Seis problemas básicos $\mathcal{NP}$-completos

Antonio Chávez López

Francisco J. Mendoza Álvarez

Alien Embarec Riadi

13 de noviembre de 2019

Capítulo 1

PARTITION

1.1. Problemas involucrados

3-DIMENSIONAL MATCHING (3DM)

ENTRADA: Sea el conjunto T y un entero k
PREGUNTA: ¿Existe un emparejamiento tridimensional M ⊆ T con |M| ≥ k?

1.2. Demostración de NP-completitud

Teorema 1. *Partition (PARTITION) es $\mathcal{NP}$-completo.*

Demostración. Este problema es particularmente útil para comprobar la NP-completitud de problemas que implican parámetros numéricos, tales como longitudes, pesos, costes, capacidades, etc. Es fácil comprobar que PARTITION $\in \mathcal{NP}$, dado que un algoritmo nodeterminista necesita solo un subconjunto A' de A y comprobar en tiempo polinomial que la suma de los tamaños de los elementos en A' es la misma que para los elementos $A - A'$

Transformaremos 3DM en PARTITION. Sean los conjuntos W, X, Y, con $\mid W \mid = \mid X \mid = \mid Y \mid = q$, y $M \subseteq W \times X \times Y$ una instancia arbitraria del 3DM. Los elementos de esos conjuntos serán denotados por:

$W = \{w_1, w_2, \dots, w_q\}$
$X = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$
$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$
y
$M = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$

donde $k = \mid M \mid$. Debemos construir un conjunto A, y un tamaño $s(a) \in Z^+$ para cada $a \in A$, tal que A contiene un subconjunto A' que satisface

$$\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A - A'} s(a)$$

sí y sólo sí M contiene un emparejamiento.

El conjunto A debe contener un total de $k+2$ elementos y será construido en dos pasos. Los primeros k elementos de A son $a_i : 1 \leq i \leq k$, donde el elemento a_i esta asociado con una tripleta $m_i \in M$. El tamaño "size"$s(a_i)$ de a_i será especificado dando su representación binaria, en términos de una cadena de 0's y 1's dividida en 3q "zonas"de $p = \lg(k+1)$ bits cada una. Cada una de esas zonas está etiquetada por un elemento de $W \cup X \cup Y$ como se muestra en la siguiente figura:

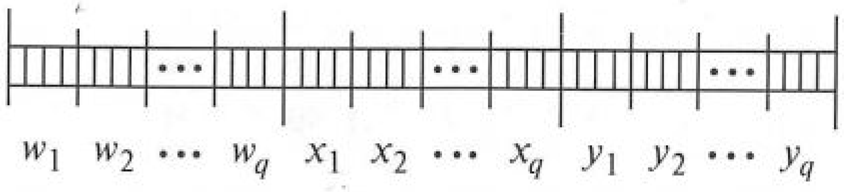

Figura 1.1: Etiquetado de las 3q zonas, cada una contiene $p = \lg(k+1)$ bits de representación binaria para $s(a)$, usada para transformar 3dm en PARTITION.

La representación para $s(a)$ depende de la correspondiente tripleta $m_i = (w_{f(i)}, x_{g(i)}, y_{h(i)}) \in M$) (donde f, g y h son solo funciones que dan los subíndices del primer, segundo y tercer componente para cada m_i).

Tiene un 1 en la posición del extremo derecho de las zonas etiquetadas por $w_{f(i)}, x_{g(i)}$ y $y_{h(i)}$ y 0's en el resto. Alternativamente, podemos escribir:

$$s(a) = 2^{p(3q-f(i))} + 2^{p(2q-g(i))} + 2^{p(q-h(i))}$$

Dado que cada $s(a_i)$ puede ser representado como un número binario con no más de *3pq* bits, esta claro que $s(a_i)$ puede ser construido desde la instancia 3DM en tiempo polinomial.

Lo importante es observar en esta parte de la construcción es que, si sumamos todas las entradas de cada zonas, para todos los elementos $a_i : i \leq k$, el total nunca superará $k = 2^p - 1$. Por lo tanto, al sumar $\sum_{a \in A'} s(a)$ para cada subconjunto $A' \subseteq \{a_i : i \leq k\}$ satisfacerá

$$\sum_{a \in A'} s(a) = B$$

sí y sólo sí $M' = \{m_i : a_i \in A'\}$ es un emparejamiento para M.

El paso final de la construcción especifica los dos últimos elementos de A. Estos son denotados por b_1 y b_2 y tienen tamaños definidos por

$$s(b_1) = 2\Big[\sum_{i=1}^{k} s(a_i)\Big] - B$$

y

$$s(b_1) = 2\Big[\sum_{i=1}^{k} s(a_i)\Big] + B$$

Ambas pueden ser representadas en binario con no más de $(3pq + 1)$ bits y así pueden ser construidas en tiempo polinomial en el tamaño de la instancia dada del problema 3DM.

Ahora supon que tenemos un subconjunto $A' \subseteq A$ tal que

$$\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A - A'} s(a)$$

Entonces ambas de estas sumas serán igual a $2 \sum_{i=1}^{k} s(a_i)$, y uno de los dos conjuntos, A' o A-A', contiene b_1 pero no b_2. El elemento restante del conjunto formado por el subconjunto de $a_i : i \leq k$ cuyos tamaños suman B, y por lo tanto, por nuestros comentarios anteriores, este subconjunto corresponde al emparejamiento M' y M. Al contrario, si $M' \subseteq M$ es un emparejamiento, entonces el conjunto $\{b_1\} \cup \{a_i : m_i \in M'\}$ forma el deseado conjunto A' para la instancia de PARTITION.

Por lo tanto, $3DM \alpha PARTITION$, y se prueba así la $\mathcal{NP}$-completitud.

$\square$