



TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT

MODELLEREN 1B

Rivier Oversteken

C. Barendrecht
B. van den Heuvel
A. van der Leer
R. Sitaram

Onder begeleiding van:
Dr. B. Meulenbroek

Lijst met gebruikte symbolen

a	De constante die een gewicht geeft aan tijd en energie in de kostenfunctie
a	Een stromingsconstante die de sterkte van een stromingsprofiel bepaalt
A	Het oppervlakte van een dwarsdoorsnede van een rivier
A_{gem}	Het gemiddelde oppervlakte van de dwarsdoorsnedes van een rivier
c	De wrijvingsconstante
$C(t)$	De kostenfunctie
\mathcal{C}	Het pad dat word afgelegd door de boot
$E(t)$	De totale hoeveelheid energie op tijdstip t
F	De kracht die verricht word door de boot
F_w	De wrijvingskracht die verricht word op de boot
\tilde{F}	De som van de krachten die op de boot werken
m	De massa van de boot
Q	De waterverplaatsing van een rivier
Q_{gem}	De gemiddelde waterverplaatsing van een rivier
s	De stromingsconstante bij een constante stroming
$S(x_1)$	De stroming op lijn x_1
T	Tijd van aankomst bij de bestemming
$u(t)$	De stuurrichting als functie van de tijd
$v(t)$	De snelheid van de boot
\vec{v}	De snelheidsvector van een rivier
v_{gem}	De gemiddelde snelheid van een rivier
x_1	De horizontale as
x_2	De verticale as
$x_1(t)$	De horizontale positie van de boot op tijdstip t
$x_2(t)$	De verticale positie van de boot op tijdstip t
μ	De functie die de verhouding tussen λ_1 en λ_2 aangeeft. (Zie pagina 7)

Voorwoord

Dit rapport is geschreven door Bram van den Heuvel, Casper Barendrecht, Arnoud van der Leer en Reena Sitaram, eerstejaars studenten Wiskunde aan de TU Delft en Leiden Universiteit. Het doet verslag van een onderzoeksproject dat wij uitvoerden voor het vak Modelleren-1B. Bij dit onderzoek zijn wij begeleid door Bernard Meulenbroek.

Wij kozen ervoor een model te maken dat een boot beschrijft die een rivier oversteeft. Het is ons goed gelukt de basisversie van het probleem uit te werken. Door gebrek aan tijd is het niet gelukt de uitbreiding volledig af te ronden.

Wij willen onze begeleider van harte danken voor zijn betrokkenheid en goede tips; wanneer wij niet wisten hoe we verder moesten wist hij ons steeds in de goede richting te sturen.

*Casper Barendrecht, Bram van den Heuvel, Arnoud van der Leer en Reena Sitaram
Delft, Mei 2016*

Inhoudsopgave

1	Inleiding	4
2	Situatieschets	5
3	Het eerste probleem: Tijds optimalisatie	6
3.1	De Hamiltoniaan	6
3.2	Eliminatie van stuurfunctie u	7
3.3	Constante stroming	8
4	Niet triviale stromingsprofielen	9
4.1	Met een speedboot over de Nijl	9
5	Minimaliseren van kosten	16
5.1	Enkele eisen	16
5.2	Schrijven als integraal	17
5.3	Nieuwe hamiltoniaan opstellen	18
5.4	Hamiltoniaanstelling gebruiken	19
5.5	Eliminatie en vereenvoudigen van de afgeleiden	19
6	Discussie	22
7	Conclusie	23

Hoofdstuk 1

Inleiding

Transport over water is essentieel voor de wereldeconomie; meer dan 90% van alle handel wordt gefaciliteerd door maritiem transport [2]. Dat is geen toeval: transport over water is de efficiëntste vorm van transport over lange afstanden [3]. Het kiezen van een goede route is een integraal onderdeel van deze efficiëntie.

Wij introduceren een model waarmee we op zoek gaan naar een route tussen twee locaties. Eerst zoeken we naar de snelste route, daarna breiden we ons model uit en zoeken we naar de goedkoopste route.

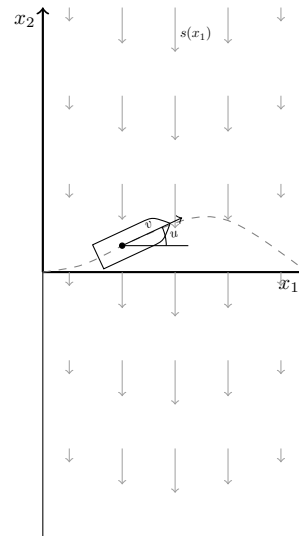
Het eerste model beschrijft een boot welke met constante vaarsnelheid een stuk water moet oversteken. De stroming van dit water is gegeven door een continu stromingsprofiel. Er kan alleen gevarieerd worden in de stuurrichting en we zijn dus op zoek naar een functie die een stuurhoek beschrijft zó dat een kortste route afgelegd wordt. Eerst onderzoeken we ons model met een constant stromingsprofiel analytisch en vervolgens gaan we op zoek naar de snelste route voor een algemene stromingsfunctie. Hiervoor gebruiken we een combinatie van analytische en numerieke methoden.

Het tweede model is een uitbreiding op de eerste. Waar het eerste model een constante vaarsnelheid aannam kiezen we er nu voor de snelheid te laten variëren afhankelijk van een stuwkracht. We zoeken nu naar een route die niet alleen snel is maar ook weinig energie gebruikt. Afhankelijk van een parameter kan de verhouding tussen de kosten van energie en de kosten van tijd worden gekozen. Wederom gebruiken we analytische en numerieke methoden om de goedkoopste route te vinden. Het onderzoek naar dit tweede model wordt deels voltooid.

