3-SATISFACTIBILIDAD

Seis problemas básicos $\mathcal{NP}$-completos

Adrián Rodríguez Bazaga, Eleazar Díaz Delgado

Rudolf Cicko

Complejidad Computacional, Grado en Ingeniería Informática
Universidad de La Laguna
Curso 2016-2017

Problemas involucrados

SATISFACTIBILIDAD (SAT)

ENTRADA: Un conjunto de cláusulas $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ sobre un conjunto finito U de variables.
PREGUNTA: ¿Existe una asignación booleana para U, tal que satisfaga todas las cláusulas de C?

3-SATISFACTIBILIDAD (3SAT)

ENTRADA: Un conjunto de cláusulas $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ sobre un conjunto finito U de variables tal que $|c_i| = 3$, para $1 \leq i \leq m$.
PREGUNTA: ¿Existe una asignación booleana para U, tal que satisfaga todas las cláusulas de C?

3SAT es NP-completo I

3SAT $\in \mathcal{NP}$

Es fácil comprobar que 3SAT $\in \mathcal{NP}$, ya que se puede encontrar una algoritmo para una Máquina de Turing No Determinista (NDTM) que reconozca el lenguaje $L(\text{3SAT}, e)$, para un esquema de codificación e, en un número de pasos acotado por una función polinomial.

3SAT es NP-completo II

SAT $\preceq$ 3SAT

Sea $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ y $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ una entrada arbitraria de SAT. Construiremos una conjunto C' de cláusulas de tres literales, basadas en un conjunto U' de variables, tal que C' es satisfactible $\Leftrightarrow$ C es satisfactible.

3SAT es NP-completo III

SAT $\preceq$ 3SAT

$$U' = U \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} U'_j \right)$$

$$C' = \bigcup_{j=1}^{m} C_j.$$

3SAT es NP-completo IV

SAT $\preceq$ 3SAT

Supóngase que la cláusula c_j viene definida por los literales $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$, donde cada uno de estos elementos deriva de las variables de U. La forma en que construimos los conjuntos C'_j y U'_j va a depender del valor de k.

Caso 1. $k = 1$. $U'_j = \{y_j^1, y_j^2\}$

$$C'_j = \{\{z_1, y_j^1, y_j^2\}, \{z_1, \bar{y}_j^1, y_j^2\}, \{z_1, y_j^1, \bar{y}_j^2\}, \{z_1, \bar{y}_j^1, \bar{y}_j^2\}\}$$

3SAT es NP-completo IV

SAT $\preceq$ 3SAT

Supóngase que la cláusula c_j viene definida por los literales $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$, donde cada uno de estos elementos deriva de las variables de U. La forma en que construimos los conjuntos C'_j y U'_j va a depender del valor de k.

Caso 2. $k = 2$.

$$U'_j = \{y_j^1\}$$

$$C'_j = \{\{z_1, z_2, y_j^1\}, \{z_1, z_2, \bar{y}_j^1\}\}$$

3SAT es NP-completo IV

SAT $\preceq$ 3SAT

Supóngase que la cláusula c_j viene definida por los literales $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$, donde cada uno de estos elementos deriva de las variables de U. La forma en que construimos los conjuntos C'_j y U'_j va a depender del valor de k.

Caso 3. $\quad k = 3. \quad U'_j = \emptyset$

$$C'_j = \{c_j\}$$

3SAT es NP-completo IV

SAT $\preceq$ 3SAT

Supóngase que la cláusula c_j viene definida por los literales $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$, donde cada uno de estos elementos deriva de las variables de U. La forma en que construimos los conjuntos C'_j y U'_j va a depender del valor de k.

Caso 4. $k = 4$.

$$U'_j = \{y^i_j | 1 \leq i \leq k-3\}$$

$$C'_j = \{z_1, z_2, y^1_j\} \cup \{\{\bar{y}^i_j, z_{i+2}, y^{i+1}_j\} | 1 \leq i \leq k-4\} \cup \{\bar{y}^{k-3}_j, z_{k-1}, z_k\}$$

3SAT es NP-completo V

SAT $\preceq$ 3SAT

Tenemos que demostrar que el conjunto de cláusulas C' es satisfactible si y sólo si el conjunto C lo es.

