Demostración de la $\mathcal{NP}$-Completitud del problema del Circuito Hamiltoniano

Complejidad Computacional

Carlos Domínguez García,
Daute Rodríguez Rodríguez,
Alberto Jesús González Álvarez,
Cristian Manuel Abrante Dorta

Universidad de La Laguna

9 de enero de 2019

Índice

Motivación

El problema HC consite en determinar si en un grafo dado (dirigido o no dirigido) existe un **Circuito Hamiltoniano**.

El estudio de este problema tiene diversas aplicaciones, en parte debido a su estrecha relación con el TSP (Traveling Salesman Probem):

Aplicaciones

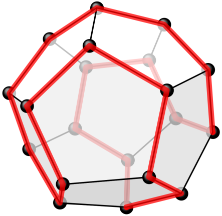
- Problemas de rutas.
- Problemas de logística.
- Problemas de asignación de trabajos.
- Problemas de secuenciación de ADN.

Descripción informal

Definition

Un **circuito hamiltoniano** es un camino a través de los vértices de un grafo, de tal forma que cada vértice **se visite una sola vez**, y este comience y termine en el mismo vértice.

Se nombró en honor al matemático William Rowan Hamilton (1805 - 1865), quien fromuló el problema de encontrar una **secuencia de vértices de un icosaedro**, de tal forma que solo se visitaran una vez.



Descripción formal

La formulación del problema es la siguiente:

Instancia

La entrada es un grafo:

$$G = (V, E)$$

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad |V| = n$$

$$E = \{\{u, v\} : u, v \in V\}$$

Pregunta

¿Contiene G un Camino Hamiltoniano?

Es decir, contiene G una secuencia ordenada $< v_1, v_2, \dots, v_n >$, de tamaño $|V| = n$, tal que:

$$\{v_n, v_1\} \in E \wedge \{v_i, v_{i+1}\} \in E \quad \forall i, 1 \leq i < n$$

Introducción

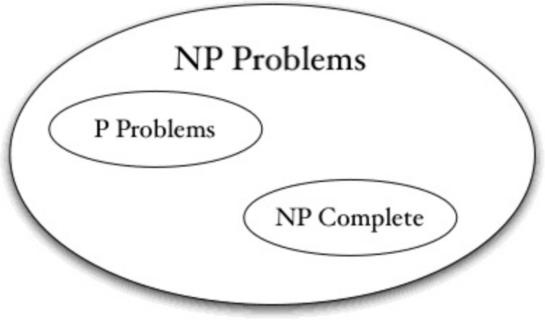


Figure: Diagrama $\mathcal{P} - \mathcal{NP}$

Introducción

Para demostrar que un problema (p) es $\mathcal{NP}$-**Completo**, se tiene que satisfacer estas condiciones:

I El problema pertenece a $\mathcal{NP}$, es decir que existe una **máquina de Turing no detrminista** que resuelve el problema en tiempo polinomial.

$$p \in \mathcal{NP}$$

II Existe una **reducción polinomial** de cada uno de los problemas de $\mathcal{NP}$ a p:

$$\forall p' \in \mathcal{NP}, \quad p' \propto p$$

Introducción

Para realizar la demostración, transformaremos el problema del **Vertex Cover** en el problema del **Circuito Hamiltoniano**.

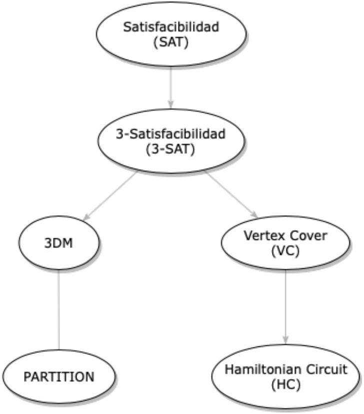


Figure: Diagrama de problemas *NP*-Completo

Introducción

Para realizar la demostración, transformaremos el problema del **Vertex Cover** en el problema del **Circuito Hamiltoniano**.

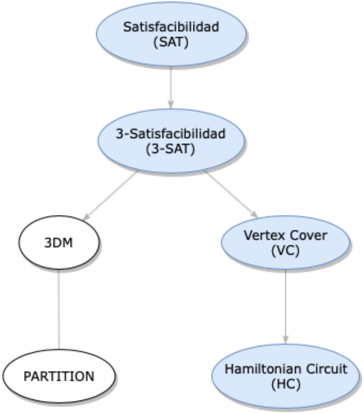


Figure: Diagrama de problemas *NP*-Completo

Vetex Cover

Definiremos brevemente en que consiste el problema del Vertex Cover (VC):

Entrada

La entrada es un grafo $G = (V, E)$ y un entero $K \in \mathbb{N}, \quad K \leq |V|$

Pregunta

¿Existe un vertex Cover de tamaño K?