Hoofdstuk 2

Situatieschets

In dit verslag zullen wij een boot behandelen die met snelheid v ten opzichte van het water, tracht een optimaal pad naar de overkant van een rivier te vinden. De coördinaat parallel aan de oevers noemen we x_2 . De coördinaat loodrecht op de oevers noemen we x_1 . De hoek tussen de vaarrichting van de boot en de x_1 -richting wordt u genoemd. Verder is voor iedere x_1 in de rivier, de stroomsnelheid van de rivier in de x_2 -richting gedefinieerd als $S(x_1)$. In figuur 2.1 is $S(x_1)$ dus overal negatief. Tot slot hanteren we de notaties $x'_1(t)$ en $x'_2(t)$ voor de snelheden van de boot ten opzichte van de oevers op tijdstip t in respectievelijk de x_1 - en x_2 -richting.



Figuur 2.1: De situatie

Hoofdstuk 3

Het eerste probleem: Tijds optimalisatie

We zoeken nu de snelste route van een punt $(x_1(0), x_2(0))$ naar een punt $(x_1(T), x_2(T))$ waar T de tijd van aankomst is. De functies $x_1(t), x_2(t)$ zijn de locatie van de boot in de x_1 en x_2 richting respectievelijk. Voor de volgende begin en eindpunten onderzoeken we het probleem

$$\begin{aligned}x_1(0) &= 0 & x_1(T) &= 1 \\x_2(0) &= 0 & x_2(T) &= 0\end{aligned}$$

De boot vaart met een constante snelheid van 1. We noteren $u(t)$ voor de stuurrichting op tijdstip t , dit is de hoek met de x_1 -as in radialen. We nemen aan dat de boot altijd naar de positieve kant van de x_1 -as toevaart. Dan geldt dus $-\frac{\pi}{2} < u(t) < \frac{\pi}{2}$.

$S(x)$ geeft de stroming van de rivier aan. De stroming is hierbij enkel afhankelijk van de x_1 richting. We noemen $S(x)$ **positief** is als de stroming naar de **positieve** kant van de x_2 -as gericht is.

3.1 De Hamiltoniaan

In onze analyse gebruiken we de hamiltoniaanstelling. We schrijven de te optimaliseren parameter als een functie in een integraal. Omdat we de eindtijd T niet kennen stellen de volgende integraal voor T op

$$T = \int_0^T 1 \, dt. \tag{3.1}$$

De verandering in de x_1 -locatie en x_2 -locatie worden gegeven door

$$x_1'(t) = \cos(u(t)) \tag{3.2}$$

$$x_2'(t) = \sin(u(t)). \tag{3.3}$$

Nu de afgeleiden en randvoorwaarden bekend zijn stellen we de hamiltoniaan op.

$$H_1(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, u) = \lambda_1 \cos(u) + \lambda_2(\sin(u) + S(x)) + 1. \quad (3.4)$$

Hierbij zijn λ_1 en λ_2 schaduwfuncties die gekenmerkt worden door de afgeleiden

$$\lambda_1'(t) = -\frac{\partial H_1}{\partial x_1} = -\lambda_2 S'(x_1) \quad (3.5)$$

$$\lambda_2'(t) = -\frac{\partial H_1}{\partial x_2} = 0. \quad (3.6)$$

Volgens de Hamiltoniaanstelling moet bij een minimale T gelden dat

$$0 = \frac{\partial H_1}{\partial u} = -\lambda_1 \sin(u) + \lambda_2 \cos(u). \quad (3.7)$$

3.2 Eliminatie van stuurfunctie u

Door analytische manipulaties uit te voeren elimineren we nu de stuurfunctie $u(t)$. Uit (3.7) volgt dat

$$\lambda_1 \sin(u) = \lambda_2 \cos(u)$$

en dus

$$\sin(u) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cos(u)$$

mits $\lambda_1 \neq 0$. We laten $\mu := \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Nu geldt dat $\cos(u) > 0$ omdat $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$. Daarom kunnen we gebruik maken van de gelijkheid $\cos(u) = \sqrt{1 - \sin^2(u)}$. Na enig herschrijven vinden we nu voor $\sin(u)$ en $\cos(u)$

$$\begin{aligned} \sin(u) &= \mu \sqrt{1 - \sin^2(u)} & \cos(u) &= \sqrt{1 - \sin^2(u)} \\ \mu^2 &= \sin^2(u) (1 + \mu^2) & \cos(u) &= \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{1 + \mu^2} - \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}} \\ \sin(u) &= \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} & \cos(u) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \end{aligned}$$

Door de gevonden vormen in te vullen in functies x_1' (3.2) en x_2' (3.3) vinden we het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^2}} \\ x_2' &= \frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}{\sqrt{1 + (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^2}} \\ \lambda_1'(t) &= -\lambda_2 S'(x_1) \\ \lambda_2'(t) &= 0. \end{aligned}$$

3.3 Constante stroming

In het algemeen is het niet mogelijk om een dergelijk stelsel analytisch op te lossen. Dit is echter wel mogelijk wanneer het stromingsprofiel $S(x_1)$ constant is. We noteren dit constante profiel met $S(x_1) = s$. Omdat

$$S'(x_1) = 0$$

vinden we

$$\lambda_1'(t) = -\lambda_2 S'(x_1) = 0.$$

Nu zien we dat $\lambda_1'(t) = \lambda_2'(t) = 0$ en concluderen dat λ_1 , λ_2 en μ allen constant zijn. We noteren dit als