- Supóngase primero que $t : U \rightarrow \{T, F\}$ es una asignación booleana que satisface C.
- Veremos a continuación que t puede ser extendida a una asignación booleana $t' : U' \rightarrow \{T, F\}$ satisfaciendo C'.
- Puesto que las variables $U' - U$ están particionadas en conjuntos U'_j, y puesto que las variables de cada conjunto U'_j sólo aparecen en las cláusulas C'_j, debemos demostrar cómo t puede extenderse para cada conjunto U'_j de forma independiente, en cada caso sólo tenemos que verificar que las cláusulas de C'_j son satisfechas.

3SAT es NP-completo VI

SAT $\preceq$ 3SAT

Caso 1. $k = 1.$ $U'_j = \{y_j^1, y_j^2\}$

$$C'_j = \{\{z_1, y_j^1, y_j^2\}, \{z_1, \bar{y}_j^1, y_j^2\}, \{z_1, y_j^1, \bar{y}_j^2\}, \{z_1, \bar{y}_j^1, \bar{y}_j^2\}\}$$

Caso 2. $k = 2.$ $U'_j = \{y_j^1\}$

$$C'_j = \{\{z_1, z_2, y_j^1\}, \{z_1, z_2, \bar{y}_j^1\}\}$$

- Si se ha construido U'_j sobre los casos 1 o 2, entonces las cláusulas de C'_j ya son satisfechas por t, de manera que podemos extender arbitrariamente a U'_j, por ejemplo, asignando $t'(y) = T$, para todo $y \in U'_j$.

3SAT es NP-completo VI

SAT $\preceq$ 3SAT

Caso 3. $k = 3.$ $U'_j = \emptyset$

$$C'_j = \{c_j\}$$

- Si U' se ha construido sobre el caso 3 U'_j es vacío, y por tanto, toda cláusula de C' ya está satisfecha por t.

3SAT es NP-completo VI

SAT $\preceq$ 3SAT

Caso 4. $k = 4$. $U'_j = \{y^i_j | 1 \leq i \leq k-3\}$

$$C'_j = \{z_1, z_2, y^1_j\} \cup \{\{\bar{y}^i_j, z_{i+2}, y^{i+1}_j\} \, | 1 \leq i \leq k-4\} \cup \{\bar{y}^{k-3}_j, z_{k-1}, z_k\}$$

- Si se ha construido sobre el caso 4 la cláusula $c_j = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$, con $k > 3$. Como t es una asignación booleana que satisface C, entonces debe haber un entero l tal que el literal z_l tiene un valor verdadero mediante t.
  - Si l es 1 o 2, entonces se asignará $t'(y^i_j) = F$ para $1 \leq i \leq k-3$.
  - Si l es $k-1$ o k, entonces se asignará $t'(y^i_j) = T$ para $1 \leq i \leq k-3$.
  - En cualquier otro caso, se asignará $t'(y^i_j) = T$ para $1 \leq i \leq l-2$, y $t'(y^i_j) = F$ para $l-1 \leq i \leq k-3$.

Conclusión: 3SAT es NP-completo

Conclusión: SAT $\preceq$ 3SAT

- Todo lo anterior no constituye una prueba de NP-completitud, a no ser que argumentemos que el tamaño del nuevo problema 3SAT está acotado polinómicamente por el tamaño del antiguo problema SAT.

  Si consideramos cada caso:

Tamaño de cláusula	**# nuevos literales**	**# antes**	**# después**
1	2	1	12
2	1	2	6
3	0	3	3
k >= 4	k-3	k	k + 2(k-3)

Conclusión: 3SAT es NP-completo

3SAT está acotado polinómicamente por SAT

- En todos los casos, el tamaño del problema después de ser transformado es a lo sumo 12 veces más grande que el tamaño del problema original.