Demostración de la $\mathcal{NP}$-Completitud del problema del Circuito Hamiltoniano

Cristian Manuel Abrante Dorta,
Alberto Jesús González Álvarez,
Carlos Domínguez García,
Daute Rodríguez Rodríguez

9 de Enero de 2019

Índice

1. Introducción

1.1. Descripción informal

El problema *Hamiltonian Circuit* consiste en determinar si dado un grafo, existe en él un *Circuito Hamiltoniano*, esto es, un camino a través de los vértices del grafo de manera que se visite cada vértice una única vez y este comience y termine en el mismo vértice.

1.2. Descripción formal

Dado un grafo $G = (V, E)$:

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \quad |V| = n$$

$$E = \{\{u, v\} : u, v \in V\}$$

¿Contiene G un Camino Hamiltoniano? Es decir, contiene G una secuencia ordenada $< v_1, v_2, \ldots, v_n >$ de tamaño $|V| = n$, tal que:

$$\{v_n, v_1\} \in E \wedge \{v_i, v_{i+1}\} \in E \quad \forall i, 1 \leq i < n$$

1.3. Motivación

El estudio de este problema tiene diversas aplicaciones, en parte debido a su estrecha relación con el *Traveling Salesman Problem*:

- Problemas de rutas.
- Problemas de logística.
- Problemas de asignación de trabajos.
- Problemas de secuenciación de ADN.

2. Demostración de $\mathcal{NP}$-Completitud

2.1. Introducción

Para demostrar que un problema p pertenece a la clase de problemas $\mathcal{NP}$-Completo han de satisfacerse las dos condiciones siguientes:

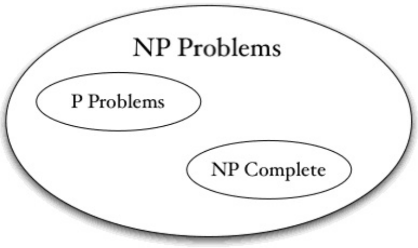


Figura 1: Diagrama $\mathcal{P} - \mathcal{NP}$

1. p pertenece a la clase $\mathcal{NP}$, es decir, existe una **máquina de Turing no determinista** que resuelve el problema en tiempo polinomial.

$$p \in \mathcal{NP}$$

2. Existe una reducción polinomial de cada uno de los problemas de $\mathcal{NP}$ a p:

$$\forall p' \in \mathcal{NP}, \quad p' \alpha \, p$$

Típicamente, para demostrar la $\mathcal{NP}$-Completitud del problema *Hamiltonian Circuit*, se lleva cabo una reducción polinomial del problema *Vertex Cover*, probado como perteneciente a la clase de problemas $\mathcal{NP}$-Completo. Por ello, la siguiente sección del presente trabajo estará dedicada a definir la naturaleza del problema *Vertex Cover*.

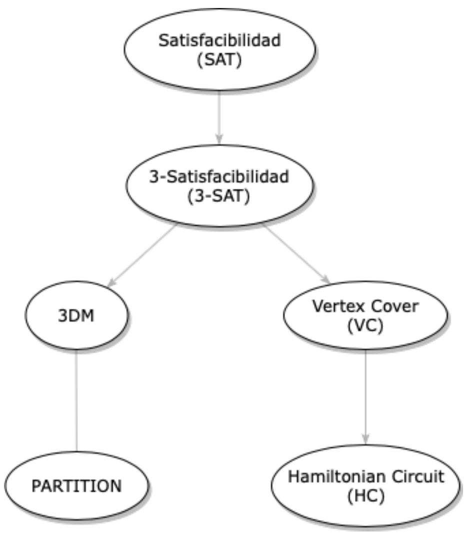


Figura 2: Diagrama de problemas $\mathcal{NP}$-Completo

2.2. Problema Vertex Cover

Dado un grafo $G = (V, E)$ y un número entero $K \in \mathbb{N} \mathbin{/} K < |V|$:

$$\exists V' \subseteq V, \quad |V'| \leq K : \{u, v\} \in E \rightarrow (u \in V') \vee (v \in V')$$

¿Existe un Vertex Cover de tamaño K?. Es decir, ¿podemos encontrar un subconjunto V' de vértices, de tal forma que cada arista es incidente en al menos uno de los vértices del conjunto?.

2.3. Primera condición de $\mathcal{NP}$-Completitud

$$HC \in \mathcal{NP}$$

Para demostrar que *HC* pertenece al conjunto de problemas $\mathcal{NP}$-Completo basta con encontrar un algoritmo de **fuerza bruta**, que compruebe todas las permutaciones de vértices, lo cual presenta una complejidad temporal de:

$$\mathcal{O}(n!)$$

Dado un conjunto de vértices concreto, se puede comprobar si es un *Camino Hamiltoniano* en **tiempo polinomial**.

2.4. Segunda condición de $\mathcal{NP}$-Completitud

$$\forall p' \in \mathcal{NP}, \quad p' \alpha \, p$$

Lo que es equivalente $VC \; \alpha \; HC$ puesto que $VC \in \mathcal{NP} - Completo$.

Partiendo del grador de entrada $G = (V, E)$ y el entero K, la demostración consiste en **construir en tiempo polinomial** un segundo grafo $G' = (V', E')$ de tal forma que, G' contendrá un *Circuito Hamiltoniano* sí y solo sí, existe un *Vertex Cover* en G de tamaño K o inferior.