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= c_1 \\ \lambda_2 &= c_2 \\ \mu &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{c_2}{c_1} = c_3.\end{aligned}$$

We weten nu ook dat $x_1'(t)$ en $x_2'(t)$ constant zijn. Dit noteren we met

$$\begin{aligned}x_1' &= c_4 \\ x_2' &= c_5.\end{aligned}$$

Door nu gebruik te maken van de randvoorwaarde $x_1(T) = 1$ vinden we

$$1 = x_1(T) = \int_0^T c_4 \, dt = c_4 T \quad (3.8)$$

en analoog

$$0 = x_2(T) = \int_0^T c_5 + s \, dt = T(c_5 + s). \quad (3.9)$$

Omdat $T \neq 0$ concluderen we

$$c_5 = -s.$$

Door gebruik te maken van de eigenschap $\cos(u) = \sqrt{1 - \sin^2(u)}$ vinden we

$$\begin{aligned}c_4 &= \sqrt{1 - c_5^2} \\ \frac{1}{T} &= \sqrt{1 - (-s)^2}\end{aligned}$$

En we vinden dus voor een constante stroom s de gelijkheid:

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} \quad (3.10)$$

Hoofdstuk 4

Niet triviale stromingsprofielen

Voor niet triviale stromingsprofielen is het niet altijd haalbaar om een volledig analytische oplossing te vinden. Daarom onderzoeken wij nu in het algemeen continue stromingsprofielen met behulp van numerieke methoden.

Het softwarepakket MATLAB is een geschikte omgeving om stelsels differentiaalvergelijkingen, zoals gevonden in sectie 3.2, op te lossen. Een functie als `ode45` is een voordehandliggende keuze bij het doorrekenen van zo'n stelsel. Voor meer achtergrondinformatie over dit soort functies, zie bijlage ??.

Het bleek mogelijk om in het gevonden stelsel differentiaalvergelijkingen λ_1 te elimineren en alleen nog afhankelijkheid van λ_2 te hebben. Omdat alle relevante vergelijkingen continu zijn stelt dit ons in staat om met behulp van de bisectiemethode te zoeken naar de optimale λ_2 . Op de bisectiemethode wordt dieper ingegaan in bijlage ??.

Bij het zoeken naar oplossingen voor specifieke stromingsprofielen blijkt het regelmatig lastig om goede startwaarden te vinden voor schaduwvariabele λ_2 . Omdat we geen manier hebben mogelijke waarden voor λ_2 te vinden waren we vaak aangewezen op het proberen van willekeurige waarden.

Dit wordt geïllustreerd in het volgende voorbeeld.

4.1 Met een speedboot over de Nijl

Een voorbeeld van een toepassing van dit model in het 'alledaags' leven, is het scenario waarin iemand besluit om in de maand juli met een 2015 V22 RF[5] Speedboot de rivier Nijl over te steken.

De Nijl heeft een gemiddelde breedte b van ongeveer 2.8 km [6]. Deze boot heeft een gemiddelde snelheid van 38 km/h of 0.63 km/min als de boot normaal beladen is.[7] De stroming is sterker in het midden van een rivier dan aan de oevers

waar de stroming nagenoeg 0 is. Dit laat zich beschrijven door een sinusöide:

$$S(x_1) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}x_1\right) \quad (4.1)$$

Hierbij is a een stromingsconstante.

De eenheid van a is km/min . Om a te bepalen beschouwen we de gemiddelde waterverplaatsing van de Nijl. De gemiddelde waterverplaatsing Q_{gem} van de Nijl is $2,830 \text{ m}^3/s$. [6] Aan de hand hiervan kan de gemiddelde snelheid van de Nijl bepaald worden. De waterverplaatsing Q is namelijk gegeven door [8]:

$$Q = A \vec{v}$$

Hierbij is A de oppervlakte dwarsdoorsnede van de rivier in m^2 .

\vec{v} is de snelheidsvector van de rivier. Door onze keuze voor het stromingsprofiel van de rivier, geldt $\vec{v} = v_{gem}$, de gemiddelde snelheid van de rivier.

Het gemiddelde oppervlak van de dwarsdoorsnede van de Nijl in de maand juli $A_{gem} = 2187.5 \text{ m}^2$. [9] Dus:

$$v_{gem} = \frac{Q_{gem}}{A_{gem}} = \frac{2830 \text{ m}^3/s}{2187.5 \text{ m}^2} \approx 1,29 \text{ m/s}$$

Dus $v_{gem} \approx 7,76 \times 10^{-2} km/min$. a kan nu als volgt gevonden worden:

$$\begin{aligned} v_{gem} &= \int_0^b a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}x_1\right) \\ &= \int_0^{2.8} a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2.8}x_1\right) \\ &= \left[\frac{-2.8a}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2.8}x_1\right) \right]_0^{2.8} \end{aligned}$$

Invullen en uitreken van de integraal geeft:

$$\begin{aligned} 7,76 \times 10^{-2} &= \frac{5.6}{\pi} a \\ a &\approx 4.35 \times 10^{-2} \text{ km/min} \end{aligned}$$

Dit betekent dat de Nijl een gemiddelde stroomsnelheid van ongeveer 2.6 km/h heeft in het midden van de rivier.

