Seis problemas básicos $\mathcal{NP}$-completos

Ángel David Martín Rodríguez, Víctor David Mayorca Luis, and Jesús Eduardo Plasencia Pimentel

Grado en Ingeniería Informática. Universidad de La Laguna

21 de diciembre de 2016

Capítulo 1

VERTEX COVER

1.1. Problemas involucrados

3-SATISFACTIBILIDAD (3SAT)

ENTRADA: Un conjunto de cláusulas $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ sobre un conjunto finito U de variables tal que $|c_i| = 3$, para $1 \leq i \leq m$.
PREGUNTA: ¿Existe una asignación booleana para U, tal que satisfaga todas las cláusulas de C?

VERTEX COVER (VC)

ENTRADA: Un grafo $G = (V, E)$ y un entero positivo $K < |V|$.
PREGUNTA: ¿Existe un recubrimiento de vértices de tamaño K o menos para G, esto es, un subcojunto $V' \subseteq V$ tal que $|V'| \leq K$ y, por cada eje $\{u, v\} \in E$, al menos uno de u y v pertenezcan a V?

1.2. Demostración de NP-completitud

Teorema 1. *VC es $\mathcal{NP}$-completo.*

Demostración. Es fácil comprobar que VC $\in \mathcal{NP}$, ya que se puede encontrar una algoritmo para una Máquina de Turing No Determinista (NDTM) que reconozca el lenguaje $L(\text{VC}, e)$, para un esquema de codificación e, en un número de pasos acotado por una función polinomial.

Sea $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ y $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ una instancia de 3SAT. Debemos construir un grafo $G = (V, E)$ y un entero positivo $K \leq |V|$ tal que G posee un recubrimiento de vertices de tamaño K o menos si y solo si C es satisfactible.

Para cada variable $u_i \in U$ hay un componente asignador $T_i = (V_i, E_i)$ con $V_i = \{u_i, \bar{u}_i\}$ y $E_i = \{\{u_i, \bar{u}_i\}\}$, esto es, dos vertices unidos por un solo eje. Se debe notar que cualquier recubrimiento de vértices debe de contener por lo menos uno de u_i o $\bar{u}_i$ a manera de recubrir el único eje en E_i.

Para cada cláusula $c_j \in C$ hay un componente de prueba de satisfacción $S_j = (V'_J, E'_j)$, que consiste de tres nodos y tres aristas que unen los nodos a manera de triángulo.

$$V'_j = \{a_1[j], a_2[j], a_3[j]\}$$

$$E'_j = \{\{a_1[j], a_2[j]\}, \{a_1[j], a_3[j]\}, \{a_2[j], a_3[j]\}\}$$

Se debe notar que cualquier recubrimiento de vértices debe contener como mínimo dos v'ertices de V'_j de manera de cubrir todos las aristas en E'_j.

La única parte de la construcción que depende de qué literales aparecen en que cláusulas en las colección de aristas de comunicación. Para cada cláusula $c_j \in C$ sean los tres literales en c_j denotados como x_j, y_j y z_j. Entonces los ejes de comunicación que parten de S_j están dados por:

$$E''_j = \{\{a_1[j], x_j\}, \{a_2[j], y_j\}, \{a_3[j], z_j\}\}$$

La construcción de nuestra instancia de VC se completa fijando $K = n+2m$ y $G = (V, E)$ donde

$$V = (\bigcup_{i=1}^{n} V_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} V'_j)$$

y

$$E = (\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} E'_j) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} E''_j)$$

Es trivial ver como la construcción es posible de ser realizada en tiempo polinomial. Solo resta demostrar que C es satisfactible si y solo si G posee un recubrimiento de vértices de como mucho tamaño K.

Primero, supongamos que $V' \subseteq V$ es un recubrimiento de vértices para G con $|V'| \leq K$. Basado en lo dicho anteriormente V' debe contener al menos un vértice de cada T_i y al menos dos vértices de cada S_j. Podemos entonces utilizar la manera en la que V' intersacta cada componente de asignación para obtener una asignación boolena $t : U \to \{T, F\}$. Simplemente fijamos $t(u_i) = T$ si $u_i \in V'$ y $t(u_i) = F$ si $\bar{u}_i \in V'$

Para ver que esta asignación booleana satisface cada una de las cláusulas $c_j \in C$, considera los tres ejes en E''_j. Solo dos de estos ejes pueden ser cubiertos con vértices de $V'_j \cap V'$, así que al menos uno de ellos debe estar cubierto por un vértices de algún V_i que pertenece a V'. Pero esto implica que el literal correspondiente, ya sea u_i o $\bar{u}_i$, de la cláusula c_j es verdadero bajo la asignación boolena t y por lo tanto la cláusula c_j es satisfactible por t. Debido a que esto es cierto por cada $c_j \in C$, sigue que t es una asignación satisfactoria para C.

supongamos que $t : U \to T, F$ es una asignación satisfactoria para C. El recubrimiento de vértices correspondiente V' incluye un vértice de cada T_i y dos vértices de cada S_j. El vértice de T_i en V' es u_i si $t(u_i) = T$ y es $\bar{u}_i$ si $t(u_i) = F$. Esto asegura que al menos uno de los tres ejes de cada conjunto E''_j esté cubierto, puesto que t satisface cada cláusula c_j. Por lo tanto necesitamos solo incluir en V' los puntos finales de S_j de los otros dos vértics en E''_j (el cual puede o no estar cubierto por otros vértices de los componentes de asignación) y esto nos da el recubrimiento de vértices deseado. $\square$