Code gadgets

Nike Dattani*

Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics

$$H_{4-\text{local}} = -z_A z_B z_C z_D - x_A x_B x_C x_D \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
H_{2-\text{local}} = &- \sum_i x_i x_{i+2} - \sum_i x_{i+1} x_{i+3} - \sum_i z_i z_{i+1} - \sum_i z_{i+2} z_{i+3} && (2)\\
&- \lambda \sum_i x_i x_{j+3} - \lambda \sum_i x_{i+1} x_{k+2} - \lambda \sum_i x_{i+2} x_{l+1} - \lambda \sum_i x_{i+3} x_m && (3)\\
&- \lambda \sum_i z_i z_{j+3} - \lambda \sum_i z_{i+1} z_{k+2} - \lambda \sum_i z_{i+2} z_{l+1} - \lambda \sum_i z_{i+3} z_m && (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_l &= \frac{1}{2}\left(1 - z_{s1} + z_{s2} + z_{s1} z_{s2}\right) && (5)\\
T_d &= \frac{1}{2}\left(1 + z_{s1} - z_{s2} + z_{s1} z_{s2}\right) && (6)\\
T_u &= \frac{1}{2}\left(1 - z_{s1} - z_{s2} - z_{s1} z_{s2}\right) && (7)\\
T_r &= \frac{1}{2}\left(z_{s1} + z_{s2} + z_{s1} z_{s2} - 1\right) && (8)\\
|m_{s_{ij}} = 1\rangle\langle m_{s_{ij}} = 0| &= \frac{1 + z_{s1_{ij}}}{2} \frac{x_{s2_{ij}} - \mathrm{i} y_{s2_{ij}}}{2} && (9)\\
|1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0|^\dagger &= \frac{1}{2}\left(x_{s2_{ij}} + z_{s1_{ij}} x_{s2_{ij}}\right) && (10)\\
D_{s_{ij}}(m_{s_{ij}} = 0) &= \frac{1}{4}\left(x_{s2_{ij}} - \mathrm{i} y_{s2_{ij}} + z_{s1_{ij}} x_{s2_{ij}} - \mathrm{i} z_{s1_{ij}} y_{s2_{ij}}\right) A_{s_{ij}}(m_{s_{ij}}) && (11)\\
&= \frac{1}{4}\left(x_{s2_{4i,j}} - \mathrm{i} y_{s2_{4i,j}} + z_{s1_{4i,j}} x_{s2_{4i,j}} - \mathrm{i} z_{s1_{4i,j}} y_{s2_{4i,j}}\right) x_{s_{ij}} && (12)\\
&= \frac{1}{4}\left(x_{s2_{ij}} - \mathrm{i} y_{s2_{ij}} + z_{s1_{ij}} x_{s2_{ij}} - \mathrm{i} z_{s1_{ij}} y_{s2_{ij}}\right) x_{ij3} x_{ij4} && (13)\\
D_{s_{ij}}(m_{s_{ij}} = 0) + D^\dagger_{s_{ij}}(m_{s_{ij}} = 0) &= \frac{1}{2}\left(x_{s2_{ij}} + z_{s1_{ij}} x_{s2_{ij}}\right) x_{ij3} x_{ij4} && (14)\\
D_{s_{ij}}(m_{s_{ij}} = 1) + D^\dagger_{s_{ij}}(m_{s_{ij}} = 1) &= \frac{1}{2}\left(x_{s1_{ij}} x_{s2_{ij}} + y_{s1_{ij}} y_{s2_{ij}}\right) x_{i,j+1,2} x_{i,j+1,4} && (15)\\
D_{s_{ij}}(m_{s_{ij}} = 2) + D^\dagger_{s_{ij}}(m_{s_{ij}} = 2) &= \frac{1}{2}\left(x_{s2_{ij}} - z_{s1_{ij}} x_{s2_{ij}}\right) x_{i+1,j+1,1} x_{i+1,j+1,2} && (16)\\
D_{s_{ij}}(m_{s_{ij}} = 3) + D^\dagger_{s_{ij}}(m_{s_{ij}} = 3) &= \frac{1}{2}\left(x_{s1_{ij}} x_{s2_{ij}} - y_{s1_{ij}} y_{s2_{ij}}\right) x_{i+1,j,1} x_{i+1,j,3} && (17)
\end{aligned}$$

* n.dattani@cfa.harvard.edu

$$H_{8-\mathrm{body}} = -J\sum_{ij}(x_{4i+3,j}x_{4i+2,j+1}x_{4i+4,j}x_{4i+4,j+1}x_{4i+5,j}x_{4i+5,j+1}x_{4i+7,j}x_{4i+6,j+1}+ \tag{18}$$

$$z_{4i+1,j}z_{4i+2,j}z_{4i+3,j}z_{4i+4i,j} + z_{4i,j}z_{4i+1,j} + z_{4i+2,j}z_{4i+3,j-1} + z_{4i+4,j}z_{4i+5,j} + z_{4i+3,j}z_{4i+2,j+1}) \tag{19}$$