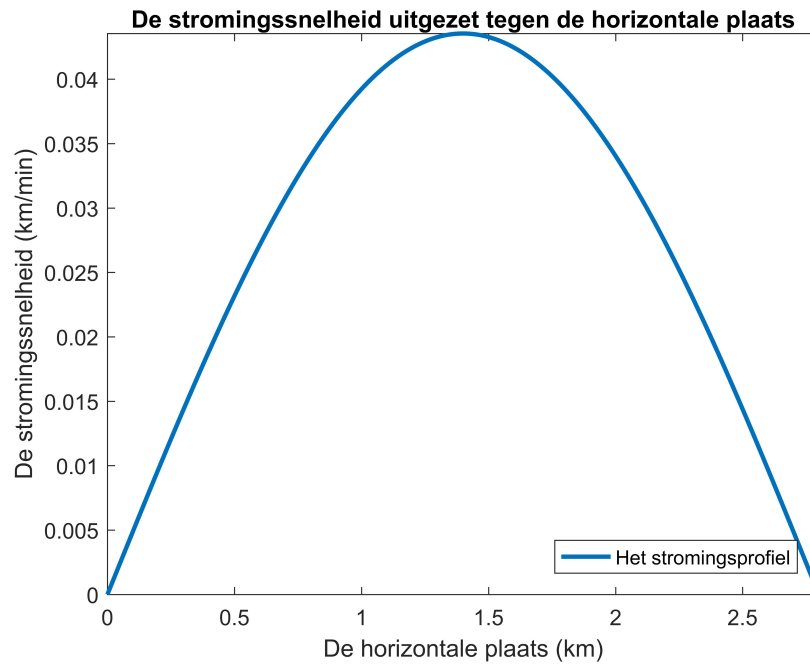
We vinden als stromingsvergelijking dus:

$$S(x_1) = 4.35 \times 10^{-2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2.8}x_1\right) \quad (4.2)$$

Hierbij gelden de volgende eisen:

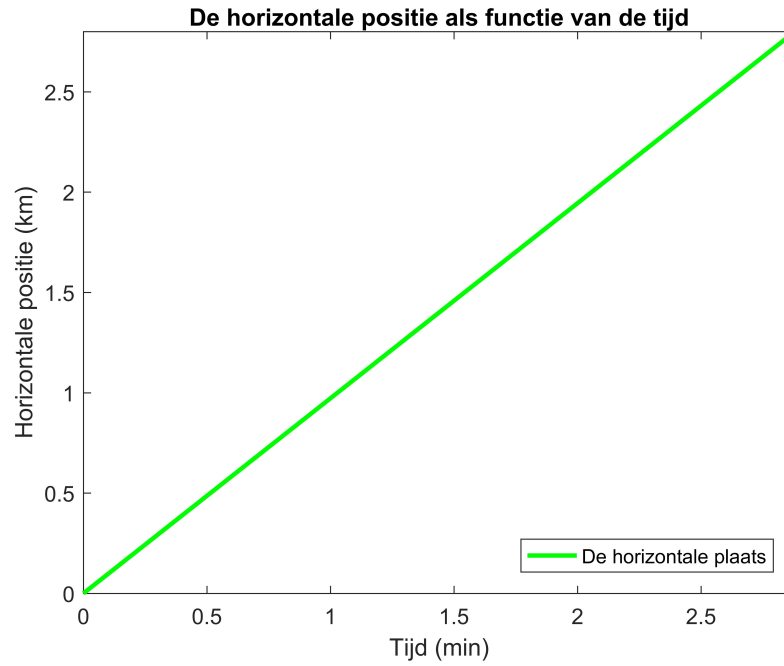
$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0 & x_1(T) &= 2.8 \\ x_2(0) &= 0 & x_2(T) &= 0 \end{aligned}$$

Het stromingsprofiel ziet er dan als volgt uit:



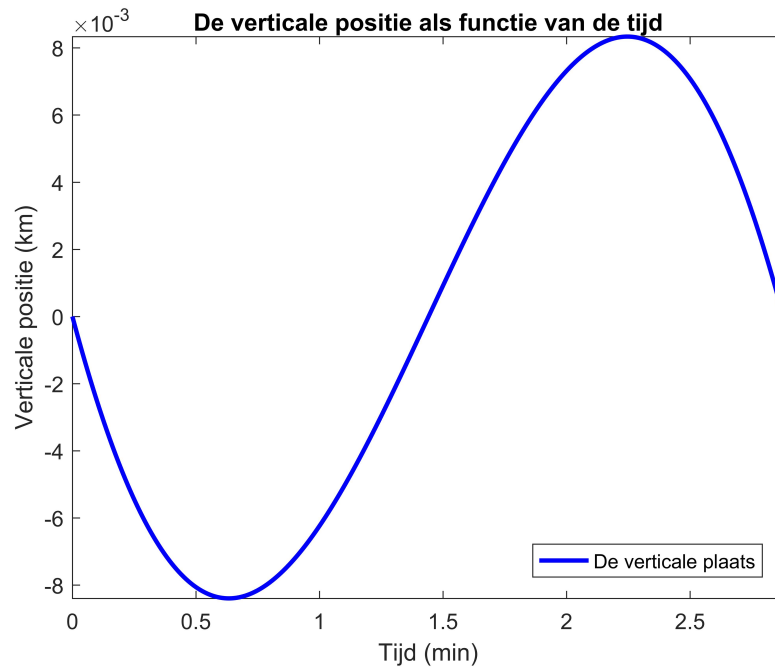
Figuur 4.1: Een mogelijk stromingsprofiel voor de Nijl

Door de eerdere eisen in te vullen in MATLAB vinden we voor een boot met een snelheid van 1 km/min een eindtijd van $T = 2.87$ minuten. De resultaten zijn in onderstaande figuren weergegeven.



