PARTITION

Seis problemas básicos $\mathcal{NP}$-completos

Universidad de La Laguna

Curso 2016/2017

Problemas involucrados

3-DIMENSIONAL MATCHING (3DM)

ENTRADA: Sea el conjunto T y un entero k.
PREGUNTA: ¿Existe un emparejamiento tridimensional $M \subseteq T$ con $|M| \geq k$?

Partition es NP-completo I

Partition $\in \mathcal{NP}$

Es fácil comprobar que Partition (PARTITION) $\in \mathcal{NP}$, ya que se puede encontrar una algoritmo para una Máquina de Turing No Determinista (NDTM) que reconozca el lenguaje $L(\text{part}, e)$, para un esquema de codificación e, en un número de pasos acotado por una función polinomial.

Partition es NP-completo II

Partition $\in \mathcal{NP}$

Sólo necesita un subconjunto A' de A y comprobar que la suma de los tamaños de los elementos en A' es la misma que para los elementos de A-A'.

Transformaremos $3DM \rightarrow PARTITION$

Partition es NP-completo III

Partition α 3DM

Sean los conjuntos W, X, Y tal que $\mid W \mid = \mid X \mid = \mid Y \mid = q$

Y además que cumpla $M \subseteq W x X x Y$ como una instancia arbitraria del 3DM, donde $k = \mid M \mid$

Construimos un conjunto A con tamaña $s(a) \in Z^+$ para cada $a \in A$ de forma que A contiene un subconjunto A' que satisface

$$\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A - A'} s(a)$$

Partition es NP-completo IV

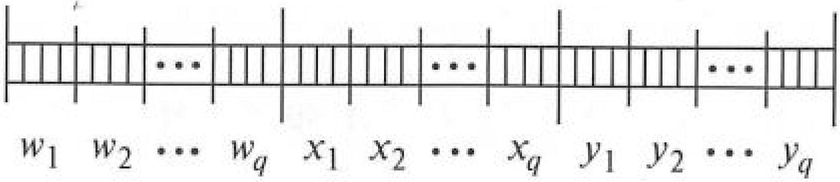
Partition α 3DM

El conjunto A debe contener un total de $k+2$ elementos y será construido en dos pasos. Los primeros *k* elementos de A son $a_i : 1 \leq i \leq k$, donde el elemento a_i esta asociado con una tripleta $m_i \in M$.

El tamaño $s(a_i)$ de a_i será especificado dando su representación binaria, en términos de una cadena de 0's y 1's dividida en 3q "zonas" de $p = \lg(k+1)$ bits cada una

Partition es NP-completo V

Partition α 3DM



Partition es NP-completo VI

Partition α 3DM

Dado que cada $s(a_i)$ puede ser representado como un número binario con no más de *3pq* bits, esta claro que $s(a_i)$ puede ser construido desde la instancia 3DM en tiempo polinomial.

Lo importante es observar en esta parte de la construcción es que, si sumamos todas las entradas de cada zonas, para todos los elementos $a_i : i \leq k$, el total nunca superará $k = 2^p - 1$.

Partition es NP-completo VII

Partition α 3DMT

Por lo tanto, al sumar $\sum_{a \in A'} s(a)$ para cada subconjunto $A' \subseteq \{a_i : i \leq k\}$ satisfará

$$\sum_{a \in A'} s(a) = B$$

Sí y sólo sí $M' = \{m_i : a_i \in A'\}$ es un emparejamiento para M.

Partition es NP-completo VIII

Partition α 3DM

El paso final de la construcción denota los dos últimos elementos de A como b_1 y b_2 con tamaño:

$$s(b_1) = 2\Big[\sum_{i=1}^{k} s(a_i)\Big] - B$$

$$s(b_1) = 2\Big[\sum_{i=1}^{k} s(a_i)\Big] + B$$

Partition es NP-completo IX

Partition α 3DM

Representadas en binario con no más de $3pq + 1$ bits $\rightarrow$ construidas así en tiempo polinomial en el tamaño de la instancia dada del problema 3DM.

Partition es NP-completo X

Partition α 3DM

Si suponemos un subconjunto $A' \subseteq A$ tal que

$$\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A - A'} s(a)$$

$2\sum_{i=1}^{k} s(a_i)$, y uno de los dos conjuntos, A' o A-A', contiene b_1 pero no b_2.

Partition es NP-completo XI

Partition α 3DM

Al contrario, si $M' \subseteq M$ es un emparejamiento, entonces el conjunto $\{b_1\} \cup \{a_i : m_i \in M'\}$ forma el deseado conjunto A' para la instancia de PARTITION.

Por lo tanto, $PARTITION \alpha 3DM$, y se prueba así la $\mathcal{NP}$-completitud.