Introduce now index k to describe which of the 4 qubits in a plaquette ij is being looked at:

$$H_{4-\mathrm{body}} = -\sum_{ij}\alpha\,(z_{ij1}z_{ij2}z_{ij3}z_{ij4} + z_{i,j,-1,4}z_{ij1} + z_{ij2}z_{i,j-1,3} + z_{ij4}z_{i+1,j,1} + z_{ij3}z_{i,j+1,2} \tag{20}$$

$$\left(1 - z_{a1_{ij}} + z_{a2_{ij}} + z_{a1_{ij}}z_{a2_{ij}}\right)\left(z_{a1_{i,j+1}} + z_{a2_{i,j+1}} + z_{a1_{i,j+1}}z_{a2_{i,j+1}} - 1\right) + \tag{21}$$

$$\left(1 + z_{a1_{ij}} - z_{a2_{ij}} + z_{a1_{ij}}z_{a2_{ij}}\right)\left(1 - z_{a1_{i+1,j}} - z_{a2_{i+1,j}} - z_{a1_{i+1,j}}z_{a2_{i+1,j}}\right)\Big) + \tag{22}$$

$$\frac{U}{2}\left(z_{a1_{ij}} + z_{a2_{ij}} + z_{a1_{ij}}z_{a2_{ij}} - 1\right) + \tag{23}$$

$$\frac{t}{2}\Big(\left(x_{a2_{ij}} + z_{a1_{ij}}x_{a2_{ij}}\right)x_{ij3}x_{ij4} + \left(x_{a1_{ij}}x_{a2_{ij}} + y_{a1_{ij}}y_{a2_{ij}}\right)x_{i,j+1,2}x_{i,j+1,4}+ \tag{24}$$

$$\left(x_{a2_{ij}} - z_{a1_{ij}}x_{a2_{ij}}\right)x_{i+1,j+1,1}x_{i+1,j+1,2} + \left(x_{a1_{ij}}x_{a2_{ij}} - y_{a1_{ij}}y_{a2_{ij}}\right)x_{i+1,j,1}x_{i+1,j,3}\Big) \tag{25}$$

Now introducing the following 1-body matrices, each of size 4×4:

$$s^{zz}_{ijki'j'k'} = z_{ijk}z_{i'j'k'} \tag{26}$$

$$s^{zz}_{a_{ij}1} = \left(1 - z_{a1_{ij}} + z_{a2_{ij}} + z_{a1_{ij}}z_{a2_{ij}}\right) \tag{27}$$

$$s^{zz}_{a_{ij}2} = \left(z_{a1_{ij}} + z_{a2_{ij}} + z_{a1_{ij}}z_{a2_{ij}} - 1\right) \tag{28}$$

$$s^{zz}_{a_{ij}3} = \left(1 + z_{a1_{ij}} - z_{a2_{ij}} + z_{a1_{ij}}z_{a2_{ij}}\right) \tag{29}$$

$$s^{zz}_{a_{ij}4} = \left(1 - z_{a1_{ij}} - z_{a2_{ij}} - z_{a1_{ij}}z_{a2_{ij}}\right) = -s^{zz}_{a_{ij}3} \tag{30}$$

$$s^{xz}_{a_{ij}1} = \left(x_{a2_{ij}} + z_{a1_{ij}}x_{a2_{ij}}\right) \tag{31}$$

$$s^{xz}_{a_{ij}2} = \left(x_{a2_{ij}} - z_{a1_{ij}}x_{a2_{ij}}\right) \tag{32}$$

$$s^{xx}_{ijki'j'k'} = x_{ijk}x_{i'j'k'} \tag{33}$$

$$s^{xy}_{a_{ij}1} = \left(x_{a1_{ij}}x_{a2_{ij}} + y_{a1_{ij}}y_{a2_{ij}}\right) \tag{34}$$

$$s^{xy}_{a_{ij}2} = \left(x_{a1_{ij}}x_{a2_{ij}} - y_{a1_{ij}}y_{a2_{ij}}\right) \tag{35}$$

We can write $H_{4-\mathrm{body}}$ as a 2-body Hamiltonian:

$$H_{2-\mathrm{body}} = -\sum_{ij} \Big(\alpha \left(s^{zz}_{ij1ij2} s^{zz}_{ij3ij4} + s^{zz}_{ij-1,4ij1} + s^{zz}_{ij2ij-1,3} + s^{zz}_{ij4i+1j1} + s^{zz}_{ij3ij+1,2} + s^{zz}_{a_{ij}1} s^{zz}_{a_{ij+1}2} - s^{zz}_{a_{ij}3} s^{zz}_{a_{i+1j}3} \right) \tag{36}$$

$$+ \frac{U}{2} s^{zz}_{a_{ij},1} + \frac{t}{2} \left(s^{xz}_{a_{ij}1} s^{xx}_{ij3ij4} + s^{xy}_{a_{ij}1} s^{xx}_{ij+1,2ij+1,4} + s^{xz}_{a_{ij}2} s^{xx}_{i+1,j+1,1i+1,j+1,2} + s^{xy}_{a_{ij}2} s^{xx}_{i+1j1,i+1,j3} \right) \Big) \tag{37}$$