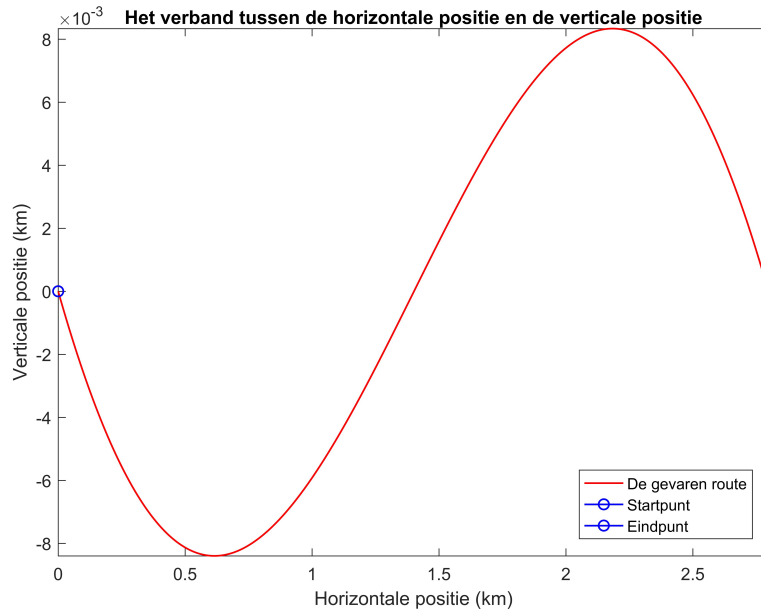
Figuur 4.2: De horizontaal positie x_1 uitgezet tegen de tijd t tijdens een oversteek van de Nijl

Figuur 4.2 geeft het verband aan tussen de horizontale plaats (de afgelegde afstand ten opzicht van de oever) en de tijd van aankomst bij een punt. Dit verband is lineair de snelheid in de horizontale richting is dus constant ($v = \frac{dx_1}{dt} = c$). $T = 2.87$ en $x_1(T) = 2.8$. De horizontale snelheid is dus kleiner dan de totale snelheid van de boot.



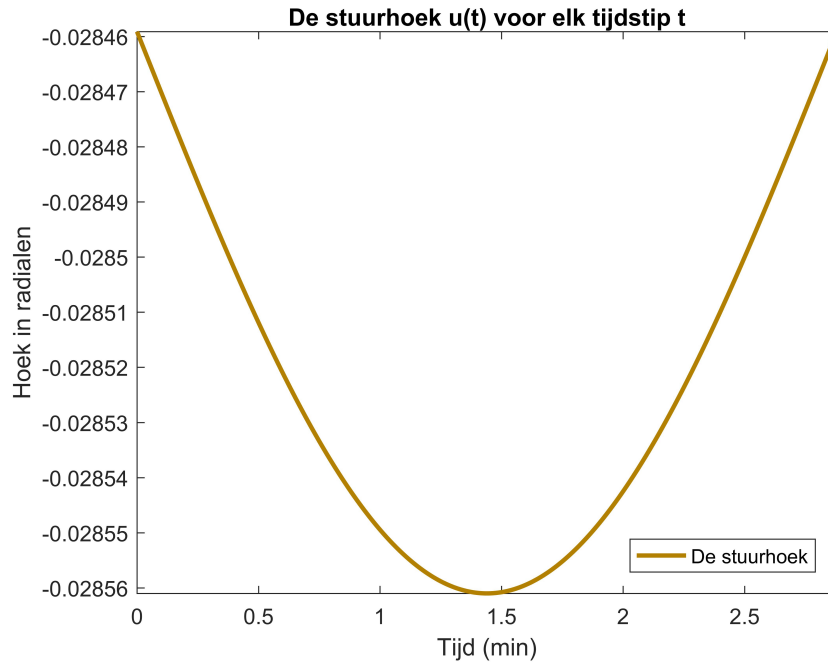
Figuur 4.3: De verticale positie x_2 uitgezet tegen de tijd t tijdens een oversteek van de Nijl

Figuur 4.3 geeft de verticale plaats aan op een tijdstip t . Dit verband wordt beschreven door een sinusoïde. De oorzaak hiervan wordt beschreven bij figuur 4.4. Het is hierbij opmerkelijk dat de verticale positie een hele lage amplitude heeft. De verticale positie heeft een orde van grootte van 10^{-3} km . De boot zal tijdens een pad hoogstens 8 meter verwijderd zijn van zijn startpunt (verticaal gezien).



Figuur 4.4: Het afgelegde pad tijdens een oversteek van de Nijl

Figuur 4.4 beschrijft het verloop van een oversteek. Voor elk tijdstip t wordt $x_2(t)$ uitgezet tegen $x_1(t)$. Deze vorm beschrijft bijna exact dezelfde sinusoïde als de sinusoïde gegeven in figuur 4.3. Dit komt omdat $x_1(t)$ lineair is ten opzichte van t en zelfs bijna evenredig: $x_1(t) = \frac{x_1(T)}{T}t = \frac{2.8}{2.87}t \approx 0.97t$. De sinusoïde vorm kan verklaard worden aan de hand van de stromingsfunctie $S(x_1)$. De stroming is zwak aan de oevers en sterk in het midden van de rivier. Als we dus bij de oevers sterk tegen de stroming invaren, kunnen we in het midden van de rivier deze uitwijking gebruiken als extra versnelling (of minder vertraging). De daar opgelopen uitwijking stroomafwaarts kan dan weer worden bijgestuurd als de stroming zwak is.



