

3-SATISFACTIBILIDAD

Seis problemas básicos \mathcal{NP} -completos

Universidad de La Laguna

Curso 2016/2017

SATISFACTIBILIDAD (SAT)

ENTRADA: Un conjunto de cláusulas $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ sobre un conjunto finito U de variables.

PREGUNTA: ¿Existe una asignación booleana para U , tal que satisfaga todas las cláusulas de C ?

3-SATISFACTIBILIDAD (3SAT)

ENTRADA: Un conjunto de cláusulas $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ sobre un conjunto finito U de variables tal que $|c_i| = 3$, para $1 \leq i \leq m$.

PREGUNTA: ¿Existe una asignación booleana para U , tal que satisfaga todas las cláusulas de C ?

3SAT es NP-completo I

3SAT $\in \mathcal{NP}$

Es fácil comprobar que $3\text{SAT} \in \mathcal{NP}$, ya que se puede encontrar un algoritmo para una Máquina de Turing No Determinista (NDTM) que reconozca el lenguaje $L(3\text{SAT}, e)$, para un esquema de codificación e , en un número de pasos acotado por una función polinomial.

3SAT es NP-completo II

SAT \preceq 3SAT

Sea $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ una entrada arbitraria de SAT. Construiremos un conjunto C' de cláusulas de tres literales, basadas en un conjunto U' de variables, tal que C' es satisfactible $\Leftrightarrow C$ es satisfactible.

SAT \preceq 3SAT

$$U' = U \cup \left(\bigcup_{j=1}^m U'_j \right)$$

$$C' = \bigcup_{j=1}^m C_j.$$

SAT \preceq 3SAT

Supóngase que la cláusula c_j viene definida por los literales $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$, donde cada uno de estos elementos deriva de las variables de U . La forma en que construimos los conjuntos C'_j y U'_j va a depender del valor de k .

Caso 1. $k = 1$. $U'_j = \{y_j^1, y_j^2\}$

$$C'_j = \{\{z_1, y_j^1, y_j^2\}, \{z_1, \bar{y}_j^1, y_j^2\}, \{z_1, y_j^1, \bar{y}_j^2\}, \{z_1, \bar{y}_j^1, \bar{y}_j^2\}\}$$

SAT \preceq 3SAT

Supóngase que la cláusula c_j viene definida por los literales $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$, donde cada uno de estos elementos deriva de las variables de U . La forma en que construimos los conjuntos C'_j y U'_j va a depender del valor de k .

Caso 2. $k = 2$. $U'_j = \{y_j^1\}$

$$C'_j = \{\{z_1, z_2, y_j^1\}, \{z_1, z_2, \bar{y}_j^1\}\}$$

SAT \preceq 3SAT

Supóngase que la cláusula c_j viene definida por los literales $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$, donde cada uno de estos elementos deriva de las variables de U . La forma en que construimos los conjuntos C'_j y U'_j va a depender del valor de k .

Caso 3. $k = 3$. $U'_j = \emptyset$

$$C'_j = \{c_j\}$$

SAT \preceq 3SAT

Supóngase que la cláusula c_j viene definida por los literales $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$, donde cada uno de estos elementos deriva de las variables de U . La forma en que construimos los conjuntos C'_j y U'_j va a depender del valor de k .

Caso 4. $k = 4$. $U'_j = \{\textcolor{red}{y}_j^i | 1 \leq i \leq k - 3\}$

$$C'_j = \{z_1, z_2, \textcolor{red}{y}_j^1\} \cup \{\{\bar{\textcolor{red}{y}}_j^i, z_{i+2}, \textcolor{red}{y}_j^{i+1}\} | 1 \leq i \leq k - 4\} \cup \{\bar{\textcolor{red}{y}}_j^{k-3}, z_{k-1}, z_k\}$$

3SAT es NP-completo V

SAT \preceq 3SAT

Tenemos que demostrar que el conjunto de cláusulas C' es satisfactible si y sólo si el conjunto C lo es.

- Supóngase primero que $t : U \rightarrow \{T, F\}$ es una asignación booleana que satisface C .
- Veremos a continuación que t puede ser extendida a una asignación booleana $t' : U' \rightarrow \{T, F\}$ satisfaciendo C' .
- Puesto que las variables $U' - U$ están particionadas en conjuntos U'_j , y puesto que las variables de cada conjunto U'_j sólo aparecen en las cláusulas C'_j , debemos demostrar cómo t puede extenderse para cada conjunto U'_j de forma independiente, en cada caso sólo tenemos que verificar que las cláusulas de C'_j son satisfechas.

3SAT es NP-completo VI

SAT \preceq 3SAT

Caso 1. $k = 1.$ $U'_j = \{y_j^1, y_j^2\}$

$$C'_j = \{\{z_1, y_j^1, y_j^2\}, \{z_1, \bar{y}_j^1, y_j^2\}, \{z_1, y_j^1, \bar{y}_j^2\}, \{z_1, \bar{y}_j^1, \bar{y}_j^2\}\}$$

Caso 2. $k = 2.$ $U'_j = \{y_j^1\}$

$$C'_j = \{\{z_1, z_2, y_j^1\}, \{z_1, z_2, \bar{y}_j^1\}\}$$

- Si se ha construido U'_j sobre los casos 1 o 2, entonces las cláusulas de C'_j ya son satisfechas por t , de manera que podemos extender arbitrariamente a U'_j , por ejemplo, asignando $t'(y) = T$, para todo $y \in U'_j$.

SAT \preceq 3SAT

Caso 3. $k = 3$. $U'_j = \emptyset$

$$C'_j = \{c_j\}$$

- Si U' se ha construido sobre el caso 3 U'_j es vacío, y por tanto, toda cláusula de C' ya está satisfecha por t .

SAT \preceq 3SAT

Caso 4. $k = 4$. $U'_j = \{y_j^i | 1 \leq i \leq k - 3\}$

$$C'_j = \{z_1, z_2, y_j^1\} \cup \{\{\bar{y}_j^i, z_{i+2}, y_j^{i+1}\} | 1 \leq i \leq k - 4\} \cup \{\bar{y}_j^{k-3}, z_{k-1}, z_k\}$$

- Si se ha construido sobre el caso 4 la cláusula $c_j = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$, con $k > 3$. Como t es una asignación booleana que satisface C , entonces debe haber un entero l tal que el literal z_l tiene un valor verdadero mediante t .
 - Si l es 1 o 2, entonces se asignará $t'(y_j^i) = F$ para $1 \leq i \leq k - 3$.
 - Si l es $k - 1$ o k , entonces se asignará $t'(y_j^i) = T$ para $1 \leq i \leq k - 3$.
 - En cualquier otro caso, se asignará $t'(y_j^i) = T$ para $1 \leq i \leq l - 2$, y $t'(y_j^i) = F$ para $l - 1 \leq i \leq k - 3$.