := \{v \in V \mid \Phi(v) = 0\} = \Phi^{-1}(\{0\})$

3.2 Bild

Sei $\Phi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, das Bild Φ ist die Menge aller Elemente aus W , auf die abgebildet wird.

$$\text{Bild } \Phi := \{\Phi(v) \mid v \in V\}$$

3.3 Dimension

Menge an lin. unabh. Vektoren eines VRs ($f : V \rightarrow W$ lin.)

Rang: Rang $f := \dim(\text{Bild } f)$

Dimensionssatz: $\dim V = \dim(\text{Kern } f) + \dim(\text{Bild } f)$

- $\dim V = 0 \iff V = \{0\}$

3.4 Vektorraumisomorphismus

Zwei VRs sind isomorph $V \cong W$ genau dann, wenn

- Man eine bijektive lin. Abb. finden kann, die eine Basis von V auf eine Basis von W abbildet
- $\dim V = \dim W$

Koordinatensystem: Isomorphismus $\Phi : K^n \rightarrow V$

CONTINUE: Determinanten und Bilinearform

3.5. Basiswechsel

3.5.1 Basiswechselmatrix allg.

$$[v]_{B_{neu}} = P_{B_{neu} \leftarrow B_{alt}} [v]_{B_{alt}}$$

Basiswechselmatrix finden, die B_{alt} zu B_{neu} abbildet:

1. Nimm den j -ten (v_j) Basisvektor aus B_{alt}
2. Schreibe ihn in der neuen Basis mithilfe Linearkombination der neuen Basisvektoren
 $v_j = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$
3. Die j -te Spalte von $P_{B_{neu} \leftarrow B_{alt}}$ ist der Vektor der Koeffizienten $(a_1, \dots, a_n)^T$

3.5.2 Basiswechselmatrix R^n

Basiswechselmatrix von B_{alt} zu B_{neu} :

1. Basisvektoren von B_{alt} und B_{neu} als Matrix nebeneinander schreiben
2. $P_{B_{neu} \leftarrow B_{alt}} = B_{neu}^{-1} B_{alt}$
 $P_{B_{alt} \leftarrow B_{neu}} = B_{alt}^{-1} B_{neu}$

3.6. Darstellungsmatrix D

Beschreibt die Bilder der Basisvektoren einer lin. Abb.

3.6.1 Basiswechsel mit Basiswechselmatrix

Basiswechsel im Definitionsräum mit neuer Basis B_{neu} :

$$D_{B_{neu}, B} = D_{B_{alt}, B} \times P_{B_{alt} \leftarrow B_{neu}}$$

Basiswechsel im Bildraum mit neuer Basis B_{neu} :

$$D_{B, B_{neu}} = P_{B_{neu} \leftarrow B_{alt}} \times D_{B, B_{alt}}$$

3.6.2 Spezialfälle

Basiswechsel im Definitionsräum mit Standard-Basis im Bildraum:

Bilder der neuen Basisvektoren sind die Spalten der Darstellungsmatrix

Basiswechsel im Bildraum mit Standard-Basis im Definitionsräum:

Die Bilder der Standard-Basisvektoren ausgedrückt in der neuen Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ bilden die Spalten der Darstellungsmatrix: $f(e_n) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$. Die Koeffizienten bilden die Spalten der Darstellungsmatrix.

3.7. Determinanten

$f : V \rightarrow V$, ω Determinantenform:
 $(\det f)\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(f(v_1), \dots, f(v_n))$

3.7.1 Eigenschaften

- Vertauscht man zwei Spalten/Zeilen von $A \rightarrow A' \iff \det A = -\det A'$
- Skaliert man n Spalten mit λ , $A \rightarrow A' \iff \det A = \lambda^n \det A'$
- Addiert man zwei Spalten aufeinander: $\det A$ bleibt gleich
- $\det(f \circ g) = \det(AB) = \det f \det g = \det A \det B$
- $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
- $\det A = \det A^T$

3.7.2 Laplace-Formel

Vorzeichenwechsel beispielhaft erklärt für $K^{3 \times 3}$

Term	Spalte	sign	# Vertauschungen
aei	(1, 2, 3)	+	0
afg	(1, 3, 2)	-	1
bfg	(2, 3, 1)	-	2

3.8. euklidische Vektorräume

Cauchy-Schwarz-Ungl.: $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklid. VR. Dann gilt $\forall v, w \in V$:

1. **Polarisation:** $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2)$
2. **Parallelogrammgleichung:**
 $2(\|v\|^2 + \|w\|^2) = \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2$

Für eine bel. Norm gilt: Die Parallelogrammgleichung gilt \iff Die Norm kommt von einem Skalarprodukt. Dann erhält man das Skalarprodukt durch Polarisation.

3.8.1 Skalarprodukt

- bilinear: $\langle a, b+c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$
- symmetr.: $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$
- pos. definit: $\langle v, v \rangle > 0$ oder $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$

3.8.2 Norm

Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

- $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$
- $\|a\| > 0$ oder $\|a\| = 0 \Rightarrow a = 0$
- $\forall v, w \in V$ gilt die Dreiecksungleichung:
 $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

4. Matrix-Lookup-Table

4.1. Rechenregeln

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times k} \rightarrow AB$ definiert: $AB \in \mathbb{R}^{m \times k}$
- $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$
- $\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$

4.2. Standard-Matrix

- Menge an lin. unabh. Spalten/Zeilen von A: Rang A
- $\dim(\text{Kern } A) = \text{Spaltenanzahl} - \text{Rang } A$
- $f : V \rightarrow W: \dim V = \text{Spaltenanzahl}, \dim W = \text{Zeilenanzahl}$
- $\text{Rang}(AB) \leq \min(\text{Rang } A, \text{Rang } B)$

4.2.1 Invertierbarkeit $A \in \text{Mat}(n, n, K)$

- A invertb. $\iff \text{Rang } A = n \iff \dim(\text{Kern } A) = 0 \rightarrow A$ besitzt keine Nullzeile/-spalte
- A invertierbar $\iff A$ bijektiv
- A invertierbar $\iff \det A \neq 0$
- A Nullzeile/-spalte $\iff A$ nicht invertb.

4.2.2 Transposition

- Rang $A = \text{Rang } A^T$ (Zeilenrang = Spaltenrang)
- symmetr. Matrix: $A^T = A: a_{ji} = a_{ij}$
- schiefsymmetr. Matrix: $A^T = -A^T: a_{ji} = -a_{ij}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4.3. Gauß

- Anzahl der lin. unabh. Nicht-Nullzeilen \iff Rang A

4.3.1 Lösbarekeit der erw. Matrix $[A|b]$

- Unlösbar: Es existiert Nullzeile links und ein Nicht-Null Eintrag rechts
- Eindeutig lösbar: Rang A = Anzahl der Variablen und $b \in \text{Bild } A$
- Unendl. viele Lösungen: Rang A < Anzahl der Variablen \rightarrow Nullzeile rechts und Nulleintrag links
- Homog. System $b = 0$: Lösungsmenge ist VR - der Kern A $\Rightarrow \dim L = \dim V - \text{Rang } A$
- Inhomog. System: Lösungsmenge ist Partikularlösung + Kern (affiner Unterraum)