

Demostración de la \mathcal{NP} -Complejidad del problema del Circuito Hamiltoniano

Complejidad Computacional

Carlos Domínguez García,
Daute Rodríguez Rodríguez,
Alberto Jesús González Álvarez,
Cristian Manuel Abrante Dorta

Universidad de La Laguna

9 de enero de 2019

1 Introduction

- Motivación
- Descripción informal
- Descripción formal

2 Demostración de \mathcal{NP} -Compleitud

- Introducción
- Vertex Cover
- Demostración de I
- Demostración de II
 - Nodos selectores
 - Componentes cover-testing
 - Conexiones
- Ejemplo

El problema HC consiste en determinar si en un grafo dado (dirigido o no dirigido) existe un **Circuito Hamiltoniano**.

El estudio de este problema tiene diversas aplicaciones, en parte debido a su estrecha relación con el TSP (Traveling Salesman Problem):

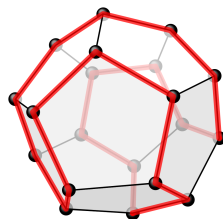
Aplicaciones

- Problemas de rutas.
- Problemas de logística.
- Problemas de asignación de trabajos.
- Problemas de secuenciación de ADN.

Definition

Un **circuito hamiltoniano** es un camino a través de los vértices de un grafo, de tal forma que cada vértice **se visite una sola vez**, y este comience y termine en el mismo vértice.

Se nombró en honor al matemático William Rowan Hamilton (1805 - 1865), quien formuló el problema de encontrar una **secuencia de vértices de un icosaedro**, de tal forma que solo se visitaran una vez.



Descripción formal

La formulación del problema es la siguiente:

Instancia

La entrada es un grafo:

$$G = (V, E)$$

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad |V| = n$$

$$E = \{\{u, v\} : u, v \in V\}$$

Pregunta

¿Contiene G un Camino Hamiltoniano?

Es decir, contiene G una secuencia ordenada $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$, de tamaño $|V| = n$, tal que:

$$\{v_n, v_1\} \in E \wedge \{v_i, v_{i+1}\} \in E \quad \forall i, 1 \leq i < n$$

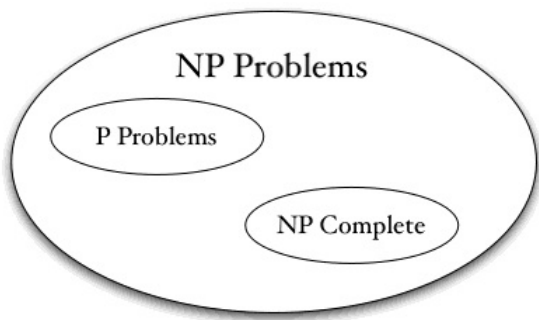


Figure: Diagrama $\mathcal{P} - \mathcal{NP}$

Para demostrar que un problema (p) es \mathcal{NP} -**Completo**, se tiene que satisfacer estas condiciones:

- I El problema pertenece a \mathcal{NP} , es decir que existe una **máquina de Turing no determinista** que resuelve el problema en tiempo polinomial.

$$p \in \mathcal{NP}$$

- II Existe una **reducción polinomial** de cada uno de los problemas de \mathcal{NP} a p :

$$\forall p' \in \mathcal{NP}, \quad p' \propto p$$

Introducción

Para realizar la demostración, transformaremos el problema del **Vertex Cover** en el problema del **Circuito Hamiltoniano**.

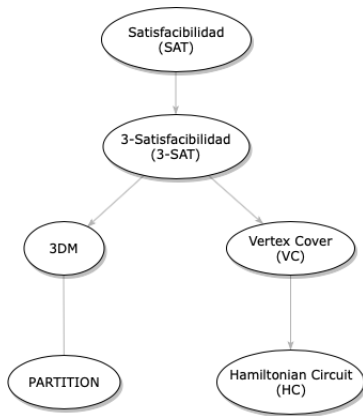


Figure: Diagrama de problemas *NP*-Completo

Introducción

Para realizar la demostración, transformaremos el problema del **Vertex Cover** en el problema del **Circuito Hamiltoniano**.

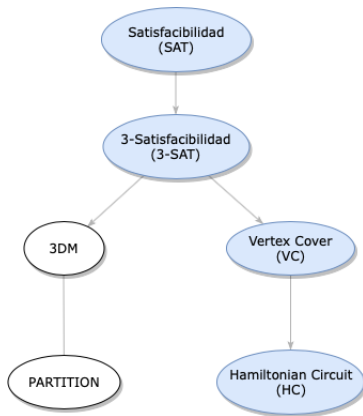


Figure: Diagrama de problemas *NP*-Completo

Vertex Cover

Definiremos brevemente en que consiste el problema del Vertex Cover (VC):

Entrada

La entrada es un grafo $G = (V, E)$ y un entero $K \in \mathbb{N}$, $K \leq |V|$

Pregunta

¿Existe un vertex Cover de tamaño K ?