Figuur 4.5: De stuurhoek uitgezet tegen de tijd tijdens een oversteek van de Nijl

Tot slot wordt in figuur 4.5 de stuurhoek uitgezet tegen de tijd. De stuurhoek is overal negatief, en het sterkst negatief in het midden van de rivier. Als de stroming het sterkst is, draait de boot dus sterk bij om zijn richting voldoende bij te draaien, zodat hij met een maximale snelheid richting het eindpunt kan varen als de stroming zwakker is.

Deze plots zijn allemaal bepaald voor een boot met een snelheid van 1 km/min . Onze boot heeft echter geen snelheid van 1 km/min maar 0.63 km/min . Onze boot zal er dus in totaal $\frac{T}{0.63} = 4.57$ minuten over doen.

Hoofdstuk 5

Minimaliseren van kosten

Waar het eerste model een constante snelheid aannam laten we in dit model de snelheid variëren afhankelijk van een stuwkracht die in de richting waarin de boot vaart wordt gezet. Dit betekent dat de staat van een bootje niet alleen meer bepaald is door diens locatie maar ook door diens snelheid. Ook is er een extra variabele waarmee gestuurd kan worden: de stuwkracht.

De kosten van een reis worden in dit model bepaald door de som van de verbruikte tijd en de verbruikte energie. We definiëren we een kostenfunctie $C(t)$ die de kosten tot een bepaald tijdstip aangeeft.

$$C(t) = at + (1 - a)E(t) \tag{5.1}$$

Hier geeft $E(t)$ de totaal verbruikte energie op tijdstip t aan, $a \in [0, 1]$ is een te kiezen constante die de verhouding tussen de kosten van energie en de kosten van tijd aangeeft. Wederom is T het tijdstip van aankomst en dus willen we $C(T)$ minimaliseren. Merk op dat voor $a = 1$ de te minimaliseren kosten functie gelijk is aan de functie die we minimaliseerden in de voorgaande hoofdstukken.

5.1 Enkele eisen

We stellen enkele randvoorwaarden bovenop de randvoorwaarden van het eerste model:

$v(0) = v(T) = 0$. Dit is van toepassing bij het oversteken van een rivier: De boot moet eerst vaart maken en niet tegen de tegenoverstaande wal botsen.

Tot slot stellen we dat $v(t) \geq 0 : \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dit omdat er voor enigszins realistische stromingen niet van het doel afgevaaren moet worden in een goedkoopste oplossing.

5.2 Schrijven als integraal

Om de kostenfunctie $C(T)$ te minimaliseren met gebruik van de hamiltoniaanstelling moeten we wederom onze functie als integraal van 0 tot T schrijven.

Allereerst vinden we een bruikbare vorm van $E(T)$. We beschouwen de totale hoeveelheid energie als de verrichte arbeid W over het traject dat de boot aflegt. Dit traject noemen we \mathcal{C} . Voor \mathcal{C} hebben we een parametrisatie $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow \mathcal{C}$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ met afgeleide $f'(t) = (x'(t), y'(t))$. Verder heeft \mathcal{C} een oriëntatie τ waar deze parametrisatie bij past. Laat F_{x_1} en F_{x_2} de componenten van F in respectievelijk de x_1 - en x_2 -richting zijn. Dan geldt voor de arbeid de eigenschap:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathcal{C}} \langle \mathbf{F}, \tau \rangle dq \\ &= \int_{\mathcal{C}} F_{x_1} dx_1 + F_{x_2} dx_2 \end{aligned}$$

F is zoals gebruikelijk de geleverde kracht van de boot. Ook geldt:

$$v_{x_1} = \frac{dx_1}{dt} \qquad v_{x_2} = \frac{dx_2}{dt}$$

Met toepassing van de substitutiemethode volgt nu:

$$dx_1 = v_{x_1} dt \qquad dx_2 = v_{x_2} dt$$

en

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathcal{C}} F_{x_1} dx_1 + F_{x_2} dx_2 = \int_0^T F_{x_1} v_{x_1} + F_{x_2} v_{x_2} dt \\ &= \int_0^T \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle dt \end{aligned}$$

Omdat in ons model \mathbf{F} en \mathbf{v} dezelfde richting hebben, geldt $\langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{F}\| \|\mathbf{v}\|$. Als we nu F schrijven voor $\|\mathbf{F}\|$ en v voor $\|\mathbf{v}\|$, vinden we, omdat $W = E(T)$, dat:

$$E(T) = \int_0^T \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle dt \tag{5.2}$$

$$= \int_0^T \|\mathbf{F}\| \|\mathbf{v}\| dt \tag{5.3}$$

$$= \int_0^T v(t) F(t) dt \tag{5.4}$$

Hierbij geeft $v(t)$ de snelheid van de boot op tijdstip t aan en $F(t)$ de geleverde kracht op tijdstip t . Verder geldt de bekende integraal:

$$T = \int_0^T dt. \quad (5.5)$$

Met (5.4) en (5.5) zijn we nu in staat om een integraal voor C op te stellen afhankelijk van T :

$$C(T) = aT + (1-a)E(T) = a \int_0^T dt + (1-a) \int_0^T Fv dt$$

Voor $C(T)$ vinden we dus de uitdrukking:

$$C(T) = \int_0^T a + (1-a)F(t)v(t) dt \quad (5.6)$$

5.3 Nieuwe hamiltoniaan opstellen

Omdat $C(T)$ nu als integraal uitgedrukt is en de begin- en eindvoorwaarden bepaald zijn kan $C(T)$ door middel van de Hamiltoniaanstelling geoptimaliseerd worden. Analoog aan sectie 3.1 worden de afgeleiden voor x_1 en x_2 opgesteld. Omdat de snelheid nu echter niet constant is wordt deze ook meegenomen in de afgeleiden.