Cabe destacar que esta demostración se basa en la construcción de componentes.

2.4.1. Selectores

El primer conjunto de componentes será el de los **selectores**, el cual será un conjunto de vertices:

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$$

Utilizado para seleccionar los K vértices del conjunto V de G.

$$a_i : 1 \leq i \leq K$$

2.4.2. Componente cover-testing

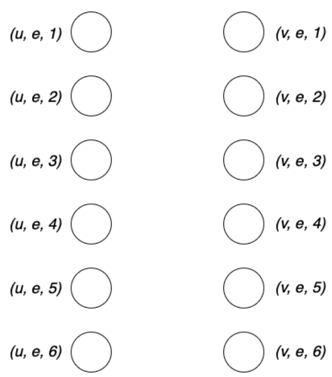
Construimos un componente **cover testing** por cada arista en E ($\forall e \in E$). Con cada uno de estos componentes podremos garantizar que al menos uno de los vértices de esa arista está entre los K vértices seleccionados.

Un componente cover-testing se cuentra formado por:

- Un conjunto (V'_e) de doce vértices.
- Un conjunto (E'_e) de catorce aristas.

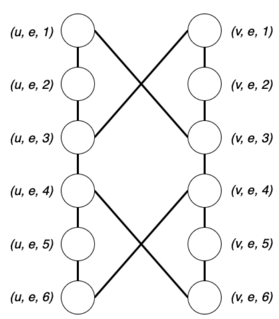
Construimos el cover testing de doce vértices definidos de la siguiente manera

$$V'_e = \{(u,e,i),(v,e,i) : i \leq i \leq 6\}$$



A continuación definiremos las aristas que unirán los vértices. Estas aristas están definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E'_e = \{\{(u,e,i),(u,e,i+1)\},\{(v,e,i),(v,e,i+1)\} : i \leq i < 6\} \\ \cup \quad \{\{(u,e,3),(v,e,1)\},\{(v,e,3),(u,e,1)\}\} \\ \cup \quad \{\{(u,e,6),(v,e,4)\},\{(v,e,6),(u,e,4)\}\} \end{aligned}$$



Los únicos vértices que aparecerán en alguna otra arista de G' serán:

$$(u,e,1) \quad (v,e,1) \quad (u,e,6) \quad (v,e,6)$$

De esta forma, se garantiza que cualquier **circuito hamiltoniano** de G', recorrerá los vértices de E'_e, solo en una de estas tres formas:

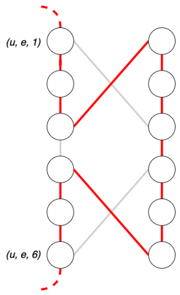


Figura 3: u está en el cubrimiento

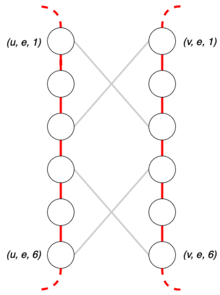


Figura 4: u y v están en el cubrimiento

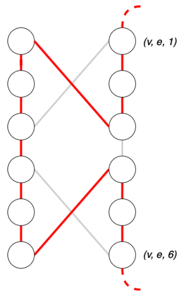


Figura 5: v está en el cubrimiento

2.4.3. Conexiones

En primer lugar, se ordenan las aristas incidentes en cada vértice de manera arbitraria:

$$\forall v \in V, \quad < e_{v[1]}, e_{v[2]}, \cdots, e_{v[deg(v)]} >$$

Luego se construye el conjunto E'_v de aristas que conectan **componentes cover-testing**:

$$E'_v = \{\{(v, e_{v[i]}, 6), (v, e_{v[i+1]}, 1)\} : 1 \leq i < deg(v)\}$$

Finalmente, se conectan los finales de estos caminos con cada uno de **los selectores**:

$$E'' = \{\{a_i, (v, e_{v[1],1})\}, \{a_i, (v, e_{v[deg(v)]}, 6)\} : 1 \leq i \leq K, v \in V\}$$

2.4.4. Generación del grafo

Una vez hemos definido los componentes y conexiones, definimos G' de la siguiente manera:

$$G' = (V', E')$$

$$V' = \{a_i : 1 \leq i \leq K\} \cup (\bigcup_{e \in E} V'_e)$$

$$E' = (\bigcup_{e \in E} E'_e) \cup (\bigcup_{v \in V} E'_v) \cup E''$$

2.4.5. Demostración de la segunda condición

La demostración de II consiste en que si existe un VC de tamaño K en G, entonces ha de existir un HC en G'. Por tanto, sea $V^* \subseteq V$ un Vertex Cover en

G, de tamaño K: $V^* = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$

Para cada **cover-testing**, se eligen los nodos dependiendo de la pertenencia al conjunto V'. Y a continuación se eligen las siguientes aristas:

- $\{a_i, (v_i, e_{v_i[1]}, 1)\}, \quad 1 \leq j \leq K$
- $\{a_{i+1}, (v_1, e_{v_i[deg(v_i)]}, 6)\} \quad 1 \leq i < K$
- $\{a_1, (v_K, e_{v_K[deg(v_K)]}, 6)\}$

Estas componentes formarán un **Circuito Hamiltoniano**.

Referencias

[1] Michael Garey, David S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W. H. Freeman and Company, 1979.

[2] Richard M. Karp. Reducibility Among Combinatorial Problems. *Complexity of Computer Computations*, pp:85-103, 1972.