Es decir, ¿podemos encontrar un subconjunto V' de vértices, de tal forma que cada arista es incidente en al menos uno de los vértices del conjunto?

$$\exists V' \subseteq V, \quad |V'| \leq K : \{u, v\} \in E \rightarrow (u \in V') \vee (v \in V')$$

Este problema está probado que pertenece a \mathcal{NP} -Completo:

$VC \in \mathcal{NP} - \text{Completo}$

Condición I de \mathcal{NP} -Compleitud

$$HC \in \mathcal{NP}$$

Para probar esto, basta con encontrar un **algoritmo de fuerza bruta**, que compruebe todas las permutaciones de vértices, lo cual presenta una complejidad temporal de:

$$\mathcal{O}(n!)$$

Dada un conjunto de vértices concreto, se puede comprobar si es un Camino Hamiltoniano **en tiempo polinomial**.

Condición II de \mathcal{NP} -Compleitud

$$\forall p' \in \mathcal{NP}, \quad p' \propto p$$

Lo que es equivalente a:

$$VC \propto HC$$

Porque $VC \in \mathcal{NP} - \text{Completo}$

Partiendo del grafo de entrada ($G = (V, E)$) y el entero K , nuestra demostración consistirá en **construir en tiempo polinomial** un grafo $G' = (V', E')$, de tal forma que, G' tendrá un circuito hamiltoniano sí y solo sí, G tiene un Vertex Cover de tamaño K o inferior.

Esta demostración se basará en la **construcción de componentes**.

Demostración de II (Selectores)

El primer conjunto de componentes será el de los **selectores**, el cual será un conjunto de vértices.

$$\{a_1, a_2, \dots, a_K\}$$

Utilizado para seleccionar los K vértices del conjunto V de G .

$$\{a_i : 1 \leq i \leq K\}$$

Demostración de II (Componente cover-testing)

Construimos un componente **cover-testing** por cada arista en E ($\forall e \in E$). Utilizados para garantizar que al menos uno de los vértices de esa arista está entre los K vértices seleccionados.

Componente Cover-Testing

Está formado por:


- Un conjunto (V'_e) de doce vértices.
- Un conjunto (E'_e) de catorce aristas.


Demostración de II (Componente cover-testing)


$$\forall e = \{u, v\} \in E$$


Construimos un **cover-testing** de doce vértices definidos como:


$$V'_e = \{(u, e, i), (v, e, i) : i \leq i \leq 6\}$$


$(u, e, 1)$ 


 $(v, e, 1)$


$(u, e, 2)$ 


 $(v, e, 2)$


$(u, e, 3)$ 


 $(v, e, 3)$


$(u, e, 4)$ 

 $(v, e, 4)$

$(u, e, 5)$ 

 $(v, e, 5)$

$(u, e, 6)$ 

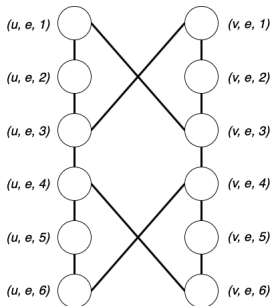
 $(v, e, 6)$

Demostración de II (Componente cover-testing)

$$\forall e = \{u, v\} \in E$$

Construimos un **cover-testing** de catorce aristas definidas como:

$$\begin{aligned} E'_e = & \{ \{(u, e, i), (u, e, i+1)\}, \{(v, e, i), (v, e, i+1)\} : i \leq i < 6 \} \\ & \cup \{ \{(u, e, 3), (v, e, 1)\}, \{(v, e, 3), (u, e, 1)\} \} \\ & \cup \{ \{(u, e, 6), (v, e, 4)\}, \{(v, e, 6), (u, e, 4)\} \} \end{aligned}$$



Demostración de II (Componente cover-testing)

Los únicos vértices que aparecerán en alguna otra arista de G' serán:

$$(u, e, 1) \quad (v, e, 1) \quad (u, e, 6) \quad (v, e, 6)$$

De esta forma, se garantiza que cualquier **circuito hamiltoniano** de G' , recorrerá los vértices de E'_e , solo en una de estas tres formas:

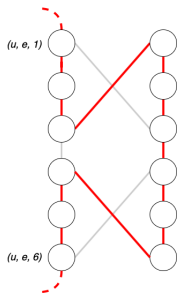


Figure: u está en el cubrimiento

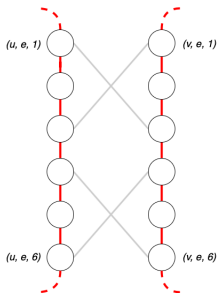


Figure: u y v están en el cubrimiento

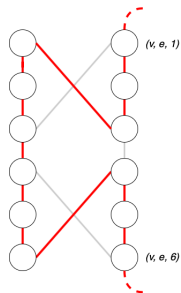


Figure: v está en el cubrimiento

Demostración de II (Conexiones)

En primer lugar, se ordenan las aristas incidentes en cada vértice de manera arbitraria:

$$\forall v \in V, \quad \langle e_{v[1]}, e_{v[2]}, \dots, e_{v[\deg(v)]} \rangle$$

Luego se construye el conjunto E'_v de aristas que conectan **componentes cover-testing**:

$$E'_v = \{ \{ (v, e_{v[i]}, 6), (v, e_{v[i+1]}, 1) \} : 1 \leq i < \deg(v) \}$$

Finalmente, se conectan los finales de estos caminos con cada uno de **los selectores**:

$$E'' = \{ \{ a_i, (v, e_{v[1],1}) \}, \{ a_i, (v, e_{v[\deg(v)],6}) \} : 1 \leq i \leq K, v \in V \}$$

Una vez hemos definido los componentes y conexiones, definimos G' como:

G'

$$G' = (V', E')$$

$$V' = \{a_i : 1 \leq i \leq K\} \cup \left(\bigcup_{e \in E} V'_e \right)$$

$$E' = \left(\bigcup_{e \in E} E'_e \right) \cup \left(\bigcup_{v \in V} E'_v \right) \cup E''$$

Demostración de II

Demostración

La demostración de II consiste en que si existe un VC de tamaño K en G , entonces ha de existir un HC en G' .

Sea $V^* \subseteq V$ un Vertex Cover en G , de tamaño K : $V^* = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$

Para cada **cover-testing**, se eligen los nodos dependiendo de la pertenencia al conjunto V' .

Luego se eligen las siguientes aristas:

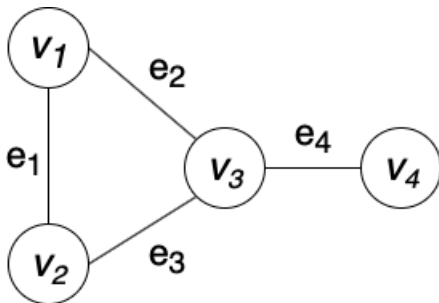
- $\{a_i, (v_i, e_{v_i[1]}, 1)\}$, $1 \leq j \leq K$
- $\{a_{i+1}, (v_1, e_{v_1[\deg(v_i)]}, 6)\}$ $1 \leq i < K$
- $\{a_1, (v_K, e_{v_K[\deg(v_K)]}, 6)\}$

Estas componentes formarían un **Circuito Hamiltoniano**.

Ejemplo

En el ejemplo utilizaremos el grafo siguiente:

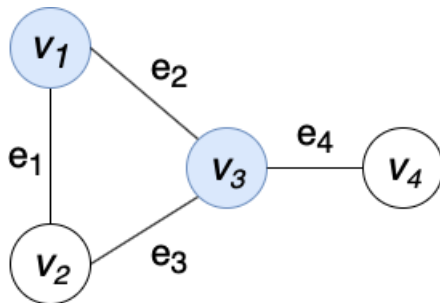
$$G = (V, E) \quad V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \quad E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$



Ejemplo

El cual tiene un vertex cover ($V^* \subseteq V$):

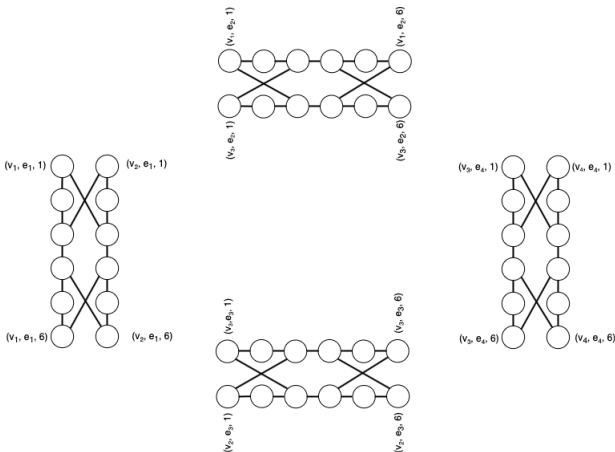
$$G = (V, E) \quad V^* = \{v_1, v_2\}$$



Ejemplo

Construimos el grafo $G' = (V', E')$:

Construimos las componentes **cover-testing** ($\forall e \in E$)

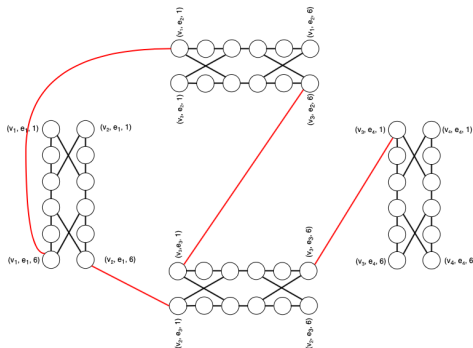


Ejemplo

Construimos el grafo $G' = (V', E')$:

Conectamos los componentes cover-testing:

$$E'_v = \{ \{ (v, e_v[i], 6), (v, e_v[i+1], 1) \} : 1 \leq i < \deg(v) \}$$

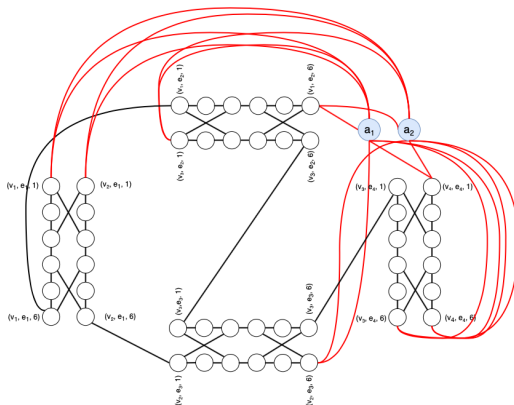


Ejemplo

Construimos el grafo $G' = (V', E')$:

Conectamos los componentes cover-testing con los selectores:

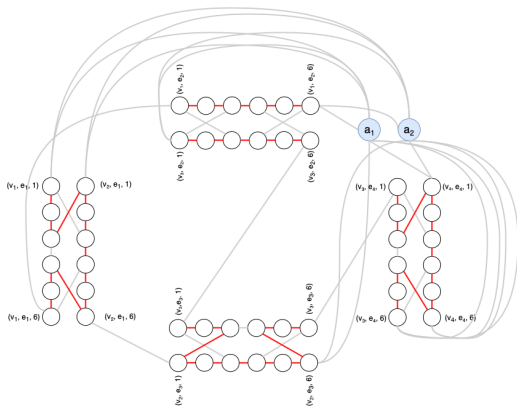
$$E'' = \{\{a_i, (v, e_{v[1],1})\}, \{a_i, (v, e_{v[\deg(v)],6})\} : 1 \leq i \leq K, v \in V\}$$



Ejemplo

Determinamos el circuito hamiltoniano a partir de $V^* = \{v_1, v_3\}$:

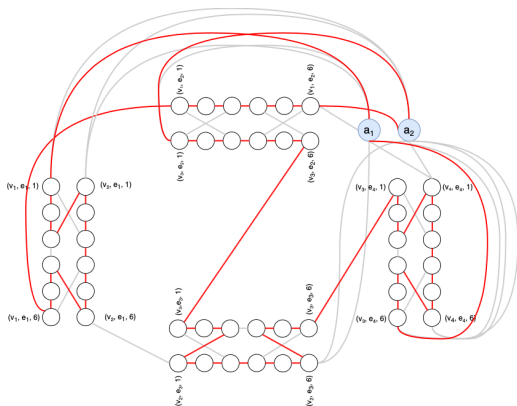
Elegimos los nodos de los cover-testing que pertenecen a V^*



Ejemplo

Determinamos el circuito hamiltoniano a partir de $V^* = \{v_1, v_3\}$:

Elegimos **las conexiones** entre cover-testing y con los selectores.





Michael Garey, David S. Johnson.

Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.

W. H. Freeman and Company, 1979.



Richard M. Karp.

Reducibility Among Combinatorial Problems.

Complexity of Computer Computations, pp:85-103, 1972.

¿Preguntas?

Carlos Domínguez García: alu0100966589@ull.edu.es

Daute Rodríguez Rodríguez: alu0100973914@ull.edu.es

Alberto Jesús González Álvarez: alu0100949568@ull.edu.es

Cristian Manuel Abrante Dorta: alu0100945850@ull.edu.es