$$x'_1 = v \cos(u(t)) \quad (5.7)$$

$$x'_2 = v \sin(u(t)) + S(x_1) \quad (5.8)$$

Om v' te bepalen definiëren we eerst \tilde{F} , de som van alle werkende krachten op de boot. De tweede wet van Newton stelt

$$\tilde{F} = mv'$$

In dit model worden alleen de door de boot geleverde kracht F en de wrijvingskracht $F_w(v)$ in de berekeningen opgenomen. \tilde{F} wordt gegeven als de som van deze twee krachten

$$\tilde{F} = F + F_w(v)$$

en dus geldt

$$v' = \frac{F + F_w(v)}{m}. \quad (5.9)$$

Nu alle afgeleiden en randvoorwaarden bekend zijn kan de Hamiltoniaan H_2 worden opgesteld.

$$H_2(x_1, x_2, v, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, F, u) = \lambda_1 x'_1(t) + \lambda_2 x'_2(t) + \lambda_3 v'(t) + f(x_1, x_2, v, F, u)$$

Specifiek wordt deze gegeven door

$$H_2 = \lambda_1 v \cos(u) + \lambda_2 (v \sin(u) + S(x_1)) + \lambda_3 \frac{(F + F_w(v))}{m} + (1 - a)Fv + a$$

Met de voorwaarden

$$\begin{array}{ll} x_1(0) = 0 & x_1(T) = x_{1T} \\ x_2(0) = 0 & x_2(T) = x_{2T} \\ v(0) = 0 & v(T) = 0 \end{array}$$

5.4 Hamiltoniaanstelling gebruiken

Met behulp van de zojuist opgestelde hamiltoniaan bepalen we de afgeleiden van de schaduwvariabelen λ_1, λ_2 en λ_3 .

$$\lambda'_1 = -\frac{\partial H_2}{\partial x_1} = -\lambda_2 S'(x_1) \quad (5.10)$$

$$\lambda'_2 = -\frac{\partial H_2}{\partial x_2} = 0 \quad (5.11)$$

$$\lambda'_3 = -\frac{\partial H_2}{\partial v} = -(\lambda_1 \cos(u) + \lambda_2 \sin(u) + \lambda_3 \frac{F'_w(v)}{m} + (1 - a)F) \quad (5.12)$$

$$(5.13)$$

Volgens de Hamiltoniaanstelling geldt bij een minimale $C(T)$ dat

$$0 = \frac{\partial H_2}{\partial u} = -\lambda_1 v \sin(u) + \lambda_2 v \cos(u) \quad (5.14)$$

$$0 = \frac{\partial H_2}{\partial F} = \frac{\lambda_3}{m} + (1 - a)v \quad (5.15)$$

5.5 Eliminatie en vereenvoudigen van de afgeleiden

Door analytische manipulaties kunnen deze vergelijkingen gereduceerd worden tot slechts vier afgeleiden.

5.5.1 Eliminatie van Sinus en Cosinus en u

Vegelijking (5.14) geeft

$$0 = v(-\lambda_1 \sin(u) + \lambda_2 \cos(u))$$

dus $v = 0$ of

$$\lambda_1 \sin(u) = \lambda_2 \cos(u).$$

Dit probleem is identiek het probleem beschreven in 3.2 en kent daarom ook dezelfde oplossingen zijnde:

$$\sin(u) = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \quad \cos(u) = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \quad (5.16)$$

5.5.2 Eliminatie van $F, F_w(v), \lambda_3$ en v

Uit vergelijking (5.15) volgt

$$\lambda_3 = -(1-a)mv \quad (5.17)$$

dus

$$\lambda'_3 = -(1-a)mv'. \quad (5.18)$$

Invullen van vergelijkingen (5.9) en (5.12) in vergelijking (5.18) geeft nu

$$(1-a)m \frac{F + F_w(v)}{m} = \lambda_1 \cos(u) + \lambda_2 \sin(u) + \lambda_3 \frac{F'_w(v)}{m} + (1-a)F.$$

Invullen van vergelijking (5.17) geeft

$$(1-a)F + (1-a)F_w(v) = \lambda_1 \cos(u) + \lambda_2 \sin(u) - (1-a)mv \frac{F'_w(v)}{m} + (1-a)F$$

dus voor $v \neq 0$ geldt nu

$$\begin{aligned} (1-a)F_w(v) &= \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} + \lambda_2 \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} - (1-a)vF'_w(v) \\ (1-a)(F_w(v) + vF'_w(v)) &= (\lambda_1 + \lambda_2\mu) \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \\ F_w(v) + vF'_w(v) &= \lambda_1 \frac{1+\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}} \frac{1}{1-a} \end{aligned}$$

Voor $F_w(v)$ kiezen we

$$F_w(v) = -cv^2. \quad (5.19)$$

Hier is $c > 0$ de wrijvingsconstante. Nu geldt:

$$F'_w(v) = -2cv. \quad (5.20)$$

Invullen in de eerdere gelijkheid geeft

$$\begin{aligned} -cv^2 + v(-2cv) &= \lambda_1 \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{1-a} \\ -3cv^2 &= \lambda_1 \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{1-a}. \end{aligned}$$