Es decir, ¿podemos encontrar un subconjunto V' de vértices, de tal forma que cada arista es incidente en al menos uno de los vértices del conjunto?

$$\exists V' \subseteq V, \quad |V'| \leq K : \{u, v\} \in E \rightarrow (u \in V') \vee (v \in V')$$

Este problema está probado que pertenece a $\mathcal{NP}$-Completo:

$$VC \in \mathcal{NP} - Completo$$

Demostración de I

Condición I de $\mathcal{NP}$-Completitud

$$HC \in \mathcal{NP}$$

Para probar esto, basta con encontrar un **algoritmo de fuerza bruta**, que compruebe todas las permutaciones de vértices, lo cual presenta una complejidad temporal de:

$$\mathcal{O}(n!)$$

Dada un conjunto de vértices concreto, se puede comprobar si es un Camino Hamiltoniano **en tiempo polinomial**.

Demostración de II

Condición II de $\mathcal{NP}$-Completitud

$$\forall p' \in \mathcal{NP}, \quad p' \propto p$$

Lo que es equivalente a:

$$VC \propto HC$$

Porque $VC \in \mathcal{NP} - Completo$

Partiendo del grafo de entrada ($G = (V, E)$) y el entero K, nuestra demostración consistirá en **construir en tiempo polinomial** un grafo $G' = (V', E')$, de tal forma que, G' tendrá un circuito hamiltoniano sí y solo sí, G tiene un Vertex Cover de tamaño K o inferior.

Esta demostración se basará en la **construcción de componentes**.

El primer conjunto de componentes será el de los **selectores**, el cual será un conjunto de vértices.

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_K\}$$

Utilizado para seleccionar los K vértices del conjunto V de G.

$$\{a_i : 1 \leq i \leq K\}$$

Demostración de II (Componente cover-testing)

Construimos un compoenente **cover testing** por cada arista en E ($\forall e \in E$). Utilizados para garantizar que al menos uno de los vértices de esa arista está entre los K vértices seleccionados.

Componente Cover-Testing

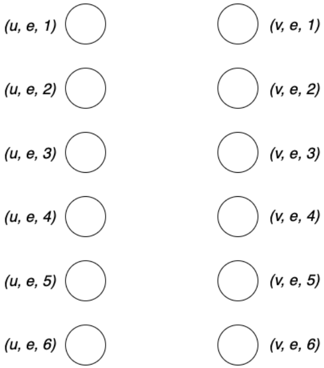
Está formado por:

- Un conjunto (V'_e) de doce vértices.
- Un conjunto (E'_e) de catorce aristas.

$$\forall e = \{u, v\} \in E$$

Construimos un **cover-testing** de doce vértices definidos como:

$$V'_e = \{(u, e, i), (v, e, i) : i \leq i \leq 6\}$$

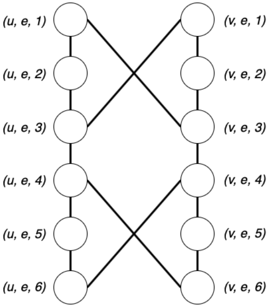


Demostración de II (Componente cover-testing)

$$\forall e = \{u, v\} \in E$$

Construimos un **cover-testing** de catorce aristas definidas como:

$$\begin{aligned} E'_e = \{\{(u,e,i),(u,e,i+1)\},\{(v,e,i),(v,e,i+1)\} : i \leq i < 6\} \\ \cup \quad \{\{(u,e,3),(v,e,1)\},\{(v,e,3),(u,e,1)\}\} \\ \cup \quad \{\{(u,e,6),(v,e,4)\},\{(v,e,6),(u,e,4)\}\} \end{aligned}$$



Demostración de II (Componente cover-testing)

Los únicos vértices que aparecerán en alguna otra arista de G' serán:

$$(u, e, 1) \quad (v, e, 1) \quad (u, e, 6) \quad (v, e, 6)$$

De esta forma, se garantiza que cualquier **circuito hamiltoniano** de G', recorrerá los vértices de E'_e, solo en una de estas tres formas:

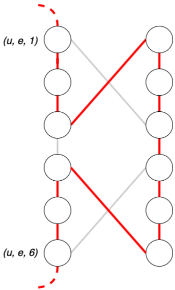


Figure: u está en el cubrimiento

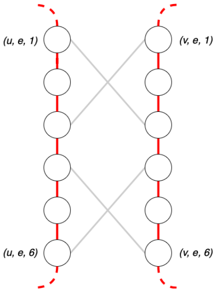


Figure: u y v están en el cubrimiento

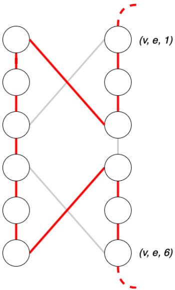


Figure: v está en el cubrimiento

Demostración de II (Conexiones)

En primer lugar, se ordenan las aristas incidentes en cada vértice de manera arbitraria:

$$\forall v \in V, \quad < e_{v[1]}, e_{v[2]}, \cdots, e_{v[deg(v)]} >$$

Luego se construye el conjunto E'_v de aristas que conectan **componentes cover-testing**:

$$E'_v = \{\{(v, e_{v[i]}, 6), (v, e_{v[i+1]}, 1)\} : 1 \leq i < deg(v)\}$$

Finalmente, se conectan los finales de estos caminos con cada uno de **los selectores**:

$$E'' = \{\{a_i, (v, e_{v[1],1})\}, \{a_i, (v, e_{v[deg(v)]}, 6)\} : 1 \leq i \leq K, v \in V\}$$

Una vez hemos definido los componentes y concexiones, defnimos G' como:

G'

$$G' = (V', E')$$

$$V' = \{a_i : 1 \leq i \leq K\} \cup (\bigcup_{e \in E} V'_e)$$

$$E' = (\bigcup_{e \in E} E'_e) \cup (\bigcup_{v \in V} E'_v) \cup E''$$

Demostración de II

Demostración

La demostración de II consiste en que si existe un VC de tamaño K en G, entonces ha de existir un HC en G'.

Sea $V^* \subseteq V$ un Vertex Cover en G, de tamaño K: $V^* = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$

Para cada **cover-testing**, se eligen los nodos dependiendo de la pertenencia al conjunto V'.
Luego se eligen las siguientes aristas:

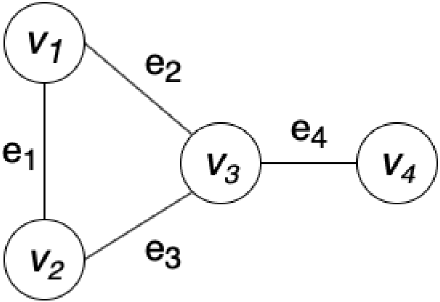
- $\{a_i, (v_i, e_{v_i[1]}, 1)\}, \quad 1 \leq j \leq K$
- $\{a_{i+1}, (v_1, e_{v_i[deg(v_i)]}, 6)\} \quad 1 \leq i < K$
- $\{a_1, (v_K, e_{v_K[deg(v_K)]}, 6)\}$

Estas componentes formarían un **Circuito Hamiltoniano**.

Ejemplo

En el ejemplo utilizaremos el grafo siguiente:

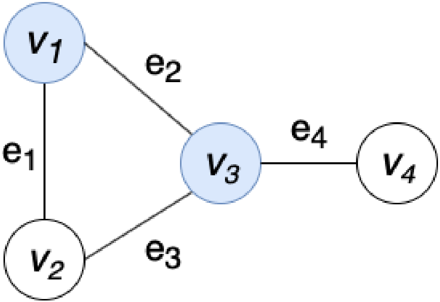
$$G = (V, E) \quad V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \quad E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$



Ejemplo

El cual tiene un vertex cover ($V^* \subseteq V$):

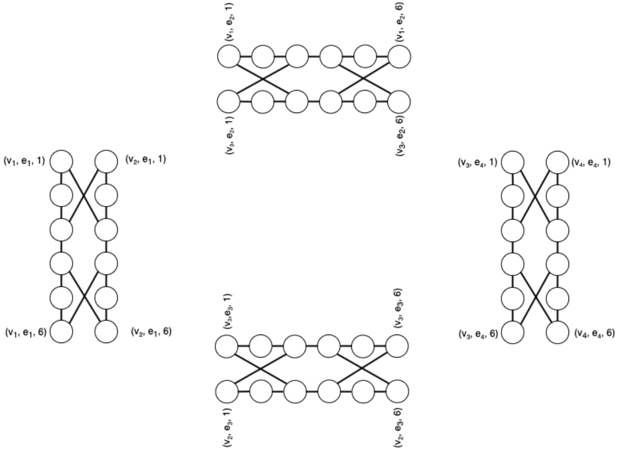
$$G = (V, E) \quad V^* = \{v_1, v_2\}$$



Ejemplo

Construimos el grafo $G' = (V', E')$:

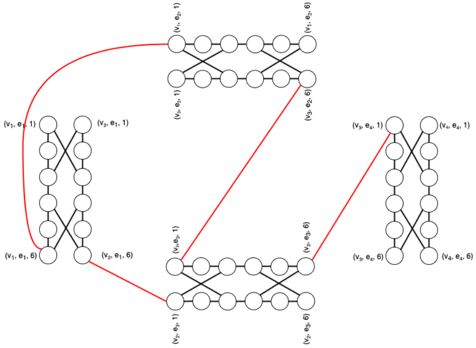
Construimos las componentes **cover-testing** $(\forall e \in E)$



Ejemplo

Construimos el grafo $G' = (V', E')$:

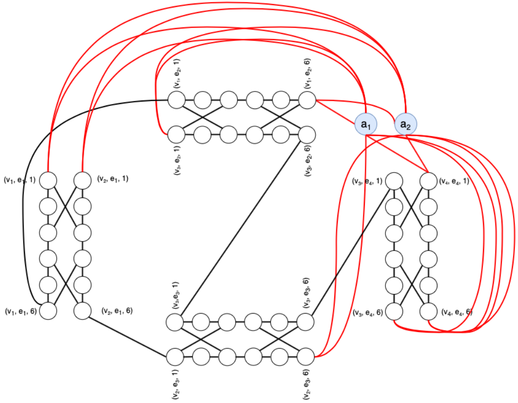
Conectamos los componentes cover-testing:
$E'_v = \{\{(v, e_{v[i]}, 6), (v, e_{v[i+1]}, 1)\} : 1 \leq i < deg(v)\}$



Ejemplo

Construimos el grafo $G' = (V', E')$:

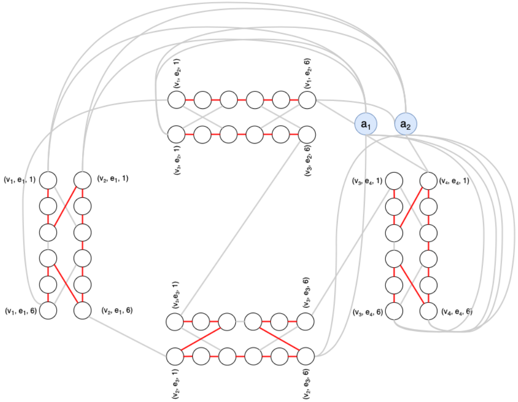
Conectamos los componentes cover-testing con los selectores:
$E'' = \{\{a_i, (v, e_{v[1],1})\}, \{a_i, (v, e_{v[deg(v)]}, 6)\} : 1 \leq i \leq K, v \in V\}$



Ejemplo

Determinamos el circuito hamiltoniano a partir de $V^* = \{v_1, v_3\}$:

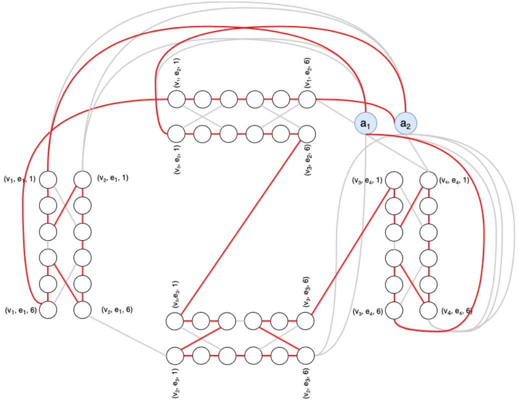
Elegimos los nodos de los cover-testing que pertenecen a V^*



Ejemplo

Determinamos el circuito hamiltoniano a partir de $V^* = \{v_1, v_3\}$:

Elegimos **las conexiones** entre cover-testing y con los selectores.



Referencias I

Michael Garey, David S. Johnson.
Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.
W. H. Freeman and Company, 1979.

Richard M. Karp.
Reducibility Among Combinatorial Problems.
Complexity of Computer Computations, pp:85-103, 1972.

¿Preguntas?

Carlos Domínguez García: `alu0100966589@ull.edu.es`
Daute Rodríguez Rodríguez: `alu0100973914@ull.edu.es`
Alberto Jesús González Álvarez: `alu0100949568@ull.edu.es`
Cristian Manuel Abrante Dorta: `alu0100945850@ull.edu.es`