Seis problemas básicos $\mathcal{NP}$-completos

Luz Marina Moreno de Antonio y Jorge Riera Ledesma

Departamento de Ingeniería Informática y de Sistemas. Universidad de La Laguna

16 de noviembre de 2016

Capítulo 1

3SAT

1.1. Problemas involucrados

SATISFACTIBILIDAD (SAT)

ENTRADA: Un conjunto de cláusulas $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ sobre un conjunto finito U de variables.
PREGUNTA: ¿Existe una asignación booleana para U, tal que satisfaga todas las cláusulas de C?

3-SATISFACTIBILIDAD (3SAT)

ENTRADA: Un conjunto de cláusulas $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ sobre un conjunto finito U de variables tal que $|c_i| = 3$, para $1 \leq i \leq m$.
PREGUNTA: ¿Existe una asignación booleana para U, tal que satisfaga todas las cláusulas de C?

1.2. Demostración de NP-completitud

Teorema 1. *3SAT es $\mathcal{NP}$-completo.*

Demostración. Es fácil comprobar que 3SAT $\in \mathcal{NP}$, ya que se puede encontrar una algoritmo para una Máquina de Turing No Determinista (NDTM) que reconozca el lenguaje $L(\text{3SAT}, e)$, para un esquema de codificación e, en un número de pasos acotado por una función polinomial.

Transformaremos SAT en 3SAT. Sea $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un conjunto de variables, y $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ un conjunto de cláusulas conformando una entrada arbitraria de SAT. Construiremos una conjunto C' de cláusulas de tres literales, basadas en un conjunto U' de variables, tal que C' es satisfactible si y solo si C es satisfactible.

La construcción de C' simplemente remplazará cada cláusula individual $c_j \in C$ por un conjunto equivalente C'_j de cláusulas de tres literales, basada en las variables originales U, y algunas variables adicionales U'_j, cuyo uso estará restringido a las cláusulas de C'_j. Esta construcción dará lugar a los conjuntos

$$U' = U \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} U'_j \right)$$

y

$$C' = \bigcup_{j=1}^{m} C_j.$$

De esta manera, sólo se necesita demostrar cómo construir C'_j y U'_j a partir de c_j.

Supóngase que la cláusula c_j viene definida por los literales $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$, donde cada uno de estos elementos deriva de las variables de U. La forma en que construimos los conjuntos C'_j y U'_j va a depender del valor de k.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Caso 1.} & k=1. & U'_j = \left\{y_j^1, y_j^2\right\} \\
 & & C'_j = \left\{\left\{z_1, y_j^1, y_j^2\right\}, \left\{z_1, \bar{y}_j^1, y_j^2\right\}, \left\{z_1, y_j^1, \bar{y}_j^2\right\}, \left\{z_1, \bar{y}_j^1, \bar{y}_j^2\right\}\right\} \\
\text{Caso 2.} & k=2. & U'_j = \left\{y_j^1\right\} \\
 & & C'_j = \left\{\left\{z_1, z_2, y_j^1\right\}, \left\{z_1, z_2, \bar{y}_j^1\right\}\right\} \\
\text{Caso 3.} & k=3. & U'_j = \emptyset \\
 & & C'_j = \{c_j\} \\
\text{Caso 4.} & k=4. & U'_j = \left\{y_j^i | 1 \leq i \leq k-3\right\} \\
 & & C'_j = \left\{z_1, z_2, y_j^1\right\} \cup \left\{\left\{\bar{y}_j^i, z_{i+2}, y_j^{i+1}\right\} | 1 \leq i \leq k-4\right\} \cup \left\{\bar{y}_j^{k-3}, z_{k-1}, z_k\right\}
\end{array}
$$

Para probar que esto es en efecto una transformación, debemos demostrar que el conjunto de cláusulas C' es satisfactible si y sólo si el conjunto C lo es. Supóngase primero que $t : U \to \{T, F\}$ es una asignación booleana que satisface C. Veremos a continuación que t puede ser extendida a una asignación booleana $t' : U' \to \{T, F\}$ satisfaciendo C'. Puesto que las variables $U' - U$ están particionadas en conjuntos U'_j, y puesto que las variables de cada conjunto U'_j sólo aparecen en las cláusulas C'_j, debemos demostrar cómo t puede extenderse para cada conjunto U'_j de forma independiente, en cada caso sólo tenemos que verificar que las cláusulas de C'_j son satisfechas. Haremos esto de la siguiente manera:

- Si se ha construido U'_j sobre los casos 1 o 2, entonces las cláusulas de C'_j ya son satisfechas por t, de manera que podemos extender arbitrariamente a U'_j, por ejemplo, asignando $t'(y) = T$, para todo $y \in U'_j$.
- Si U' se ha construido sobre el caso 3 U'_j es vacío, y por tanto, toda cláusula de C' ya está satisfecha por t.
- Si se ha construido sobre el caso 4 la cláusula $c_j = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$, con $k > 3$. Como t es una asignación booleana que satisface C, entonces debe haber un entero l tal que el literal z_l tiene un valor verdadero mediante t.
  - Si l es 1 o 2, entonces se asignará $t'(y_j^i) = F$ para $1 \leq i \leq k-3$.
  - Si l es $k-1$ o k, entonces se asignará $t'(y_j^i) = T$ para $1 \leq i \leq k-3$.
  - En cualquier otro caso, se asignará $t'(y_j^i) = T$ para $1 \leq i \leq l-2$, y $t'(y_j^i) = F$ para $l-1 \leq i \leq k-3$.

Es fácil verificar que estas opciones garantizan que todas las cláusulas de C'_j son satisfechas, y por lo tanto todas las de C' mediante t'.

En el otro sentido, si t' es una asignación booleana que satisface C', es fácil verificar que la restricción de t' a las variables de U debe también satisfacer C. Entonces, C' es satisfactible si y sólo si C también lo es.

Para comprobar que esta transformación puede llevarse a cabo en tiempo polinomial es suficiente con observar que el número de cláusulas de tres literales de C' está acotada por un polinomio en nm. Por lo tanto, el tamaño de cada entrada de 3SAT está acotado superiormente por una función polinómica del tamaño de la entrada de SAT.

□

Siglas

3SAT 3-SATISFACTIBILIDAD. 3, 4

NDTM Máquina de Turing No Determinista. 3

SAT SATISFACTIBILIDAD. 3, 4