We vinden dus een uitdrukking voor v in λ_1, μ en de constanten a en c :

$$v = \sqrt{\frac{-\lambda_1 \sqrt{1+\mu^2}}{3c \cdot (1-a)}} \quad (5.21)$$

5.5.3 Invullen van de gelijkheden

Nu blijven enkel de volgende vergelijkingen over:

$$\begin{aligned}x_1' &= v \cos(u) \\x_2' &= v \sin(u) + S(x_1) \\ \lambda_1' &= -\lambda_2 S'(x_1) \\ \lambda_2' &= 0\end{aligned}$$

Met de gevonden gelijkheden (5.16) en (5.21) reduceren deze vergelijkingen zich verder tot:

$$x_1' = \sqrt{\frac{-\lambda_1}{3c \cdot (1-a)\sqrt{1+\mu^2}}} \quad (5.22)$$

$$x_2' = \mu \sqrt{\frac{-\lambda_1}{3c \cdot (1-a)\sqrt{1+\mu^2}}} + S(x_1) \quad (5.23)$$

$$\lambda_1' = -\lambda_2 S'(x_1) \quad (5.24)$$

$$\lambda_2' = 0 \quad (5.25)$$

met de eisen:

$$\begin{aligned}x_1(0) &= 0 & x_1(T) &= x_{1T} \\ x_2(0) &= 0 & x_2(T) &= x_{2T}\end{aligned}$$

Hoofdstuk 6

Discussie

Ons onderzoek kenmerkte zich door de wiskundige focus die we gebruikten om het probleem te modelleren. We losten de problemen eerst grotendeels analytisch op om de rektijd die de computer nodig zou had te minimaliseren. Met deze aanpak is het mogelijk om relatief complexe problemen in een korte tijd door te rekenen. De precisie van dit rekenwerk is zeer hoog.

Om dit onderzoek grotendeels analytisch te kunnen doen kent ons model een aantal grote versimpelingen ten opzichte van de werkelijkheid. Zo werken wij met een enkele wrijvingsterm welke afhankt van de snelheid om alle wrijvingsfactoren samen te vatten. Ook gaan we er van uit dat de boot in zeer korte tijd scherpe hoeken kan draaien, een onbeperkte hoeveelheid brandstof bij zich draagt en dat het gewicht van de boot niet verandert ondanks dat er brandstof verbruikt wordt. Op de boot na gaan we uit van een volledig constant systeem en de stroming varieert enkel in de x_1 richting.

Met meer tijd hadden we graag de code voor het vinden van een numerieke oplossing voor de goedkoopste route afgerond. Het zou ook interessant zijn om het model uit te breiden naar stromingsprofielen welke niet alleen in de x_1 richting veranderen maar ook in de x_2 richting.

Hoofdstuk 7

Conclusie

We onderzochten hoe we het proces van een rivier oversteken met een bootje kunnen optimaliseren. We hebben de hamiltoniaanstelling gebruikt om ons model te vertalen naar een stelsel van differentiaalvergelijkingen. Allereerst hebben we dit gedaan voor een boot met constante snelheid, waarbij we de oversteek-tijd probeerden te minimaliseren. Voor een constant stromingsprofiel was dit analytisch op te lossen en dit leverde verwachte resultaten op: netto rechtdoor varen levert de kortste tijd op. Wanneer het stromingsprofiel complexere vormen aan begon te nemen was analytisch oplossen niet meer mogelijk, maar leverde analytisch vereenvoudigen en oplossen met MATLAB betrouwbare resultaten.

Vervolgens hebben we ons model uitgebreid om ook met energie en snelheid te kunnen rekenen. Ook problemen van deze soort hebben we eerst gedeeltelijk analytisch opgelost en daarna met MATLAB uitgerekend. We bevinden de hamiltoniaanstelling in zijn analytische context gecombineerd met MATLAB een goed gereedschap om te berekenen hoe je op optimale wijze een boot naar de overkant van een rivier stuurt.

Bibliografie

- [1] Artwork blue skies boats paintings paper boat wallpaper. Opgehaald 31 Mei, 2016 van <http://www.allwallpaper.in/artwork-blue-skies-boats-paintings-paper-boat-wallpaper-4119.html>
- [2] International Maritime Organisation. (n.d.). *IMO profile*. Opgehaald 31 Mei, 2016 van <https://business.un.org/en/entities/13>
- [3] World Shipping Council. (n.d.). *Efficiency*. Opgehaald 31 Mei, 2016 van <http://www.worldshipping.org/benefits-of-liner-shipping/efficiency>
- [4] Ross, I. M. (2009). A Primer on Pontryagin's Principle in Optimal Control. *Collegiate Publishers*.
- [5] SunCatcher. (n.d.). *2015 V322 RF | V22 RF*. Opgehaald 23 Mei, 2016 van <http://www.suncatcherpontoon.com/v322-rf-v22-rf-pontoon>
- [6] Wikipedia, the free encyclopedia. (2012). *Nile*. Opgehaald 5 Juni, 2016 van <https://en.wikipedia.org/wiki/Nile>
- [7] Harmer, J. (2014). *Average Pontoon Boat Speeds (With 15 Examples)* Opgehaald 23 Mei, 2016 van <http://pontoonguide.com/how-fast-pontoon-boat-speeds/>
- [8] Turnipseed, D.P., and Sauer, V.B., 2010, Discharge measurements at gaging stations: U.S. Geological Survey Techniques and Methods book 3, chap. A8, 87 p2. (Also available at <http://pubs.usgs.gov/tm/tm3-a8/>.)
- [9] Shahin, M. (1985). *Hydrology of The Nile Basin* Development of Water Science Chapter 21. International Institute for Hydraulic and Environmental Engineering Delft, The Netherlands. Elsevier Science Publisher B.V. (p.48).